

# Bulletin of the Australian Mathematical Society

<http://journals.cambridge.org/BAZ>

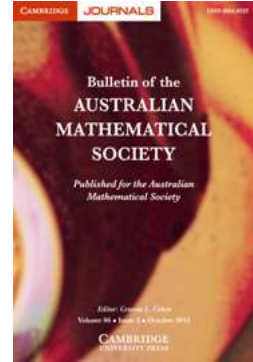
Additional services for *Bulletin of the Australian Mathematical Society*:

Email alerts: [Click here](#)

Subscriptions: [Click here](#)

Commercial reprints: [Click here](#)

Terms of use : [Click here](#)



---

## G-Fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières II

Cristiana Bertolin

Bulletin of the Australian Mathematical Society / Volume 58 / Issue 02 / October 1998, pp 189 - 198  
DOI: 10.1017/S0004972700032160, Published online: 17 April 2009

**Link to this article:** [http://journals.cambridge.org/abstract\\_S0004972700032160](http://journals.cambridge.org/abstract_S0004972700032160)

### How to cite this article:

Cristiana Bertolin (1998). G-Fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières II. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 58, pp 189-198 doi:10.1017/S0004972700032160

**Request Permissions :** [Click here](#)

## G-FONCTIONS ET COHOMOLOGIE DES HYPERSURFACES SINGULIÈRES II

CRISTIANA BERTOLIN

Following Dwork's indications, in this work we give a further elaboration and a list of corrections for the article "G-fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières". Moreover we extend the contents of that work to quasi-homogeneous polynomials.

### INTRODUCTION

Soit  $f$  un polynôme homogène en les variables  $x_1, \dots, x_{n+1}$  et à coefficients dans un corps de nombres,  $K$ . Dans [3] Dwork définit les modules exponentielles  $\mathcal{K}^{(l)}$  associés à  $f$  et il démontre que si  $K$  est un corps de nombres alors pour presque tous les premiers  $p$  de  $K$ , l'action du Frobenius sur  $\mathcal{K}^{(l)}$  est liée à la fonction Zêta de l'hypersurface définie par la réduction mod  $p$  de  $f$ . Cette théorie est intéressante dans le cas où  $f = 0$  a des singularités.

Dans [1] on étudie  $\mathcal{K}^{(l)}$  en tant que module différentiel dans le cas où  $K$  est le corps des fonctions rationnelles en une seule variable sur un corps de nombres. On démontre que  $\mathcal{K}^{(l)}$  est un module de type  $G$  et on explicite une majoration effective de son rayon globale,  $\rho(\mathcal{K}^{(l)})$ , qui ne dépend pas de " $l$ ", mais seulement du polynôme  $f$  (voir [1, Théorème 4.2, Remarque 4.3]).

Suivant les indications de Dwork, dans ce travail on va apporter des approfondissements et des corrections à l'article [1]. Plus précisément, dans la première section on explique le contenu de [1]. Dans la deuxième on démontre en utilisant les résultats de [1], que même dans le cas où  $f$  est un polynôme quasi homogène le module différentiel  $\mathcal{K}^{(l)}$ , qui lui est associé, est un module de type  $G$ . Enfin dans la troisième section on donne une liste de corrections de [1].

L'auteur est reconnaissante à Dwork pour les idées, l'aide et les conseils qu'il n'a jamais cessé de lui fournir.

### 0. TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

On utilise les notations de [1] (voir en particulier [1, Section 0]).

---

Received 15th December, 1997

Copyright Clearance Centre, Inc. Serial-fee code: 0004-9729/98 \$A2.00+0.00.

## 1. EXPLICATION DE L'ARTICLE [1]

1.1. D'après [3] le complexe de Koszul des opérateurs  $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$  agissant sur  $R^*$ , fournit des espaces de cohomologie de dimension finie. Cependant il se peut très bien que l'action du Frobenius ne soit pas définie sur ces espaces.

