Università degli Studi di Padova
Dipartimento di *Filosofia, Sociologia, Pedagogia e Psicologia Applicata*

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN FILOSOFIA
INDIRIZZO UNICO
CICLO XXVIII

QUESTIONI DI SEMANTICA FORMALE E LOGICA PLURALE

Direttore della Scuola: Ch.ma Prof.ssa Francesca Menegoni

Supervisore: Ch.mo Prof. Massimiliano Carrara

Dottorando: Francesco Maria Ferrari

ESTRATTO

Questioni di semantica formale e logica plurale. La presente ricerca consiste in un'analisi logico-filosofica delle questioni inerenti alla *semantica per la logica plurale*, con particolare attenzione al recente lavoro di A. Oliver e T. Smiley, *Plural Logic* (OUP).

Il primo capitolo introduce la semantica modellistica per i linguaggi del secondo ordine, presentando tre varianti, *standard*, di *Henkin* e *multi-sorted*, le quali si distinguono per la definizione della funzione di assegnazione di valori alle variabili del secondo ordine. Il secondo capitolo analizza le relazioni fra la semantica modellistica e l'ontologia, in particolare il *realismo* e il *nominalismo*. Da un lato, il realismo si affida alla semantica c.d. *referenziale*, dall'altro il nominalismo, che deve evitare il c.d. *impegno ontologico* delle variabili del secondo ordine pur permettendone l'uso linguistico, si deve affidare alla semantica c.d. *sostituzionale* rispetto a tali variabili.

Il terzo capitolo, introduce alle questioni inerenti alla *semantica plurale*. W.O. Quine (nel 1970) sostenne che la logica del secondo ordine *non* è una logica pura. Tale approccio fu intensamente criticato da G. Boolos, in una serie di articoli negli anni '70-'80 del secolo scorso in cui Boolos giunse a proporre un nuovo tipo di semantica referenziale per le variabili (monadiche) del secondo ordine quantificate, la c.d. *interpretazione plurale* basata su una *relazione* (uno-molti) di assegnazione di valori a tali variabili.

Il quarto capitolo presenta una sintesi delle maggiori idee su cui si basa il sistema di logica plurale di Oliver e Smiley. Tale logica plurale riformula la predicazione nei termini della *predicazione plurale*. La preoccupazione principale degli Autori è quella di catturare il fenomeno della *denotazione plurale*. A tal fine presentano una teoria delle descrizioni definite che contrasta con quella russelliana. I termini funzionali plurali, ottenuti mediante tale apparato descrittivo, denotano le c.d. funzioni *polidrome*. Nel quinto capitolo si fornisce una analisi estensionale di tali funzioi. Le funzioni *polidrome* sono fondamentali anche nella *semantica della logica plurale*, in quanto codificano la funzione di *assegnazione plurale*. Alcune conseguenze semantiche dovute alla loro assunzione sono così evidenziate.

Il capitolo conclusivo, il sesto, termina l'analisi della logica plurale. Ø. Linnebo (2003) presentò un criterio di logicità, dalla cui applicazione emerge che non ci sono ragioni stringenti per non considerare la logica plurale una pura logica. Una critica, però, su tutte alla logica plurale: la rigidità della nozione di pluralità. Emerge, così, che alcuni tratti del linguaggio naturale legati a fenomeni plurali (quantificazione e denotazione), non sono catturati adeguatamente nei sistemi di logica plurale come quello di Oliver e Smiley.

ABSTRACT

Issues of formal semantics and plural logic. This research is a logico-philosophical analysis of the issues concerning the semantics for plural logic, with particular attention to the recent work by A. Oliver and T. Smiley, *Plural Logic* (OUP).

The first chapter introduces into the model-theoretic semantics for second-order languages. Three versions are presented: *standard*, *Henkin* and *multi-sorted*. All three differ in the definition of the assignment function to the second-order variables. The second chapter analyzes the relationship between model-theoretic semantics and ontology, in particular realism and nominalism. On the one hand, realism relies on the so called *referential* (or objectual) semantics; on the other hand, nominalism must rely on the so called *substitutional* semantics, for what concerns second-order variables, in order to avoid any ontological commitment with respect to such variables.

The third chapter introduces plural semantics. W.O. Quine (in 1970), argued that second-order logic is a 'set theory in sheep's clothing' and, so, not a pure logic. Quine's approach was strongly criticized by G. Boolos, in a series of articles in the 70s and 80s of the last century. He proposed a new sort of referential semantics for (monadic) secon-order variables and quantifiers, the so called *plural interpretation* based on a (one-many) *ralation assignment*.

The fourth chapter presents an outline of the more ideas of the work by Oliver and Smiley. In particular, their system 1) recasts predication in terms of plural predication and 2) attempts to capture plural denotation phenomena. In order to extend the category of terms to the plural case, Autors propose a theory of definite descriptions that contrasts with the Russellian one. Plural functional terms, obtained by means of the descriptive apparatus, denote so called *multivalued functions* – to be added to the usual functions, now *singlevalued*. In the fifth chapter it is provided an analysis of such function with respect to mathematics and logic. Multivalued functions play also a key role in the semantics of plural logic, modeling the assignment function for plural variables. It is also considered some semantic consequence due to their assumption.

The final chapter concludes the analysis of plural logic. Ø. Linnebo (2003) presented a *criterion of logicality*. From the application of such a criterion, it emerges that there are no compelling reasons not to define plural logic a pure logic. The only main point against such plural logics is the modal *rigidity* of the notion of plurality. Such a rigidity reveals that the alleged formalization of some typical features of that fragment of natural language that is related to plural phenomena is not fully adequate in these sort of plural logics.

INDICE

INTRODUZIONE

La presente ricerca consiste in un'analisi logico-filosofica delle questioni inerenti alla *semantica per la logica plurale*, con particolare attenzione al recente lavoro di A. Oliver e T. Smiley, *Plural Logic* (OUP).

Il primo capitolo introduce la semantica modellistica per i linguaggi del secondo ordine. Se ne presentano tre varianti: *standard*, di *Henkin* e *multi-sorted*. La semantica modellistica in generale codifica la nozione di *riferimento* mediante la funzione di assegnazione di valori alle variabili. Le tre varianti si distinguono proprio nella definizione di questa funzione, limitatamente al caso delle variabili del secondo ordine. L'interesse introduttivo di questo primo capitolo diviene chiaro qualora si pensi che la semantica modellistica può essere utilizzata quale strumento formale (estrinseco) mediante cui comparare diverse formalizzazioni dell'ontologia.

Il secondo capitolo si analizza le relazioni fra la semantica modellistica e l'ontologia, in particolare del *realismo* e dell *nominalismo*. La connessione fra logica ed ontologia si coglie nello studio formale delle c.d. *forme logiche*, ovvero i modi di combinare le categorie logico-grammaticali di un linguaggio (formale). Non è infatti affidandosi all'apparato descrittivo (teorico) – tanto linguistico (le costanti non-logiche) che assiomatico (gli assiomi non-logici) – che si esprime e controlla la decisione di quali siano le *categorie ontologiche* oltre al loro comportamento. Piuttosto, è mediante le distinzioni in categorie *logico*-grammaticali e mediante la scelta delle regole e degli assiomi *logici* che controllano le possibili trasformazioni simboliche fra queste categorie, che è possibile definire e controllare la supposta ontologia. Se, da un lato, il realismo si affida, così, alla semantica c.d. *referenziale*, per spiegare il comportamento semantico-ontologico delle variabili del secondo ordine, dall'altro il nominalismo, che deve risolvere il problema di evitare il c.d. *impegno ontologico* di tali variabili pur dovendone permettere l'uso linguistico (in qualità di convenzioni linguistiche), si deve affidare alla semantica c.d. *sostituzionale*, basata cioè su una definizione 'nominalista' della funzione di assegnazione. L'assunzione di quest'ultima porta con sé quale effetto una *revisione predicativa* del principio mediante cui si controlla il comportamento delle variabili nelle logiche del secondo ordine, il *principio di comprensione*.

Il terzo capitolo introduce la *semantica plurale*. W.O. Quine (nel 1970) sostenne che la logica del secondo ordine è una 'teoria degli insiemi mascherata' e, così, non propriamente una logica. Il punto della questione era se i quantificatori del secondo ordine dovessero essere compresi quali varianti su intensioni (proprietà o relazioni) o su estensioni (classi) di individui. Secondo Quine, se la prima opzione può considerarsi dubbia, la seconda volge la logica del secondo ordine in una *teoria* degli insiemi mascherata da logica. Questo approccio alla logica del secondo ordine fu però intensamente criticato da G. Boolos, in una serie di articoli pubblicati negli anni '70-'80 del secolo scorso. In questi, Boolos a partire dal rivendicare lo statuto della logica del secondo ordine, propose per le variabili monadiche del secondo ordine un nuovo tipo di semantica referenziale, la c.d. *interpretazione plurale dei quantificatori*. A differenza della semantica referenziale tarskiana che si basa su una *funzione* di assegnazione di valori alle variabili, l'interpretazione plurale si basa sulla nozione di *assegnazione plurale* a sua volta codificata mediante una *relazione uno-molti*. Tale nuova *interpretazione* è, così, capace di fornire una soluzione alla critica di Quine alla logica del secondo ordine interpretata estensionalmente, con paraticolare riferimento alla sua restrizione *monadica*.

Il quarto capitolo presenta una sintesi delle linee guida e delle maggiori idee a partire dalle quali viene sviluppata la proposta di Oliver e Smiley. In generale, la *logica plurale* riformula la predicazione nei termini della *predicazione plurale* ed estende i termini funzionali al caso plurale. La preoccupazione degli Autori è comunque quella di catturare formalmente e in maniera definitiva quel fenomeno del linguaggio naturale che è riconosciuto come *denotazione plurale*. A tal fine propongono una teoria delle descrizioni definite che contrasta con quella classica di matrice russelliana.

I termini funzionali, per la loro caratteristica di essere termini complessi *annidati* (*nested terms*) – è sempre possibile assumere l'applicazione di una data funzione $f(t)$ quale argomento di un'altra funzione, p.es. $f'(f(t))$ – sono necessari a una logica atta a codificare un tipo di informazione, quella scientifica e matematica, altrimenti impossibile. I termini funzionali plurali, ottenuti mediante l'apparato descrittivo, denotano le c.d. funzioni *polidrome* – da affiancare alle usuali funzioni, rinominate *monodrome* – della cui esistenza e del cui uso è testimone la matematica. Le funzioni *polidrome* rivestono un ruolo fondamentale anche nella *semantica della logica plurale*, quali strumento essenziale per esprimere codificare le funzioni di *interpretazione* e, soprattutto, di *assegnazione* di valore alle variabili (plurali). Il quinto capitolo si occupa, pertanto, di tali funzioni prendendo in considerazione in modo particolare alcune conseguenze semantiche dovute alla loro assunzione nel meta-linguaggio. Una su tutte: il dominio di riferimento non può essere di natura insiemistica.

Il capitolo conclusivo, il sesto, termina l'analisi della logica plurale presentando dapprima nel dettaglio i suoi due assiomi caratteristici. Il sistema proposto è deduttivamente ben più potente della logica del secondo ordine, come anche di un precedente sistema di logica plurale presentato da Ø. Linnebo (2003) e che tentava una formalizzazione, nel linguaggio-oggetto, della proposta di Boolos.

A partire dalla critica di Quine il quesito circa la logicità della logica del secondo ordine si è sviluppato in modo rilevante verso lo stabilire un *criterio* la cui soddisfazione deciderebbe della *logicità* di un sistema formale. Non entreremo nel merito dell'adeguatezza e della sufficienza di un sistema di condizioni finalizzato a fissare un criterio di tale natura. L'evoluzione storico-teoretica del dibattito fra Quine e Boolos (cfr. capitoli II e III) è stata sufficientemente illuminante riguardo le condizioni formali che una logica deve, almeno, soddisfare per essere una pura logica. Linnebo stesso (2003) presenta il suddetto criterio. In quest'ultimo capitolo se ne mostrerà l'applicazione ad entrambi i sistemi plurali considerati, quelli di Linnebo e di Oliver e Smiley.

In ultima istanza, per concludere, presenteremo una critica su tutte alla logica plurale: la sua incapacità di formalizzare un tratto del linguaggio naturale, ossia la non-rigidità delle pluralità. Tale critica è a nostro avviso fondamentale in quanto relativizza il soddisfacimento dell'assunto da cui muovono Oliver e Smiley per la costruzione del loro sistema: formalizzare adeguatamente alcuni tratti del linguaggio naturale legati a fenomeni plurali di cui la logica classica, con la sua semantica estensionale, non è in grado di rendere conto.

I

LOGICA, SEMANTICA E TEORIE

Per alcuni, la relazione fra logica ed ontologia[1] consiste nel fatto che l'ontologia è una sorta di "prolegomeno alla logica". Secondo questa concezione "la logica è un'elaborazione assiomatica, formalizzata, sistematica di questo materiale predigerito dall'ontologia" ma se "l'ontologia al modo in cui è usualmente praticata è la teoria più astratta delle entità reali[2], la logica, nel suo stato presente, è l'ontologia generale sia delle entità reali che delle entità ideali[3]" (Bochenski 1974:290).

---

[1] L'ontologia è classicamente stata intesa come una delle due discipline costituenti la metafisica delle quali, l'altra è la *cosmologia*, la scienza *delle cause dell'essere*. Degno di nota è che la critica kantiana alla metafisica – da cui l'avversione neo-positivista alla metafisica (cfr. (Barone 1977)) – era relativa esclusivamente a quella parte della metafisica che si occupava delle cause dell'essere, essendo le cause, nel suo fenomenismo (come in quello di Newton), inessenziali alla costituzione dell'ente, il *fenomeno* (ente *fisico*, per Newton). La declinazione interna all'ontologia, della distinzione fra essere *dell'essenza* e essere *dell'esistenza* si può ragionevolmente dire essere stata la matrice del suo sviluppo teoretico, avvenuto storicamente sotto l'egida della loro reciproca opposzione. Si pensi all'opposizione filosofico-scientifica fra *formalismo* e *intuizionismo* in matematica. Questa ricalca lo *iato* fra *universalità* e *esistenzialità* che, in fondo, già l'opposizione fra *razionalismo* e *empirismo* avevano proposto nella modernità. L'uno, era basato sull'*identificazione* di esistenza ed essenza, l'altro, lo era invece sulla loro radicale *separazione*, distinguendo gli *atti costitutivi* degli enti (matematici) in un atto *intuitivo*, fondante l'induzione e, dunque, le totalità (o insiemi *chiusi*) degli enti con rispetto ad una proprietà data cui, pertanto, appartenendovi sono esistenti (esistenza) e in un altro *costitutivo* di tali proprietà determinate dalle relazioni di identità (essenza) fra le entità (classi di equivalenza) degli enti. L'espressione di tale opposizione si rivelò anche nelle logiche sottostanti. Non è un mistero per nessuno che il nodo della distinzione fra formalismo e inuizionismo riposi sulla dicotomia accettazione-rifiuto delle dimostrazioni per assurdo (*Reductio Ad Absurdum*, RAA): d'altra parte, RAA garantisce l'*esistenza* di una soluzione (*demostrandum*), ma non ne definisce l'essenza, *quale* soluzione essa sia, non fornendo un metodo effettivo di calcolo di questa.

[2] L'ontologia risulterebbe così essere l'indagine intuitiva e non formalizzata degli aspetti categoriali delle entità (in qualche senso) reali in generale.

[3] Ricordiamo, comunque, che è indice del modo pre-moderno e non-scientifico di intendere la logica – un modo cioè che non distingue fra *logica formale* e *ontologia formale* – dire che argomento di un predicato (funzione) sono gli 'oggetti' extra-linguistici. La logica formale come calcolo, anche in semantica, lavora solo e soltanto su *simboli*. Argomento di una funzione o predicato sono dunque 'nomi che denotano oggetti' e non gli oggetti stessi, mentali o extra-mentali che siano (p.es., *numerali*, non 'numeri'). Questo non è nominalismo: il nominalismo, infatti, è un delle tante possibili ontologie (cfr. 2.1) secondo cui tutto si riduce a convenzione linguistica e a regole d'uso linguistico, *condizioni di verità* incluse. Dire invece che la logica ha a che fare solo con simboli è il c.d. *nominalismo logico* (cfr. 2.1 in nota) ovvero l'accettare che la logica è essenzialmente *calcolo* (sillogismo, inteso come arte del combinare simboli secondo regole), che sia cioè *de dicto*, e non *de re*. La disciplina formale che s'interessa delle strutture formali del linguaggio in quanto si riferiscono a strutture formali *de re*, della realtà (p.es., le leggi della realtà fisica, mentale, spirituale, ecc.) è l'*ontologia formale* (formalizzata) la quale assume oltre alla semantica ed alla sintassi (cfr. 1.1), la pragmatica.

Oggi, l'dea di una logica avente un (qualsiasi) contenuto è spesso rigettata in favore dell'interpretazione della logica come *calcolo*. In quanto calcolo astratto, la logica è privata di ogni contenuto suo proprio. Piuttosto, è possibile darne varie interpretazioni su domini variabili di cardinalità arbitraria. Usualmente, domini e interpretazioni sono parti della teoria degli insiemi e la semantica formale modellistica, che assume queste due nozioni, assume con essi anche tale apparato matematico. Secondo quest'altra concezione (dominante) la teoria degli insiemi costituirebbe così un'ontologia generale. In tal senso, tutte le analisi filosofiche dovrebbero essere sviluppate entro estensioni definite delle teoria degli insiemi[4].

Nonostante la grande potenza e utilità, la teoria degli insiemi non è però il contesto formale adeguato mediante cui rappresentare una qualche ontologia generale. La relazione di appartenenza, la nozione base su cui si fonda la teoria degli insiemi è "una pallida ombra della predicazione che, in un modo o nell'altro, è la nozione base su cui il pensiero, il linguaggio naturale e le forme logiche della concezione della logica come linguaggio sono costruite" (Cocchiarella 2001:123). In tal senso:

> [L]e forme logiche di un sistema logistico sono [da considerarsi quali] strutture sintattiche che, per così dire, hanno in se stesse le loro semantiche. È assegnando siffatte forme logiche agli enunciati (dichiarativi) di un linguaggio naturale […] che siamo in grado di dare rappresentazioni logicamente perspicue delle condizioni di verità di questi enunciati, e di conseguenza di collocarle onologicamente all'interno della nostra struttura concettuale generale. (Cocchiarella 2001:119-120).

Le differenti teorie della *forma logica* sono basate su differenti *teorie della predicazione*[5], da cui – sottolinea ancora Cocchiarella – è possibile ricavare *diverse logiche formali* alternative che possono essere considerate come rappresentazioni formali alternative delle diverse ontologie supposte ad un determinato linguaggio. Ad ogni modo, la teoria degli insiemi e la *semantica formale*, basata sulla teoria dei modelli[6], qualora

---

[4] Ovvero, nella teoria degli insiemi con la possibile aggiuta di oggetti concreti (individui appartenenti al dominio ma che non sono insiemi, *ur-element*) e predicati empirici (costanti predicative).

[5] Tradizionalmente descritte come differenti teorie degli *universali* – ove per universale intendiamo 'ciò che può essere predicato di cose', cfr 2.1 per il riferimento ad Aristotele circa l'origine di questa accezione del termine 'universale' – delle quali le principali sono il *nominalismo*, il *concettualismo* ed il *realismo*, nelle loro rispettive variant (cfr. 2.1. per una tassonomia generale).

[6] In inglese, *set-theoretic* o *model-theoretic semantics*.

soggètta alle limitazioni imposte da ciascuna teoria della predicazione, può essere usata come *struttura matematica su cui costruire e comparare ciascuna di queste diverse ontologie formalizzate* “nel senso di fornire un modello matematico estrinseco dell’ontologia che ciascuna si propone di rappresentare” (Cocchiarella 2001:124). Diamo, allora, uno sguardo introduttivo alla semantica formale modellistica con particolare attenzione alle semantiche per un tipo di linguaggio detto ‘del secondo ordine’.

1.1. Logica e teorie.

Cominciamo fornendo una definizione piuttosto informale e intuitiva, oltre che generica, di *teoria*:

> DEFINIZIONE 1.1. *Teoria* (*informale*). Una teoria T è un insieme (qualsiasi) di enunciati[7] di un dato linguaggio, L, su un universo, U, di oggetti detto ‘dominio di interpretazione’.

Tale dominio è connesso agli enunciati della teoria[8] in un certo modo: in modo tale da soddisfarli o renderli veri, altrimenti, se cioè non appartengono alla suddetta teoria, in

[7] La nozione di *enunciato* è molto discussa. Ad essa equivalgono nell’uso presente, quelle di *asserto, affermazione*, *sentenza*. Più in genrale, il termine di riferimento è quello di *formula* di un dato linguaggio L. Le formule di L o L-formule sono le *espressioni* (stringhe ordinate di simboli) generate per combinazione a partire da un dato insieme di simboli detto ‘alfabeto’. Il sotto-insieme delle espressioni costruite secondo determinati criteri *grammaticali* si dice insieme delle *formule ben formate* (in simboli *ffbf*, e *fbf* al singolare) di L o L-*ffbf* o semplicemente *ffbf* (cfr. 1.1 in nota). La nozione di *fbf* non è però ancora sufficiente per comprendere quella di enunciato. In proposito G. Frege (1848-1925) definì ‘funzione proposizionale’ ogni *fbf* che contiene delle *variabili libere*, ovvero non *quantificate* mediante il prefiggerle con opportuni quantificatori affissi della variabile che vincolano. Per trasformare una funzione proposizionale in ‘proposizione’, ovvero in una *fbf* di cui si può predicare la verità o la falsità, esistono due strategie: o sostituire le variabili con delle *costanti*, o ‘quantificare’ e dunque ‘vincolare’ le variabili con gli opportuni quantificatori. Tralasciando ogni aspetto semantico intrinseco nella nozione di *proposizione* o di *funzione proposizionale*, e sottolineandone la rilevanza meramente sintattica, per ‘enunciato’ in genere si intende una *fbf chiusa* o senza variabili libere (o perché tutte quantificate o perché non occorrono affatto) di un dato linguaggio.
Le *funzioni matematiche* sono quella sotto-classe delle funzioni proposizionali, i cui argomenti possono essere solo *numerali*, ovvero termini che denotano *numeri* – qualsiasi cosa *ontologicamente* si intenda con ‘numeri’ (divinità pitagoriche, enti platonici, enti concettuali, convenzioni linguistiche, o altro).

[8] Talvolta, anziché ‘teoria’ scriveremo ‘L-teoria’ essendo la teoria sempre relativa ad un dato linguaggio.

modo tale da renderli falsi[9]. Una teoria T è così definibile come una coppia ordinata[10] il cui primo membro è il linguaggio L, mente il secondo è l'universo di riferimento U: formalmente, $T =_{df} \langle L, U \rangle$. Generalmente, quindi in una T espresso in Lsi parla degli oggetti di U e non, invece, di L stesso o del rapporto fra L e U. Il 'luogo' linguistico in cui il discorso verte su L stesso e/o sulla relazione fra L e U è la *meta-teoria*, MT, di T. MT è anch'essa una teoria il cui linguaggio, L', però parla di T stessa: formalmente, $MT = \langle L', T \rangle$, con $L' \neq L$[11]. Si può parlare di T assumendo due punti di vista: uno, quello *sintattico*, mediante cui si considerano esclusivamente le caratterisitiche di L, prescindendo dai significati che le varie componenti linguistiche (segni, termini, espressioni) assumono rispetto ad U; l'altro, *semantico*, consistente nello studiare proprio il rapporto fra L ed U di T.

Per tornare alla definizione di teoria, Se per 'rendere vero' usiamo il simbolo '⊨' e supponiamo che esista una interpretazione I, ossia una funzione[12] dalle *ffbf* di L al dominio U di T, allora una versione formalizzata, sebbene ancora generica, di teoria potrebbe essere la seguente:

---

[9] Si può dire che lo scopo di una teoria è determinare le proposizioni del linguaggio vere di un universo di oggetti.

[10] Diamo una definizione informale di coppia ordinata, nozione sulla quale si fonda la nozione di *prodotto cartesiano*. Una coppia ordinata è un insieme di due elementi in cui, contrariamente agli insiemi 'normali', conta l'ordine. Per esempio prendiamo la coppia ordinata formata da x e y, p.es. $\langle x, y \rangle$, se $x = y$ si ha che $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ e $\langle x, x \rangle \neq \{x, x\}$ infatti l'insieme $\{x, x\} = \{x\}$; e se $x \neq y$, $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ mentre ciò non vale per gli insiemi, p.es. $\{x, y\} = \{y, x\}$. Definiamo ora il *prodotto cartesiano* di due insiemi X, Y: $X \times Y =_{df} \{\langle x, y \rangle : \ x \in X \ et \ y \in Y\}$ ovviamente può darsi il caso in cui $X = Y$ in tal caso scriveremo $X \times X$ o X^2. Il caso si estende facilmente a $X^n = X_1 \times \ldots \times X_n$. Mediante tali nozioni in teoria degli insiemi si definiscono le nozioni di *relazione* e di *funzione*. Notiamo che il prodotto cartesiano *non* è *booleanamente* esprimibile. Infatti se X e Y sono sottoinsiemi di un insieme U, anche la loro *intersezione, unione* e *complementi* lo sono. Invece il $X \times Y$ non è un sotto-insieme di U.

[11] In particolare, $L' \supset L$, ossia il linguaggio della meta teoria, il metalinguaggio, è in generale più ampio di quello della teoria, tanto da includerlo propriamente. Specifici del meta-linguaggio sono una serie di segni met-linguistici che presenteremo man mano sarà necessario.

