

# ESPERIMENTI NUMERICI SUL TRASPORTO SOLIDO DI FONDO

Irma Bonetto <sup>1,2</sup> & Daniele P. Viero <sup>1</sup>

(1) Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Ambientale, Università di Padova;

(2) Autorità di bacino dei fiumi Isonzo, Tagliamento, Livenza, Piave e Brenta-Bacchiglione, Venezia.

## ASPETTI CHIAVE

- Rappresentazione del trasporto solido di fondo mediante modello idrodinamico 2D agli elementi finiti, misto Euleriano-Lagrangiano, su griglia sfalsata non strutturata.
- Implementazione dell'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner secondo un approccio upwind ai volumi finiti.
- Esperimenti numerici a fondo mobile considerando una canaletta a sezione rettangolare: evoluzione di una duna; nascita e formazione di barre alternate.

## 1 INTRODUZIONE

I problemi di stabilità legati all'implementazione dell'equazione di Exner che non considera gli effetti diffusivi nel trasporto al fondo sono noti e vanno appunto ricondotti all'assenza di un termine diffusivo in grado di smorzare le instabilità. Come recentemente ricordato da Volp (2015), queste instabilità possono diventare dominanti rispetto alle reali variazioni del fondo, mascherandone l'effettiva evoluzione morfologica.

Per questi motivi risulta essenziale utilizzare uno schema numerico in grado di fornire risultati accurati, senza d'altra parte generare instabilità numeriche. Una delle soluzioni più frequentemente adottate consiste nell'introdurre della diffusione numerica artificiale che stabilizzi l'equazione di bilancio dei sedimenti; di utilizzo meno frequente ma decisamente efficace è l'impiego degli approcci upwind, basati sulla direzione di trasporto del sedimento (Lesser, 2009) o sulla direzione della celerità del fondo (Volp, 2015).

Partendo da queste considerazioni, si è ritenuto interessante approfondire alcuni aspetti riguardanti la descrizione numerica del trasporto solido di fondo e delle conseguenti variazioni morfologiche con riferimento ad un modello bidimensionale già predisposto (Defina, 2000, 2003). Il modello in questione fornisce infatti delle soluzioni nel complesso stabili e accurate, che nelle situazioni indagate ben riproducono i dati sperimentali disponibili (Defina, 2003). D'altra parte, un'attenta analisi dei risultati evidenzia la tendenza a produrre zone alternate di erosione e di deposito in corrispondenza dei nodi della griglia di calcolo, producendo delle irregolarità che creano un effetto a 'macchie di leopardo' e che in alcuni casi si amplificano generando instabilità.

Nel presente lavoro, dopo una sommaria descrizione del modello matematico utilizzato, si illustrano le attività di sperimentazione numerica condotte allo scopo di individuare le cause delle anomalie riscontrate, nonché le soluzioni adottate.

## 2 IL MODELLO MATEMATICO

Nel modello morfodinamico, il modulo idrodinamico e quello di trasporto sono risolti in sequenza, secondo il classico approccio non accoppiato. Il modulo idrodinamico è uno strumento per l'analisi del moto a superficie libera di onde lunghe in acque basse. Esso risolve le equazioni di Reynolds 2D (1) e l'equazione di continuità (2) adottando uno schema di sottogriglia che consente di simulare in modo efficace l'overland flow e le dinamiche di asciutto/bagnato su fondali irregolari e bassi numeri di Froude (Defina, 2000):

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{q}}{Y} - \frac{1}{Y} \nabla \cdot \mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\tau}_{bs}}{Y\rho} + g\nabla h = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} + \eta \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Nelle precedenti equazioni,  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$  è la portata specifica,  $Y$  è l'altezza d'acqua effettiva o il volume d'acqua per unità di area,  $\mathbf{R}$  è il tensore degli sforzi di origine turbolenta,  $\boldsymbol{\tau}_{bs} = (\tau_{bx}, \tau_{by})$  rappresenta il vettore

degli sforzi tangenziali al fondo,  $\rho$  è la densità del fluido e  $g$  l'accelerazione di gravità.

Il modulo di trasporto valuta dapprima l'intensità delle portate solide con la relazione empirica di Meyer-Peter e Müller (3), opportunamente corretta secondo le indicazioni di *Struiksmas* (1985) e *Struiksmas & Crosato* (1989) per tenere conto degli effetti della pendenza del fondo sull'entità e sulla direzione dei flussi solidi. Successivamente, determina le variazioni di quota dell'alveo risolvendo, con un approccio agli elementi finiti, l'equazione di Exner (4) di bilancio dei sedimenti (*Defina*, 2003):

$$q_{bo} = 8\sqrt{gd^3(s-1)}(\mu\theta - \theta_c)^{3/2} \tag{3}$$

$$(1-n)\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_b = 0 \tag{4}$$

dove  $d$  e  $s$  sono il diametro medio dei sedimenti e la densità relativa,  $\mu$  è il *ripple factor*,  $\theta$  e  $\theta_c=0.047$  sono rispettivamente il parametro di Shields e il suo valore soglia,  $n$  è la porosità,  $z$  è la quota del fondo,  $\mathbf{q}_b = q_b(\cos\alpha, \cos\beta)$  è il vettore delle portate solide,  $q_{bo}$  l'intensità secondo Meyer-Peter e Müller;  $q_b$  la portata solida corretta (*Struiksmas*, 1985; *Struiksmas & Crosato*, 1989) e  $\alpha$  è la direzione di trasporto dei sedimenti.