Puisqu'il existe une application naturelle  $\mathcal{K}^{(l)} \hookrightarrow \mathcal{K}^{(l+1)}$ , on peut définir  $\mathcal{K}^{(\infty)}$  comme étant l'espace limite. On a

$$\mathcal{K}^{(\infty)} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{K}^{(l+1)} \supseteq \mathcal{K}^{(l)} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{K}^{(1)}.$$

Si les coefficients de  $f$  sont indépendants de  $\lambda$ , c'est-à-dire s'ils appartiennent à  $K$ , alors  $\mathcal{K}^{(\infty)}$  est contenu dans  $L^*(\varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour presque toutes les valuations de  $K$ . Le complexe de Koszul des opérateurs  $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$  agissant cette fois sur  $\mathcal{K}^{(\infty)}$ , fournit encore des espaces de cohomologie de dimension finie et pour presque tout premier  $p$  de  $K$ , la fonction Zêta de la variété torique définie par la réduction mod  $p$  de  $f(x) = 0, x_1, \dots, x_{n+1} \neq 0$ , est calculée dans [3, Théorème 20.2], grâce à l'action du Frobenius sur ces espaces de cohomologie.

1.2. Dans [1] les coefficients du polynôme  $f$  appartiennent à  $K(\lambda)$ , c'est-à-dire ils dépendent de  $\lambda$ . Il semble raisonnable de croire que le complexe de Koszul des opérateurs  $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$  construits avec ce nouveau  $f$  et agissant sur  $\mathcal{K}^{(\infty)}$ , fournisse encore des espaces de cohomologie de dimension finie. Dans [1, Théorème 4.2, Remarque 4.3] on calcule une majoration explicite de  $\rho(\mathcal{K}^{(l)})$ , qui est indépendante de " $l$ ". Mais alors non seulement le module différentiel  $\mathcal{K}^{(l)}$  a un rayon global fini pour chaque  $l \geq 1$ , mais aussi  $\mathcal{K}^{(\infty)}$ , qui est un module "différentiel" sur  $K(\lambda)$  de dimension infinie, a un rayon globale fini, c'est-à-dire  $\rho(\mathcal{K}^{(\infty)}) < +\infty$ .

On est donc amené à croire que le module de dimension infinie,  $\mathcal{K}^{(\infty)}$ , se comporte comme un module de dimension finie  $\mathcal{K}^{(l)}$  pour  $l$  assez grand. En particulier le complexe de Koszul des opérateurs  $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$  agissant sur  $\mathcal{K}^{(\infty)}$ , pourrait être déterminé par celui des opérateurs  $\{D_{1,f}^*, \dots, D_{n+1,f}^*\}$  agissant sur  $\mathcal{K}^{(l)}$  pour  $l$  assez grand. Ainsi on pourrait avoir des informations sur la fonction Zêta de la variété définie par la réduction mod  $p$  de  $f(x) = 0, x_1, \dots, x_{n+1} \neq 0$ , à partir d'un espace de dimension finie.

## 2. THÉORIE DES FORMES QUASI HOMOGENES

2.1. Soit  $\tilde{R} = K(\lambda)[X_1, \dots, X_{n+1}]$ . Rappelons qu'un polynôme  $g(X) \in \tilde{R}$  est un *polynôme quasi homogène* sur  $K(\lambda)$  s'il existe un  $(n+1)$ -uplet  $(d_1, \dots, d_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$  tel que  $g(X_1^{d_1}, \dots, X_{n+1}^{d_{n+1}})$  soit un polynôme homogène.

**THÉORÈME 2.2.** Soit  $g(X)$  un polynôme quasi homogène sur  $K(\lambda)$ . Alors pour chaque  $l \in \mathbb{N} - \{0\}$ , le module

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \widetilde{R} / \sum_{|\nu|=l} D_g^\nu \widetilde{R}$$

muni de la connection  $\sigma_{\lambda,g} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda}$ , est un module de type  $G$ .

PREUVE: Par définition de  $g(X)$ , il existe  $(d_1, \dots, d_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$  tel que  $g(X_1^{d_1}, \dots, X_{n+1}^{d_{n+1}})$  soit un polynôme homogène de degré noté  $d$ .