[12] In termini intuitivi una funzione f *da* un insieme X *a* un insieme Y – detti rispettivamente, *dominio* e *co-dominio* di f, i quali possono coincidere, e la cui unione è detta *campo* ($X \cup Y$) di f– è una *legge* che associa ad un elemento x di X uno ed uno solo elemento y di Y, p.es. $f(x) = y$, ove y è detto *immagine* di x *mediante* f. È possibile dare una definizione estensionale che elimini l'ambiguità del riferimento alla parola 'legge' o 'corrispondenza' o 'mappa'. Una funzione allora è identificata con l'insieme delle coppie ordinate $\langle x, y \rangle$ t.c. $f(x) = y$. Pertanto, una funzione f da X a Y ($f: X \rightarrow Y$) è un sotto-insieme di $X \times Y$ t.c. per ogni $x \in X$ esiste uno ed un solo $y \in Y$ per il quale $\langle x, y \rangle \in f$. Le funzioni sono particolari relazioni in questo senso estensionale in quanto essendo una relazione xRy un generico sotto-insieme di $X \times Y$, una funzione è un sotto-insieme di $X \times Y$ che soddisfa un ulteriore condizione: quella c.d. di *unicità* dell'elemento y in relazione con x. La condizione di unicità è così rilevante da consentire un trattamento particolare anche da un punto di vista linguistico: fissato un x, infatti, $f(x)$ diviene il *nome* di un elemento y di Y. I casi si estendono naturalmente a funzioni a n argomenti o n-arie, p.es. $f^n(x_1 \ldots x_n) = y$ t.c. per ogni $\langle x_1 \ldots x_n \rangle \in X_1 \times \ldots \times X_n$ esiste uno ed un solo $y \in Y$ per il quale $\langle \langle x_1 \ldots x_n \rangle, y \rangle \in f^n$.

DEFINIZIONE 1.2. *Teoria* (*formale*). $T = \{\varphi \in L : I \vDash \varphi\}$

Una teoria si occupa anche di descrivere l'organizzazione, i rapporti di dipendenza, fra gli oggetti del suo dominio. Dal punto di vista formale la logica si occupa proprio di capire l'organizzazione e la dipendenza formale fra gli enunciati che la costituiscono: è un insieme di enunciati organizzabili in più modi e a più livelli. La distinzione fra piano semantico e sintattico risulta molto efficace proprio per un approfodimento in tal senso del concetto di teoria. Ma quale sia il genere di nessi determinante l'organizzazione formale delle *ffbf* in una generica T dipende in misura basilare dalla loro *previa* divisione in due gruppi: alcune, fondamentali e primitive, dette *assiomi* o *premesse* (vi sono incluse anche le definizioni[13]); altre, derivate (in qualche senso)[14] dagli assiomi. La natura della dipendenza logica fra questi due insiemi di *ffbf* di T è di fondamentale rilevanza, perché una eventuale definizione di T che *non* esplicitasse tale informazione avrebbe scarsa utilità in quanto la sola definizione di *teoria assiomatizzata*, che esplicita la distinzione fra questi due gruppi, *non* è capace di rendere conto della natura di tali nessi. Vediamo perchè.

DEFINIZIONE 1.3. *Teoria Assiomatizzata*. Una T è *assiomatizzata*, $A(T)$, *sse* è un insieme *finito* di *ffbf* di L detti assiomi e t.c. esiste un *procedimento meccanico/effettivo*[15] mediante cui stabilire per ogni *fbf* di L se tale *fbf appartenga o non appartenga* all'insieme finito di assiomi, A, ovvero *sse* A è *decidibile*.

Se non fosse esplicitata la natura della suddetta dipendenza logica, sarebbe legittimo pensare che la *procedura meccanica* impiegata possa essere usata *per costruire* qualsivoglia teoria. Ma così non è: T deve essere già stata costruita, per poter procedere con la sua assiomatizzazione. La dipendenza logica fra i due gruppi di *ffbf* di T non

[13] Si era solito denotare gli assiomi di una teoria con l'espressione 'definizioni implicite', differenti dalle semplici definizioni, dette 'esplicite' in quanto le seconde, a partire da termini noti e primitivi servono a definire nuovi termini complessi, mentre le prime servono a restringere, man mano introdotte, il dominio di riferimento specificando sempre più le caratterisitiche degli oggetti della teoria.

[14] Per il momento nell'accezione di non-primitive.

[15] Se nella definizione è impiegata la nozione di *procedura effettiva* (e/o meccanica), lo è per sottolineare come le definizioni 1.1 e 1.2 non sono in grado di definire in maniera *precisa e finitaria* l'insieme delle *ffbf* che costituiscono T.

riguarda la loro capacità di parlare di U – in quanto, tutte le *ffbf* di L, se appartengono a T, sono vere ripetto ad U. L'esigenza sotto cui si richiede l'assiomatizzazione di T e per la quale, dunque, si impiega tale procedura meccanica (o effettiva) è, piuttosto, quella di *finitizzare* o, per meglio dire, di 'conoscere' in un numero *finito* di passi (effettivamente) l'insieme delle *ffbf* che definisconono e caratterizzano un certo universo di oggetti.

Ad ogni modo, in logica una teoria assume una veste sistematica: T è un insieme di *ffbf* sistematicamente organizzato mediante nessi di natura formale. La distinzione fra piano sintattico e piano semantico risulta rilevante proprio rispetto alla caratterizzazione di tali nessi. Cosa vuol dire '*fbf* dipendenete da assiomi'? Da un punto di vista *semantico*, tale dipendenza è detta *conseguenza logica* ($\Vdash$)[16]; da un punto di vista *sintattico*, *derivabilità logica* ($\vdash$). La definizione generale di teoria allora può essere rifformulata con riferimento a ciascun piano rispettivamente: formalmente, $T =_{df} \langle A, \Vdash \rangle$ e $T =_{df} \langle A, \vdash \rangle$. Bisogna però chiarire la natura dei nessi formali.

1.1.1. Sintassi e teorie.

Da un punto di vista *sintattico,* una generica T è una coppia $\langle A, \vdash \rangle$, dove il secondo membro rappresenta la relazione di *derivabilità logica*. Sin dalle origini della logica simbolica[17] la questione di comprendere, analizzandola, questa relazione fu riconosciuta come fondamentale. Cellucci (2013:183ss) ci ricorda come proprio per Frege lo scopo della logica fosse quello di studiare le *leggi della derivazione*, in quanto esse sono le *leggi dei ragionamenti validi*. Frege, continua Cellucci, riteneva che data la complessità dei ragionamenti, al fine di non introdurre elementi extra-logici in questi e visto che alcune leggi sembrano essere composte da altre più semplici, dobbiamo dividere e frammentare la derivazione nei suoi passi logicamente più semplici, scomponendola nei suoi

[16] Preferiamo usare il simbolo '$\Vdash$' come in (Galvan 2012) ed altri, piuttosto che quello più usuale '$\vDash$', presente in (Enderton 2001) ed altri, per denotare la relazione di conseguenza logica distinguendola così dalla relazione modello denotata dal secondo simbolo, poiché la prima nozione, derivata dalla seconda, assume insiemi di *ffbf* a sinistra e *ffbf* a destra, mentre la seconda assume interpretazioni e strutture (modelli) a sinistra e *ffbf* o insiemi di *ffbf* a destra.

[17] La *logica simbolica* moderna fu inventata da Frege con la pubblicazione dei *Begrifftschrift* del 1879, mediante la nozione di 'funzione proposizionale'. Frege definì il concetto come una funzione unaria a due possibili valori, il vero e il falso, e t.c. se un oggetto cade sotto un concetto la funzione proposizionale è vera, altrimenti è falsa. Più in generale, una funzione proposizionale è una funzione a più (n) oggetti o argomenti. Con essa egli unificò la logica delle *classi* (*booleana*) e quella *proposizionale*, estendendo la prima alla logica delle *relazioni*.

componenti elementari ed atomici[18], anche per poter governare meglio l'applicazione stessa di quelle leggi:

> Questo è l'ideale di Frege di atomizzare la deduzione. Il suo scopo non è rendere la deduzione efficiente, per ottenere la conclusione nella maniera più rapida […]. Atomizzare la deduzione è indispensabile a tal fine poiché, solo quando la deduzione è basata su passi logicamente semplici, noi possiamo "avere una conoscenza accurata delle fondamenta su cui ciascun singolo teorema è basato". In tal modo "nessuna presupposizione può passare inosservata". (Cellucci 2013:185).

Tale scopo non fu però raggiunto da Frege il quale analizzò la deduzione assiomatizzando la logica stessa, ovvero creando un sistema logico (un calcolo, C) costituito, oltre che da un linguaggio L, da a) un insieme di *schemi*[19] d'assioma *logici*, P, atti a regolamentare il comportamento delle *costanti logiche*[20] del sistema e b) un insieme di regole, D, cui appartiene una sola regola di inferenza, il *modus ponens*[21]. L'analisi fregeana della deduzione risultò però inadeguata per vari motivi (cfr. (Cellucci 2013:190-191)). Il principale dei quali – compromettendo la scomposizione atomistica stessa della deduzione – fu che gli schemi d'assioma atti a regolamentare l'uso di connettivi logici specifici ($\neg, =, \forall$), dovendo assumere *forma condizionale,* data l'assunzione della sola regola MP, coinvolgevano anche l'occorrenza dell'*implicazione materiale* ($\rightarrow$), non riuscendo pertanto a separare i 'ruoli' logici di $\neg, =, \forall$ da quello di $\rightarrow$ nella deduzione (Cellucci 2013:191)), come invece l'analisi in componenti primi fra loro presuppone.

---

18 Primi fra loro, p.es. irriducibili o non riconducibili gli uni agli altri.

19 Per *schema d'assioma* si intende una espressione simbolica che rappresenta *schematicamente* un assioma in quanto in esso occorrono *meta-variabili* proposizionali, ovvero *variabili* che variano sull'insieme di tutte le possibili *ffbf* del dato linguaggio. In tal senso uno schema d'assioma può essere inteso quale una regola di costruzione per un insieme (eventualmente infinito) di *ffbf* che si intende includere tra gli assiomi logici o meno di una L-teoria. Le *ffbf* che rientrano nello schema vengono chiamate 'istanze' dello schema.

20 Connettivi o operatori logici, sono definiti mediante la nozione di *funzione di verità*: quelle funzioni cioè che p.es. se applicate a *variabili proposizionali* (come i connettivi proposizionali) al variare dei valori di verità assiociabili alle variabili proposizionali, danno come valore un valore di verità, vero (V/1) o falso (F/0) se ci si limita alla logica classica che è binaria (o bivalente).

21 "L'analisi fregeana della deduzione concorda con la sua visione secondo cui il metodo della amtematica è il metodo assiomatico. Ifatti, la sua analisi della deduzione è data nei termini di quel metodo, e consiste di nove (schemi di) assiomi logici e di una unica regola deduttiva. I nove schemi d'assioma sono i seguenti: A.1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$; A.2. $\big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)\big)$; A.3. $\big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)\big) \rightarrow \big(\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)\big)$; A.4. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$; A.5. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$; A.6. $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$; A.7. $x = y \rightarrow \big(F(x) \rightarrow F(y)\big)$; A.8. $x = x$; A.9. $\forall x F(x) \rightarrow F(y)$. La sola regola deduttiva è il *modus ponens*: (*MP*) $\frac{\varphi \;\; \varphi\rightarrow\psi}{\psi}$ " (Cellucci 2013:190).

L'ideale fu, così, perseguito nel modo più rigoroso possibile da Gentzen negli anni trenta del secolo scorso. Gentzen inventò il *calcolo dei sequenti* e la *deduzione naturale*[22] per analizzare rispettivamente le nozioni di *deducibilità* e di *deduzione* (cfr. (Cellucci 2013:199-213)), le quali non sono altro che casi particolari delle corrispettive nozioni di *derivabilità* e *derivazione*[23]. Allo stesso modo di Frege, comunque, il percorso intrapreso da Gentzen non portò al soddisfacimento dell'ideale fregeano dell'atomizzazione della deduzione in quanto, fra le varie ragioni le regole relative all'implicazione materiale (→) "non sono sufficienti a provare tutte le verità logiche in cui occorre → come unica loro costante logica" (Cellucci 2013:208-213). Ciò significa che le regole relative ad una costante logica (proposizionale) non riescono a definire operazionalmente il significato delle costanti logiche che pretendono governare[24]. Difatti, continua Cellucci:

> Il problema […] è un caso speciale di un problema più generale: le regole di introduzione e di eliminazione[25] non godono in generale della proprietà di separazione [*separation property*]. Per dedurre una formula φ da un insieme di assunzioni Γ, non è in generale sufficiente usare le regole di introduzione ed eliminazione per le costanti logiche occorrenti in φ o in qualche formula in Γ. Ora, […] la proprietà di separazione è essenziale ai principi dell'inferenzialismo. [Inferenzialismo che consiste nel sostenere che il significato delle espressioni è determinato dalle regole di inferenza che governano il loro uso, *Ndr*]. Quindi, il fatto che le regole di introduzione ed eliminazione non possiedono tale proprietà respinge tali primcipi. (Cellucci 2013:211).

---

[22] Il secondo elemento costitutivo di una teoria è, abbiamo detto, il calcolo C. Frege e Hilbert, *assiomatizzarono* C: formalmente $C =_{df} \langle L, P, D \rangle$, in cui D deve essere *non-vuoto* e P finito. Genzen, il quale non assiomatizzò il calcolo, lasciando *vuoto* P e moltiplicò le regole deduttive di inferenza, in corrispondenza degli assiomi logici eliminati, per la manipolazione simbolica delle *ffbf* ammesse nel calcolo da eseguire. In questo caso, all'interno di D si distingue sia fra regole *strutturali* o primitive (caratteristiche dei vari possibili calculi) e regole *derivate* che fra regole *non-operazionali* (quelle di assunzione a zero premesse di *ffbf* e di sostituzione) e *operazionali* nella misura in cui risoettivamente non operano oppure operano trasformazioni simboliche effettive. Ovviamente, le regole non-operazionali sono sempre strutturali mentre fra le regole operazionali distinguiamo fra quelle *proposizionali* e quelle *predicative*, in quanto regolano la manipolazione di simboli logici proposizionali e predicative, rispettivamente. In questo caso, allora: formalmente $C =_{df} \langle L, D \rangle$. L'insieme D non è altro che l'*apparato deduttivo* di una teoria.

[23] La deducibilità e la deduzione corrispondono rispettivamente alla derivabilità a zero *assuzioni* e alla derivazione da zero *premesse*: una *deduzione*, o *derivazione deduttiva*, o semplicemente derivazione, di una *fbf* φ da un insieme di *ffbf* Γ, è una sequenza finita di *ffbf* ciascuna delle quali è o un membro di Γ, o uno degli assiomi logici A1-A9, o è ottenuta da due *ffbf* precedenti nella sequenza in forza di MP, e la cui ultima *fbf* è φ. Una deduzione di φ da $\Gamma = \emptyset$ è detta, così, una *dimostrazione di* φ.

[24] "Pertanto, uno non può dire che le introduzioni rappresentino le definizioni delle costanti logiche relative e che le eliminazioni siano le conseguenze di queste definizioni" (Cellucci 2013:211).

[25] Nella deduzione naturale, alla quale nel calcolo dei sequenti corrispondono alle regole a destra e a sinistra del segno di derivazione, rispettivamente (cfr. (Negri, von Plato 2001)).

Si evince, comunque, da questi tentativi, che l'insieme delle regole di inferenza serve a definire le relazioni di derivabilità e di derivazione e queste si dicono così *chiuse* rispetto a tali regole. Posti, allora, un L e un C qualsiasi, si può definire il concetto di *deduzione* (o *dimostrazione*) e *derivazione da ipotesi* (premesse) in entrambe le versioni del calcolo, assiomatica e anche naturale e/o sequenziale rispettivamente.

DEFINIZIONE 1.4. *Deduzione*. Una *deduzione di* φ *da* A è una sequenza finita $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle$ di *ffbf* t.c. α_n è φ e per ogni $k \leq n$ o a) α_k appartiene a $P \cup A$ oppure b) α_k è ottenuta per *modus ponens* da due *ffbf* precedenti nella sequenza: cioè, α_i e α_j per qualche $i, j < k$, dove α_j è $\alpha_i \to \alpha_k$. Se tale deduzione esiste, si dice che φ è *deducibile* da A, o che φ è un *teorema* di A, e si scrive $A \vdash \varphi$.

DEFINIZIONE 1.5. *Derivazione*. Una derivazione o una derivazione deduttiva, è una sequenza finita di *ffbf* ciascuna delle quali o è un assioma logico o un assioma della teoria o è ottenuta da *ffbf* che la precedono nella sequenza in forza dell'applicazione di una qualsiasi regola dell'apparato deduttivo[26].

La nozione sintattica di teoria è così essenzialmente una tripla di tre elementi: un linguaggio caratterizzante o specifico, L, un sistema logico o calcolo, C, un insieme finito di enunciati fondamentali detti assiomi (non-logici) e/o postulati caratteristici, A: formalmente, $T =_{df} \langle L, C, A \rangle$[27] In questo modo possiamo, a rigore, dare una definizione (formale) sintattica di teoria (assiomatizzata):

---

[26] Nel calcolo della deduzione naturale e nel calcolo dei sequenti le derivazioni assumono la c.d. configurazione ad 'albero', in cui le *ffbf* alle foglie (apici) dell'albero sono dette 'premesse' mentre quelle alla sua radice (base) sono dette 'conclusioni' della deduzione e quelle intermedie sono dette 'conclusioni' della derivazione.

[27] Venendo al primo elemento, L a sua volta è costituito da due elementi: un insieme non-vuoto e finito di simboli o *alfabeto*, AL, e da un insieme non-vuoto di *regole grammaticali*, F, di formazione dell'insieme delle *ffbf*, a partire dai simboli dell'alfabeto. Formalmente, $L = \langle AL, F \rangle$. Mediante F si compie una selezione di un sottoinsieme dell'insieme di tutte le possibili combinazioni dei simboli alfabetici (dell'insieme delle stringhe di simboli) detto insieme delle *ffbf* di L. L'insieme delle *ffbf* è definito *induttivamente* a partire dalla nozione di *termine* (*di* L) fino a quella di *fbf* o *formula* (*di* L). Ad AL appartengono diverse categorie di *simboli*. La distinzione principale è quella fra simboli *logici* e *descrittivi* (non logici o parametri) o, in altri termini, alla distinzione fra simboli rispettivamente *sincategorematici* e *categorematici*. Le variabili e i connettivi (o costanti logiche) sono logici, le costanti (individuali, funzionali e predicative) descrittive. Infine ci sono dei *segni ausiliari* (parentesi) per rendere univoca la formazione delle *ffbf*. I *connettivi*, a loro volta, sono di vari tipi: proposizionali (i segni '$\neg, \wedge, \vee, \to$') e predicativi come i quantificatori (i segni '$\exists, \forall$'). Inoltre, vi si possono aggiungere *connettivi terminali*, a seconda della logica

DEFINIZIONE 1.6. *Teoria Sintattica*. $T =_{df} \{\varphi \in L : A(T) \vdash \varphi\}$.

Lo scopo di una teoria formale assiomatizzata (un sistema formale) sarebbe, dunque, quello di stabilire *quali* sono e *tutti* i teoremi di $A(T)$.

1.1.2. Semantica e teorie.

La definizione 1.2. già assumeva una certa prospettiva semantica in quanto assumeva la nozione di interpretazione, I, e la relazione modello, $\vDash$. La nozione di interpretazione I, è una funzione che va da L di T a U ed è essenziale a che sia definibile la nozione semantica di *verità*[28]. Per *semantica* intendiamo in parte una collezione di *modelli* per un linguaggio formale, L. Ciascun *modello* o *struttura*[29] M è costituito da un insieme *non-vuoto*, U_M, detto 'dominio di riferimento' o 'supporto oggettuale' (del modello), e dalla una funzione di interpretazione, I, che garantisce la denotazione dei simboli descrittivi (*non-logici*) rispetto al dominio di riferimento: formalmente, $I : Cons \to U_M$, con $Cons$ l'insieme delle *costanti descrittive* (sia terminali che predicative) di L. Pertanto, usualmente, una struttura M è definita come una coppia ordinata: formalmente $M =_{df} \langle U_M, I\rangle$. Ma una semantica è costituita anche da una funzione di denotazione d, la quale garantisce la *denotazione* ad ogni *termine* di L sul dominio U_M: formalmente, $d : Term \to U_M$, con $Term$ l'insieme dei termini (chiusi e/o aperti)[30] di L. Perché d possa

---

che si usa: il segno di identità '$=$' ammesso nella *logica del primo ordine con identità* (FOL=), ne è un esempio. Le *variabili* possono essere di vari tipi, infiniti, del primo ordine o individuale o del secondo ordine o predicative fino all'ordine n. Una logica di ordine n contiene variabili fino all'ordine n. Questo per quanto concerne l'alfabeto logico. Per quanto riguarda l'*alfabeto non logico*, invece, esso coincide con l'insieme delle costanti descrittive che a lorovolta si distinguano in *terminali* (individuali o oggettuali da un lato, funzionali (di arietà n) dall'altro) e *predicative* (di arietà n). Anche le costanti possono essere di vari tipi, infiniti, dal primo ordine fino all'ordine n. Senonchè una logica di ordine n può contenere costanti individuali (del primo ordine) e/o costanti predicative dell'ordine n. Non vi saranno costanti di ordini intermedi poichè mediante le variabili dell'ordine n si definiscono le costanti predicative fino all'ordine $n - 1$, a meno di restrizioni eventuali.

Ovviamente nelle teorie logiche l'apparato descrittivo o l'insieme delle costanti descrittive di L può essere eliminato in un modo o nell'altro. Vedremo nel corso di questo capitolo alcuni metodi usati.

[28] La nozione di *verità* non è assoluta, bensì è sempre *relativa al linguaggio prescelto*. Si parla di *verità in un linguaggio*. Anche le altre nozioni semantiche sono quindi sempre intese relativamente al linguaggio dato. Da ora in avanti assumiamo questa relativizzazione in modo implicito tranne laddove sia necessario, o per contesto o per precisione formale, esplicitarla.

[29] O anche *modello per L* o *L-struttura*.

[30] La definizione di $Term$ si genera mediante definizione ricorsiva o induttiva: $Term$ è detto 'chiuso rispetto alla definizione' dei termini del linguaggio. Ammettendo dei termini primitivi, detti *semplici* (logici, le variabili, e non logici, le costanti individuali o nomi propri) la definizione e costruzione

fornire la denotazione anche dei soli termini *aperti* e perché I possa fornire l'inerpretazione delle *ffbf* aperte entrambe devono operare congiuntamente a un'altra funzione detta 'di *assegnazione*', s, di valori (appartenenti a U_M) alle *variabili*: formalmente, $s : Var \to U_M$, con Var l'insieme delle *variabili* di L. Ultimo costituente è la relazione di *soddisfazione*, Sod[31], che sussiste essenzalmente fra *modelli*, *assegnazioni* e *ffbf* e che risulta dalla (simultanea) combinazione di tutte le precedenti funzioni. Tale relazione può essere intesa essere una funzione da U_M, s, φ a valori di verità. Mediante queste nozioni è caratterizzabile matematicamente la semantica di un dato linguaggio formale, ed è definibile la relazione di *conseguenza logica*[32]. Assumendo I segni 'om' e '$\Rightarrow$' quali segni meta-linguistici corrispondenti, rispettivamente, alla *quantificazione universale* e alla *implicazione materiale*[33]:

DEDINIZIONE 1.7. *Conseguenza Logica*. Una *fbf* chiusa φ è conseguenza logica di un insieme di *ffbf* chiuse Γ ($\Gamma \Vdash \varphi$) *sse* per ogni interpretazione e per ogni assegnazione di valore che soddisfano (ogni *fbf* di) Γ anche φ è soddisfatta[34].

---

dell'insieme ricorsivo avviene nella maniera seguente. Estendiamo la nozione di *termine* a quella di *termine complesso* mediante le seguenti clausole ricorsive:

(1) *Base della ricorsione* – Una costante individuale o una variabile sono termini.

(2) *Passo della ricorsione* – Se 'f' è un simbolo di funzione che prende per n argomenti, $n \geq 1$, n termini t, allora $f^n(t_1 \dots t_n)$ è un termine (complesso). I termini complessi solitamente sono detti 'termini funzionali': 'f' è simbolo che denota una funzione, f^n, di cui $f^n(t_1 \dots t_n)$ ne è l'applicazione agli n argomenti ed il cui valore è y, rispetto agli n argomenti cui si applica: $y = f(t_1 \dots t_n)$.

(3) *Chiusura dell'insieme ricorsivo* – Niente altro è un termine.

[31] La soddisfazione è una particolare relazione semantica che intercorre fra *oggetti arbitrari* del dominio e *ffbf aperte* di un dato linguaggio. Generalmente, un oggetto (p.es. *la neve*) soddisfa una *fbf aperta* o un predicato (p.es. x *è bianca*) se il secondo diviene un enunciato vero quando il nome dell'oggetto rimpiazza la variabile argomento del predicato (p.es. *la neve è bianca*). Ovviamente, nei termini proposti non possiamo definire la verità nei termini della soddisfazione, dal momento che abbiamo usato la prima per definire la seconda. Tarski dovette ricorrere all'uso di procedure ricorsive per la definizione della soddisfazione. Evitiamo di ri proporre il rigore presente nella nota precedente. Partendo da oggetti soddisfacenti le *ffbf aperte* semplici (atomiche) del linguaggio si possono definire le condizioni sotto cui *ffbf di arbitraria complessità* sono soddisfacibili. In questo modo si costruisce una definizione formale di verità via soddisfazione: una *ffbf* è vera se è soddisfatta da tutti gli oggetti del dominio ed è falsa altrimenti. Ovviamente, la totalità degli oggetti di cui si parla devono essere interpretati come la totalità degli oggetti cui le *ffbf* dell linguaggio-oggetto riferiscono. Allo stesso modo, mediante procedure ricorsive e distinguendo fra meta-linguaggio e linguaggio-oggetto, anche le altre nozioni semantiche quali quelle di *riferimento* e di *denotazione*, come anche quella di *definizione* (*determinazione univoca*), possono essere costruite.