Pur rinviando a *Defina* (2000, 2003) per maggiori dettagli, si ritiene opportuno evidenziare che nel modello scelto le quote idrometriche sono definite nei nodi del reticolo di calcolo mentre le quote del fondo, le velocità, le portate liquide e le portate solide sono assunte costanti nelle maglie e definite nei rispettivi baricentri.

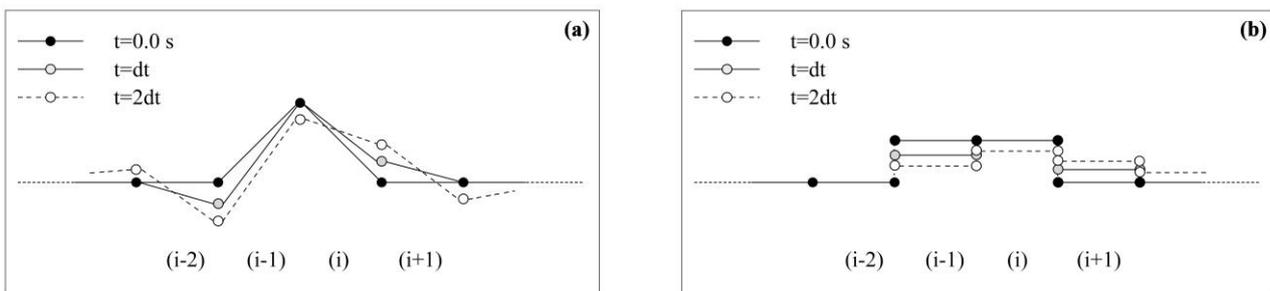
### 3 L'EQUAZIONE DI BILANCIO DEI SEDIMENTI DI EXNER

Come anticipato nell'introduzione, il modello matematico così sviluppato è in grado di descrivere con un buon grado di dettaglio i meccanismi di erosione, trasporto e deposito dei sedimenti e le variazioni morfologiche da essi indotte, ma fornisce delle soluzioni che a regime presentano una serie di irregolarità non sempre compatibili con il fenomeno indagato.

Ciò è emerso chiaramente nella prima fase della sperimentazione numerica durante la quale sono stati indagati alcuni casi semplici e di banale interpretazione. Si riporta qui il caso di una canaletta a sezione rettangolare (larga 10 m, lunga 100 m) e pendenza uniforme ( $i_f = 1\%$ ), in condizioni stazionarie di moto e di trasporto dei sedimenti, nella quale è stata inserita una duna (Figura 2a); per altre situazioni esaminate valgono analoghe considerazioni.

Lo stesso problema è stato successivamente riscontrato anche nell'analisi del fenomeno di formazione delle barre alternate, già descritto in *Defina* (2003) e recentemente ripetuto (Figura 3a).

Le indagini condotte hanno suggerito che all'origine di queste irregolarità vi fosse l'approccio utilizzato per l'implementazione dell'equazione di Exner.



**Figura 1.** Schema 1D per la valutazione del bilancio dei sedimenti sui nodi del reticolo di calcolo (a) e sugli elementi (b).

Facendo infatti riferimento per semplicità ad uno schema di calcolo monodimensionale (Figura 1) e considerando che la portata solida è funzione decrescente della profondità della corrente, è semplice verificare che una valutazione delle variazioni morfologiche del fondo basata su di un bilancio dei sedimenti effettuato in corrispondenza ai nodi del reticolo di calcolo, porta inevitabilmente all'individuazione di una configurazione di equilibrio caratterizzata dalla presenza di alcune irregolarità residue; questo non succede

se il bilancio dei sedimenti è valutato sugli elementi, in corrispondenza dei quali è definita la quota del fondo utilizzata dal modulo idrodinamico per la stima del campo di moto.

### 3.1 Implementazione ai volumi finiti

Nel modello originario (Defina, 2003), l'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner è stata implementata agli elementi finiti valutando il deposito/erosione sui nodi del reticolo di calcolo. Perciò, il modulo morfodinamico modifica le quote del fondo nodali e, successivamente, aggiorna le quote delle maglie mediante interpolazione lineare delle quote del fondo dei tre nodi afferenti ad esse afferenti.