Soient  $f(X) = g(X_1^{d_1}, \dots, X_{n+1}^{d_{n+1}})$  et  $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)} = \widetilde{R} / \sum_{|\nu|=l} D_f^\nu \widetilde{R}$ . Puisque  $f(X) \in R_1$ , on

peut utiliser les arguments de [1] pour démontrer que pour chaque  $l \geq 1$ ,  $\mathcal{W}_f^{(l)}$  muni de la connection  $\sigma_{\lambda,f} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ , est un module de type  $G$ .

Maintenant pour chaque  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$  tel que  $0 \leq \alpha_i < d_i$  pour  $i = 1, \dots, n+1$ , soit  $\widetilde{R}(\vec{\alpha})$  l'espace sur  $K(\lambda)$  engendré par  $X^u$ , où  $u \in \mathbb{N}^{n+1}$  et  $u_i \equiv \alpha_i \pmod{d_i}$  pour  $i = 1, \dots, n+1$ .

Puisque  $\widetilde{R}(\vec{\alpha})$  est stable sous  $\sigma_{\lambda,f}$  et  $D_{i,f}$  pour  $i = 1, \dots, n+1$ , on peut définir

$$\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha}) = \widetilde{R}(\vec{\alpha}) / \sum_{|\nu|=l} D_f^\nu \widetilde{R}(\vec{\alpha}).$$

On observe que  $\widetilde{R} = \bigoplus_{\vec{\alpha}} \widetilde{R}(\vec{\alpha})$  et donc

$$\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)} = \bigoplus_{\vec{\alpha}} \widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha}).$$

Mais alors, puisque pour chaque  $l \geq 1$ ,  $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}$  est un module de type  $G$ , on trouve que pour chaque  $\vec{\alpha}$  et chaque  $l \geq 1$ ,  $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha})$  est un module de type  $G$ .

Considérons maintenant l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \theta : \widetilde{R} &\longrightarrow \widetilde{R}^{(0)} \\ X^u &\longmapsto X_1^{u_1 d_1} \dots X_{n+1}^{u_{n+1} d_{n+1}}. \end{aligned}$$

Il est évident que  $\theta g = f$  et que  $\theta \circ \sigma_g = \sigma_f \circ \theta$ . Puisque  $(1/d_i)E_i \circ \theta = \theta \circ E_i$  on a aussi que  $d_i \theta \circ D_{i,g} = D_{i,f} \circ \theta$  pour  $i = 1, \dots, n+1$ . Donc cet isomorphisme passe au quotient et on obtient que  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$  est isomorphe au module de type  $G$   $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(0)$ . Par conséquent on peut conclure que  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$  est un module de type  $G$  pour chaque  $l \geq 1$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2.3.** Soient  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tels que  $n_1 + n_2 = n$ . De plus soit

$$g(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n_2} X_{n_1+1+j} h^{(j)}(X_1, \dots, X_{n_1+1})$$

où pour  $j = 1, \dots, n_2$ ,  $h^{(j)}(X_1, \dots, X_{n_1+1})$  est un polynôme homogène sur  $K(\lambda)$  de degré  $\mu_j$  en les  $n_1 + 1$  variables  $X_1, \dots, X_{n_1+1}$ .

Alors pour chaque  $l \in \mathbb{N} - \{0\}$ , le module

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \widetilde{R} / \sum_{|v|=l} D_g^v \widetilde{R}$$

muni de la connection  $\sigma_{\lambda,g} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda}$ , est un module de type  $G$ .

PREUVE: Conséquence immédiate du Théorème 2.2 car  $g(X)$  est un polynôme quasi homogène. En effet il suffit de considérer le  $(n + 1)$ -uplet  $(1, \dots, 1, d - \mu_1, \dots, d - \mu_{n_2})$ , où  $d = \max_{1 \leq j \leq n_2} \mu_j$ , pour le rendre homogène.  $\square$

2.4. Soit  $g(X)$  un polynôme comme dans 2.3 et posons  $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{n_2}) \in \mathbb{N}^{n_2}$ . Pour chaque  $\beta \in \mathbb{N}$ , soit  $\widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$  l'espace sur  $K(\lambda)$  engendré par  $X^u$ , où  $u \in \mathbb{N}^{n+1}$  et  $\sum_{i=1}^{n_1+1} u_i = \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j u_{n_1+1+j} + \beta$ .