[32] O anche 'sequenza *corretta*'.

[33] Altri segni meta-linguistici che impiegheremo sono: 'ex' per la *quantificazione esistenziale*, 'et' per la *congiunzione*, 'or' per la *disgiunzione inclusiva*, 'non' per la *negazione* ed infine '$\Leftrightarrow$' per il *se e solo se* (*sse*).

[34] Formalmente, $\Gamma \Vdash \varphi \; sse \; om \; I, s \; (I, s \vDash \Gamma \Rightarrow I, s \vDash \varphi)$. Abbiamo ritenuto implicita la seguente definizione $I \vDash \Gamma \; sse \; om \; \varphi \; (\varphi \in \Gamma \Rightarrow I \vDash \varphi)$. Talvolta è una pratica comune non esplictare la funzione di

La definizione di *formula valida* è così, un semplice caso particolare di conseguenza logica: una conseguenza logica da un insieme vuoto di *ffbf*:

DEFINIZIONE 1.8. *Validità*. Una *fbf* è una verità logica o logicamente valida ($\Vdash \varphi$)[35] *sse* è vera in ogni dominio e per ogni interpretazione[36]

Possiamo così fornire la definizione *modellistica* di teoria:

DEFINIZIONE 1.9. *Teoria Modellistica*. $T =_{df} \{\varphi \in L : A(T) \Vdash \varphi\}$

Siccome la teoria rappresenta formalmente un universo determinato di oggetti, ci si pone la questione di come, a partire da una teoria, sia possibile caratterizzare *univocamente* l'universo di riferimento. Per introdurci nella questione sarà utile previamente distinguere rispettivamente fra linguaggi e modelli del *primo* e del *secondo ordine* e, conseguentemente, fra *logiche* del primo e del secondo ordine.

1.2. Semantica e logica del primo e del secondo ordine.

Ciò che rende un linguaggio propriamente formale non è l'uso di segni arbitrari o simboli, bensì l'uso di alcuni simboli come variabili. Le variabili variano su oggetti. Le variabili che variano su oggetti del dominio di riferimento sono dette *individuali* o *oggettuali* o *del primo ordine*. Le variabili *del secondo ordine* variano su elementi definiti sul dominio di riferimento U. Se questi elementi sono *classi* di oggetti di U (estensioni) o *proprietà* di oggetti di U (intensioni), le variabili sono dette *predicative*; se, invece, questi elementi sono *funzioni* o *operazioni* fra oggetti di U, le variabili sono dette *funzionali*. Variabili *del terzo ordine* variano a loro volta su classi, proprietà funzioni, definite sugli oggetti su cui

assegnazione s assumendo che la funzione interpretazione assurga anche a quel ruolo, per semplicità espositiva. È semplicemente una questione di preferenza che non intacca affatto il rigore della formulazione del concetto espresso. Fintanto chè non sarà necessario non espliciteremo il ruolo di s nel formalismo impiegato.

[35] Ossia, $\Gamma \Vdash \varphi$ con $\Gamma = \emptyset$.

[36] Formalmente: $\Vdash \varphi$ sse om I, s $(I, s \vDash \varphi)$.

variano le variabili del secondo ordine. E così via. Un linguaggio L è definito del primo ordine, L_I[37], se contiene variabili di ordine non oltre al primo. Un linguaggio L_{II}è del secondo ordine se contiene variabili di ordine fino e non oltre il secondo. E così via. Un linguaggio è di ordine maggiore se è almeno del secondo ordine. La logica del secondo ordine (SOL, *second order logic*) è la logica dei linguaggi del secondo ordine e la logica di ordine maggiore (HOL, *higer-order logic*) è la logica dei linguaggi di ordine maggiore al primo.

1.2.1. Strutture del primo e del secondo ordine.

Riprendendo la nozione di struttura o modello data nel paragrafo precedente, $M = \langle U_M, I \rangle$, possiamo caratterizzarla di modo che ci possa fornire una comprensione dei significati linguistici che che si assumono al variare di ordine del linguaggio in logica.

Una struttura del primo ordine per un L_I o una L_I-struttura $M_I =_{df} \langle U_M, I \rangle$ t.c. I sia una funzione $I : Cons \to U_M$ così definita:

- a ogni costante individuale, I assegna un individuo del dominio: $om\ c \in L_I,\ I(c) = c^M,\ con\ c^M \in U_M$
- a ogni costante predicativa n-aria, I assegna una relazione n-aria fra oggetti del dominio: $om\ R_m^n \in L,\ I(R_m^n) \Leftrightarrow R_m^{nM},\ con\ R_m^{nM} \subseteq U_M^n$
- a ogni costante funzionale n-aria, I assegna una operazione n-aria sul dominio: $om\ f_m^n \in L, I(f_m^n) = f_m^{nM}\ su\ U_M\ t.c. f_m^{nM}: U_M^n \to U_M$

Alternativamente, possiamo intendere una struttura del primo ordine M (senza indice[38]) quale una L_I-struttura *sse* M è una $n+1$-pla costituita da un insieme non vuoto di individui U_M e da m proprietà/relazioni n-arie t.c. $M =_{df} \langle U_M, P^1 \dots P^n \rangle$ con P^i ($i \geq 0$) l'insieme delle relazioni i-arie definite su U_M^i e ristrette a quelle denotate dalle costanti predicative assunte dalla teoria.

[37] Per amore di precisione, fra i lingaggi predicativi o del primo ordine possiamo distinguere, seguendo (Enderton 2001), fra linguaggi predicativi *puri*, L_I, i quali non ammettono né il simbolo di identità né i segni n-ari di funzione, e i linguaggi *funzionali*, L_f, che ammettono l'identità e i segni di funzione ma non i predicati. I segni di funzione n-ari, in questi secondi linguaggi possono sempre essere omessi introducendo un corrispettivo segno predicato $n+1$-ario. Pertanto i linguaggi funzionali sono riducibili a $L_{I=} =_{df} \{L_I \cup \{=\}\}$.

[38] Per ragioni notazionali che si chiariranno nei successivi capoversi.

Passiamo alla struttura del secondo ordine, M_{II}. M_{II} non cambia rispetto a M_I relativamente al supporto oggettuale U_M. Piuttosto cambia l'organizzazione dei predicati. L_{II}, a differenza di L_I, non include alcuna costante predicativa, piuttosto assume una gamma di *variabili predicative* da interpretare sui loro domini, i cui valori cioè sono assegnati direttamente sui loro rispettivi domini di riferimento. La definizione formale di M_{II} non cambia, così, di molto rispetto alla precedente, essendo $M_{II} = M = \langle U_M, P^1 \dots P^n \rangle$, con P^i $(i \geq 0)$ l'insieme delle relazioni i-arie definite su U_M^i. Ciò che cambia è che in generale, ora P^i *non* è limitato a quelle relazioni denotate dalle costanti predicative assunte dalla teoria.

In una L_{II}-struttura *standard*, P^i non è ristretto in alcun modo al linguaggio e così, nel caso $i = 1$, P^1 è l'insieme di tutte le possibili relazioni monadiche: $P^1 = \{F_1^{1M} \dots F_m^{1M}\}$; mentre nel caso $i = n$, P^n è l'insieme di tutte le relazioni n-arie: $P^n = \{F_1^{nM} \dots F_m^{nM}\}$[39]. Pertanto, il dominio dei valori delle variabili predicative comprende: nel caso monadico P^1, tutti sotto-insiemi del dominio oggettuale U_M^1 (con $U_M^1 = U_{M1} = U_M$): $P^1 = \wp(U_M)$; mentre nel caso n-adico P^n, tutti i sotto-insiemi di U_M^n (con $U_M^n = U_{M1} \times \dots \times U_{Mm}$): $P^n = \wp(U_M^n)$. M_{II} è detta *standard* (o anche *piena* (M_F)) perché soddisfa entrambi i seguenti requisiti di *estensionalità* e di *massimalità*, ovvero:

ESTENSIONALITÀ. Per ogni indice naturale (om $i \in \mathbb{N}$),

$$om\ x_1^M \dots x_n^M\ (F^{iM} vale\ di\ x_1^M \dots x_n^M \Leftrightarrow G^{iM} vale\ di\ x_1^M \dots x_n^M) \Rightarrow F^{iM} = G^{iM}$$

MASSIMALITÀ. Il dominio di variazione delle variabili predicative è definito da tutti i sottoinsiemi combinatoriamente possibili:

$$non\ ex\ F^{iM}\ (F^{iM} \notin P^i)$$

Se una L_{II}-struttura *non* soddisfa la condizione di *massimalità* allora è detta *generale* o *di Henkin*, M_H. La rilevanza di questo nuovo tipo di struttura è che, sebbene sia anchessa una L_{II}-struttura, le L_{II}-teorie interpretate mediante questa nuova semantica si comportano come L_I-teorie, non valendo per esse i *meta-teoremi* che definiscono le

[39] Nel caso $i = 0$ abbiamo un valore di verità come valore della applicazione di I: $I(P^0) = P^{0M} = V/F$.

proprietà tipiche almeno delle teorie del secondo ordine sotto l'interpretazione *standard*, bensì valendo quelle proprietà che sono tipiche delle L_I-teorie. Vediamo perché.

Cominciamo definendo la *cardinalità* di un insieme, X, qualsiasi ($Card(X)$) come il numero n degli individui che sono elementi dell'insieme. Allora, avremo che: a) $Card(X) = n \Rightarrow Card(\wp(X)) = 2^n$; mentre b) $Card(X) = \aleph_0 \Rightarrow Card(\wp(X)) = 2^{\aleph_0}$. Ora, per il *teorema di Cantor*, secondo cui *non* esiste una funzione *suriettiva* (*onto*)[40] da X a $\wp(X)$, se $\aleph_0$ è l'infinito numerabile, $2^{\aleph_0}$ è infinito non-numerabile (o più che numerabile). Pertanto, se $Card(U_M) \leq \aleph_0$ allora $Card(U_M^n) \leq \aleph_0$ ma se $Card(U_M) = \aleph_0$ allora $Card(\wp(U_M)) = 2^{\aleph_0}$ e se $Card(U_M^n) = \aleph_0$ allora $Card(\wp(U_M^n)) = 2^{\aleph_0}$.

Questo preambolo diventa rilevante per la questione delle semantiche *non-stantard* nel momento in cui riflettiamo sul peso insiemistico di L. Il linguaggio infatti è un sistema finito, al massimo numerabile, di simboli. Ciò significa che rispetto ad un dominio la cui cardinalità è più che numerabile – come nel caso del dominio di variazione delle variabili predicative, $P^n = \wp(U_M^n)$[41] con $n \geq 0$ – ad un qualsivoglia sistema formale mancano le risorse *linguistiche* per *nominare* tutte le relazioni n-arie.

In una L_{II}-struttura piena il linguaggio ritaglia un numero *finito* di costanti predicative relazionali n-arie. Nonostante questo limite linguistico, il vantaggio di una L_{II}-struttura *piena* è che essa può ovviare a questo limite, per così dire, parlando, anziché nominando, di tutte le possibili relazioni n-arie, mediante la quantificazione sulle variabili predicative. In M_{II}, una volta fissato il dominio di base U_M^n (con $n \geq 0$), automaticamente è fissato anche il dominio di variazione del secondo ordine $\wp(U_M^n)$ che, pertanto, può rimanere *implicito* nella definizione di M_{II}. Per quanto riguarda i modelli *generali* tutto ciò non vale. Infatti, *non* soddisfacendo la condizione di *massimalità*, per essi si avrà che $Card(P^n) = \aleph_0$. Ciò dipende dal fatto che il numero delle relazioni dipende dal numero dei segni linguistici – e non dalle possibili combinazioni degli individui – e le variabili

---

[40] Limitandoci per semplicità ai casi *monadici* e alle funzioni *totali* possiamo elencare le *proprietà* fondamentali delle funzioni. Detti D, C rispettivamente *dominio* e *co-dominio* di f:

i. Una funzione $f: D \to C$ è *suriettiva sse* il co-dominio di f è l'intero C, p.es. se per ogni $y \in C$ esiste almeno un $x \in D$ t.c. $f(x) = y$.
ii. Una funzione $f: D \to C$ è è *iniettiva sse* f mappa *differenti* elementi di D in *differenti* elementi di C, p.es. se $x, z \in D$ e $x = z$ allora $f(x) = f(z)$.
iii. Una funzione $f: D \to C$ è *biettiva* se f è sia suriettiva che iniettiva, p.es. f è una *corrispondenza biunivoca*.

[41] Essendo il dominio di variazione delle variabili del primo ordine almeno *infinito numerabile*, a meno di non poter usare la logica su teorie dei numeri o aritmetiche.

predicative (e funzionali) variano su una collezione *fissata* di relazioni (e funzioni) sul dominio. Cioè, $Card(P^n)$ non dipende da $Card(U_M)$, bensì dal numero di simboli predicativi (e funzionali) di L_{II}.

Tutto ciò si coglie ancora meglio andando a vedere come sono definite le *funzioni di assegnazione di valori alle variabili* nei due casi:

- L_{II}-struttura *standard*, M_{II}:
$$s : \{x_i\} \to U_M$$
$$s : \{F_i^n\} \to \wp(U_M^n)$$
$$s : \{f_i^n\} \to \{f_i^{nM} : U_M^n \to U_M\}$$

- L_{II}-struttura di *Henkin*[42], M_H:
$$s : \{x_i\} \to U_M$$
$$s : \{F_i^n\} \to \left(X^n \subset \wp(U_M^n)\right)$$
$$s : \{f_i^n\} \to \{f_i^{nM} : (X_M^n \subset U_M^n) \to U_M\}$$

Shapiro (1991:74-75) presenta anche un terzo tipo di semantica, la c.d. *multi-sorted semantics*. Questi altri modelli, M_{ms}, sono modelli per L_{II} che consistono di n domini separati per ciascun tipo di variabile. In questo caso, L_{II} è da considerarsi come un linguaggio del *primo ordine multi-sorted*, in cui ciascun M_{ms} determina una relazione di predicazione, p, tra gli elementi appartenenti all'intervallo di variazione delle variabili predicative e le sequenze di elementi appartenenti all'inervallo di variazione delle variabili del primo ordine. In questi modelli la predicazione p *non ha natura logica* proprio come avviene in FOL (e/o FOL=). Similmente, per la relazione di applicazione funzionale, a. Questo nuovo modello per L_{II} è così definito: $M_{ms} =_{df} \langle U_M, U_1, U_2, \langle I, p, a\rangle\rangle$, dove M_{ms} è detto *modello del primo ordine* M_1, $M_{ms} = M_1$, e con: $U_M \neq \emptyset$ e $I : Cons \to U_M$ come già per M_I; gli intervalli di valori assegnati alle variabili predicative e funzionali n-arie $U_1^n, U_2^n \neq \emptyset$, per ogni n, rispettivamente; per ogni n, p_n è t.c. $p_n \subseteq (U_M^n \times U_1^n)$ e a_n è t.c. $a_n : (U_M^n \times U_1^n) \to U_M$. La funzione di assegnazione di valore alle variabili per questo tipo di modelli è così definita:

[42] E il momento di fornire un chiarimento circa la distinzione fra modello *standard* e modello *pieno* in relazione ai modelli di Henkin. Shapiro ci spiega che "È immediato che un modello *standard* di L_{II} è equivalente ad un modello di Henkin nel quale, per ciascun n, $D_{(n)}$ è $\wp(U_M^n)$ e $F_{(n)}$ è la collezione di tutte le funzioni da U_M^n a U_M. Tali modelli di Henkin sono talvolta detti *modelli pieni*". Abbiamo uniformato la notazione del brano alla nostra. Inoltre, cfr. (Shapiro 1991:74) per le relazioni fra i due tipi di modelli.

- L_{II}-struttura *multi-sorted*, M_1: $s : \{x_i\} \to U_M$

$s : \{F_i^n\} \to U_1^n$

$s : \{f_i^n\} \to U_2^n$

Valgono poi i seguenti teoremi[43] che mostrano che i modelli *multi-sorted* del primo ordine (modelli *first-order*) sono[44] *equivalenti* a quelli generali o di Henkin:

TEOREMA 1.10. Sia $M_1 = \langle U_M, U_1, U_2, \langle I, p, a\rangle\rangle$ un modello del *primo ordine* per L_{II}. Allora esiste un modello di Henkin $M_H = \langle U_M, U_H, U_f, I\rangle$[45] e, per ogni assegnazione *s* su M_1, esiste una assegnazione s_H su M_H t.c. per ogni *fbf* di L_{II} φ $M_1, s \vDash \varphi$ *sse* $M_H, s_H \vDash \varphi$.

COROLLARIO 1.11. Per ciascuna φ di L_{II} φ è Henkin-*valida sse* φ è valida al *primo ordine*, e φ è Henkin-soddisfacibile *sse* φ è soddisfacibile al *primo ordine*. Per ogni insieme Γ di *ffbf* di L_{II}, Γ è Henkin-soddisfacibile *sse* se Γ è soddisfacibile al *primo ordine*, e φ è una Henkin-conseguenza di Γ *sse* se φ è una conseguenza al *primo ordine* di Γ.

1.2.2. Alcune proprietà meta-teoriche della logica e delle teorie.

Dallo studio delle proprietà sintattiche e semantiche di una logica emergono imporatnti caratteristiche, in particolare relative alle relazioni fra le nozioni di *derivazione* e di *conseguenza logica*. Finchè rimaniamo entro logiche dal potere deduttivo non superiore a quello di FOL= o tali che, sebbene estendano il linguaggio a variabili predicative e funzionali, la loro semantica *non* sia *standard* valgono i seguenti meta-teoremi:

---

[43] La prova è in (Shapiro 1991:75-76).

[44] "In breve, la semantica di Henkin e la semantica *first-order* sono praticamente la stassa" (Shapiro 1991:76).

[45] Con $U_H = X^n \subset \wp(U_M^n)$ e $U_f = \{f_i^{nM} : (X_M^n \subset U_M^n) \to U_M\}$.

TEOREMA 1.12.*Correttezza* (sintattica). Un calcolo logico è corretto 1) in senso debole, se ogni *fbf* φ che è derivabile è valida; 2) in senso forte, se una *fbf* φ è derivabile da un insieme di *ffbf* chiuse Γ, allora φ è conseguenza logica di Γ[46]

TEOREMA 1.13.*Completezza* (semantica)[47]. Un calcolo logico è completo 1) in senso debole, se ogni *fbf* valida è derivabile; 2) in senso forte, se una *fbf* φ è conseguenza logica dell'insieme di *ffbf* chiuse Γ, allora φ è derivabile da Γ[48]

Questi due teoremi insieme, ci dicono che le nozioni di $\vdash$ e $\Vdash$ sono *estensionalmente* equivalenti, sebbene la prima, sintattica, è sia tipicamente *finitaria*, per cui vale il *teorema di finitezza sintattica* mentre la seconda, semantica, è in generale *infinitaria* valendo il *teorema di finitezza semantica* solo nei casi di linguaggi del primo ordine. In base a questa equivalenza, sappiamo infatti che al primo ordine è sempre possibile finitizzare il nesso infinitario di conseguenza logica per via del *teorema di compattezza* (o di *finitezza semantica*):

TEOREMA 1.14. *Compattezza*. Se una *fbf* φ è una conseguenza logica di un insieme Γ di *ffbf*, allora φ è già conseguenza logica di un sotto-insieme finito di Γ[49]

Lo stesso non vale però SOL e tutte le HOL, se la semantica impiegata è *standard* (o piena). Per tutte le L_{II}-teorie aritmetiche con semantica *standard* il *teorema di categoricità*[50] basato sulla seguente definizione:

---

[46] Formalmente: 1) $\vdash \varphi \Rightarrow \Vdash \varphi$; 2) $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi$.
[47] Entrambi i teoremi valgono anche nel caso limite in cui l'insieme $\Gamma = \emptyset$, per cui φ è rispettivamente un teorema e una *fbf* valida. Rispettivamente: $\vdash \varphi \Rightarrow \Vdash \varphi$ e $\Vdash \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$. La prima dimostrazione di deve a K. Gödel (1929).
[48] Formalmente: 1) $\Vdash \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$; 2) $\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.
[49] Tale teorema può essere riformulato in termmini di soddisfacibilità anziché di conseguenza logica: se ogni sotto-insieme finito di un insieme di *ffbf* Γ è soddisfacibile, allora Γ è soddisfacibile. Questo teorema permette di dimostrare la soddisfacibilità, e quindi la coerenza, di molte teorie formali.
[50] Fu dimostrato da R. Dedekind (1888) rispetto all'assiomatizzazione in L_{II} di Peano dell'aritmetica, PA^{II}. Il teorema afferma che tutti i modelli di PA^{II} sono isomorfi, al contrario di quella formalizzata al primo ordine, PA^{I}.

DEFINIZIONE 1.15. *Categoricità*[51]. Una teoria formale è categorica *sse* tutti i suoi modelli sono isomorfi[52].

Cioè, tutti i suoi modelli sono *isomorfi* o *strutturalmente identici*. Questo teorema risponde positivamente ad un requisito che è fondamentale per le teorie: quello di poter definire univocamente il dominio degli oggetti su cui la teoria verte. Il teorema di catecoricità è di fatto equivalente alla dimostrazione dell'unicità del modello di riferimento per una teoria.

1.2.3. Il dibattito sui sistemi formali ed il significato della categoricità.

I teoremi appena incontrati rivestono un ruolo cardine nel dibattito sulla natura della matematica, in particolar modo rispetto alla matematica intesa come sistema formale, ovvero come teoria formalizzata e assiomatizzata. Nel dibattito Hintikka (2000) ha sostenuto che l'affermazione secondo cui per *il primo teorema di incompletezza di Gödel* la matematica non può consistere nella *dimostrazione di teoremi*, a partire da una sua formalizzazione e assiomatizzazione, è *ingiustificata*, in quanto tale affermazione poggerebbe sull'assunzione secondo cui per *sistema formale* si debba intendere un sistema formale del *primo ordine*, una teoria formalizzata e assiomatizzata in L_I. Hintikka, prosegue affermando che per sistema formale bisogna, invece, considerare proprio quei sistemi la cui logica di fondo è SOL, con semantica *standard*. Cellucci (2002:86-89) ne riporta l'argomentazione, che noi riassumiamo:

---

[51] Attributo delle teorie formali.

[52] Oppure, se la teoria caratterizza i suoi modelli a meno di isomorfismi. Formalmente, $om\ I, I'\ (I \vDash T^{II}\ et\ I' \vDash T^{II} \Rightarrow I \simeq I')$. Definiamo l'*isomorfismo* di strutture. Due strutture sono isomorfie, $I \simeq I'$ o anche $M \simeq M'$, *sse* esiste una funzione *biettiva* i $i : U_M \to U_{M'}$ t.c. i preserva l'*interpretazione* (delle costanti descrittive) nelle strutture, ovvero sse soddisfa le seguenti condizioni:

- $om\ c_i \in Cons_L\ ,\ i(c^M) = c^{M'}$
- $om\ f^n \in Cons_L\ ,\ om\ x_i^M \in U_M\ ,\ i\big(f^n(x_1^M \dots x_n^M)\big) = f^{nM'}\big(i(x_1) \dots i(x_n)\big)$
- $om\ P^n \in Cons_L\ ,\ x_i^M \in U_M\ ,\ P^{nM}\ vale\ di\ (x_1^M \dots x_n^M) \Leftrightarrow P^{nM'} vale\ di\ \big(i(x_1^M) \dots i(x_n^M)\big)$

Ciò è estremamente interessanre, constatando che la dimostrazione dell'*esistenza del modello* è pssibile per ogni teoria formale. Purtroppo, però, siccome una L_{II}-teoria con modello *standard* non è né *compatta* (*finitezza* semantica) né *completa* (semanticamente) non si ha modo di giungere al riferimento per la suddetta teoria in modo *finitario*. Per il teorema di *Löwenheim-Skolem*, poi, un sistema formale del primo ordine (con linguaggio la cui cardinalità è infinita numerabile) non gode di questa proprietà, ovvero ha in generale modelli di ogni cardinalità infinita possibile e, dunque, *non-isomorfi*. Un sistema formale il cui modello ha cardinalità almeno infinita numerabile (come richiesto dalle teorie aritmetiche dei naturali) fintanto formalizzato con la logica dei predicati del primo ordine non è in grado di determinare univocamente il suo dominio di riferimento, ossia ammette modelli *non-standard*, nel senso di non isomorfi (con cardinalità infinita diversa).

Sappiamo che FOL= è semanticamente completa. Sapppiamo anche che per un sistema formale qualsiasi del primo ordine vale il seguente meta-teorema dovuto a Gödel (1931):

TEOREMA 1.16. *Primo Teorema di incompletezza* (sintattica). Se un sistema formale $A(T)$ è coerente[53] e *sufficientemente potente*[54], allora esiste una *fbf* φ di $A(T)$ t.c. né φ né la sua negazione, $\neg\varphi$, sono dimostrabili in $A(T)$ e, tuttavia, φ è vero in un modello per $A(T)$[55].

Ossia, che l'insieme di assiomi PA^I *non è deduttivamente completo* e, dunque, che gli assiomi dei sistemi formali *non sono dati una volta e per sempre*.
Sappiamo anche che una teoria qualsiasi del primo ordine *non* è neppure categorica mentre, invece, una teoria al secondo ordine lo è, sebbene per SOL valga il seguente teorema:

TEOREMA 1.17. *Teorema di incompletezza* (semanica) *della logica del secondo ordine*. Non esiste alcun insieme di regole per SOL t.c. 1) in senso debole, *non* ogni *fbf* φ valida in SOL è derivabile; 2) in senso forte, *non* ogni *fbf* φ che sia conseguenza logica di un insieme di *ffbf* Γ in SOL è dimostrabile tramite tali regole[56]

Quest'ultimo teorema, in opposizione al primo, dice che in generale le nozioni di *validità* e di *consistenza* (non contraddittorietà) *non* sono (estensionalmente) in generale equivalenti: tale equivalenza è limitata al solo caso di FOL.
In sostanza, la completezza (semantica) di FOL significa che le regole del calcolo sono complete, cioè date una volta e per sempre e non richiedono estensioni.