Alla luce delle precedenti considerazioni, si è ritenuto poco conveniente definire su punti diversi della griglia le quote del fondo utilizzate dal modulo idrodinamico e dal modulo morfodinamico poiché, come si può intuire anche da un'analisi di Figura 2a, l'erosione che dovrebbe interessare esclusivamente la duna viene in questo modo attribuita anche al nodo a monte della duna stessa. È inoltre evidente che con questo tipo di approccio un'unica configurazione delle quote di maglia è compatibile con diverse distribuzioni delle quote nodali, in quanto le prime discendono dalle seconde mediante un processo di media (per es., quote del fondo nodali distribuite a lama dentata sono compatibili con quote di maglia nulle ovunque). Si è perciò ritenuto più appropriato valutare l'azione di erosione e di deposito della corrente direttamente sulle maglie. L'equazione (4) è stata quindi risolta su ogni singola maglia, con un approccio ai volumi finiti, descrivendo il fondo in modo univoco per entrambi i moduli.

Discretizzando la derivata temporale in (4) alle differenze finite, la soluzione dell'equazione di Exner consente di aggiornare le quote del fondo di maglia in accordo con la seguente espressione:

$$z_i(t + \Delta t) = z_i(t) - \frac{\Delta t}{(1-n)A_i} \sum_{k=1}^3 F_{ki}, \quad i = 1, N \quad (5)$$

dove  $z_i$  e  $A_i$  sono la quota e l'area in pianta della maglia  $i$ -esima,  $F_{ki} = \mathbf{q}_{bi} \cdot \mathbf{n}_k l_{ki}$  è il flusso di portata solida che attraversa il  $k$ -esimo lato,  $N$  è il numero di elementi che compongono il reticolo di calcolo. Il flusso di lato  $F_{ki}$  è determinato mediante *upwinding*, in accordo con la direzione della portata solida. Per una stima più accurata, il flusso è corretto in funzione della pendenza del fondo calcolata a cavallo del lato in esame (Struiksmas, 1985).

Il nuovo approccio garantisce la conservazione della massa di sedimento e una maggiore stabilità rispetto all'approccio agli elementi finiti precedentemente utilizzato.

### 3.2 Esperimenti numerici

Il modello numerico modificato è stato preliminarmente testato riproducendo gli esempi già descritti all'inizio di questo paragrafo. Con riferimento all'evoluzione della duna, in Figura 2 sono poste a confronto le soluzioni proposte dal modello originario e da quello modificato. Sono evidenti i significativi miglioramenti ottenuti: le soluzioni individuate risultano ora stabili e accurate, e le irregolarità del fondo presenti all'inizio della simulazione subiscono un progressivo e graduale spianamento fino alla loro completa scomparsa.

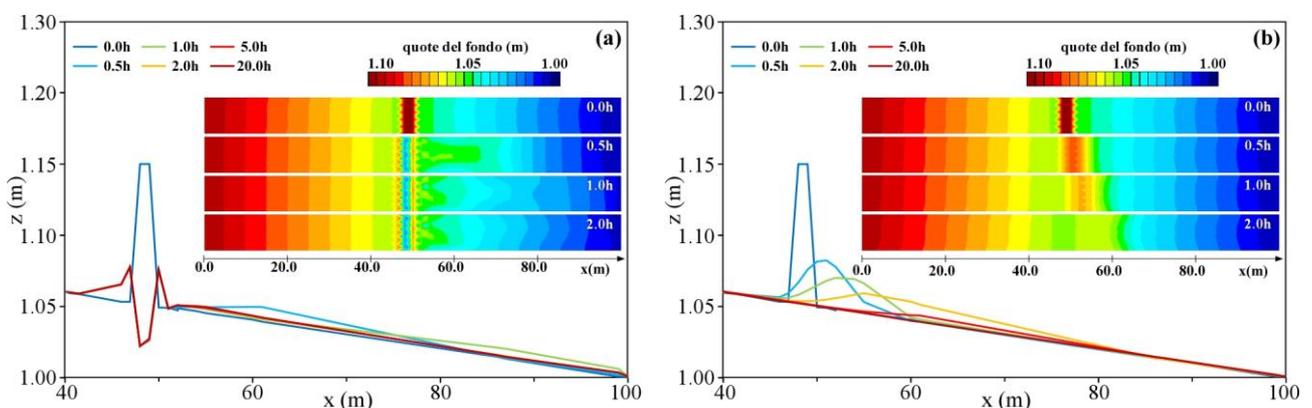


Figura 2. confronto tra i profili longitudinali e la topografia del fondo rispettivamente fornite dal modello originario (a) e da quello modificato (b) nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una duna.