Puisque  $\widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$  est stable sous  $\sigma_{\lambda,g}$  et  $D_{i,g}$  pour  $i = 1, \dots, n + 1$ , on peut définir

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) = \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta) / \sum_{|v|=l} D_g^v \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta).$$

**COROLLAIRE 2.5.** Soit  $\beta$  tel que  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta)$  soit non nul. Alors pour chaque  $l \in \mathbb{N} - \{0\}$ , le module  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta)$  muni de la connection  $\sigma_{\lambda,g} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda}$ , est un module de type  $G$ . En particulier  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, 0)$  est un module de type  $G$ .

PREUVE: On observe que  $\widetilde{R} = \bigoplus_{\beta} \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$  et donc

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \bigoplus_{\beta} \widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta).$$

On a alors  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) = 0$  pour presque tout  $\beta$  et lorsque  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) \neq 0$  c'est un module de type  $G$ , puisque d'après 2.3  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$  l'est.  $\square$

2.6. Remarque: une version un peu modifiée de  $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(1)}(\vec{\mu}, 0)$  est le sujet du livre [4].

## 3. ERRATA CORRIGE DE L'ARTICLE [1]

p.358, (2.2.2):  $g(X) = (X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2) + \dots + (X_{n-1}^2 + X_{n-1}X_n + X_n^2) + X_{n+1}^2$ .

p.359, (1.4.3):  $\overline{N} = \binom{n+1}{n+1}N$  (il y a une erreur dans [3, Section 4]).

p.359, 1.17:  $\left\{ \sum_{u \in \mathcal{F}'} B_u(1/X^u) \mid B_u \in \Omega_0 \right\}$  où  $\mathcal{F}' \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{u \in \mathbb{N}^{n+1} \mid u_1 + \dots + u_{n+1} \equiv 0 \pmod{d}\}$ .

p.360, 1.4: ... on doit substituer à l'ensemble  $\mathcal{F}' \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{u \in \mathbb{N}^{n+1} \mid u_1 + \dots + u_{n+1} \equiv 0 \pmod{d}\}$ , l'ensemble: ...

p.362, 1.7:  $D_{A,i,\infty}^* : L^*(b) \rightarrow L^*(b)$ .

p.362, 1.27:  $1/(p-1) < b \leq p/(p-1)$ .

p.363, 1.3: Dans notre contexte on ne peut pas utiliser [2, Lemme 3.10] car il utilise la compacité. Nous allons donc donner une autre démonstration de ce lemme.

**LEMME 3.1.** Soient  $c, b, e \in \mathbb{R}$  tels que  $1/(p-1) < b \leq p/(p-1)$  et  $e = b - 1/(p-1)$ . Indiquons par  $S$  soit un sous ensemble propre de  $\{1, \dots, n+1\}$  soit  $\{0, \dots, n\}$ . De plus soient  $\{\xi_i\}_{i \in S}$  des éléments de  $L(b, c)$  tels que  $\sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i = 0$ .

Alors il existe des éléments  $\{\eta_{i,j}\}_{i,j \in S}$  de  $L(b, c+e)$ , avec  $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$  et  $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$ , tels que

$$\xi_i = \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty} \eta_{i,j} \quad \forall i \in S.$$

**PREUVE:** Pour chaque  $r \geq 0$ , on va construire par récurrence une famille  $\{\xi_i^{(r)}\}_{i \in S}$  d'éléments de  $L(b, c+re)$  tels que  $\sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i^{(r)} = 0$ . Pour  $r = 0$  posons  $\xi_i^{(0)} = \xi_i \quad \forall i \in S$ . Supposons maintenant que la famille  $\{\xi_i^{(r)}\}_{i \in S}$  existe. Puisque  $\sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i^{(r)} = 0$  on a  $\sum_{i \in S} F_i \xi_i^{(r)} = -\sum_{i \in S} E_i \xi_i^{(r)} \in L(b, c+re)$ . Grâce à [2, Lemme 3.8], on sait alors qu'il existe des éléments  $\{\eta_i^{(r)}\}_{i \in S}$  de  $L(b, c+(r+1)e)$  et des éléments  $\{\eta_{i,j}^{(r)}\}_{i,j \in S}$  de  $L(b, c+(r+1)e)$ , avec  $\eta_{i,j}^{(r)} = -\eta_{j,i}^{(r)}$  et  $\eta_{i,i}^{(r)} = 0 \quad \forall i, j \in S$ , tels que

$$\xi_i^{(r)} = \eta_i^{(r)} + \sum_{j \in S} F_j \eta_{i,j}^{(r)} \quad \forall i \in S.$$