---

[53] Consistente, non contraddittorio, da cui non è derivabile una contraddizione.
[54] Sufficientemente potente da rappresentare l'assiomatizzazione (di Peano) in L_I dell'aritmetica (PA^I).
[55] La dimostrazione originaria vale sotto l'ipotesi della ω–coerenza del sistema formale. Una teoria sufficientemente potente è ω-coerente *sse* per ogni *fbf* $\varphi(x)$ con x unica variabile libera, se per ogni naturale n è derivabile $\neg\varphi(\boldsymbol{n})$, dove $\boldsymbol{n}$ è il numerale di n, allora nella teoria non è derivabile $\exists x\varphi(x)$. Fu J.B. Rossere a dimostrare la validità del teorema per sistemi formali semplicemente coerenti: se una teoria è . ω-coerente allora è coerente.
[56] Formalmente: 1) $\Vdash \varphi \nRightarrow \vdash \varphi$; 2) $\Gamma \Vdash \varphi \nRightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

L'incompletezza (semantica) di SOL significa, invece, che le regole di SOL non sono sufficientemente forti per catturare la nozione semantica di *conseguenza*.

I sistemi formali del secondo ordine categorici non ci "costringono a cercare nuovi assiomi perché i vecchi assiomi implicano già tutto" (Hintikka 2000:44) mentre l'incompletezza (semantica) di SOL significa che dobbiamo solo cercare regole *più forti* di volta in volta:

> [L]e vere novità sono metodi dimostrativi migliori, non nuovi assiomi [...] le dimostrazioni non si basano su una lista chiusa di regole di inferenza, ma possono rendere necessaria la scoperta di nuove regole di inferenza. (Hintikka 2000:44)[57].

L'argomento di Hintikka assume quindi un significato ben preciso di categoricità, su cui si sofferma criticamente lo stesso Cellucci (2002:88) ricordando che quanto detto sopra vale *esclusivamente* sotto l'assunzione che "la ricerca delle nuove regole per logica del secondo ordine possa possa rimanere interamente all'interno di un sistema formale del secondo ordine categorico, i cui assiomi sono dati una volta per sempre". D'altra parte – ci fa ancora notare Cellucci – lo stesso Hintikka ammette che la ricerca di nuovi metodi deduttivi può essere codificata ed espressa mediante l'*introduzione di nuovi assiomi*. Pertanto, è inevitabile concudere che gli assiomi non sarebbero dati una volta e per sempre. Infatti, introducendo nuovi assiomi, non si avrebbe più, a rigore, un solo sistema formale del secondo ordine[58].

---

[57] L'intero argomento si basa sui seguenti risultati: se una teoria fosse assiomatizzabile e sintatticamente completa allora sarebbe anche *decidibile*. Purtroppo a causa del primo teorema di incompletezza (sintattica) di Gödel, abbiamo due risultati fondamentali: a) per quanto riguarda una L_I-teoria, data la completezza semantica di FOL= ed il primo teorema di incompletezza (sintattica), ongi teoria sufficientemente potenete da rappresentare PA^I, *non* è categorica. Per essa vale cioè il *teorema di Loewenheim-Skolem* secondo cui per ogni insieme di enunciati del primo ordine, se tale insieme ha un modello (qualunque, anche di cardinalità più che numerabile), allora tale modello è numerabile (il dominio del modello ha cardinalità numerabile); b) per quanto riguarda una L_{II}-teoria, data la categoricità di PA^{II} ed il primo teorema di incompletezza (sintattica), SOL non è semanticamente completa. il punto b) in particolare prova la natura *non linguistica* (non finitaria) del modello *standard* dell'aritmetica (cfr. (Galvan 2012:295-299)).

[58] In base a ciò, quindi, la logica non può essere più considerata un sistema formale deduttivo. Infatti non esiste un insieme di regole deduttive per la relazione di conseguenza logica del secondo ordine e un sistema formale è caratterizzato, come calcolo, da un apparato deduttivo. Fintanto che si assumeva che il metodo scientifico, in particolare matematico, fosse il metodo assiomatico, considerare la logica lo studio della deduzione aveva pure senso. Ma ora la logica è inadeguata per essere lo studio della deduzione come per il primo teorema di incompletezza di Gödel il metodo assiomatico non è più il metodo scientifico. Cfr. (Cellucci 2012:223). Le prime conseguenze che ricava Cellucci sono essenzialmente le seguenti: 1) la logica simbolica non è la logica matematica, che 2) il suo metodo non è quello assiomatico, e che 3) l'insieme delle regole deduttive non è chiuso rispetto alla nozione di logica. Ossia 4) la logica non è calcolo.

Per concludere, il prezzo pagato per i vantaggi di una teoria categorica è quello di possedere una nozione di conseguenza logica tipicamente non finitizzabile, non equivalente per nulla in ciò a quella sintattica di derivabilità (finitaria). Possedere una teoria categorica non vuol dire neanche che negli assiomi della suddetta teoria sia implicito tutto, proprio perché per aumentare il potere deduttivo della logica sottostante (SOL) si devono introdurre nuovi assiomi, i quali solo una volta introdotti sopperiscono a quell'informazione che non può essere derivata da quest'ultimi. Sebbene, dunque, una teoria categorica ha un modello unico, risulta del tutto perduto ogni vantaggio derivabile dell'assiomatizzazione nei termini dello stabilire le relazioni sintattiche di dipendenza fra gli assiomi ed i teoremi della suddetta teoria.

II

IMPEGNO ONTOLOGICO: NOMINALISMO E REALISMO

L'ontologia intesa come scienza non deve presupporre l'ente quale suo oggetto, bensì deve[59] definirne la *costituzione*, così da poter stabilire *cosa esista*[60]. La connessione fra logica ed ontologia si coglie in una teoria formalizzata che ha per oggetto le *forme logiche*, ovvero i modi di combinare le categorie logico-grammaticali di un linguaggio (formale). In una tale teoria non ci si affida all'apparato descrittivo (teorico) – tanto linguistico (le costanti non-logiche) che assiomatico (gli assiomi e le definizioni non-logici) – per la decisione di quali debbano essere le *categorie ontologiche* mediante cui rappresentare tanto gli enti quanto il modo in cui è regolato il loro comportamento[61]. Piuttosto, è mediante le distinzioni in categorie logico-grammaticali e mediante le regole e gli assiomi logici che si controllano le possibili trasformazioni simboliche fra queste categorie e proprio variazioni di tali trasformazioni corrispondono alla definizione ed al controllo di ciascuna pretesa ontologia. In questo capitolo ci concentreremo sulle differenze fra realismo e nominalismo.

[59] In un senso stipulativo.

[60] Classicamente, tale questione deve essere posta a partire dall'assunzione (o riconoscimento) dei princìpi costitutivi o del principio costitutivo dell'ente. La differenza è sostanziale in quanto distinguiamo fra *monismi* e *non-monismi* e all'interno di quest'ultimi fra *dualismi* e le *ontologie duali*. Quest'ultime, a differenza dei primi, tentano di risolvere il problema della relazione fra due princìpi costitutivi dell'ente senza dichiararne la *sostanzialità* (o senza ipostatizzarli) ma senza però venir meno alla loro *irriduicibilità* reciproca. I monismi, da una parte, possono declinarsi o come *materialismi* o come *essenzialismi* (formalismi). I dualismi, dall'altra, assumono i princìpi formale e materiale quali due sostanze (o enti) per garantirne l'irriducibilità reciroca. Le teorie duali come l'*ilemorfismo*, d'altro canto, dichiarano che i principi sono tali e non sostanze o enti.

[61] Infatti la formalizzazione di una teoria scientifica avviene mediante la postulazione di costanti descrittive e di assiomi descrittivi che sono caratterisitici, ma nulla hanno a che fare rispetto alla struttura logica di fondo che organizza tale materiale teorico. Al massimo una teoria scientifica può stabilire mediante metodi sperimentali quale logica meglio si cosnfà a determinati risultati.

2.1. Predicazione e le tre maggiori ontologie.

I vari sistemi ontologici si distinguono primariamente nello stabilire quanti sono i modi dell'essere: se l'essere è *univoco* o *analogo*, equivoco. Se univoco, tutto il *peso* ontologico è affidato ad un solo tipo di entità; se analogo, a più d'una. In generale, la decisione di quali enti una teoria ontologica ammette è dovuta ad una particolare *teoria degli universali*. Se per *universale* intendiamo, poi, "ciò che può essere predicato delle cose" (Aristotele, *De Interpretatione*:17a39)[62], ad una particolare ontologia corrisponderà una particolare teoria della predicazione: tante saranno le ontologie quante le teorie della predicazione. Le differenze fra queste teorie dipendono, così, dai differenti modi di rappresentare formalmente la predicazione. Ecco una tassonomia delle tre maggiori ontologie della tradizione filosofica secondo la caratterizzazione delle rispettive predicazioni:

- *Nominalismo* (N): non esistono universali per cui i predicati (segni linguistici) stanno: i predicati sono solamente veri o falsi delle cose. La predicazione è appena un *façon de parler*[63].
- *Concettualismo* (C): la predicazione nel pensiero sottostà alla predicazione nel linguaggio: i concetti predicabili sono capacità cognitive seguenti regole. Tali capacità sono relative all'uso delle espressioni predicative.
- *Realismo* (R): la predicazione nella realtà sosttostà alla predicazione nel linguaggio: estensioni (classi) e intensioni (proprietà e relazioni) sono le basi della predicazione nella realtà.

N, C e R concordano sul fatto che vi sia predicazione a livello linguistico. C e R divergono da N, attribuendo un ulteriore modo di essere a quello degli individui di cui i predicati si predicano. La primigenia distinzione fra predicazione nominalista, da un lato, e predicazione realista – tralasciando per semplicità le questioni relative al

[62] Cfr. (Cocchiarella 2007:11).

[63] Parliamo di nominalismo ontologico. Attenzione però, perchè "il nominalismo logico non dovrebbe essere confuse col nominalismo ontologico, nonostante il fatto che spessio siano legati insieme. Il nominalismo logico sostiene che la logica ha a che fare col linguaggio; il nominalismo ontologico afferma che non ci sono entità ideali. Così, un nominalista ontologico non ha bisogno di essere un nominalista logico. Egli può, per esempio, pensare che la logica parli di entità reali (non solo linguistiche). E un nominalista logico potrebbe, plausibilmente, ammettere che esistono entità ideali e, conseguentemente, non sarebbe un nominalista ontologico" (Bochenski 1974:n.1).

concettualismo[64] – dall'altro, può essere espressa con le parole di Barcan-Marcus, ossia nei termini di quali sotto-espressioni di un enunciato portino l'onere del riferimento a quelle entità che la data ontologia suppone esistenti:

> Enunciati, veri o falsi, parlano di oggetti. In questo, i nominalisti ed i realisti sono generalmente in accordo. Il disaccordo dal punto di vista metafisico è circa quali oggetti: cosa esattamente viene menzionato, direttamente o indirettamente mediante un enunciato. Il disaccordo, dal punto di vista linguistico è circa quali parole stanno svolgendo la menzione. Quali parole negli enunciate stanno portando l'onere del riferimento, tutte, qualcuna, e se non tutte, che lavoro è compiuto dale altre.
> […]
> Un filosofo la cui ontologia include gli universali, così come proposizioni, numeri e altri oggetti astratti deve esporre quali component di un enunciato menzionano tali oggetti. Il filosofo che respinge tali supposti oggetti deve spegare come quelle componenti, se non riferiscono, debbano essere intese. Come lavorano? In cosa contribuiscono al significato, il contenuto, o più modestamente, alle condizioni di verità di un enunciato? (Barcan-Marcus 1978:351-352).

La tassonomia e le paraole di Barcan-Marcus sono sufficientemente generali, se non fosse che possono risultare imprecise qualora ci si soffermi a riflettere circa quanto detto a proposito di N. si deve infatti puntualizzare che in un certo modo, linguistico, anche per N gli universali esistono:

> Il problema degli universali è talvolta posto con troppa semplicità come il problema se esistono o meno gli universali. Questo è fuorviante, comunque, dal momento che anche il nominalismo non nega l'esistenza di universali ma solamente nega che esistano universali oltre alle espressioni predicabili (le quali possiamo anche chiamare universali nominalistici). (Cocchiarella 1989:254).

Ad ogni modo, per sapere come le sotto-espressioni lavorano in N e R portando, se lo portano, il peso del riferimento, si deve indagare la nozione di *riferimento*. Rivolgendoci

[64] Perché, rispetto al realismo, si differenzia esclusivamente per il *tipo* di entità cui le espressioni predicative riferiscono.

ai linguaggi formalizzati la nozione costitutiva del riferimento era la nozione di *assegnazione di valore*.

2.1.1. Logica e ontologia formale.

L'analisi della *forma logica* dipendende dall'analisi della predicazione. Siccome la combinazione fra le categorie linguistiche da cui dipende la predicazione, nei linguaggi formali dipende dalla combinazione delle categorie *logiche*, non-descrittive, allora l'analisi delle forme logiche dipende a sua volta dai modi di combinazione delle *variabili*. Scrive Cocchiarella:

> Data la nostra assunzione che una ontologia formale è basata su una teoria degli universali, la quale è rappresentata da una teoria formale della predicazione, i due principali tipi di variabili in questione qui sono le variabili predicative e individuali. In generale, ci limiteremo a considerare solo questi tipi di variabili e la prospettiva per quanto riguarda la loro analisi come categorie ontologiche. (Cocchiarella 2001:125).

Solo quando i diversi tipi di variabili sono vincolate dai rispettivi quantificatori allora quelli ammettono come valori entità di uno o di un altro tipo, appartenenti ad uno o ad un altro dominio[65]. La teoria della quantificazione si basa sulla nozione di *assegnazione di valore* alla variabile. Come ci ricorda Salmon (2005), il paradigma di termine (non-descrittivo) direttamente referenziale è la variabile *non vincolata*:

> Una variabile individuale libera è un termine singolare che non denota *simpliciter*, piuttosto denota sotto *una assegnazione di valore alle variabili individuali*. La denotazione[66], rispetto a un mondo possibile a un tempo, di una variabile sotto una tale assegnazione di

[65] Cfr. 1.2: il quantificatore associa un tipo di variabili ad un tipo di dominio.

[66] Questo passo sembra in parte contrastare con la distinzione fra assegnazione e denotazione, le due funzioni s e d. Il passo non vi contrasta poiché il contesto in cui si inserisce è quello di e/o FOL=. Ovviamente, per qunato riguarda FOL= le uniche variabili ammesse sono quelle individuali, le quali possono solo essere *termini* della predicazione o della applicazione funzionale e quindi *argomenti* di predicati e di funzioni, ma mai possono ricoprire un ruolo predicativo. Infatti, la distinzione fra *ruolo referenziale* e ruolo denotazionale consiste in generale proprio in questo, il primo è *svincolato dall'essere ristretto a casi argomentali*, mentre il secondo no, almeno per quanto concerne SOL. Ciò segue direttamente dalle definizioni delle due funzioni: $s : W \to U$ con W, l'insieme delle variabili di un generico L, senza limite di ordine o tipo; $d : Term \to U$, da cui emerge come la denotazione combini l'interpretazione delle costanti terminali con la funzione di assegnazione. Il prosieguo del brano chiarirà questo punto.

> valori alle variabili è semanticamente determinata direttamente dalla asseganzione e non dal ricavare da una variabile un modo di presentazione concettuale. (Salmon 2005:16).

Bisogna mostrare, nei termini di *assegnazione di valore alle variabili*, le differenti soluzioni fornite assunte da N e R atte a caratterizzare il peso del riferimento in funzione della ontologia presunta. In questo modo potrà essere chhiarito in che senso N definisca un'ontologia *piatta*, e come tutte le altre ontologie che ammettono l'esistenza di universali altri da quelli linguistici, definiscono ontologie per così dire *stratificate*. Prima però di concentrarci sul tema introdotto, cerchiamo di introdurre l'origine teoretica della relazione fra quantificazione ed ontologia, il cui padre fu W.O. Quine.

2.1.2. Quine e la nozione di 'impegno ontologico'.

Chi per primo, esplicitamente almeno, fornì un criterio, un metodo, mediante cui stabilire l'ontologia di riferimento per un dato linguaggio fu W.O. Quine. Bochenski, fa riferimento prorio a Quine ed al c.d. *criterio di impegno ontologico* (OC, *Criterion of Ontological Commitment*), sottolineando come

> Le tecniche moderne (il criterio di Quine) rendono possibile mostrare con precisione quali oggetti devono essere ammessi una volta che un determinato linguaggio è assunto. (Bochenski 1974:289).

In quanto Quine si preoccupa di fornire un criterio generale atto a stabilire quali domini di riferimento sono ammessi, dato un certo linguaggio, OC è un criterio meta-teorico[67]. Sia T una L-teoria *chiusa* rispetto la nozione di *conseguenza logica*[68], possiamo allora affermare, parafrasando Quine, che

[67] Potremmo definire in generale un criterio di impegno ontologico come un principio che identifica certe espressioni del linguaggio come quelle che esprimono la presunzione d'esistenza degli oggetti usualmente denotati dai termini del linguaggio. Si possono assumere diversi criteri. In ogni caso, ciascun criterio è anche un meta-criterio nel senso di essere un principio che stabilisce i ruoli delle espressioni rispetto al riferimento sul dominio. Si possono stabilire diversi criteri. Non è questo il caso. Comunque anche le osservazioni sulle quali si basa la discussione su quale debba essere il criterio corretto, se mai ci fosse, sarebbero delle questioni da includere fra quelle meta-ontologiche. Cfr. (Berto, Plebani 2013:27-31) (Van Inwagen 1998), (Manley 2009).

[68] Cfr. la definizione *modellistica* di teoria.

- quando T *implica* una *fbf* φ ($T \Vdash \varphi$) t.c. in essa occorre il quantificatore esistenziale[69] $\exists$ – p.es. se φ è $\exists\omega\,\psi$, con ω meta-variabile che varia sulle variabili di ogni tipo o ordine – T è *ontologicamente impegnata* nei confronti del tipo di entità soddisfacente una qualsisi ψ[70].

Si vede così che la definizione del criterio riguarda la soddisfazione di una *fbf* indipendentemente dall'inerpretazione assunta nel modello, in quanto coinvolge il linguaggio logico (le variabili) della teoria. OC è poi un criterio estensionale, che non fa riferimento all'intensione o al senso, p.es. al modo di presentazione del riferimento[71]. Siccome ogni *fbf* aperta di L *definisce* un sottoinsieme del dominio di riferimento, il criterio può essere riformulato come segue:

- T è ontologicamente impegnata rispetto ad un tipo di oggetti, K, *sse* l'espressione '$\exists\omega\,K\omega$' è conseguenza logica di T *sse*, esiste almeno una entità nel dominio di interpretazione U t.c. appartiene all'estensione di K.

In altri termini e generalizzando rispetto ai quantificatori, una T è impegnata ontologicamente rispetto alle entità del dominio di quantificazione[72]. Possiamo così giungere alla formulazione meta-logica di un *criterio ontologico*:

(OC) *Essere (esistere) è essere il valore di una variabile (quantificata)*

Mediante tale riformulazione risulta immediato stabilire a partire dal linguaggio assunto, se la L-teoria sia una teoria *univocista* o *equivocista* (*analoga*) dell'essere. Nel caso si volesse restringere il peso ontologico della teoria all'ammissione di una sola categoria ontologico-semantica, bisognerebbe restringere l'applicazione di OC ad un unico tipo di variabile quantificabile, la variabile individuale.

---

[69] Tale formulazione può essere ristretta al quantificatore esistenziale in forza del fatto che una *fbf* quantificata universalmente sempre implica la stessa *fbf* quantificata esistenzialmente, formalmente, $\forall\omega\,\psi$ implica $\exists\omega\,\psi$ oppure, $\forall\omega\,\psi \Vdash \exists\omega\,\psi$ o, equivalentemente, $\Vdash \forall\omega\,\psi \rightarrow \exists\omega\,\psi$.

[70] Cfr. (Quine 1963:131).

[71] Per riprendere un modo di esprimersi dovuto a Frege.

[72] Anticipiamo che il rifiuto di Quine per la quantificazione al secondo ordine, sulla bease delle quali egli assume che T non contiene quantificazione di ordine maggiore al primo, è dovuta a ragioni indipendenti da questioni ontologiche in senso stretto. Entreremo più avanti in dettaglio.

2.1.3. Regimentazione del linguaggio.

Perchè sia sempre esplicito l'impegno ontologico di una teoria il linguaggio della data teoria deve essere regimentato. La regimentazione del linguaggio consiste nel fornire delle tecniche mediante cui il linguaggio descrittivo di una teoria possa essere ridotto al minimo. In particolar modo, secondo Quine una teoria deve essere una $L_{I=}$-teoria il cui linguaggio descrittivo possa essere ristretto ai soli predicati teorici. Inoltre Quine predilige una semantica estensionale[73] la cui ontologia di riferimento è quella definita dalla teoria degli insiemi: modellistica.

La teoria degli insiemi, la sua formalizzazione ed assiomatizzazione non sono vincolati ad un unico linguaggio predicativo[74] e, pertanto, non si ha un'unica logica sottostante la teoria. Quine, ma non è il solo, predilige $L_{I=}$ a L_{II}, quale linguaggio su cui regimentare la teoria degli insiemi e di conseguenza predilige FOL= a SOL quale logica di riferimento. Tale predilezione, si può pensare sia dovuta a varie ragioni, principalemte tre. Una prima potrebbe essere *meta-logica*: (i) FOL= è semanticamente completa, quindi ha una semantica *finitaria*[75]. Una seconda potrebbe essere *espistemologica*: (ii) qualsiasi $L_{I=}$-teoria è non-categorica e, quindi, caratterizza *relativamente* ogni suo modello di riferimento (relatività ontologica[76]). Una terza potrebbe essere *semantico-ontologica*: (iii) la semantica per FOL= non ammette il riferimento (estensionale) a classi di oggetti del dominio o (intensionale) a proprietà e relazioni, quindi previene ogni forma di realismo sia nella forma intensionale che estensionale[77].

Commentiamo brevemente questi tre punti. Rispetto a (i), per il primo teorema di incompletezza (ne è un corollario), risulta che ogni teoria del primo ordine, sufficientemente potente da formalizzare l'aritmetica nell'assiomatizzazione al primo ordine di Peano, è semanticamente *incompleta*[78]. Ciò vale anche per la teoria degli insiemi. Dunque, la predilezione per FOL=, in questo caso, *non dipenderebbe* dalla sua

[73] Sono note le assunzioni ontologiche di fondo, dall'atomismo al funzionalismo passando per il behaviourismo – in breve, il fisicalismo –, che spinsero Quine ad assumere come unicamente adeguata la logica estensionale, in opposizione a quella intensionale, e come unica ontologia la teoria degli insiemi.
[74] Frege per esmepio dà una formulazione al secondo ordine, mentre Zermelo al primo.
[75] Per il teorema di compattezza.
[76] Ciò accompagna l'intuizione quineana secondo cui una teoria scientifica fornisce una ontologia solo storicamente e linguisticamente determinate e, quindi, provvisoria.
[77] Per Quine "I predicati [non le variabili predicative, *Ndr*] hanno attributi quali loro 'intensioni' o significati [*meanings*] (o li avrebberero se esistessero gli attributi), e hanno insiemi quali loro estensioni; ma non sono nomi di nessuno dei due. Variabili adeguate alla quantificazione pertanto non occorrono in posizione di predicato" (Quine 1986: 67).
[78] Formalmente, $I_{PA^I} \vDash \varphi \; et \; PA^I \nvdash \varphi$, con I_{PA^I} modello *standard* di PA^I.

applicazione alla teoria degli insiemi. Rispetto a (ii), per il *teorema di Löwenheim-Skolem*, sappiamo che il modello di riferimento di una teoria del primo ordine non è unico. Tale teorema esprime una proprietà *limitativa* delle teorie espresse in un linguaggio del primo ordine (con o meno identità). In questo caso la predilezione per FOL= sarebbe dipendente da una *personale visione* epistemologica – che Quine condivideva, guarda caso, con Skolem[79] – quella del *relativismo* e in particolare di relatività ontologica. Non c'è, però, alcun motivo logico e/o oggettivo per prediligere $L_{I=}$ (o FOL=) a L_{II} (o SOL), dato che ogni teoria in un linguaggio del secondo ordine, con interpretazione *standard* (si intende!), ha il vantaggio di essere categorica. Se non che, SOL è incompleta ma, come visto in (i), anche la teoria degli insiemi o l'aritmetica di Peano al primo ordine lo sono. L'unica ragione che potrebbe allora spingere Quine a prediligere FOL= sembrerebbe essere, pertanto, la (iii). Ma pure rispetto a (iii) la predilezione per $L_{I=}$, quale linguaggio entro cui regimentare una data teoria, è fortemente dovuta ad una personale, più che oggettiva, vision della logica. Ad ogni modo, si riveleranno rilevanti nella critica di Quine a SOL (1970) (cfr. 2.1.4. e 2.1.5) tanto la predilezione della logica estensionale quanto la contrarietà al realismo che, per sua natura, si confà alla sua 'professione' di relativismo. Per il momento, però, concentriamoci su un ulteriore elemento fondamentale: il segno di identità.