Con il modello numerico modificato sono stati successivamente riproposti alcuni esperimenti numerici già condotti da Defina (2003) per riprodurre precedenti indagini di laboratorio (Lanzoni, 2000) sul processo di formazione e crescita delle barre alternate.

Gli esperimenti sono stati condotti in una canaletta a sezione rettangolare larga 1.5m e lunga 55m in Lanzoni (2000) e 117.5m in Defina (2003). I risultati numerici ottenuti (Figura 3a) hanno mostrato una buona corrispondenza con quelli di laboratorio: dopo la formazione le barre tendono progressivamente a una condizione di equilibrio caratterizzata da lunghezze d'onda e altezze superiori a quelle iniziali; negli ultimi istanti della simulazione le barre raggiungono una lunghezza d'onda di circa 14 m, contro i 10 m misurati in laboratorio, e un'altezza d'onda di circa 8 cm e appena superiore ai 7 cm di Lanzoni (2000). I profili longitudinali del fondo mostrano infine lo stesso comportamento osservato da Lanzoni (2000), secondo cui il profilo, lungo l'asse, tende a disporsi seguendo il più alto tra i profili destro e sinistro.

Le simulazioni effettuate con il modello modificato (Figura 3b) confermano le conclusioni di Defina (2003) e mostrano un incremento di accuratezza nella stima della lunghezza d'onda e dell'altezza delle barre, che assumono rispettivamente valori medi di circa 9.6 m e 6.7 cm. La soluzione risulta inoltre più stabile e liscia, nonché priva delle irregolarità visibili nei profili longitudinali ottenuti da Defina (2003).

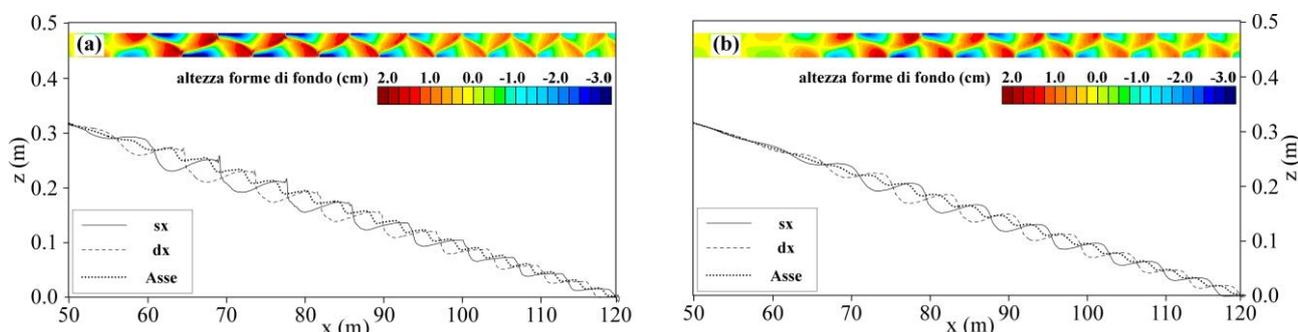


Figura 3. Profili longitudinali e topografia del fondo valutati alla 10<sup>a</sup> ora dal modello originario (a) e da quello modificato (b) nell'ambito di alcuni esperimenti numerici sul processo di formazione e crescita delle barre .

#### 4 CONCLUSIONI

È stato brevemente introdotto il problema della stabilità nella soluzione numerica dell'equazione di Exner e sono state descritte alcune delle difficoltà e problemi di accuratezza nella sua discretizzazione in un modello morfodinamico bidimensionale agli elementi finiti.

L'approccio ai volumi finiti per la soluzione dell'equazione di Exner, implementato all'interno del precedente modello, ha consentito di superare i problemi di instabilità, precedentemente riscontrati, e di incrementare l'accuratezza della soluzione.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Defina, A. Two-dimensional shallow flow equations for partially dry areas, *Water Resources Research*, 2000, 36(11), 3251-3264.
- Defina, A. Numerical experiments on bar growth, *Water Resources Research*, 2003, 39(4), 1092.
- Lanzoni, S. Experiments on bar formation in a straight flume 1. Uniform sediment, *Water Resources Research*, 2000, 36(11), 3337-3349.
- Lesser, G.R. An Approach to Medium-term Coastal Morphological Modelling, Ph.D. dissertation, The Delft University of Technology, Delft, 2009.
- Struiksmma, N. Prediction of 2-D bed topography in rivers, deformation in curved alluvial channels, *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, 1985, 111(8), 1169-1182.
- Struiksmma, N. & Crosato, A. Analysis of 2-D bed topography model for rivers, *River Meandering Water Resources Monograph Series* edited by Ikeda, S. And Parker, G., 1989, 12, 153-180.
- Volp, N.D., A subgrid based approach for morphodynamics modeling, *Advances in Water Resources*, 2015, 000, 1-13.