

UN METODO IBRIDO PER LA SOLUZIONE DI PROBLEMI A CORRENTI INDOTTE LARGE-SCALE CON COMPRESSIONE DELLE MATRICI BEM BASATA SU $\mathcal{H}$ -MATRICI E RANDOMIZED SVD

⁽¹⁾Federico Moro, ⁽²⁾Lorenzo Codecasa

⁽¹⁾ Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Padova

⁽²⁾ Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria, Politecnico di Milano

I metodi ibridi che combinano, ad esempio, il metodo degli elementi finiti (FEM) ed il metodo degli elementi al contorno (BEM), possono risultare molto efficaci nella soluzione di problemi elettromagnetici, in quanto non richiedono la discretizzazione della regione in aria e consentono un post-processing molto più rapido ed efficiente rispetto al FEM. In particolare, il problema magnetodinamico nelle regioni conduttrici viene discretizzato con FEM, mentre il problema magnetostatico nella regione esterna in aria (illimitata) viene trattato con BEM. Altri vantaggi dei metodi ibridi consistono nel trattare analiticamente le sorgenti di campo magnetico (molto utile nel caso di avvolgimenti con geometria complessa) e non richiedono condizioni al contorno approssimate, che portano all'errore di troncamento tipico del FEM.

Queste peculiarità hanno motivato l'interesse in una linea di ricerca riguardante i metodi ibridi, che ha visto la collaborazione delle Unità di Padova e Milano. Per sviluppare tali formulazioni è stato scelto il metodo delle celle (CM), in luogo del FEM, con i seguenti vantaggi: 1) il problema di campo è formulato direttamente in forma matriciale con facilità di implementazione, 2) la continuità delle componenti tangente (per il campo magnetico) e normale (per il campo di induzione magnetica) è garantita in modo naturale dall'utilizzo di variabili integrali, 3) è possibile trattare in modo rigoroso anche problemi di campo con domini non-semplicemente connessi utilizzando tecniche proprie dell'Algebra Omologica. In [1] è stato dimostrato come per problemi magnetostatici un accoppiamento *indiretto* possa portare ad un sistema indefinito-simmetrico, che può essere risolto in modo efficiente con solver iterativi MINRES o SYMMLQ. In [2] è stato sviluppato un metodo CM-BEM per trattare problemi elettro-termici, utilizzando un solver iterativo TFQMR, molto più efficiente del solver GMRES usato solitamente dalla maggior parte dei metodi FEM-BEM. Entrambi i metodi ibridi sono stati formulati in termini di variabili a (ovvero integrali di linea del potenziale vettore magnetico) all'interno del dominio, e in termini di variabili φ (ovvero potenziali scalari magnetici) sul bordo del dominio, con il vantaggio di minimizzare il numero di incognite. In [3] la formulazione a - φ è stata estesa alla analisi di problemi a correnti indotte con regioni a connessione multipla, rimuovendo ogni limitazione all'uso del potenziale. Grazie all'utilizzo del concetto di griglia aumentata, utile ad una corretta definizione degli operatori topologici di bordo, è stato fornito in [4] un approccio sistematico per la costruzione di metodi ibridi con sistema di equazioni lineari simmetrico. In tal caso, il vantaggio principale è stato la possibilità di utilizzare il solver TFQMR per la soluzione.

Le principali limitazioni all'impiego dei metodi ibridi per l'analisi di problemi large-scale sono legate alla discretizzazione BEM, con matrici dense, che porta a tempi di calcolo elevati e un notevole impiego di memoria. Il trattamento efficiente delle matrici BEM, derivanti dalla discretizzazione di operatori integrali, richiede speciali tecniche di compressione dati [5]. Tra i diversi approcci, il metodo *adaptive cross approximation* (ACA) è noto per essere di gran lunga il più semplice, e garantisce inoltre un ottimo comportamento a bassa frequenza avendo

complessità computazionale $O(N \log N)$. Grazie al formato ad $\mathcal{H}$ matrici, che presenta una struttura ad albero, è possibile utilizzare ACA per generare una approssimazione sparsa delle matrici BEM, in cui alcuni blocchi densi vengono sostituiti da approssimanti a basso rango.