La predilezione per la regimentazione in un linguaggio del primo ordine privo del segno di identità sarebbe infatti incomprensibile, poichè in tal caso si perderebbe gran parte del potere espressivo della teoria, in quanto il segno '=' (che ha una interpretazione fissata in $L_{I=}$ e definibile in L_{II} con interpretazione *standard*) è necessario tanto in teoria degli insiemi quanto in teoria dei numeri come anche nelle teorie aritmetiche, qualora non fossero al secondo ordine. Mediante l'identità si stabiliscono i *criteri di identità*[80], le condizioni necessarie e sufficienti per cui non due oggetti, ma due nomi di individui, si riferiscono allo stesso oggetto[81]. Ma l'identità è fondamentale sopratutto nella teoria

[79] Cfr. (De Florio 2007).

[80] E non, come stesso invece si pensa, criteri di *identificazione* o di *individuazione*, ossia criteri mediante cui stabilire se due cose sono (o meno) identiche (Berto, Plebani 2013:41-47).

[81] Già Frege, "sin dalla *Ideografia*, […] mostra uno spiccato interesse per la questione dello statuto degli enunciati di identità. Si considerino ad esempio gli enunciati (4) 2 + 2 = 4 e (5) 4 = 4. Entrambi questi enunciati denotano il Vero e, tuttavia, sembrano avere una diversa portata: dove (4) è evidentemente informativo, (5) non lo è. Posto che Frege interpreta il simbolo "=" come identità, i termini ai suoi estremi in (4) denotano necessariamente lo stesso oggetto (banalmente, lo stesso vale per (5)) e, tuttavia, l'evidente differenza fra i termini "2 + 2" e "4" ci fa rendere conto che in qualche misura "2 + 2" e "4" e, conseguentemente, (4) e (5) devono essere diversi. Del resto, se (4) ci dice qualcosa degli oggetti denotati

estensionale del significato[82], ossia nelle condizioni russelliane per l'*eliminazione delle descrizioni definite*[83] che Quine, nel saggio *On what there is* (Quine 1963), sottolinea non facessero altro che esplicitare le condizioni ontologiche dei termini descrittivi *complessi*[84], esplicitandone la struttura puramente logica. La teoria russelliana assumeva per Quine il valore di strumento per l'esplicitazione delle *presupposizioni ontologiche* di fondo ma anche dell'interpretazione una data teoria, con rispetto alla classe dei termini cui fosse applicabile tale tecnica.

L'assunzione quineana della necessità di fornire una regimentazione del linguaggio e l'impiego generalizzato di tecniche, per così dire, eliminative (quali quella russelliana) puntavano ad una sorta di *restrizione massimale* del linguaggio non-logico presente in una teoria. In tale maniera era possibile esplicitare la *forma logica* delle espressioni insieme con le condizioni denotative coinvolte, rendendo invariante rispetto ai modelli particolari il rierimento ontologico implicito nella teoria non regimentata. Generalizzare tale ideale fino ad eliminare ogni possibile e superfluo coinvolgimento di termini descrittivi in una teoria divenne, così, fondamentale anche per rivelare la natura logica della struttura della realtà di cui la data teoria parla.

---

da "2 + 2" e "4", in verità ci sta fornendo un'informazione relativa a un ggetto solo: non avrebbe senso dire che *due* oggetti 2 + 2 e 4 sono *lo stesso* oggetto. La paradossalità di questa considerazione sembrerebbe risolvibile come segue: "2 + 2" e "4", e conseguentemente (4) e (5), sono *nomi* diversi per il medesimo oggetto. Tuttavia, ciò implicherebbe che (4) e (5) predichino l'identità di nomi, non l'identità di oggetti, mentre è esattamente quest'ultima che sembra in gioco. Dalla considerazione di questo *impasse* fra segno e significato, nasce la distinzione fregeana fra *senso* e *riferimento*, introdotta in *Funzione e concetto* e ampiamente analizzata da Frege in *Senso e denotazione*". (Boccuni 2012:21-22).

[82] Conoscita anche come teoria del riferimento indiretto o teoria descrittiva del riferimento. Cfr. (Salmon 2005) su questo tema in relazione alla sua origine, sviluppo e contrapposizione alla teoria del riferimento diretto (intensionale).

[83] Le descrizioni definite (*d.d.*) sono quelle espressioni *terminali* del linguaggio introdotte dall'articolo determinativo e che, nonostante siano succedute da espressioni predicative, hanno ruolo *referenziale* oltre che *denotativo*, roprio in virtù dell'articolo determinativo. La procedura eliminativa delle *d.d.*, in breve, consiste nel tradurre le espressioni che formalizzano le *d.d.* in espressioni *quantificazionali* sfruttando l'uso dei *quantificatori numerici*. Russell la propose nel suo "On Denoting" pubblicato su *Mind* nel 1905. Russell in quel saggio (Russell 2005) trattare le descrizioni definite (*dd*) mediante la quantificazione singolare. In breve, espressioni del tipo 'il filosofo' sono rappresentabili simbolicamente mediante l'introduzione di un operatore ι per l'articolo definito 'il' e che vincola le variabili di una *fbf* dando origine ad un termine: '$\iota x\ Fx$'. Dal momento che '$\iota x\ Fx$' si comporta come un termine chiuso '$G(\iota x\ Fx)$' è un enunciato. Secondo Russell, enunciati del tipo di '$G(\iota x\ Fx)$' che esprimono 'l'individuo che è F è G' sono veri in una valutazione *sse* è vera anche

(R) $\quad G(\iota x\ Fx) \Leftrightarrow \exists x(\forall y\ (Fy \leftrightarrow y = x) \wedge Gx)$

Come si vede, il secondo elemento y è introdotto *ex novo* a patto di quantificarlo universalmente. Mediante R, per Russell è sempre possibile eliminare le dd a vantaggio di apparato quantificazionale e identità in contesti enunciativi del tipo '$G(\iota x\ Fx)$'.

[84] Termini descrittivi semplici sono le costanti individuali.

Un primo passo consistette nella scelta di Quine di estendere la teoria russelliana dell'eliminazione delle *descrizioni definite* (*dd*) ai nomi propri, le costanti individuali. Partendo dall'assunzione che 'Pegaso' sia il nome mediante cui usualmente si denota il cavallo alato della mitologia graca, enunciati del tipo 'Pegaso vola' o 'il cavallo alato vola' sarebbero estensionalmente equivalenti, e Quine propose di tradurli entrambi secondo le linee proposte da Russell. La tecnica è la seguente: per prima cosa, al nome 'Pegaso' si associa un predicato 'x è Pegaso' o, per meglio dire, 'x pegasizza', per cui l'enunciato complessivo diventa: 'esiste un unico x tale che (x pegasizza e x vola). In questo modo, l'essere (l'esistere) viene esplicitato e ridotto all'espressione referenziale (quantificazionale) 'esiste un x'. A questo punto la *questione ontologica* è esclusivamente la questione di *quali valori assegniamo alla variabile* 'x'. Secondariamente, Quine introdusse un *meccanismo di conversione*[85] che potremmo esplicitare semi-formalmente:

- Per ogni nome o costante individuale c, si introduce un predicato monadico ad esso relativo, P_c, t.c. sia vero unicamente de *il referente di* c. Così, si può procedere a convertire una *fbf* in cui occorre c, ψ_c, in un'altra φ in cui la costante sia sostituita dalla descrizione '*il referente di c*', φ è $\psi(c/\iota x\ P_c x)$. A questo punto, $\psi(n/\iota x\ P_c x)$ può essere trattata mediante la regola di eliminazione di Russell: la descrizione $\iota x\ P_c x$ che occorre in φ viene eliminata in favore di una espressione quantificata singolarmente, che usa cioè un apparato quantificazionale con identità[86].

Il risultato è una teoria espressa in $L_{I=}$ senza costanti individuali e senza descrizioni definite (potenzialmente anche senza funzioni[87]) e, quindi, senza termini descrittivi alcuni. Siccome ancora sono presenti nel linguaggio della teoria i predicati teorici

---

[85] "Mostrare l'apparato referenziale di un enunciato spesso assume la forma del fornire una 'analisi'; p.es. rimpiazzalo mediante un altro che è presumibilmente equivalente ma che è detto migliore al fine di mostrare o esprimere il *locus* della riferimento. La teoria delle descrizioni di Russell e la conversion dei nomi prori in predicate di Quine ne sono due esempi in relazione" (Barcan-Marcus 1978:352).

[86] Cfr. (Russell 2005), (Soames 2003:93-131)). In paricolare cfr. (Hand 2006:653).

[87] Fintanto che le funzioni sono *totali* (ovverosia t.c. per ogni elemento del dominio esiste un valore nel co-dominio) si può sempre eliminare le funzioni dal linguaggio descrittivo a vantaggio di predicati: una funzione n-aria f^n è estensionalmente equivalente a una relazione (funzionale) $n + 1$-aria R^{n+1} in modo che corrispondano l'una all'altra. Come sottolinea Smith nel suo manuale *An Introduction to Formal Logic*, al posto di usare un termine funzionale monadico '$f(x)$' per riferirsi ad un oggetto (il valore della funzione f relativamente all'argomento x) si può usare la *dd* applicandola ad una predicato binario 'R' per ottenere 'l'individuo y t.c. x è nella relazione R con x'. Se assumiamo, dunque, un linguaggio predicativo del primo ordine con identità con anche termini funzionali per funzioni totali si può sempre restringere il linguaggio a $L_{I=}$ eliminando così le funzioni: "Basta usare le relazioni funzionali con la teoria delle descrizioni di Russell!" (Smith 2013:344). Vedremo nei prossimi capitoli alcune obiezioni a questa pratica rispetto all'assunzione di funzioni non-totali (*parziali*).

mediante cui si eliminano i termini descrittivi, la teoria è regimentabile nel senso di Quine (o *parzialmente* regimentabile) mediante tale tecnica.

Diviene naturale allora affiancare a OC un secondo criterio. Un criterio questa volta capace di essere un *criterio di limitazione* dell'ontologia che una teoria deve soddisfare per essere una teoria regimentata nel senso quineano. Tale criterio è il seguente:

(CI) *Non vi sono entità senza identità*

Sebbene la regimentazione di Quine non abbia ancora fornito una tecnica mediante cui eliminare (in un qualche senso che forniremo nelle prossime pagine) anche le costanti predicative, la restrizione di Quine $L_{I=}$ e la conseguente predilezione per FOL=, mediante l'assunzione di CI in aggiunta a OC, implica che l'unica ontologia per lui plausibile sia quella nominalista. Nel prossimo paragrafo vedremo che l'apparato descrittivo può essere ulteriormente ridotto, fino a completa eliminazione, senza per questo assumere una logica deduttivamente più potente di FOL=.

2.1.4. Logica del secondo ordine e nominalismo.

Sebbene impropriamente[88], possiamo dire che SOL è una estensione *non conservativa*[89] di FOL (e/o FOL=) nel cui linguaggio si introducono variabili predicative e funzionali[90] e i quantificatori possono venir affissi da entrambe queste ultime. Inoltre, l'identità, dacchè ha un'inerpretazione fissata rispetto tutti i modelli, è definibile[91] indipendentemente da essi, mediante il puro apparato logico. Non solo, così L_{II} ha un potere espressivo di molto maggiore rispetto a L_I, essendo $L_I \subset L_{II}$, ma lo stabilire un C per L_{II} a seguito di tali introduzioni obbliga ad estendere le regole grammaticali di buona formazione, quelle di inferenza (deduttiva) e la definizione di verità *via* soddisfazione, ai

[88] La nozione di *estensione* si applica propriamente a insiemi di *ffbf* e a *teorie*, cfr. 1.2.
[89] *Sse* la semantica è *standard*, cfr. 1.2.
[90] L_{II} può essere a sua volta estesa in modo tale da ammettere anche *costanti predicative* che possono avere *espressioni predicative* (variabili e costanti) per argomento.
[91] Come la congiunzione dei due principi di identità: il primo proprio di FOL=, di *indiscernibilità degli identici*, detto anche *Legge di Leibniz*, formalmente: $x = y \to \forall x\, \forall y\, (Px \leftrightarrow Py)$; e il secondo, proprio di SOL, di *identità degli indiscernibili*: $\forall F\, \forall x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow Fy) \to x = y$. Pertanto, $x = y =_{df} \forall F\, \forall x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow Fy)$.

casi di termini e *ffbf* in cui occorrono tali variabili[92]. Se la semantica assunta per i linguaggi del secondo ordine è quella *standard*[93], a fronte di tale aumento di espressività – si pensi al teorema di categoricità – le (meta-)relazioni di conseguenza sintattica e semantica non sono più estensionalmente equivalenti.

La critica di Quine a SOL (Quine 1986:§5) e la conseguente limitazione a FOL= quale unica vera logica è strettamente connessa alla questione appena sollevata della regimentazione del linguaggio delle teorie e la predilezione per $L_{I=}$. In questo senso, la critica di quine a SOL ci consente di connettere il punto (i) ed il punto (iii) di cui sopra, che ricordiamo, a loro volta mettevano in relazione, il primo, la completezza semantica di FOL= con l'incompletezza semantica di SOL e delle $L_{I=}$-Teorie, mentre (iii) propone una critica di matrice esclusivamente ontologico-semantica, con riguardo alla semantica *standard* di SOL.

Il punto (iii) non tocca SOL nel suo aspetto sintattico, in quanto è un calcolo. Infatti, un L qualsiasi ed un C qualsiasi, di per se stessi, non sono nè del primo nè di un ordine superiore al primo, bensì sono solo un insieme di simboli ordinati (in tale o tal'altro modo) o di stringhe di segni (*ffbf*) e un insieme di sequenze di tali stringhe (argomenti o derivazioni), ripettivamente. Allo stesso tempo, però, è anche vero che alcuni linguaggi e calcoli sono capaci di affèttare la semantica escludento la semantica *standard* per SOL (e/o HOL), p.es. condizionando il modo in cui i valori delle variabili variano sul dominio, escludendo deduttivamente l'esistenza di alcune classi, p.es. permettendo di dedurre *ffbf* tipo $\neg\exists P\ \forall x\ (\neg Px)$. Comunque, un qualsiasi L e un qualsiasi C non sono, in assoluto, capaci di determinare l'intervallo di variazione o l'estensione delle variabili del secondo ordine (cfr. (Shapiro 1991:13)). La semantica, solo assumendo una tale o tal'altra definizione della funzione di assegnazione dei valori dalle variabili al dominio, determina la vera natura del linguaggio e del calcolo.

2.1.5. Quine sulla logica del secondo ordine.

Secondo OC il peso ontologico di una qualsiasi teoria è portato e rivelato dagli enunciati quantificati (esistenzialmente). La verità degli enunciati esistenziali della teoria si basa

[92] I casi da estendere nella definizione induttiva sono quelli presenti alla base dell'induzione, il caso in cui l' *fbf* è atomica e, al passo induttivo, il caso quantificato.
[93] Essento i modelli generali e del primo ordine essenzialmente equivalenti fra loro.

sulla supposta esistenza delle entità cui la teoria è vincolata dalla quantificazione esistenziale[94]. In questo senso, la quantificazione su variabili predicative ci avverte che SOL è impegnata nei confronti della esistenza di entità di ordine superiore al primo. Vista la predilezione di Quine per le entità estensionali, la quantificazione su variabili predicative ci avverte dell’esistenza di classi (o insiemi logici) piuttosto che di proprietà in quanto le prime, a differenza delle seconde, godono di condizioni di identità chiare[95].

Secondo Quine SOL non è propriamente una logica, piuttosto, è *una teoria degli insiemi in abito da pecora* (Quine 1986:66 (§5)) e, come tale, solo apparentemente una logica ontologicamente innocua essendo, in verità, altamente *compromessa* ontologicamente in quanto, essendo impegnata nei confronti di entità di ordine superiore al primo, alcuni principi della la semantica *modellistica*[96] per SOL nella sua formulazione estensionale rispecchiano fedelmente alcuni principi della teoria degli insiemi nell’assiomatizzazione ZFC[97]. Ad esempio, è pienamente ammissibile la seguente formulazione della condizione di estensionalità che avevamo già citato nel primo capitolo

ESTENSIONALITÀ. Per ogni indice naturale (o$m\ i \in \mathbb{N}$),

$$om\ x_1^M \dots x_n^M\ (\langle x_1^M \dots x_n^M \rangle \in F^{iM} \Leftrightarrow \langle x_1^M \dots x_n^M \rangle \in G^{iM}) \Rightarrow F^{iM} = G^{iM}$$

---

[94] “Per mostrare che una teoria assuma un dato oggetto, o oggetti di una data classe, si deve mostrare che la teoria sarebbe falsa se quell’oggetto non esistesse, e se quella classe fosse vuota; quindi che la teoria richiede quell’oggetto o i membri di quella classe, in ordine a essere vera” (Quine 1969:93).

[95] Il c.d. *principio di estensionalità*, secondo cui due classi qualsiasi sono identiche *sse* esse hanno esattamente gli stessi elementi. Questo principio non vale per le proprietà o attributi, per le entità intensionali in genere: “Gli attributi stanno ai predicati, o enunciati aperti, come le proposizioni stanno a enunciati chiusi. Gli attibuti sono come le proposizioni rispetto all’inadeguatezza della loro individuazione. Gli insiemi sono ben individuati dalla *legge di estensionalità*, la quale identifica gli insiemi i cui membri sono gli stessi; maquesta legge fallisce per gli attiìributi, salvo che la parola ‘attributo’ sia mal applicata e ‘insieme’ servisse meglio allo scopo. Enunciati aperti che sono veri appena delle stesse cose non determinano mai due insiemi ma possono determianre due attributi” (Quine 1986:§5,67). La logica intensionale infatti non accetta il principio di estensionalità come non accetta quello della sostituzione uniforme o di vero-funzionalità.

[96] Nel capitolo precedente avevamo definito la *condizione di estensionalità* mediante il meta-predicato ‘vale di’. Questa riformulazione tiene conto della fondazione insiemistica implicita nella semantica modellistica t.c. il suddetto predicato viene interpretato mediante la relazione insiemistica di appartenenza. Le due formulazioni per i nostri scopi sono equivalenti.

[97] Nel 1908 Zermelo propose la prima assiomatizzazione della teoria degli insiemi, detta Z. L’assiomatizzazione di Zermelo faceva uso però di un concetto ambiguo, quello di proprietà ‘definita’, in quanto il suo significato operazionale non era chiaro. Nel 1922 Fraenkel propose che tale concetto fosse operazionalizzato mediante una formulazione al primo ordine della teoria le cui *ffbf* atomiche fossero limitate all’appartenenza ed alla identità. Mediante l’aggiunta degli *assiomi* di *rimpiazzamento* e di *regolarità* prima costituendo la teoria ZF, e di *scelta* (AC) poi, con cui la nuova teoria fu infine denotata come ZFC.

il quale non è atro che la traduzione in L_{II} dell'assioma di estensionalità, tipico della teroria degli insiemi nell'assiomatizzazione (in L_I) ZFC:

$$(Ext) \quad \forall x \, \forall y \, ((\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Veniamo però al cuore della critica quineana a SOL. Quine scrive:

> Consideriamo prima qualche quantificazione ordinaria [al primo ordine, *Ndr*]: '$\exists x \; (x \; passeggia)$', '$\forall x \; (x \; passeggia)$', '$\exists x \; (x$ è $primo)$'. L'enunciato aperto a seguire il quantificatore mostra 'x' in una posizione in cui potrebbe stare un nome; un nome di un passeggiatore, per esmpio, o di un numero primo. Le quantificazioni non vogliono significare che i nomi passeggiano o sono primi; ciò che è detto passeggiare o essere primo sono cose che possono essere nominate da nomi in quelle posizioni. Collocare la lettera predicativa 'F' in un quantificatore, allora, vuol dire trattare improvvisamente un posto per predicato come un posto per nome, e quindi trattare i predicati come nomi di entità di qualche sorta. Il quantificatore '$\exists F$' o '$\forall F$' dice non che qualche o tutti i predicati soo così e colì, ma che qualche o tutte le entità del tipo mominato dai predicati sono così e così. Il logico che afferra questo punto, e tuttavia quantifica 'F', può dire che queste entità sono attributi; gli attributi sono per lui i valori di 'F', le cose su cui 'F' varia. […] Gli attributi stanno ai predicati, o agli enunciati aperti, come le proposizioni stanno ad enunciati chiusi. Gli attributi sono come le proposizioni rispetto alla inadeguatezza della loro individuazione. Gli insiemi sono ben individuati dalla *legge di estensionalità*, la quale identifica gli insiemi i cui membri sono gli stessi; ma questa legge non vale per gli attributi, salvare il termine 'attributo'è male e 'insieme' sarebbe meglio. Gli enunciati aperti che sono veri di esclusivamente delle stesse cose mai determinano due insiemi, ma possono determinare due attributi. (Quine 1986:66-67 (§5)).

In sostanza, SOL non è pura logica perché supponendo una semantica modellistica, automaticamente le variabili predicative verrebbero trattate come posti per nomi di individi astratti, le classi. Il punto focale è il passaggio "improvviso" nel considerare le variabili predicative quantificate da posti per predicati a posti per nomi. In virtù della soddisfazione della condizione di estensionalità, è legittimo secondo Quine trattare le variabili predicative alla stessa stregua di variabili individuali, nel senso che variano su individui, oggetti, sebbene quest'ultimi siano individui distinti dai primi, siano insiemi (classi). Esplicitando l'impegno ontologico di una L_{II}-teoria sotto la condizione di estensionalità, è legittimo di traformarre la L_{II}-teoria in una $L_{I=}$-teoria trasformando variabili predicative in variabili individuali varianti su classi e, allo stesso tempo, trasfomare la relazione di predicazione in quella di appartenenza (cfr. (Bricker 2014:§1.7.2)).

Due questioni emergono dal trasformare una L_{II}-teoria in una $L_{I=}$-teoria dove la relazione di predicazione è quella di appartenenza insiemistica: a) trasformare le variabili predicative in posti per nomi significa trasformarle in variabili del primo ordine il cui dominio di variazione non può essere il dominio di variazione delle variabili del primo ordine originali (se non estendendo questo stesso) e b) dover ammettere di considerare come non logica la nozione di appartenenza insiemistica[98]:

> Qualche logico, per questa ragione, vede i valori di 'F' come insiemi. Ma io disapprovo l'uso di lettere predicative come variabili quantificate, anche quando i loro valori sono insiemi. I predicati hanno attributi quali loro 'intensioni' o significati (o li avrebbero se esistessero tali attributi), e hanno insiemi quali loro estensioni; ma essi non sono nomi di nessuno dei due. Le variabili idonee per la quantificazione perciò non occorrono in posizione di predicato. Occorrono in posizione di nome.
> Per porre la questione in un altro modo: uno che ammette gli attributi non dovrebbe leggere 'Fx' come 'x ha F', con 'F' così in posizione nominale; piuttosto, che scriva 'x ha y', o, se preferisce distinte variabili per attributi, 'x ha ζ'. Similmente, [**(i)**] se qualcuno vuole ammettere insiemi quali valori di variabili quantificabili, che scriva '$x \in y$'; o, se preferisce distinte variabili per insiemi, '$x \in \alpha$'. Lasciamolo pure passare esplicitamente a quello che ho chiamato […] l'analogo insiemistico. [**(ii)**] la lettera predicativa 'F', come la lettera proposizionale 'p', non è del tutto una variabile che prende valori [*value-taking*], piuttosto appena una lettera schematica che prende sostituti [*substitution-taking schematic letter*]. (Quine 1986:67 (§5)).

Se il primo capoverso riafferma che assumendo la concezione estensionalista le variabili predicative, se quantificate, non possono essere trattate come termini generali, a meno di produrre una confusione fra termine generale e nome di classe, il secondo

[98] Sebbene FOL= sia semanticamente completa, a corollario del primo teorema di incompletezza di Gödel (analogo del corollario per l'aritmetica di Peano al primo ordine), non lo è la teoria degli insiemi (cfr. (Bagaria 2014:§5.2)).

capoverso presenta la soluzione quineana per estromettere, chiarendo, la possibilità di tale confusione generata dalla quantificazione delle variabili predicative. Tale soluzione si articola nei due punti evidenziati nel passaggio. Il punto **(i)** dice come intendere il senso delle espressioni predicative, trasformando la variabile predicativa in una nuova variabile individuale che varia su un secondo dominio di interpretazione e preceduta (a sinistra), nel caso estensionale, dalla relazione di appartenenza: così concepiti con la nuova notazione gli enunciati

> [C]ombinano variabili che si estendono a due universi distinti. Le variabili 'x', 'y', ecc. si estendono a un qualche universo non specificato U, mentre le variabili 'α', 'β', ecc. si estendono ad un universo distinto ma correlato, U_1, composto delle sottoclassi di U: cioè le classi i cui elementi appartengono a U. (Quine 1972:276).

In particolare, il punto **(i)** risponde alle questioni a) e b) precedenti. Il punto **(ii)** propone una soluzione per effettuare effettivamente il passaggio da un'espressione predicativa di L_{II} alla sua analoga nel linguaggio della c.d. 'teoria delle classi'[99]: considerare le variabili predicative quali delle *lettere schematiche* (meta-variabili) che variano su *ffbf atomiche* della teoria delle classi[100]. La conseguenza dell'adozione di variabili di classe per la quantificazione è che mediante l'applicazione di **(i)** e **(ii)** si introduce una teoria "le cui leggi non erano esprimibili ai livelli precedenti di logica" il cui prezzo "per questo aumento di potenza" è squisitamente "ontologico" (Quine 1972:279): quantificando le variabili di classe assumiamo un campo di valori o entità su cui tali variabili variano.

Abbiamo visto in che modo Quine chiarisca il senso della sua critica a SOL quale teoria degli insiemi mascherata: ogni *fbf* di una L_{II}-teoria può essere così tradotta in un enunciato della teoria delle classi in cui la predicazione non è logica, bensì è teorica – essendo l'appartenenza una nozione insiemistica, fra gli individui del dominio del primo ordine e quello delle classi – in cui quantificazione costringe ad assumere le classi quali entità.