Définissons

$$(3.1.1) \quad \xi_i^{(r+1)} = \xi_i^{(r)} - \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty} \eta_{i,j}^{(r)} \quad \forall i \in S.$$

On observe que  $\xi_i^{(r+1)} = \eta_i^{(r)} - \sum_{j \in S} E_j \eta_{i,j}^{(r)} \in L(b, c+(r+1)e)$  et que  $\sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i^{(r+1)} = \sum_{i \in S} D_{A,i,\infty} \xi_i^{(r)} = 0$ . On a donc vérifié que la famille  $\{\xi_i^{(r+1)}\}_{i \in S}$  a bien toutes les

propriétés requises. En écrivant (3.1.1) pour  $r = 1, \dots, m$  et en additionnant toutes les égalités obtenues, on trouve que

$$\xi_i^{(m+1)} = \xi_i^{(0)} - \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty} \left( \sum_{r=0}^m \eta_{i,j}^{(r)} \right) \quad \forall i \in S.$$

Maintenant si on fait tendre  $m$  à l'infini,  $\xi_i^{(m+1)}$  tend vers 0 et  $\sum_{r=0}^m \eta_{i,j}^{(r)}$  converge dans  $L(b, c + e)$  vers un élément qu'on notera  $\eta_{i,j}$  et qui est tel que  $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$  et  $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$ . Par conséquent on obtient finalement

$$\xi_i = \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty} \eta_{i,j} \quad \forall i \in S$$

avec  $\{\eta_{i,j}\}_{i,j \in S}$  éléments de  $L(b, c + e)$  tels que  $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$  et  $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$ .  $\square$

p.364, 1.8-10: ...  $E(b)$  est fermé dans  $L_c(b)$  et donc  $L_c(b)/E(b)$  est un espace vectoriel normé sur un corps complet. D'après [1, (1.7.8)] il est de dimension finie et par conséquent tout  $\chi$  appartenant à  $\text{Hom}(L_c(b)/E(b), \Omega)$  est continu. Mais alors, puisque par définition de la topologie de  $L_c(b)/E(b)$  l'application  $\pi_{c,b}$  est continue, on peut conclure que pour chaque élément  $\chi$  appartenant à  $\text{Hom}(L_c(b)/E(b), \Omega)$ ,  $\chi \circ \pi_{c,b}$  est une fonction linéaire et continue sur  $L_c(b)$ .

p.366, 1.13:  $\{w_{u,i,A}^* = \sum_{w \in \mathcal{F}_0} (1/\chi(A))(G_{w,u,i}(A)/(R(A)\pi)^{w_0})1/X^w\}_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq |u| \leq l-1}}$

p.367, (2.3.2):  $\mathcal{K}_{t_v}^{(l)} \subset L^*(\text{ord } R(t_v) + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$ .

Ceci signifie que si  $w_{i,t_v}^* = \sum_{u \in \mathcal{F}_0} B_u(1/X^u)$ , alors pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$  tel que  $\text{ord}(B_u) \geq -u_0(\varepsilon + \text{ord } R(t_v)) - c_\varepsilon$ .

p.368, 1.9:  $\text{ord}(H_w B_{w+u}) \geq -c_\varepsilon + w_0(-\varepsilon + \text{ord}(\lambda - t_v) - \text{ord } R(t_v)) - u_0(\varepsilon + \text{ord } R(t_v))$ .

p.370, 1.26:  $\lim_{v \rightarrow \infty} B_v(\lambda, \Gamma) = 0$   $\Gamma$ -adiquement car  $B_v(\lambda, \Gamma) \in \Gamma^{v_0} K(\lambda)[[\Gamma]]$ .