In letteratura le tecniche di compressione dati sono state applicate principalmente a formulazioni integrali e BEM, mentre vi sono pochi esempi (limitati al caso magnetostatico) che riguardano i metodi ibridi. Infatti, la difficoltà principale nell'applicare il metodo ACA ai metodi ibridi consiste nel dover costruire un preconditionatore basato sull'algebra delle $\mathcal{H}$ matrici. In [6] viene proposto per la prima volta un metodo ibrido CM-BEM per problemi a correnti indotte large-scale, che è basato sull'utilizzo delle $\mathcal{H}$ matrici e su una nuova tecnica di compressione delle matrici BEM, detta *randomized singular value decomposition* (R-SVD). Gli esperimenti numerici proposti in [6] dimostrano che tale tecnica garantisce una migliore accuratezza e un maggiore livello di compressione rispetto ad ACA. In particolare, se si considera un benchmark classico come Team 3 (Figura 1), l'errore di compressione del metodo ACA è molto elevato, a differenza del R-SVD (Figura 2). Un altro vantaggio legato alla formulazione $a, v-q$ consiste nel portare ad un sistema lineare che, sebbene non sia simmetrico, può essere ugualmente risolto con solver TFQMR. In [6] viene dimostrato come il metodo CM-BEM, basato su compressione R-SVD, possa essere impiegato nell'analisi di problemi a correnti indotte discretizzati con alcuni milioni di gradi di libertà.

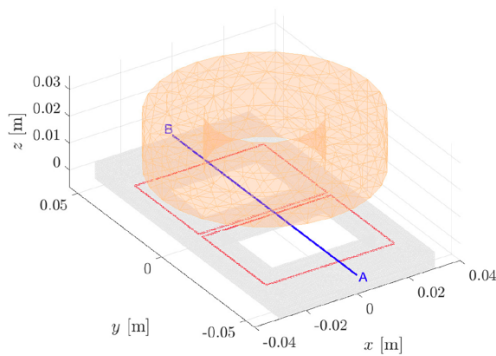


Figura 1. Modello Team 3 problem (induttore posto al di sopra della lamina conduttrice).

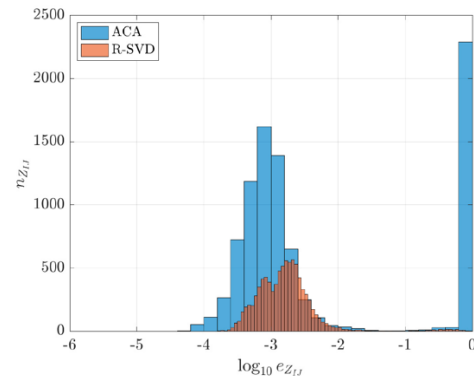


Figura 2. Distribuzione dell'errore di compressione ottenuto utilizzando metodo ACA ed R-SVD.

Bibliografia

- [1] F. Moro and L. Codecasa, "Indirect Coupling of the Cell Method and BEM for Solving 3-D Unbounded Magnetostatic Problems," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 52, No. 3, Art. ID 7200604, 2016.
- [2] F. Moro and L. Codecasa, "A 3D Hybrid Cell Method for Induction Heating Problems," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 53, No. 6, Art. ID 7204004, 2017.
- [3] F. Moro and L. Codecasa, "A 3D Hybrid Cell Boundary Element Method for Time-Harmonic Eddy Current Problems on Multiply Connected Domains," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 55, No. 3, Art. ID 9200111, 2019.
- [4] F. Moro, L. Codecasa, "Coupling the Cell Method with the Boundary Element Method in Static and Quasi-Static Electromagnetic Problems," *Mathematics*. 2021; 9 (12):1426.
- [5] M. Bebendorf, "Approximation of boundary element matrices," *Numer. Math.* 2000, 86, 565–589.
- [6] F. Moro, L. Codecasa, "Hybrid CM-BEM Formulation for Solving Large-Scale 3D Eddy-Current Problems Based on $\mathcal{H}$ -Matrices and Randomized Singular Value Decomposition for BEM Matrix Compression," *Mathematics*. 2023; 11(6):1324.