[99] Cfr. la nota immediatamente successiva.

[100] Continua Quine dal passaggio precedentemente citato: "Gli enunciati più semplici in questa notazione della teoria delle classi consistono del segno 'ε' ['$\in$', *Ndr*] con una variabile comune [individuale, *Ndr*] alla sua sinistra e una variabile di classe alla sua destra, come in '$x\ \varepsilon\ \alpha$'; e tutti gli enunciati ulteriori vengono costruiti a partire da questi più semplici mediante quantificazione e funzioni di verità". (Quine 1972:276).

Per queste ragioni Quine ritiene che FOL= sia l'unica logica nel cui linguaggio regimentare ogni teoria. Come visto nella proposta tassonomia delle ontologie, una teoria regimentata mediante FOL= è un'ontologia nominalista. Seguendo Cocchiarella, esamineremo nel prossimo paragrafo lo sviluppo del pensiero di Quine in relazione alle *due tesi fondamentali del nominalismo*.

2.2. Quine e le due tesi del Nominalismo.

Considerare SOL una teoria delle classi mediante l'assunzione di un nuovo dominio di quantificazione per le variabili di classe ricorda la strategia adottata dalle multi-sorted semantics. Nel 1940 propone la formalizzazione completa della teoria delle classi, chiamata *Mathematical Logic* (**ML**) (Quine 1981), che include le classi oltre agli insiemi, gli individui su cui variano le variabili individuali (chiamate da Quine 'variabili comuni'). In precedenza, nel 1937, in un articolo "New Foundations for Mathematical Logic" Quine propose una assiomatizzazione della teoria degli insiemi chiamata *New Foundations* (**NF**) (Quine 1937). **NF** era una semplificazione della precedente *teoria dei tipi* proposta nei *Principia Mathematica* da Whitehead e Russell (1910-1913)[101]. **ML** è una estensione di **NF** in quanto in **NF** non occorrono le variabili di classi. Già in **NF**, comunque, la matrice estensionalista da cui origina la critica a SOL portò Quine a sostituire la predicazione con l'appartenenza insiemistica:

[101] La teoria dei tipi semplici fu inventata da Russell per evitare il paradosso (e analoghi) riscontrato dallo stesso Russell (nel 1902) interno al sistema prodotto da Frege nel tentativo di ridurre la matematica alla logica. Tale teoria prevede, attraverso una regolamentazione sintattica, una stratificazione di livelli di entità (i *tipi*), separati gli uni dagli altri ed espressi fedelmente mediante restrizioni sintattiche del linguaggio: ogni classe appartiene ad un tipo superiore al tipo cui appartengono i propri elementi, cui essa per la restrizione non può ovviamente appartenere. Così, ci sono infinite (transfinite) classi universali – la classe di tutti gli elementi di tipo immediatamente inferiore che soddisfano la condizione $x = x$ – (una per ogni tipo) e infinite classi vuote (una per ogni tipo) – la classe di tutti gli elementi di tipo immediatamente inferiore che soddisfano la condizione $x \neq x$ (cfr. (Bochenski 1972)). Queste *ingiustificate* infinità sono evitate in **NF**. L'unica stratificazione ammessa in **NF** riguarda la *fbf* a destra del bicondizionale nel *principio di comprensione* (CP) per le classi: per ogni *fbf* stratificata esiste una classe corrispondente. Il punto è che il linguaggio di **NF** ammette *ffbf non*-stratificate cui, pertanto, non può corrispondere alcuna classe. Per tale ragione, **NF** e, quindi, la restrizione imposta in **NF** a CP, è giustificata solamente dall'evitamento delle contraddizioni. Comunque, come nota Boccuni (2012:61), di **NF** non ne è stata ancora fornita una dimostrazione di consistenza, sebbene la teoria più debole, risultante dall'aggiunta a **NF** di *ur-elementi* (di individui non insiemistici), è consistente.

> Quine, comunque, per ragioni relative in parte al problema di un principio di individuazione [identità, *Ndr*] per proprietà e relazioni, rifiuta queste entità in favore degli insiemi e ha proposto di rimpiazzare la teoria dei tipi semplici (monadica) (che è equiconsistente con la teoria dei tipi completa[102]) con il suo sistema, ora ben conosciuta, **NF** che contiene solamente variabili individuali e una costante predicativa binaria presumibilmente designante l'appartenenza (ad un insieme). Il principio di comprensione[103] stratificato che Quine ha in mente, perciò, riguarda l'appartenenza piuttosto che la predicazione. (Cocchiarella 1975:35-36).

In **NF,** pertanto, non vi sono variabili per classe ed il linguaggio della teoria è quello di FOL= con l'appartenenza quale unico predicato non-logico. In quest'approccio assiomatico ben più essenziale di **ML** e dunque di SOL, si può cogliere tutta l'ideologia nominalista che permeava il pensiero di Quine. Infatti, come già anticipato in 2.1, la prima tesi fondamentale del nominalismo è la seguente (Cocchiarella 1989:256):

(N1) Non esistono universali oltre alle espressioni predicabili

Pertanto, le uniche variabili quantificabili sono quelle individuali. **NF** soddisfa N1 in quanto non esistono entità di ordine superiore. Allo stesso tempo è indifferente quali entità siano tali individui perchè N1 sia soddisfatta, l'importante è che sia unica la categoria logico-ontologica ammessa[104].

La seconda tesi generale del nominalismo è la condizione d'estensionalità (Cocchiarella 1989:256):

---

[102] Ovvero, ramificata.

[103] Lo *schema* di assiomi CP appartenente alla versione assiomatica di SOL è derivabile in deduzione naturale (cfr. (De Florio 2007:19)). In questo modo si mostra come CP sia equivalente ad una regola di *sostituzione uniforme per variabili predicative*: "L'esistenza non ristretta di concetti è espressa formalmente, nel sistema [fregeano] dei *Principi*, dalla cosiddetta *Regola di Sostituzione*: essa è equivalente al principio di comprensione *impredicativo*, secondo il quale per ogni proprietà esiste l'insieme degli oggetti che la soddisfano: in notazione contemporanea $\exists F\ \forall x(Fx \leftrightarrow \varphi)$, dove φ è una formula della logica dei predicati del secondo ordine che non contiene libera la variabile F per concetti." (Boccuni 2012:36).

[104] Non importa che due siano i domini postulati, poiché i loro elementi sono dello stesso tipo logico, in questo modo è sempre possibile unificare i domini in un unico campo, come di fatto può avvenire in **ML**.

(N2) Le espressioni predicative non si distinguono semanticamente per il loro contenuto (gli individui che soddisfsano tali espressioni) fintanto che sono coestensive[105]

N2 è soddisfatta sia da **ML** che da **NF**. Il passaggio da **ML** a **NF** diviene immediato se si suppone una certa propensione per il nominalismo in Quine. Riprendendo uno degli innumerevoli lavori di Cocchiarella, possiamo mostrare l'argomento che riproduce tale passaggio:

> Il quadro teorico preferito da Quine della teoria degli insiemi si avvicina ad essere una forma di moderno nominalismo ontologico[106], anche se Quine definisce la sua ontologia platonica e si riferisce agli insiemi come universali. L'intendere di Quine la sua ontologia come platonica e gli insiemi come universali si basa su un argomento piuttosto involuto, i passaggi essenziali del quale sono i seguenti: se dovessimo adottare il platonismo quale una teoria di universali rappresentata da una logica di ordine superiore in cui le variabili predicative, così come quelle individuali, possono essere legate, allora (1) ai quantificatori predicativi può essere data una interpretazione ontologica e referenziale solo se i predicati sono (mal)costruiti [(mal)intesi, *Ndr*] come termini singolari (p.es., come termini che possono occupare la posizione di argomento o di soggetto di predicati); se poi (2) si assume anche l'estensionalità, (3) i predicati, quali termini singolari, possono solamente denotare insiemi, i quali (4) devono, quindi, anche essere quegli universali che sono i valori delle variabili predicative nella posizione di predicato; perciò (5) la predicazione deve essere lo stesso dell'appartenenza, nel qual caso (6) tanto vale sostituire le variabili predicative con le variabili individuali (assumendo così l'esclusione propria del nominalismo delle variabili predicative legate) e assumere gli insiemi come valori delle variabili individuali, arrivando così a (7) una teoria del primo ordine dell'appartenenza (teoria degli insiemi), che (8) è platonica in quanto assume entità astratte quali valori del suo unico tipo di variabili[107]. Così, partendo dalla logica di ordine superiore con le variabili predicative vincolate quale una forma di platonismo, si arriva alla posizione nominalistica di riconoscere solo la quantificazione in relazione alle variabili individuali (o le posizioni soggettive dei

[105] "Espressioni predicative co-estensive devono essere intercambiabili *salva veritate* in ogni teoria formale della predicazione applicata e e adeguata per il nominalismo". (Cocchiarella 1989:256).

[106] A differenza del nominalismo logico, il nominalismo ontologico non ammette restrizioni sul tipo di entità o oggetti da assumere quali valori delle variabili del primo ordine. Il nominalismo logico infatti assume che tali valori debbano essere esclusivamente individui.

[107] Cfr. (Quine 1969:257). Il rimando è dello stesso Cocchiarella.

predicati), ma con le variabili individuali che possono avere insiemi astratti come loro valori i quali sono, quindi, davvero degli universali (cioè, le entità che hanno una natura predicabile). (Cocchiarella 2001:127).

Ci conviene allora prendere di petto il nominalismo evidenziando quale siano gli strumenti tecnico-formali mediante cui una teoria possa essere formalizzata e regimentata in un senso nominalista dell'ontologia.

2.2.1. Nominalismo e interpretazione sostituzionale.

Secondo Barcan-Marcus il compito principale del nominalismo è quello di spiegare, rendendone conto formalmente, come si comportano i predicati nella teoria. Due sono le direzioni sviluppatesi recentemente e riconosciute dalla Barcan-Marcus, una prima "consiste nel ricostruire la predicazione come una relazione fra individui"; una seconda invece "consiste nel negare del tutto la funzione referenziale [*the referential function*[108]] dei predicati" (Barcan-Marcus 1978:353-354). La prima soluzione riflette esattamente la concezione quineana appena vista; mentre la seconda nega in qualche modo la prima implicando che la predicazione cessa di essere intesa quale una relazione fra oggetti (cfr. (Barcan-Marcus 1978:353-354)). Siccome poi la concezione ontologica quineana persegue la prima direzione, non ci sembra ci sia altro da aggiungere a riguardo se non che tale visione implica l'assimilazione della nozione di riferimento e di predicazione a quella di denotazione. Ci pare, invece, preminente addentrarci nell'analisi della seconda direzione[109] perchè come vedremo ci permette di completare la regimentazione del linguaggio di una teoria, nel senso di Quine, fornendo uno strumento formale che renderà capaci di non rinunciare a SOL, seppur non assumendo affatto alcun aumento del potere tanto deduttivo quanto espressivo di FOL=.

Una teoria regimentata (nel senso quineano) è una teoria che, allo stadio della regimentazione da noi trattato, assume come apparato descrittivo solo le costanti predicative (al massimo finite). Una *fbf* aperta di una $L_{I=}$-teoria definisce (descrittivamente) un sotto-insieme (improprio) del dominio di interpretazione. Siccome ad ogni costante predicativa l'interpretazione assegna un sotto-insieme del dominio, ogni

[108] Intendiamo 'interpretazione referenziale'.
[109] Per quanto concerne l'esposizione di questa seconda direzione, seguiremo (Hand 2006:649-650).

fbf aperta di $L_{I=}$ corrisponde ad un predicato (n-ario) potenzialmente non ancora presente nella $L_{I=}$-teoria. Siccome l'apparato descrittivo è, per Quine, l'apparato teorico (ideologico) specifico di una teoria – in quanto fornisce tutta l'informazione interessante della teoria – una volta stabilito cosa esiste vincolando il dominio alle variabili individuali *via* quantificazione, bisognerà fornire un *principio logico* mediante cui poter introdurre, da un punto di vista esclusivamente *linguistico*, la nuova informazione rilevante della teoria. A tale scopo FOL= non basta, non ha la capacità espressiva sufficiente, dovendo tale principio variare su tutti i predicati possibili. In generale, il principio che formalizza la possibilità logica dell'introduzione di sempre nuove costanti predicative nella teoria è deve essere espresso in un linguaggio più potente, il linguaggio di SOL. In particolare, tale principio è CP in cui la quantificazione sulle variabili predicative è interpretata seguendo la seconda via illustrata dalla Barcan-Marcus. CP, infatti, stabilisce che per ogni *fbf* esiste una equivalente relazione fra gli oggetti del dominio che la soddisfano mentre nella nuova interpretazione, c.d. *sostituzionale*, anziché parlare di 'una equivalente relazione fra gli oggetti del dominio' si parla di 'una equivalente espressione predicativa soddisfatta (o meno) dagli individui del dominio'[110].

Assumere tale interpretazione sostituzionale limitata alla quantificazione predicative può sembrar violare N1, perchè N1 afferma che le uniche variabili quantificabili sono le variabili individuali. L'ammissione di SOL con inerpretazione sostituzionale sembra pertanto contrastare N1 eppure, invece, viene solo spostato il limite di N1. Infatti, distinguendo fra *interpretazione referenziale* (o ontologica) e *interpretazione sostituzionale* (o linguistica) si vede come N1 sia stata formulato supponendo quale unica quantificazione quella referenziale. Pertanto, N1 non contrasta con SOL se le variabili predicative quantificate sono interpretate sostituzionalmente. N1 ci dice solamente che le

[110] "[M]a ciò non vuol dire che le costanti predicative sono le uniche espressioni predicative di cui il nominalismo deve rendere conto. In particolare, qualsiasi formula aperta del primo ordine, relativamente alle variabili individuali libere che vi occorrono come indicatori argomentali, deve essere intesa come rappresentante un espressione predicativa del linguaggio (formale) di cui è una formula; e infatti in una teoria applicata del primo ordine basata su quel linguaggio tale formula costituirebbe il definiens di una possibile definizione di una costante predicativa non ancora appartenente in quel linguaggio. Potenzialmente, è ovvio, c'è un numero infinito di tali costanti predicative che potrebbero essere introdotte in questo modo in una teoria applicata, e qualche spiegazione del loro ruolo di predicati così come di quelli assunti primitivamente nel linguaggio (formale) in questione deve essre pur fornita all'interno del nominalismo. Tale spiegazione avviene, si scopre, estendendo la logica dei predicati del primo ordine standard alla logica dei predicati del secondo ordine in cui i quantificatori predicativi vengono interpretati sostituzionalmente" (Cocchiarella 1989:257).

variabili individuali devono essere le uniche variabili di L_{II} quantificabili referenzialmente.

In generale, la semantica sostituzionale richiede che sia solo supposta l'esistenza di una *classe di sostituzione* di *espressioni* di un dato linguaggio che possano servire come *sostituendi* per le variabili così quantificate. L'interpretazione sostituzionale non è limitata alla sostituzione di nomi propri per variabili (cfr (Haack 1978:53)). Se R e C ammettono la quantificazione referenziale sulle variabili del secondo ordine[111], N ne ammette una sostituzionale.

Prendiamo il caso della teoria della quantificazione del primo ordine (FOL). Questa non pretende che sussista una relazione biunivoca fra la *classe dei nomi propri* (costanti individuali) e il dominio di riferimento. Ovverosia, le due classi non necessariamente devono essere *equinumerose* (avere la stessa cardinalità). Per la *semantica referenziale* un enunciato è vero non esclusivmente sulla base della presenza di un nome per ciascuno degli elementi di un sotto-insieme (improprio) del dominio. Questo *non* vale, d'altro canto, per la *semantica sostituzionale*: le due semantiche sono equivalenti, rispetto al valore di verità assegnato alle *ffbf* quantificate, *sse* si assume che esiste un nome per ogni individuo del dominio[112].

Nella semantica oggettuale le clausole induttive per la definizione di verità via soddisfazione fornite da Tarski[113] nei casi quantificati ($\forall$ e, per definizione, $\exists =_{df} \neg\forall\neg$)

[111] Sebbene, per C i valori sono concetti mentre per R sono proprietà. Ad ogni modo, usando la semantica modellistica si possono tratttare uniformenmente come classi di individui.

[112] "Se per ogni membro del dominio U_M di quantificazione esiste un nome nel linguaggio, allora la quantificazione oggettuale e la controparte sostituzionale coincidono nei valori di verità. Se no, comunque, allora $\forall x\, \psi(x)$ può essere falsa mentre $\forall_s x\, \psi(x)$ vera, dal momento che tutti gli individui *nominati* possono soddisfare ψ e così tutte le istanze di ψ essere vere, tuttavia qualche individuo non nominato può non di meno non soddisfare ψ. Quando solamente individui non nominati soddisfano ψ, $\exists x\, \psi(x)$ è vera sebbene $\exists_s x\, \psi(x)$ sia falsa. Questo è il *problema dei troppi pochi nomi*: in generale $\forall$ è più forte che $\forall_s$, e $\exists$ pi debole che $\exists_s$; solamente sotto l'assunzione che tutti gli individui abbiano nomi le quantificazioni oggettuale e sostituzionale sono equivalenti. (una *fbf* ψ è più forte che un'altra *fbf* γ *sse* per ogni *fbf* χ, se $\gamma \Vdash \chi$ allora $\psi \Vdash \chi$.)". (Hand 2006:650).

[113] Con i limiti propri del *nominalismo logico* sostenuto dallo stesso Tarski e dovuti alla relatività della definizione della verità: "In particulare, Tarski non inventò un metodo per definire la verità nel senso della teoria della corrispondenza [delle parole alle cose, *Ndr.*]. Come Bunge sottolinea, l'espressione (T) ['P' è L-vera sse P (dove 'P' è un nome del L-enunciato P)] ''collega [*bridges*] il meta-linguaggio e il linguaggio invece di mettere a confronto il linguaggio con la realtà extra-linguistica – che è ciò che 'corrispondenza' significa'' [M. Bunge, "The centrality of truth", *Pozn Stud Philos Sci Humanit*, 81:233–241, 2003:239, *Ndr.*]. infatti, l'espressione (T) connette solamente il linguaggio della meta-teoria MT ed il linguaggio L invece di conforntare L con la realtà extra-linguistica." (Cellucci 2014).

sono le seguenti: per ogni *fbf* φ se φ è $\forall x\ \psi(x)$[114] (se φ è $\exists x\ \psi(x)$) allora φ è vera in in un modello M *sse*,

(∀) $\forall x\ \psi(x)$ è vero ⇔ ogni individuo del dominio *soddisfa* $\psi(x)$

(∃) $\exists x\ \psi(x)$ è vero ⇔ qualche individuo del dominio *soddisfa* $\psi(x)$

Per spiegare fin in fondo come si trattano i quantificatori nella definizione induttiva bisogna assumere un ordinamento qualsiasi delle variabili $v_1, v_2, \ldots$ t.c. ciascuna v_i è in corrispondenza biunivoca con ciascun elemento s_i della sequanza s e t.c. $s_i = x_i^M$, con $x_i^M = \alpha_i$ elemento del dominio U_M di interpretazione. s_i è la funzione che assegna valori alle variabili:

(∀) $\forall x\ \psi(x)$ è vero ⇔ $I, s \vDash \forall x\ \psi(x) \Leftrightarrow om\ \alpha_i \in U_M, I, s(x/\alpha_i) \vDash \psi(x)$

(∃) $\exists x\ \psi(x)$ è vero ⇔ $I, s \vDash \exists x\ \psi(x) \Leftrightarrow ex\ \alpha_i \in U_M, I, s(x/\alpha_i) \vDash \psi(x)$

dove $s(x/\alpha_i)$ è una (sequeza di) funzione(/i) di assegnazione, detta 'x-variante', poichè che differisce da s *al massimo* nella assegnazione di α_i a x_i (tutte le alter variabili libere, p.es. y, z ..., occorrenti in ψ coincidono nella assegnazione $s(x/\alpha_i)$).

Diversamentre, la c.d. interpretazione sostituzionale dei quantificatori non richiede la nozione di soddisfazione *via* assegnazione: per ogni *fbf* φ se φ è $\forall x\ \psi(x)$ (se φ è $\exists x\ \psi(x)$) allora φ è vera in in un modello M *sse*

($\forall_s$) $\forall x\ \psi(x)$ è vero ⇔ ogni istanza di ψ è vera

($\exists_s$) $\exists x\ \psi(x)$ è vero ⇔ quanlche istanza di ψ è vera

dove per 'istanza' di φ ($= \forall x\ \psi(x)$ o $\exists x\ \psi(x)$) si intende in modo piuttosto esplicito esclusivamente la sostituzione in ψ della variabile libera x_i (è quantificata in φ) con una costante individuale c_i. Allora la definizione induttiva delle condizioni di verità per le *ffbf* quantificate secondo l'interpretazione sostituzionale è la seguente:

[114] Con l'espressione '$\psi(x)$' indichiamo che la variavile x è l'unica variabile libera in ψ.

$(\forall_s)$ $\forall_s x\, \psi(x)$ è vero $\Leftrightarrow$ $om\ c_i \in C_s, I \vDash \psi(x_i/c_i)$

$(\exists_s)$ $\exists_s x\, \psi(x)$ è vero $\Leftrightarrow$ $ex\ c_i \in C_s,\ I \vDash \psi(x_i/c_i)$

dove c_i è una meta-variabile che varia sulle costanti individuali, appartententi alla classe di sostituendi C_s, assunte nel linguaggio e $\psi(x/c)$ è il risultato della sosttuzione di c a tutte le occorrenze libere di *x* in ψ.

Siccome poi l'interpretazione sostituzionale non si limita alla sostituzione di nomi propri,la c.d. *substitution-class* può consistere di *costanti predicative* di arietà fino a n, come anche di *ffbf* aperte. Così è possibile estendere l'interpretazione sostituzionale alla quantificazione delle variabili predicative e oltre (cfr. (Hand 2006:652)).

Dal capitolo precedente conosciamo il significato formale della nozione di assegnazione di valore nelle *semantiche referenziali* per SOL, sia *standard* che *non-standard*. Ci manca di comprendere il significato formale della assegnazione di valore per SOL nel senso dell'assegnazione *nominalistica* di valori limitata al caso nel caso delle variabili predicative. Supponendo l'usuale definizione di modello[115] M,

DEFINIZIONE 2.1. *Assegnazione Nominalistica* (in M). Una funzione s_N con l'insieme delle variabili individuali e predicative quale dominio è una assegnazione nominalistica *sse*

(1) per ciascuna variabile individuale x, $s_N(x) \in U_M$

(2) per ciascun intero positivo n e ciascuna variabile predicativa n-aria F^n, $s_N(F^n) = \langle \varphi, x_1, \dots, x_n \rangle$, per qualche *fbf* φ di L del primo ordine e variabili individuali a due a due distinte $x_1, \dots, x_n$ occorrenti libere in φ.

È nei termini di tale assegnazione nominalistica che si deve comprendere come le variabili predicative libere possano essere prese come *fittizie lettere schematiche* rappresentanti espressioni predicative arbitrarie (sia semplici che complesse) di $L_{I=}$ (cfr. (Cocchiarella 1989:263)). Cosi, sotto l'interpretazione sostituzionale, l'importo

[115] Con un *modello per un* linguaggio L, o un L-*modello*, perciò, intenderemo una struttura $M = \langle U_M, I \rangle$, dove U_M, il dominio del discorso, è un insieme non-vuoto e I è una funzione con dominio $L_{I=}$ t.c. per tutti gli interi positivi n e tutti i $P^n \in L$, $I(P^n) \subseteq U_M^n$ (dove U_M^n è l'insieme di tutte le n-uple costruite da U_M). Naturalmente, si identificano tutti gli (tutte le n-uple di) individui in U_M di cui una costante predicativa P^n di *L è vero* (nel modello) in forza della loro appartenenza a $I(P^n)$.

ontologico della quantificazione è solo un'apparenza e niente più[116]. Mediante l'assunzione di un'assegnazione nominalistica l'interpretazione sostituzionale è limitata ai quantificatori del decondo ordine e la classe di sostituzione per variabili predicative è essenzialmente la classe delle *ffbf* di $L_{I=}$.

Col prossimo paragrafo, alla luce dell'analisi di Cocchiarella su CP, ma interpretato sostituzionalmente (CP!), vedremo come R ed N, sebbene assumano lo stesso L_{II}, si comportano diversamente: N, a differenza di R, non comprometterà la teoria su nulla più che su ciò su cui la teoria già non fosse compromessa al primo ordine. Si vedrà inoltre che le condizioni apposte alla funzione di assegnazione nominalista obbligheranno a una revisione c.d. *predicativa*[117] di CP. Insomma, che non basterà assumere s_N in luogo di s per ottenere un'interpretazione sostituzionale consistente con N. In tal senso, nel prossimo paragrafo comprenderemo la vera forma della predicazione nominalista quale ridotta al ruolo logico-grammaticale delle espressioni predicative in FOL= (Cfr. (Cocchiarella 2007:86))[118].

2.2.2. Forme logiche e predicazione a confronto.

Le distinzioni logico-ontologiche che abbiamo finora incontrato non sono semplici questioni stipulative, arbitrarie, ma sono conseguenze dirette della semantica associate a

---

116 "La quantificazione sostituzionale manca di tale potenza ontologica [*ontological potency*]. La sua semantica include la quantificazione *oggettuale meta-linguistica* su *sostituendi*, espressioni del linguaggio-oggetto, non su membri dell'universo di riferimento del linguaggio-oggetto" (Hand 2006:653). Infatti, "[S]e questo quantificatore metalinguistico [om, *Ndr*] viene interpretato oggettualmente, sarà impegnato all'esistenza dell'espressione appropriata, l'istanza-sostitutiva. Ma non sarà così se sarà anch'esso interpretato sostituzionalmente" (Haack 1978:50). A scanso d'equivoci, "Sull'interpretazione sostituzionale non c'è alcun dominio e le variabili propriamente 'non assumono valori'" (Dunn, Belnap 1968:184).