p.371, 1.2:  $\sigma_\Gamma^* = \gamma_- \circ \left( \frac{\partial}{\partial \Gamma} - \frac{\partial g}{\partial \Gamma} \right)$ .

p.372, 1.9-11: Munissons  $K(\lambda)$  de la norme de Gauss par rapport à  $\lambda$  et soit  $\Omega$  la clôture algébrique de  $K(\lambda)$ , munie d'une extension de la norme de  $K(\lambda)$ .

p.372, 1.14:  $|\Gamma| \leq |\rho_0(\lambda, A^{(0)})|^{1+N^2} |\sigma_0(\lambda, A^{(0)})|$  où  $\sigma_0(\lambda, A^{(0)})$  est le coefficient de  $\Gamma^\tau$  dans  $\chi(\lambda, \Gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \chi(\lambda, \Gamma, A^{(0)}) = \Gamma^\tau (\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) + \Gamma \sigma_1(\lambda, A^{(0)}) + \dots)$ , avec  $\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) \neq 0$ . (On change légèrement la spécialisation de  $A$  faite en [1, 3.1] en ajoutant la condition  $\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) \neq 0$ .) En effet dans la démonstration de [1, 3.9] on a choisit  $\alpha$  tel que  $|\alpha| \leq 1$  et tel que  $R(\lambda, \Gamma)$  n'ait pas de zéros dans le disque pointé  $0 < |\Gamma| < |\alpha|$ . Ceci signifie que le système  $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$  peut avoir seulement

des singularités triviales dans cette région. Cependant dans la quatrième partie de la démonstration de [1, A3] on a besoin qu'il n'y ait pas de singularités triviales dans ce disque pointé.

Pour résoudre ce problème, on choisit  $\alpha$  tel que  $\chi(\lambda, \Gamma)R(\lambda, \Gamma)$  n'ait pas de zéros dans le disque pointé  $0 < |\Gamma| < |\alpha|$ . Avec cette nouvelle condition, l'assertion [1, (3.9.2)] reste vraie, mais il faut changer la conclusion de l'énoncé de [1, 3.9].

p.372, (3.9.1):

$$|h_{i,w,s}| \leq \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^s |\rho_0(\lambda, A^{(0)})|^{s(1+N^2)} |\sigma_0(\lambda, A^{(0)})|^s}.$$

p.372, 1.18 - p.373, 1.3: La discussion sur les singularités du système  $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$  est un peu confuse. D'après [1, 1.8], les coefficients de  $G(\lambda, \Gamma)$  appartiennent à  $K(\lambda) \left[ \Gamma, 1/(\chi(\lambda, \Gamma)R(\lambda, \Gamma)) \right]$  et donc les singularités de  $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$  sont contenues dans l'ensemble des  $\Gamma_0$  tels que le produit  $\chi(\lambda, \Gamma_0)R(\lambda, \Gamma_0)$  soit nul. Soit  $\Gamma_0$  tel que  $\chi(\lambda, \Gamma_0) = 0$  et  $R(\lambda, \Gamma_0) \neq 0$ . Alors  $\Gamma_0$  doit être une singularité apparente, car si on choisit une nouvelle base de  $\mathcal{W}^{(l)}$ , on obtient un nouveau  $\chi(\lambda, \Gamma)$  qui ne s'annule pas en  $\Gamma_0$ . Mais d'après [3, Lemme 9.1] on sait en plus que si  $R(\lambda, \Gamma_0) \neq 0$ , alors  $\Gamma_0$  est une singularité triviale de  $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$ . Par conséquent on peut conclure que les singularités non triviales du système  $\frac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$  sont contenues dans l'ensemble des  $\Gamma_0$  tels que  $R(\lambda, \Gamma_0) = 0$ .

p.374, 1.12:  $\mathcal{K}_{\lambda,0}^{(l)} \subset L^*((1 + e(1 + N^2)) \text{ord } \rho_0(\lambda, A^{(0)}) + e \text{ord } \sigma_0(\lambda, A^{(0)}) + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$ .

p.375, (3.13.1):

$$\rho(\mathcal{G}(\lambda)) \leq (1 + e(N^2 + 1)) \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log \frac{1}{|\rho_0(\lambda, A^{(0)})|_v} + e \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log \frac{1}{|\sigma_0(\lambda, A^{(0)})|_v}.$$

**LEMME 3.2.**

$$(3.2.1) \quad e \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log \frac{1}{|\sigma_0(\xi, A^{(0)})|_v} \leq \left( \sum_{s=1}^n \binom{n+sd}{n} \right) \cdot \binom{n+(n+1)d}{n} \left[ \frac{1}{2} \log \left( \binom{n+d}{d-2} \frac{4(n+2d)}{d-1} \right) + \log(m+1) + h_\infty(f) \right].$$

PREUVE: Dans [1, 4.1] on spécialise  $\lambda$  et  $\Gamma$  et on modifie la spécialisation  $A^{(0)}$  de  $A$ , faite en [1, 3.1]. Pour majorer le terme  $e \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log 1/|\sigma_0(\xi, A^{(0)})|_v$ , on va ajouter trois conditions à ces spécialisations:

$$(1) \quad \sigma_0(\lambda, A^{(0)}) \neq 0,$$

- (2)  $\sigma_0(\xi, A^{(0)}) \neq 0$ ,
- (3)  $\sigma(\xi, \mu) \neq 0$ .

D'après [4, Section 3]  $\chi(\xi, \mu) = \prod_{s=1}^n b_s(\xi, \mu, A^{(0)})$  avec  $b_s(\xi, \mu, A^{(0)}) = \mu^{\tau_s} \left( \sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) + \mu \sigma_1^{(s)}(\xi, A^{(0)}) + \dots \right)$  où  $\sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) \neq 0$  pour  $s = 1, \dots, n$ . On a donc

$$(3.2.2) \quad \sigma_0(\xi, A^{(0)}) = \prod_{s=1}^n \sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)})$$

et par conséquent il nous suffit de trouver une bonne majoration de  $\left| \sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) \right|_v$  pour  $s = 1, \dots, n$ . Considérons l'application surjective

$$\begin{aligned} \delta : W_s \otimes R_{s-1}^{n+1} &\longrightarrow R_s \\ (w, h_1, \dots, h_{n+1}) &\longmapsto w + \sum_{j=1}^{n+1} h_j g_j \end{aligned}$$

où  $W_s$  est le sous espace de  $R$  engendré par les monômes  $X^u$  avec  $u \in \mathbb{N}^{n+1}$ ,  $u_1 + \dots + u_{n+1} = sd$  et  $0 \leq u_k < d$  pour  $k = 1, \dots, n+1$ . Choisissons comme bases de  $W_s, R_{s-1}^{n+1}$  et  $R_s$  celles composées de monômes. D'après [4, 3.2.1]  $b_s(\xi, \mu, A^{(0)})$  est le déterminant de la sous matrice de rang maximale de la matrice  $\Delta$ , qui représente  $\delta$  par rapport aux bases que l'on a choisies. Par conséquent en utilisant les notations de [1, 4.1]

$$\sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) = \sum_{\substack{J \subseteq I_s, \text{card } J = \tau_s \\ J \cup J' = I_s, J \cap J' = \emptyset}} \left( \wedge_{\alpha \in J'} \vec{\mathcal{X}}_\alpha \right) \wedge \left( \wedge_{\alpha \in J} \vec{\mathcal{Y}}_\alpha \right)$$

où  $I_s$  est un ensemble de  $M_s = \binom{n+sd}{n}$  éléments,  $\vec{\mathcal{X}}_\alpha$  est un vecteur dont les coefficients sont 0,1 ou  $u_i \left( \sum_{k=0}^m C_{u,k} \xi^k \right)$  pour tout  $u \in \mathcal{F}$  et  $\vec{\mathcal{Y}}_\alpha$  est un vecteur dont les coefficients sont  $u_i A_u^{(0)}$  pour tout  $u \in \mathcal{F}$ . Maintenant en appliquant le Théorème d'Hadamard à ces  $\binom{M_s}{\tau_s}$  déterminants, on obtient grâce à [1, (4.2.3) et (4.2.4)]