117 Cfr. il prossimo paragrafo per la distinzione fra *formulazione predicativa* e *impredicativa* di CP.

118 È, ad, ogni modo interessante notare come la semantica sostituzionale non sia né compatta né completa. Dunn e Belnap (1968:180) hanno mostrato che un calcolo del primo ordine interpretato sostituzionalmente non è *compatto* e quindi neanche completo. Hand, ci mostra che la relazione semnatica di conseguenza, l'implicazione formale, è *compatta sse* l'interpretazione dei quantificatori è *referenziale* (oggettuale), ma *non* quando questa è *sostiduzionale*: Si assuma che il linguaggio abbia un insieme infinito di costanti individuali tutte denotanti in U_M e il resto come si è soliti definirlo in FOL=. Sia $\Vdash$ la relazione di conseguenza logica, come usualmente definite in FOL=. "La compattezza di $\Vdash$ è la seguente proprietà:

Comp $\quad se\ \Gamma \Vdash \varphi\ allora\ esiste\ un\ finito\ \Gamma_0 \subseteq \Gamma\ t.c. \Gamma_0 \Vdash \varphi.$

Ora si osservi che: $\{\psi(x/c_0), \psi(x/c_1), \dots\} \Vdash \forall_s x\ \psi$ sebbene nessun sotto-insieme finito di questo insieme infinito implica $\forall_s x\ \psi(x)$. Poichè gli universi hanno dominio infinito ma non ogni mambro di essi ha un nome nel linguaggio. Quindi, anche l'insieme infinito $\{\psi(x/c_0), \psi(x/c_1), \dots\}$ non implica $\forall_s x\ \psi(x)$" (Hand 2006:652). Cfr. anche (Wallace 1970:130-2) in cui si afferma che l'inadeguatezza della semantica sotituzionale consiste nella la debolezza deduttiva.

ciascuna ontologia, come evidenziano l'applicazione di OC e/o di CI. Abbiamo visto che anche N deve essere formalizzata al secondo ordine. In SOL siamo pertanto capaci di rappresentare la teoria della predicazione secondo le entrambe le diverse declinazioni. Un altro conseguente vantaggio di tale uniformità è che, data una teoria delle forme logiche, si può rappresentare nel suo lingiaggio formale e si può esprimere nei suoi termini ciò che un'altra teoria delle forme logiche è capace di esprimere.

Le *ffbf atomiche* di L_{II}[119] sono definite nello stesso modo che in L_I, per induzione sulla complessità di una *fbf*, sebbene ora l'espressione predicativa costituente un atomo di L_{II} *può essere una variabile* (*predicativa*) in luogo di una costante. Possiamo estendere così la definizione generale di insieme di *ffbf* di L_{II}, nel modo che segue[120]:

DEFINIZIONE 2.2. *Insieme delle ffbf di* L_{II}. $\varphi \in L_{II}$ *sse*

(1) se φ è $F^n(x_1 \dots x_n)$ (atomica) allora $\varphi \in L_{II}$

(2) se $\gamma, \psi \in L_{II}$, ogni variabile individuale x e (per tutti i naturali n) tutte le variabili predcative *n*-arie F^n allora se φ è $\neg\gamma$, $(\gamma \to \psi)$, $\forall x\, \gamma$, $\forall F^n\, \gamma$, allora $\varphi \in L_{II}$[121]

(3) null'altro appartiene a L_{II}

Al fine di definire l'apparato deduttivo di SOL aggiungiamo i seguenti assiomi a quelli di FOL[122] (analoghi di A2, A3 e A4 della nota precedente): la *legge di sostituzione* (A2'),

---

119 A L_I, dobbiamo solo aggiungere variabili predicative *n*-arie, per ogni naturale *n*, alla sintassi (alfabeto) di FOL. D'ora in avanti le seguenti lettere F^n, G^n, H^n, con o senza indici numerici saranno intese essere variabili predicative *n*-arie; anche gli apici saranno eliminate qualora il contest sia sufficientemente chiaro. Du solito comunque, quando ci riferiamo a predicate relazionali, dove $n > 1$, useremo i simboli 'R' e 'S'.

120 Assumiamo che la teoria è pienamente regimentata, pertanto il suo linguaggio non contiene né costanti individuali, né costanti predicative, né costanti funzionali. Inoltre l'identità è definibile, pertanto non compare come nel caso atomico.

121 È formalmente (sintatticamente) conveniente assumere variabili predicative quali variabili predicative 0-arie e quindi ammettere *ffbf* atomiche della forma 'F^0'.

122 La versione assiomatizzata di FOL (senza identità) è il seguente (Enderton 2001:112ss). Dette φ, γ, ψ meta-variabili per *ffbf*; x, y variabili individuali; t, t' meta-termini (variabili, costanti, funzioni, descrizioni). Tutte le istanze dei seguenti quattro *schemi* sono assiomi di FOL:

A1. $om\ \varphi\ che\ sono\ Tautologie\ di\ FOL$

A2. $\forall x\, \psi \to \psi(x/t)$, dove t è sostituivile per x in ϕ

A3. $\forall x\, (\gamma \to \psi) \to (\forall x \gamma \to \forall x\, \psi)$

A4. $\psi \to \forall x\, \psi$, con x *non* libero in ψ

Come uniche regole di inferenza assumiamo *modus ponens* MP (il simbolo '$\vdash$' è da leggere come 'è un teorema di'):

MP. Se $\vdash \psi \to \gamma$ e $\vdash \gamma$ allora $\vdash \psi$.

la *legge di distribuzione per i quantificatori* del secondo ordine (A3'), e *la legge di genralizzazione* o di quantificazione vacua (A4'):

A2' $\forall F^n\, \psi \rightarrow \psi(F^n/P^n)$

A3' $\forall F^n(\psi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\, \psi \rightarrow \forall x\, \psi)$

A4' $\psi \rightarrow \forall F^n\, \psi$, con F^n non libera in ψ

Ulteriormente, per completare almeno parzialmente[123] il quadro di SOL, va aggiunto ciò che abbiamo visto essere il principio che garantisce la comprensione della struttura logica e ontologica delle teorie delle forme logiche, in quanto impone l'esistenza di una relazione equivalente a ciascuna *fbf* φ di L_{II}[124]: l'assioma (schema) di comprensione CP:

CP $\exists F^n\, \forall(x_1\, \dots\, x_n)\, (F^n x_1\, \dots\, x_n \leftrightarrow\, \varphi)$

con φ *fbf* di L_{II} in cui (1) F^n *non* occorre libera e (2) $x_1 \dots x_n$ sono variabili a due a due distinte e libere in φ[125]

Questa è la c.d. formulazione *impredicativa* di CP. 'Impredicativa' perché impone l'esistenza di una relazione nei termini di una totalità alla quale tale relazione appartiene. Questo è il senso della condizione (1) di *occorrenza non libera* in φ della variabile predicativa. Se la variabile predicativa occorresse in φ, dovendo occorrervi vincolata, occorrerebbe nella definizione dell'estensione associata (semanticamente) alla variabile predicativa stessa (alla *sinistra* del bicondizionale in CP). Così, se la variabile predicativa occorresse in φ, l'estensione ad essa associata sarebbe 'compresa' entro l'estensione dell'espressione φ che la definisce[126], potendo anche cadere entro l'ambito della quantificazione di altre variabili predicative le quali, essendo φ una *fbf* di L_{II}, possono certamente occorrere vincolate a loro volta in φ[127].

---

[123] Abbiamo per semplicità tralasciato AC, poiché è trascurabile rispetto al tema trattato nel presente lavoro. Inoltre, assumendo che nel linguaggio non ci sono funzioni possiamo escludere la formulazione *funzionale* di CP.

[124] "Prese insieme, le istanze di CP esprimono la tesi per cui ogni formula determina una relazione o, più precisamente, per ogni formula esiste una relazione con la medesima estensione" (Shapiro 2005:755).

[125] In questa formulazione CP è valido per ogni *fbf* φ, anche quando φ è una *fbf contraddittoria*, tipo '$\neg(G(x) \rightarrow G(x))$', ossia quando l'estensione è vuota. Infatti, avere per estensione la classe vuota non significa affatto non avere estensione.

[126] Questo assioma, esprime esattamente il ruolo ontologico e grammaticale della predicazione tanto nel ralismo (logico) che ne concettualismo, la cui unica differenza, sotto questo rispetto, è dovuta al tipo di dominio di riferimento e non alla forma logica della predicazione.

[127] Da qui le varie questioni sulle definizioni che non rispettano il *principio del circolo vizioso* secondo cui il *definiendum* non deve mai occorrere nel *definiens* poichè ciò comport ail rischio di definire totalità di

Per quanto riguarda l'interpretazione nominalista di CP le cose non sono poi così semplici: non basta interpretare sostituzionalmente la quantificazione in CP, per renderlo adeguato ad esprimere la forma logica della predicazione in N. Infatti, a proposito dell'assegnazione nominalista s_N avevamo visto che tale assegnazione mappa F^n su $s_N(F^n) = \langle \psi, x_1, \dots, x_n \rangle$ per qualche *fbf* ψ, ma alla condizione che ψ sia una *fbf* di L_I (con, ovviamente, $x_1, \dots, x_n$ libere in ψ) in cui le variabili predicative non possono occorrere!. Ciò significa che la variabile predicativa F^n ha come *sostituendi* delle *ffbf* in cui *non occorrono* variabili predicative alcune. Pertanto, che le variabili predicative solo se *libere* possono occorrere nelle *ffbf* a destra del bicondizionale (cfr. (Cocchiarella 2007:85)). Pertanto, alla interpretazione sostituzionale di per CP bisogna aggiungere una *restrizione predicativa* (!). Il nuovo principio è allora così formulato:

CP! $\exists F^n \, \forall x_1 \dots x_n \, (F^n x_1 \dots x_n \leftrightarrow \varphi)$
con φ *fbf* di L_{II} in cui (1) *nessuna* variabile predicativa occorre *vincolata*; (2) F^n *non occorre libera*; (3) con $x_1 \dots x_n$ variabili individuali a due a due distinte e libere in φ.

Mediante (1) solo variabili predicative libere possono occorrere in φ e mediante (2) si dice che fra le variabili predicative occorrenti libere in φ non vi è F^n poichè, se vi fosse, la sua occorrenza sarebbe immediatamente vincolata, essendo φ nello scopo del quantificatore predicativo. Assumere l'assegnazione nominalistica significa, infatti, dover poi applicare s_N anche a tutte le variabili predicative *libere* di φ. Pertanto N non solo assume una versione semantica sostituzionale ma in forza di questa deve assumere una formulazione predicative di CP, CP! appunto.

oggetti in termini di totalità che le includono. Secondo una prospettiva realsista autentica, le definizioni descrivono un mondo già esistente e costituito. Per questa ragione 'epistemologica' non sembrano essere problematiche per il realista (platonista) tali definizioni. Tale obiezione però, di natura epistemica non sembra poter liberare del problem ail realista, in quanto nel momento in cui vogliamo analizzare come è costituito il mondo che fogliamo rappresentare, dobbiamo dare una spegazione della sua costituzione e non darne una imagine che supponga tale spiegazione.

III

APPLICABILITÀ UNIVERSALE E INTERPRETAZIONE PLURALE

Quanto la logica risulti innocente rispetto all'ontologia era il cuore del dibattito circa lo statuto della logica del secondo ordine. Quine (Quine 1986) sostenne che la logica del secondo ordine era una "teoria degli insiemi in abito da pecora", e così non propriamente una logica. Il punto della questione era se i quantificatori del secondo ordine dovessero essere compresi quali varianti su proprietà o insiemi di individui. I primi erano considerati dubbi, i secondi volgevano la logica del secondo ordine in una teoria delle classi. Questo approccio alla logica del secondo ordine è stato largamente ed intensamente criticato da Boolos, oltre che da vari autori, in una serie di articoli negli anni '70-'80 del secolo scorso, in cui tentò di rivendicare lo statuto della logica del secondo ordine proponendo l'interpretazione c.d. plurale dei quantificatori predicativi.

Con questo capitolo argomenteremo che l'*interpretazione plurale* dei quantificatori predicativi è capace di fornire una soluzione positiva alla critica di Quine alla logica del secondo ordine interpretata estensionalmente. In particolare ciò vale della sua restrizione monadica[128]. Come la quantificazione si basa sulla nozione di *assegnazione di valore* così l'interpretazione plurale dei quantificatori predicativi (o del secondo ordine) si basa sulla nozione di *assegnazione plural*e o di assegnazione di più valori. Lo scopo di questo capitolo è, dunque, quello di presentare tale nozione a partire dalla critica a Quine.

[128] L'espressione 'logica monadica' è usata in generale per riferirsi alla logica predicativa quando i predicati sono tutti monadici, nel senso di essere ad un solo argomento. Nel nostro caso la logica del secondo ordine monadica (MSOL) è caratterizzata dall'essere ristretta al caso monadico solo relativamente alle variabili predicative. MSOL ammette così predicati n-ari (del primo ordine).

3.1. L'intuizione di Boolos.

La tesi di Quine, secondo cui assumendo l'interpretazione estensionale le variabili predicative quantificate devono essere intese quali posti per nomi, fu seguita da una profonda critica da parte di Boolos (1975) il cui esito fu lo spostamento del dibattito dalla questione sulla logicità di SOL a quella intorno alla sua *universale applicabilità*: SOL *non* è universalmente applicabile sotto l'iterpretazione modellistica *standard*. Boolos, nel tentativo di fornire una soluzione positiva alla questione fornì una nuova teoria semantica per MSOL, chiamata *interpretazione plurale dei quantificatori*. La proposta di Boolos era attenta a non cambiare l'impostazione estensionale da cui la critica quineana aveva preso le mosse: il dominio di riferimento U_M rimane, un insieme non-vuoto di individi. Ciò che la rende differente dalle precedenti è come U_M è posto in realazione a L_{II}. Boolos caratterizzò la relazione fra L_{II} e U_M a partire dalla nozione primitiva di *riferimento plurale* (Boolos 1984, 1985). L'intuizione boolosiana di base consiste nell'assumere che sebbene non esistano oggetti plurali, alcune espressioni del linguaggio, in particolare le variabili predicative, si *riferiscono prluralmente* agli individui di U_M.

L'argomentazione di Boolos deve, comunque, provare che l'impegno ontologico di MSOL, così interpretata, non introduce entità di ordine superiore a quelle di U_M: ossia, che l'ontologia di riferimento per le variabili predicative non è plurale, ossia che 'essere una pluralità' è un mero *fatto linguistico*. Solo se la tesi di *innocenza ontologica* vale allora, la nuova semantica, avrà il vantaggio di mostrare che MSOL è *universalmente applicabile*.

3.1.1. La critica di Boolos alla tesi di Quine.

Secondo Quine (Quine 1986:§5-6), SOL è una teoria degli insiemi mascherata da pecora, per la precisione una teoria delle classi. In accordo con OC, l'applicazione dell'assegnazione s è $s(w) = v$, con $s : W \to U$, $w \in W \subseteq L$ di variabili di ogni grado e $v \in U$ con U un dominio di ogni tipo. La quantificazione sulle variabili predicative comporta che SOL è impegnata nei confronti dell'esistenza di entità del secondo ordine di natura insiemistica[129], dal momento che le classi, diversamente dalle enrità intensionali, soddisfano la condizione di *estensionalità* per SOL. In base a ciò, SOL non è pura logica. La preferenza di Quine per la logica estensionale lo porta a sostenere che le variabili di ciascun ordine se quantificate sono posti per *nomi* di entità appartenenti al dominio del corrispettivo ordine.

Boolos, in *On Second Order Logic* (Boolos 1975), critica fortemente quest'ultima affermazione seppur mantenendo una prospettiva estensionalista. Boolos sostiene che anche se la quantificazione, in particolare del seconodo ordine, implica il *riferimento* a entità esistenti e appartenenti ai relativi domini, le variabili predicative quantificate *non sono posti per nomi* "neppure fossero nomi indefiniti" (Boolos 1975:511). Seguendo Boolos, una espressione è un posto per nome *sse* è il soggetto della predicazione, cioè l'argomento di qualsiasi espressione predicativa (di ogni ordine). La quatificazione non intacca affatto la natura predicativa tanto delle espressioni che quantifica, quelle predicative, quanto delle entità ad esse associate. Secondo Boolos, insomma fornire il riferimento non è denotare o nominare[130]:

> Sebbene le variabili devono avere un intervallo di variazione contenente oggetti adeguati, non è necessario che le variabili di ogni tipo nominino indefinitamente gli oggetti nel loro intervallo. '$(\exists F)$' non deve essere presa come esprimente che quache entità del tipo nominato dai predicati sono così e colì; può essere presa per dire che alcune delle entità (estensioni) avute dai predicati contengono [*contain*, *Ndr*] così e così. Così alcune variabili idonee per la quantificazione potrebbero proprio stare [*well belong in*, *Ndr*] in posizione di predicato e non in posizione di nome. E assumendo 'Fx' sia vera se e solo se ciò che 'x' nomina è nell'estensione di 'F' in nessun modo ci impegna a supporre che 'F' nomini proprio qualche cosa. (Boolos 1975:511).

La distinzione richiamata da Boolos incontra la distinzione funzione-argomento di origine fregeana e che rimanda ad una ulteriore distinzione ontologica: la distinzione fra *entità sature* e *entità insature*. In entrambi i casi la distinzione ontologica è mantenuta nella forma logica della rappresentazione (simbolica) che le entità sature, gli oggetti,

---

[129] L'*assioma di estensionalità* caratterizza le entità insiemistiche rendendole dipendenti unicamemnte dai loro elementi. Infatti se gli elementi sono gli stessi per qualunque due insiemi allora quest'ultimi sono lo stesso insieme.

[130] Ci riferiamo alla distinzione fra le funzioni di denotazione e di assegnazione di valori, cfr. 1.2.

svolgono il ruolo di soggetti (o argomenti), mentre le entità insature sia estensionali, le classi, che intensionali, i concetti, quello predicativo. In un articolo pubblicato lo stesso anno della critica di Boolos a Quine, Cocchiarella mostra un argomento che ci rivela che la tesi di Quine – quella sulle variabili predicative quantificate quali psosti per nomi – suppone una forma di nominalismo ontologico, ed è giustificabile solo se la natura della correlazione fra le *classi* (e relazioni) e i *predicati* è tale da essere *identificata con* (o rifdotta a) la relazione di *denotazione* che, per definizione, sussiste fra i *termini* del linguaggio e gli *individui* del dominio, che tali termini si suppone denotino:

> In ciò che segue dovremmo limitarci, sebbene alquanto non uniformemente, Icon questa distinzione tra teorie del secondo ordine in cui proprietà e relazioni hanno solamente una natura predicativa in opposizione a quelle in cui esse soo presunte avere anche una natura nominativa. I due tipi generali di teorie del secondo ordine che abbiamo in mente, allora, so distinte in base a (1) se la natura della corrispondenza fra predicati da un lato e proprietà e relazioni dall'altro è tale da includere propriamente la relazione di denotazione dei termini singolari così che i predicati, dentro il quadro della teoria, sono i sostituendi ammissibili delle variabili individuali; o (2) se il preteso modo di essere delle proprietà e relazioni è strettamente di natura predicativa la quale esclude il loro essere argomenti o soggetti di predicazione in qualsiasi senso che sia logicamente simile a quello in cui gli individui, in generale, lo sono. Nel primo tipo di teoria, proprietà e relazioni sono esse stesse individui, i.e. hanno natura tanto nominativa che predicativa, mentre nel secondo le categorie o modi di essere presumibilmente indicati dai predicati quantificati e dalle variabili individuali sono ontologicamente disgiunti. Seguendo Frege, si può parlare di proprietà e relazioni come entità insature quando esse sono le entità previste da una teoria del secondo tipo. (Cocchiarella 1975:33-4.).

Delle due l'una, dunque. La tesi di Quine conduce ad una teoria della forma logica del tipo definito da (1). Boolos, d'altro canto, rigetta (1) e lo fa per due ragioni interconnesse. La prima, ontologica, è la propensione per l'impostazione fregeana, come detto. La seconda, è strettamente logica. Seguire (1) comporta, come già visto, che le variabili predicative possono essere intese similmente a meta-variabili o lettere schematiche. Ma (1) porta con sé un forte limitazione dovuta alla vera logica assunta: FOL=. Ogni teoria del secondo ordine *nominalista* è *non-categorica* esattamente come lo sono le teorie del primo ordine, cioè il suo potere espressivo non è sufficiente per esprimere alcune nozioni matematiche fondamentali, i.e. *buon-ordinamento, identità*, ecc.. Nelle teorie del primo ordine ciò è dovuto alla povertà del linguaggio. La generalità di tali nozioni e degli assiomi in cui tali nozioni occorrono non è affatto esprimibile in una teoria del primo ordine. Per poter almeno mimare in una teoria del primo ordine la generalità di tali nozioni e degli assiomi in cui tali nozioni occorrono si deve adottare quello che Parsons chiama il *metodo dell'ascesa semantica*:

> Questo è in effetti una applicazione di un terzo metodo per generalizzare i posti di predicato, che io chiamo il *metodo dell'ascesa semantica*. Nell'assiomatizzare la teoria degli insiemi nel modo usuale al primo ordine[131], la formulazione [dell'*assioma di separazione*[132]; *Ndr*] non è possibile [*is not available*, *Ndr*]; invece, naturalmente, uno assume come un assioma per ciascuna formula $\varphi(x)$ del linguaggio con la variabile *x* libera
>
> (11) $\exists y\, \forall x\, \left(x \in y \leftrightarrow \left(x \in a \wedge \varphi(x)\right)\right)$[133]
>
> Ciò ha per conseguenza che non possiamo esprimere nel linguaggio della teoria (formalizzata) la generalità dell'assioma nella formulazione [al secondo ordine, *Ndr*] […]. Nel meta-linguaggio, comunque, possiamo esprimere tale generalizzazione dicendo che tutte le istanze di (11) sono *vere*. (Parsons 2008:19).

Impiegando lettere schematiche in luogo di variabili predicative quantificate, la teoria del primo ordine mima la generalità della teoria del secondo ordine. Il prezzo da pagare è però il seguente: dire 'tutte le istanze di uno schema di assioma sono vere' significa che infiniti diversi assiomi – uno per ciascuna forma che ciascuna meta-variabile occorrente

---

[131] In generale ci si riferisce all'assiomatizzazione di Zermelo-Fraenkel (ZFC). Nel 1908 Zermelo propose la prima assiomatizzazione della teoria degli insiemi, detta Z. L'assiomatizzazione di Zermelo faceva uso di un concetto ambiguo, quello di proprietà 'definita', in quanto il suo significato operazionale non era chiaro. Nel 1922 Fraenkel propose che tale concetto fosse operazionalizzato mediante una formulazione al primo ordine della teoria le cui *ffbf* atomiche fossero limitate all'appartenenza ed alla identità. Mediante l'aggiunta degli *assiomi* di *rimpiazzamento* e di *regolarità* prima e di *scelta* (AC) poi la nuova teoria fu denotata come ZFC.

[132] Parsons prende l'assioma si separazione (o di specificazione) come un caso esemplare. L'unico altro caso in ZFC è costituito dallo schema dell'*assioma di rimpiazzamento*. Lo stesso ragionamento comunque si applica per la formulazione dello schema dell'*assioma di induzione* nell'assiomatizzazione al primo ordine dell'aritmetica di Peano.

[133] Possiamo riformulare (11) costituendo la costante a con la variabile z e prefiggendolo con '$\forall z$'. Mediante questo (schema d') assioma si possono costruire solo sotto-insiemi e non insiemi dalla forma più generale $\{x : \varphi(x)\}$. Questa restrizione 'predicativa' è necessaria per evitare il paradosso di Russell. Infatti l'assioma di specificazione corrisponde all'assioma di *comprensione ristretto*. La versione non ristretta di tale assioma era tacitamente usato infatti agli albori della formulazione *naïve* della teoria degli insiemi ed il paradosso di Russell si genera assumendo che $\varphi(x)$ sia $\neg(x \in x)$. Pertanto nessuna assiomatizzazione della teoria degli insiemi può assumere l'*assioma di comprensione* non ristretto.

nello schema possa assumere nel lingauggio (del primo ordine) – sono veri e, quindi, che la teoria non può essere assiomatizzata, venendo contro così allo scopo stesso dell'assiomatizzazione, ovverosia quello di fornire una definizione di teoria mediante la riduzione della nozione generica e *infinitaria* di teoria (non assiomatizzata) ad un insieme *finito* di *ffbf* (chiuse) da cui dipendono in qualche modo tutte le altre.

L'analisi in (Boolos 1975) comunque rileva che SOL è problematica. Se il dominio di interpretazione è l'intera gerarchia insiemistica[134], alcune *ffbf* di SOL, anche se valide con rierimento alla semantica modellistica *standard* (in cui individui e non insiemi sono gli elementi del dominio), cessano di esserlo. Gli esempi si moltiplicano. Prendendo l'espressione '$\exists F\ \forall x\ (Fx)$' questa è semplicemente falsa se (i) la variabile del primo ordine varia su *tutti gli insiemi*, se cioè varia su tutta la gerarchia insiemistica. Infatti, se (i) è soddisfatta, allora (ii) la variabile predicativa non può avere valori. Prima di tutto perché se la variabile predicativa avesse valori essi sarebbero gli stessi valori possibili delle variabili individuali – le variabili individuali variando su tutta la gerarchia insiemistica e non su un sotto-insieme di questa – e ciò porterebbe a confusione semantica delle categorie tanto logiche quanto ontologiche. Secondo, perché l'intera gerarchia insiemistica non è un insieme, o come è noto, non esiste in ZFC l'insieme di tutti gli insiemi. Invece, per la semantica standard relativa a SOL, il referente della variabile predicativa può essere lo stesso dominio di interpretazione, proprio perché è un insieme (non-vuoto).