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in \mathcal{P}_\infty} \log \left| \sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) \right|_v \\ &\leq \log \binom{M_s}{\tau_s} + \frac{M_s}{2} \log \left( \binom{n+d}{d-2} \frac{(n+2d)}{d-1} \right) + (M_s - \tau_s) \left( \log(m+1) + h_\infty(f) \right) \\ &\leq M_s \left[ \frac{1}{2} \log \left( \binom{n+d}{d-2} \frac{4(n+2d)}{d-1} \right) + \log(m+1) + h_\infty(f) \right] \end{aligned}$$

et donc grâce à (3.2.2), on trouve la majoration (3.2.1). □

p.376, (4.2.1):  $\rho(\mathcal{G}(\lambda)) \leq d^{2n} \binom{n+(n+1)d}{n}^2 \left[ (3/2) \log \left( \binom{n+d}{d-2} (4(n+2d)/(d-1)) \right) + (3/4) \left( \log(m+1) + h_\infty(f) \right) \right] + \left( \sum_{s=1}^n \binom{n+sd}{n} \right) \binom{n+(n+1)d}{n} \left[ \log \left( \binom{n+d}{d-2} (4(n+2d)/(d-1)) \right) / 2 + \log(m+1) + h_\infty(f) \right].$

REMARQUE 3.3: même après avoir ajouté le terme  $e \sum_{v \in \mathcal{P}_f} \log 1/|\sigma_0(\lambda, A^{(0)})|_v$ , notre majoration du rayon global de  $\mathcal{K}^{(l)}, \rho(\mathcal{G}(\lambda))$ , reste toujours indépendante de "l".

3.4. On termine cette section en donnant la démonstration d'une formule qu'on a utilisée dans [1, p.377, l.10].

LEMME 3.5.

$$\sum_{u \in \mathcal{F}} u_i^2 = \binom{n+d}{d-2} \frac{(n+2d)}{(d-1)}.$$

PREUVE: On observe que

$$(3.5.1) \quad \sum_{u \in \mathcal{F}} u_i^2 = d^2 + (d-1)^2 n + (d-2)^2 \binom{n+1}{2} + \dots + 1^2 \binom{n+d-2}{n-1}.$$

De plus si  $\delta = t \frac{d}{dt}$ ,

$$\delta^2 \left( \frac{1}{1-t} \right) = \delta^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} t^i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 t^i = \delta \left( \frac{t}{(1-t)^2} \right) = \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{2t^2}{(1-t)^3}.$$

Par conséquent

$$(3.5.2) \quad \frac{1}{(1-t)^n} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} i^2 t^i \right) = \frac{t}{(1-t)^{n+2}} + \frac{2t^2}{(1-t)^{n+3}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \binom{n+l}{l-1} + 2 \binom{n+l}{l-2} \right] t^l.$$

Au contraire, en faisant directement les calculs

$$(3.5.3) \quad \frac{1}{(1-t)^n} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} i^2 t^i \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{j+i=l} \binom{n-1+j}{j} i^2 \right) t^l.$$

Mais alors grâce à (3.5.2) et (3.5.3) on trouve que pour chaque  $l \geq 0$

$$(3.5.4) \quad \binom{n+l}{l-1} + 2 \binom{n+l}{l-2} = \sum_{j+i=l} \binom{n-1+j}{j} i^2$$

et donc d'après (3.5.1) et (3.5.4) on peut finalement conclure que

$$\sum_{u \in \mathcal{F}} u_i^2 = \binom{n+d}{d-1} + 2 \binom{n+d}{d-2} = \binom{n+d}{d-2} \frac{(n+2d)}{(d-1)}.$$

□

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Bertolin, 'G-fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières', *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997), 353–383.
- [2] B. Dwork, 'On the Zeta function of a hypersurface', *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **12** (1962), 5–68.
- [3] B. Dwork, 'Zeta function of a hypersurface III', *Ann. Math.* **83** (1966), 457–519.
- [4] B. Dwork, *Generalized hypergeometric functions*, Oxford Science Publications (Oxford University Press, New York, 1990).

Institut de Mathématiques, case 247  
Université Pierre et Marie Curie  
4 place Jussieu - F-75252  
Paris, Cedex 05  
France  
e-mail: bertolin@riemann.math.jussieu.fr