La differenza fra interpretazione insiemistica e modellistica standard per SOL consiste nel fatto che nel primo caso, insiemistico, la nozione di insieme è quella *iterativa*; mentre nel secondo caso si assume la c.d. nozione *logica* di insieme. Il dominio di interpretazione è un insieme *logico*, una classe, non-vuoto. La radice della distinzione fra nozione logica e iterativa, fra classe e insieme, consite semplicemente nel fatto che la prima è una nozione algebrica[135] (booleana) mentre la seconda no (cfr. (Shapiro 1991:16ss)). Il

[134] La gerarchia insiemistica è la riunione totale di tutti gli insiemi ottenibili tramite l'operazione di insieme potenza e di unione a partire dall'insieme vuoto, ossia l'estensione dell'espressione $x \neq x$. Le operazioni unione e insieme potenza sono completamente formali.

[135] Essere un insieme algebrico significa, se x è un insieme, che: a) per ogni x esiste il suo complemento $\bar{x}$ t.c. $\bar{x} = \{y : y \in U \wedge y \notin x\}$; b) esiste un insieme y t.c. $\forall x\ (x \in y)$, ovvero t.c. $y = U$, con U l'universo del discorso; c) esiste il complemento di U, $\bar{U}$, ed esso è t.c. $\bar{U} = \emptyset$. La nozione iterativa di insieme è così non booleanal o non algebrica poichè: a') per ogni x non esiste il suo complemento; b') la gerarchia iterativa degli insiemi non è essa stessa un insieme, ovvero $\neg\exists y\ \forall x\ (x \in y)$; c') per a' e b', anche se in ZFC esiste l'insieme vuoto $\emptyset$, si ha che $\emptyset \neq \bar{U}$. Nelle due nozioni si deve pertanto distinguere fra due rispettive nozioni di appartenenza. La *fbf* che esprime il paradosso di Russell, $\exists x\ \forall x\ (Xx \leftrightarrow x \notin x)$, similmente ad altre

Paradosso di Russell, la cui espressione in SOL è '$\exists F\, \forall x\, (Fx \leftrightarrow x \notin x)$' ossia una istanza di CP, è derivabile *qualora* si assume che il dominio di interpretazione è (a) un insieme *logico*, così che le variabili variino su tutto il dominio e (b) *assolutamente inclusivo*, così che ciascun insieme (estensione), essendo un oggetto (individuale), appartenga al dominio (t.c. ogni sotto-insieme *improprio* del dominio appartiene al dominio stesso).

A partire da tutte queste considerazioni, prende le mosse la teoria semantica di Boolos. Tale teoria viene detta *interpretazione plurale dei quantificatori*.

3.2. La proposta plurale di Boolos.

A metà degli anni '80 Boolos con due articoli (1984, 1985) giustifica, articola e propone un nuovo modo di interpretare le variabili predicative quantificate, col fine di salvaguardare e garantire la possibilità di applicare ad ogni teoria SOL. Lo scopo era, in atri termini, quello di rendere SOL *formale*, nel senso di *indipendente dal dominio di applicazione*. Non di meno, il suo suggerimento parte dall'assunto che le variabili predicative non sono posti per nomi e, perciò, si limita a variare il tipo di interpretazione referenziale delle variabili predicative quantificate da quello usuale. Questa nuova interpretazione deve soddisfare due condizioni: (ii') le variabili predicative devono variare sul dominio di variabili individuali il quale (a) deve essere comunque un *insieme logico*, così che il dominio possa in un certo senso *mimare* il comportamente assolutamente inclusivo, degli insiemi *iterativi*.

Seguendo la semantica modellistica estensionale, l'espressione '$\exists F$' deve essere letta 'esiste una classe F', nel caso intensionale 'esiste una proprietà F' o 'esiste un concetto F'. Boolos suggerì che la c.d. interpretazione plurale del quantificatore esistenziale[136]

istanze di CP – p.es. $\exists x\, \forall x\, (Xx \leftrightarrow x \neq x)$, che esprimono l'esistenza dell'insieme vuoto – costituiscono prove che nella formulazione *naïve* erano considerati insiemi alcune classi non iterative (proprie), ossia collezioni (di insiemi) non appartenenti alla gerarchia iterativa che costituisce il dominio della teoria degli insiemi.

Nella teoria assiomatizzata l'intervallo di variazione delle variabili individuali non è un insieme iterativo, bensì un insieme logico, mentre nella logica o nell'algebra, ciascun sotto-insieme non è un elemento del dominio.

[136] Il quantificatore esistenziale è quello primitivo nella proposta di Boolos in quanto è difficile pensare ad una interpretazione plurale immediata del quantificatore universale. Intuitivamente, infatti, l'espressione "esistono alcuni F t.c. ... F ...", è immediate mentre non lo è la pluralizzazione di 'ciascuno' o 'tutti'. Ciò

secondo cui l'espressione originaria deve essere letta 'ci sono individui F'. Seguendo Boccuni (2012:89-90) è doveroso sottolineare due punti a riguardo, prima di proseguire. Primo, Boolos *non fornisce un metodo* per la formalizzazione della quantificazione plurale nel linguaggio naturale. Secondo, l'interpretazione plurale *suppone* SOL, in particolare la sua restrizione monadica MSOL. Infatti, esistono espressioni di LN in cui la quantificazione plurale, sebbene occorra, è del tutto *irrilevante* per la formalizzazione regimenta di tale espressione: tali espressioni possono essere formalizzate nel linguaggio di FOL= senza perdere alcuna informazione contenuta in esse[137]. L'esempio canonico è il c.d. enunciato Geach-Kaplan (GK)[138]:

(GK) Alcuni critici si ammirano solo l'un l'altro

GK è una *fbf* chiusa di LN la cui (più o meno) immediata formalizzazione avviene in L_{II} in quanto, come Boolos argomenta (1984:432), è non-formalizzabile al primo ordine. Allo stesso tempo però, GK non coinvolge nè estensioni (classi o insiemi) nè intensioni (proprietà o concetti), bensì in essa occorre la quantificazione plurale. Ad ogni modo, GK può essere formalizzata in SOL assumendo la classe dei critici come dominio di interpretazione, nel modo che segue:

(GK') $\exists C\ (\exists x\ Cx \land \forall x\ \forall y\ (Cx \land Axy \rightarrow x \neq y \land Cy))$

Limitandoci al caso estensionale, GK' può essere ritradotta in modo da esprimere anche in LN il riferimento a classi, nel caso della quantificazione di variabili predicative:

rende necessarioo definire il quantficatore universale mediante quello esistenziale (cfr. (Boccuni 2012:100) e (Parsons 2008:66)).

137 Solo le espressioni plurali di *LN* dimostrativamente *non formalizzabili* al *primo ordine* (*Non-firstorderizable*, è il termine tecnico usato da Boolos e altri) sono considerate espressioni plurali *genuine*.

138 Per ciò che concerne l'argomento a seguire ci siamo basati sul seguente brano: "[…] alcuni critici ammirano solo l'un l'altro. Questo enunciato si suppone significhi: esiste una classe non-vuota di critici, ciascuno dei quali ammira qualcuno solo se quel qualcuno è qualcun altro appartenente alla stessa classe. Il significato può anche essere posto così: esistono alcuni critici ciascuno dei quali ammira qualcuno solo se quel qualcuno è uno di loro e nessuno di quelli ammira se stesso. Se si esprime il significato dell'enunciato di Geach-Kaplan in questo secondo modo, non si deve, sembra, quantificare su classi di critici. Si può anche porre il significato così: esistono alcuni critici che sono tali che (a) ciascuno di loro ammira qualcuno solo se questo è uno di loro e (b) nessuno di loro ammira se stesso" (Boolos 1985:328).

(GK'') Esiste una collezione *non-vuota* di critici t.c. ciascun suo membro *non* ammira un secondo individuo *solo se* quest'ultimo è *non* diverso dal primo ed è un membro della stessa collezione

Se, poi, riformuliamo GK'' in una forma pluralizzata di LN, ci possiamo permettere di *non* assumere l'esistenza di alcuna entità del secondo ordine:

(GK''') Esistono critici ciascuno dei quali ammira un altro critico *solo se* quest'ultimo è uno di quelli ma distinto dal primo

La proposta di Boolos è, così, quella di utilizzare nel meta-linguaggio la nozione di riferimento plurale per interpretare le variabili predicative (monadiche) del linguaggio-oggetto della teoria. Tale intuizione permette a Boolos di costruire una semantica estensionale per MSOL del tutto simile a quella di Tarski, con il vantaggio di non assumere nessun dominio di ordine superiore in corrispondenza dell'intervallo di variazione delle variabili predicative monadiche quantificate. Entrambi i tipi di variabile ammessi nel linguaggio di MSOL, L_{IIM}, variano sul dominio correlato usualmente alle sole variabili individuali. In questo modo, soddisfacendo la condizione (ii'), non sembra che ulteriore peso ontologico sia aggiunto alla L_{IIM}-teoria così interpretata.

3.2.1. La teoria di Boolos e la teoria PFO: traduzioni di MSOL.

In (Boolos 1984:444) Boolos fornisce le istruzioni per la definizione di una funzione di traduzione, Tr, da L_{IIM} a $LN\ plurale$ (integrato con i pronomi indicizzati, i.e. 'it_x', $them_x$', ecc.). La base della definizione induttiva dell'insieme di espressioni ottenute per applicazione di Tr è la seguente[139]: per ogni variabile predicativa V e ogni variabile individuale v, l'applicazione della funzione Tr all'espressione 'Vv' è l'espressione '$it_v\ is\ one\ of\ them_V$'[140]. I casi interessanti per la discussione sono la base per le *ffbf atomiche* e il *caso quantificato* al passo induttivo caratteristici di MSOL[141]. Formalmente:

[139] Boolos, nel passaggio citato fa riferimento alla teoria degli insiemi nella assiomatizzazione al secondo ordine monadica, in cui compare la costante predicativa (teorica) ∈, essendo *binaria*.
[140] Le variabili formalizzano i pronomi personali. In italiano l'espressione risulta così: '$esso_v$ è $uno\ di\ loro_V$'.
[141] Per quanto riguarda i casi non caratteristici di MSOL la traduzione avviene nel modo intuitivo.

- $Tr(Vv) = it_v \; is \; one \; of \; them_V$
- $Tr(\exists V \; \varphi) = \; there \; are \; some \; things_V \; such \; that \; Tr(\varphi)$

Linnebo, in (2003, 2013), ha formalizzato la proposta di Boolos in un particolare LO, L_{PFO}[142], relativo alla teoria della quantificazione plurale (PFO, per *plural first-order*), che introduce, essenzialmente due nuovi simboli logici: la *variabile plurale* (xx) e una *costante logica terminale* ($\prec$) che formalizza l'espressione boolosiana '*essere uno dei*', mediante cui veniva tradotta la predicazione al secondo ordine. PFO suppone la traduzione Tr, e mediante la definizione di un'altra traduzione, Tr', mappa i valori di Tr in L_{PFO}. Anche Tr' è definita ricorsivamente e le sue clausole non banali sono, come prima, limitate ai casi in cui Tr' è applicata alle *ffbf* dove occorrono variabili predicative monadiche (cfr. (Linnebo 2003:74)). Formalmente:

- $Tr'(V_j v_i) = v_i \prec vv_j$
- $Tr'(\exists V_j \varphi) \; = \; \exists vv_j \big(Tr'(\varphi) \vee Tr'(\varphi^*)\big)$

  $dove \; \varphi^*$ è $il \; risultato \; della \; sostituzione \; in \; \varphi \; di \;$ '$V_j v_i$' con '$v_i \neq v_i$'.

Da notare che la seconda clausola è una disgiunzione. Ciò cattura l'intuizione secondo cui una pluralità di individui (ciò che mediante la definizione della semantica per PFO è il referente della variabile prurale) *non* può essere *vuota*. Il fatto che, invece, il referente della variabile predicativa, nella semantica estensionale può essere la *classe vuota*[143], i.e. $F = \emptyset$, costringe ad impiegare il secondo disgiunto nel valore della traduzione di '$\exists V_j \varphi$', per garantire che L_{PFO} non limiti l'espressività originaria di L_{IIM}. Qualora non fosse imposto il secondo disgiunto, la funzione sintattica Tr' obbligherebbe L_{PFO} a una classe di forme sintattiche le cui interpretazioni e valutazioni non sarebbero equi-interpretabili[144] con le forme originali, finendo per non comportarsi più come una funzione di semplice traduzione.

Per induzione sulla complessità delle *ffbf*, Boolos prova che ogni *fbf* di L_{IIM} può essere mappata in una *fbf* plurale di LN[145] (Boolos, 1985). Allo stesso modo, PFO è capace di

[142] L_{PFO} è una estensione di $L_{I=}$ cui il primo aggiunge il seguente vcabolario logico: le variabili plurali, xx, yy…(o indicizzate numericamente, e quantificabili mediante gli usuali qauntificatori) e una nuova costante logica predicativa, la cui interpretazione è fissa, il predicato binario di inclusione, $\prec$. Cfr. (Linnebo 2013) per ulteriori dettagli.

[143] Il secondo disgiunto, infatti, esprime il valore associato alla classe vuota, mediante la condizione che la definisce: la condizione di *non-auto-identità*.

[144] Non vi sarebbe una *corrispondenza biunivoca* fra le due interpretazioni delle corrispettive espressioni.

[145] Così la formalizzazione di GK è seguendo (Williamson 2013:241):

codificare, *via* Tr', tutte le *ffbs* di MSOL solo assumendo pochi e semplici nuovi assiomi. L'assioma caratterisitico di SOL è CP[146] (impredicativo). A partire dalla restrizione monadica di CP, tutte le istanze del seguente *analogo plurale* schema d'assioma impredicativo sono vere in PFO:

$\mathrm{CP_{pl}}$ $\quad \exists x\ \varphi'(x) \to \exists xx\ \forall x\ \big(x \prec xx \leftrightarrow \varphi'(x)\big)$

$\qquad dove\ \varphi'$ è $una\ fbf\ di\ L_{PFO}\ in\ cui\ xx\ non\ occorre\ libera\ (impredicativit$à$).$

La forma condizionale deriva dalla applicazione di Tr' al caso quantificato[147] e l'antecedente è dunque essenziale per la stessa ragione di prima che non esiste una pluraità vuota. Così, con $\mathrm{CP_{pl}}$, prima di poter stabilire che l'esistenza di una pluralità xx (di x) che è $\varphi'(x)$, si deve sapere che qualche individuo x è già $\varphi'(x)$. Per catturare l'intuizione che nessuna pluralità è vuota bisogna introdurre un assioma caratteristico di PFO che garantisca che che ogni pluralità non è vuota (NEP, per *non empty pluralities*):

NEP $\quad \forall xx\ \exists x\ (x \prec xx)$

Riprendiamo ora la condizione (a). Ciò che è interessante rispetto alla soddisfazione di (a), è che in forza di Tr e, in particolare, Tr' si esplicita come la predicazione (logica) in MSOL viene rappresentata in PFO mediante la predicazione plurale: mediante una asimmetria sintattica fra variabili individuali e variabili per pluralità. Nelle clausole induttive della definizione delle *ffbf* di L_{PFO} le variabili plurali possono occorrere esclusivamente alla *destra* del predicato logico $\prec$[148]. In altri termini, *nessun predicato*

(GK''') $\qquad \exists xx\ \forall x\ \Big(x \prec xx \to \Big(Cx \wedge \forall y\ \big(Axy \to (x \neq y \wedge y \prec xx)\big)\Big)\Big)$

146 Rispetto alla definizione della forma logica di una teoria. Pertanto AC, può essere qui non preso in considerazione.

147 E *via commutatività* della disgiunzione ed equivalenza fra *connettivi* ($\Vdash \neg p \vee q \leftrightarrow p \to p$):

$$Tr'(\mathrm{CP}) = \exists xx \forall x\ (x \prec xx \leftrightarrow \varphi') \vee \forall x (x \neq x \leftrightarrow \varphi')$$

148 I termini plurali possono occorrere esclusivamente alla destra della relazione di inclusione (cfr.(Linnebo 2013)): L_{PFO} ha le seguenti *ffbf*:

1. $R_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}(t_1, \dots, t_n)$ è una *fbf* quando $R_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}$ è un predicato n-ario e t_i sono termini singolari
2. $t \prec T$ è una *fbf* quando t è un termine singolare e T un termine plurale
3. $\neg\varphi$ e $\varphi \& \psi$ sono *ffbf* quando φ e ψ sono *ffbf*
4. $\exists v\ \varphi$ e $\exists vv\ \varphi$ sono *ffbf* quando φ è una *fbf* e v è una variabile singolare e vv una variabile plurale

I restant connettivi sono introdotti per definizione nel modo usuale.

non-logico può prendere come argomento[149] un termine plurale (variabile). PFO, così, mette in luce sintatticamente proprio l'assunto secondo cui MSOL non permette che i predicati siano soggetti o argomenti della predicazione stessa. A riprova di ciò, Tr' non è definita per il caso di *ffbf* di atomiche di L_{IIM} della forma $P(V)$. Questa, pare un'evidenza che la proposta di Boolos assume la condizione del ruolo esclusivamente predicativo delle variabili predicative.

Nel caso in cui volessimo ammettere la possibilità di costruire *ffbf* corrispondenti alla forma $P(V)$, dobbiamo estendere L_{PFO} a L_{PFO+} il che comporta l'estensione di PFO a PFO+ e che a sua volta, implica che PFO+ sia caratteriazzata da un $\mathrm{CP_{pl}}$ in cui φ' è una *fbf* di PFO+ t.c. le variabili plurali possono occorrere anche come argomento di predicati[150]. Ma PFO+ non è una estensione conservativa di PFO. Innanzitutto, perchè una volta definito L_{PFO+} si può assumere come ulteriore schema di assiomi la seguente *pluralizzazione* del principio di *estensionalità*, il quale afferma che pluralità coestensive sono identiche:

$$\mathrm{Ext_{pl}} \quad \forall xx\, \forall yy\, \Big(\forall z\, (z \prec xx \leftrightarrow z \prec yy) \rightarrow \big(\varphi'(xx) \leftrightarrow \psi'(yy)\big)\Big)$$

Il passaggio da PFO a PFO+ è, pertanto, critico al fine di comprenderei limiti del lavoro di Boolos. Come Linnebo ha sottolineato:

> Per induzione sulle derivazioni in MSOL uno può facilmente provare che ciascun teorema di MSOL è mappato su qualche teorema di PFO. Più che altro, è facile definire una traduzione 'inversa' che mappi le formule di L_{PFO} sulle formule di L_{MSOL} e provare che questa traduzione mappi teoremi della prima sui teoremi della seconda. Ciò mostra che PFO e MSOL sono equi-interpretabili[151]. Un risultato simile può essere provato circa PFO+ e una estensione MSOL+ di MSOL che ammette predicati di concetti (di primo livello) [(*first-level*) *concepts*], a patto che [*provided*] che MSOL+ include uno schema di assiomi

[149] L'identità non può assumere ovviamente termini plurali, in quanto cade sotto il caso 1. della nota immediatamente precedente.
[150] $\mathrm{CP_{pl}}$ è un assioma di PFO anche se φ è una *ffbf* di PFO+ se φ è soggetta alla restrizione predicativa secondo cui in φ la variabile x occorre libera (e plausibilmente altre variabili singolari) ma non contiene occorrenze della variabile plurale *xx*.
[151] Nel senso di (Linnebo 2013:§2.1)).

> il cui effetto è che due concetti [*concepts*] coestensivi sono indiscernibili. (Linnebo 2013:§2.1).

Dunque, PFO+ non è una estensione conservativa di PFO, tanto quanto MSOL+ non estende conservativamente MSOL.

Tuttavia, l'intento di Boolos era chiaramente limitato a quella che Linnebo chiama PFO, dal momento che pluralità possono occorrere esclusivamente alla destra del segno '$\prec$' e che nessuna clausola induttiva relativa a espressioni del tipo '$P(V)$' – con P costante predicativa del secondo ordine – è inclusa tanto nella definizione di Tr quanto frale clausole induttive per la costruzione di *ffbf*. Ciò rivela che le variabili plurali, nella proposta di Boolos, sebbene siano posti per nomi nel senso di essere argomento di $\prec$ non occorrono mai alla sua sinistra: non sono posti per nomi nel senso in cui le variabili singolari lo sono in MSOL, e le variabili predicative lo sono in MSOL+.

Queste restrizioni sintattiche di PFO, congiuntamente, alla supposta soddisfazione di (ii'), ci spingono a capire perché PFO soddisfi l'altra condizione (a). Entriamo allora nel merito della semantica proposta da Boolos.

3.2.2. Elementi della semantica boolosiana per MSOL

Shapiro ritiene che l'interpretazione plurale di MSOL sia del tutto equivalente all'interpretazione *standard*, almeno se prendiamo come riferimento "interpretazioni in cui il dominio costituisce un insieme" (Shapiro 2005:764), che nessuna questione tecnica emerga. Al fine di garantire l'applicabilità universale di MSOL, la condizione (ii') per cui i valori delle variabili predicative devono appartenere al dominio del primo ordine deve essere soddisfatta. Shapiro si pronuncia per la sua soddisfazione:

> Così costruito, un linguaggio del secondo ordine monadico non ha alcun impegno ontologico oltre a quello della sua controparte al primo ordine. Di conseguenza, le variabili del secondo ordine non hanno un intervallo di variazione peculiare. In un certo senso l'intervallo di variazione delle variabili monadiche del secondo ordine è lo stesso intervallo delle variabili del primo. È solo che la quantificazione è plurale. (Shapiro 2005:763).

Le pluralità sono così solo *alcune* cose, considerate pluralmente. Esse non sono ulteriori individui, o nuovi oggetti. .La semantica bolosiana emula del tutto la semantica di Tarski nel definire la nozione di *verità via* quella di *soddisfazione* ma, allo stesso tempo, non vi concorda nel codificare la quantificazione sulle variabili predicative: in luogo di una *funzione* di assegnazione del tipo di s, la nuova semantica assume una *relazione* di assegnazione R, che correla le variabili predicative con gli individui del dominio di variazione delle variabili individuali. Una relazione generica (uno-molti), una volta applicata ad un dato argomento – appartenente ad ogni sorta di insieme (i.e. nel caso di R, l'insieme delle variabili predicative) – dà una pluralità di valori – appartenenti ad un qualsiasi insieme. R non è in alcun modo ristretta e correla a ciascuna variabile predicativa V, zero, uno o più individui. Così, R differisce da s nel fatto che la seconda, in quanto è una funzione generica, è una particulare relazione (molti-uno) t.c. assegna a ciascuna variabile un solo ed unico valore (rispettivo all'ordine della variabile assunta). Per esempio, limitatamente al caso base della definizione induttiva di verità, e rispetto a L_{IIM}:

- Se φ è Pv allora φ è vera in $M \Leftrightarrow I, s \vDash Pv \Leftrightarrow s(v) \in P^M$
- Se φ è Vv allora φ è vera in $M \Leftrightarrow I, s \vDash Vv \Leftrightarrow s(v) \in s(V)$

Ovviamente, $M_{II} = \langle U_M, I \rangle$ un modello per la semantica *standard* definito nel primo capitolo, come del resto la funzione s (t.c. $s(v) \in U_M$), mentre $s(V) \in \wp(U_M)$.

Le clausole di Boolos per la soddisfazione delle *ffbf* di L_{IIM} sono le solite, eccetto per i casi tipici di L_{IIM}: la base estesa alla seconda delle due sopra, per il caso in cui φ è Vv, ed il passo induttivo esteso alla quantificazione, per il caso φ è $\exists V\ \psi$. Queste due clausole sono fornite, sì in stile tarskiano, ma esplicitando in ML che la relazione R permette di esprimere la predicazione plurale '$is\ one\ of$', come visto nella traduzione $Tr(Vv) =$ '$it_v\ is\ one\ of\ them_V$' in cui $it_v = s(v)$:

- Se φ è Pv allora φ è vera in $M \Leftrightarrow I, s \vDash \varphi \Leftrightarrow$ il correlato di v *è uno dei* correlati di V;
- Se φ è $\exists V\ \psi$ allora φ è vera in $M \Leftrightarrow I, s, R \vDash \exists V\ \psi$ in $M \Leftrightarrow$ esiste una R', che differisce da R al massimo per i correlati di V, t.c. R' soddisfa ψ.

In tal modo Boolos rende la nozione di interpretazione plurale precisa e mostra come questa conduca ad una semantica alternativa, che *non* faccia uso della nozione di '*il* valore di una variabile' come nozione semantica primitiva:

> La teoria della verità fornisce una maniera ovvia di definire la nozione di *valore di una variabile*. Wsi può solo dire, semplicemente, che x è *il* valore della variabile v relatico alla

sequenza s se e solo se $s(v) = x$. Si noti che è augurabile dare una definizione relativa. E si può dire che x è *un* valore di v se x è *un* valore di v relativamente a qualche sequenza. Esiste un ovvio modo di estendere questo sviluppo al caso del secondo ordine. (Boolos 1985:335. Corsivi miei).

La 'naturale estensione' non è soddisfatta in questa semantica. Per questa ragione possiamo considerarla un'alternativa. Per apprezzarne la differenza forniamo la completa formalizzazione dei due casi già presentati (Boolos 1985:336):

- Se φ è Vv allora φ è vera in $M \Leftrightarrow I, s, R \vDash \varphi \Leftrightarrow R\langle V, s(v)\rangle$
- Se φ è $\exists V\, \psi$ allora φ è vera in $M \Leftrightarrow I, s, R \vDash \varphi \Leftrightarrow\ exX\ exR'\ (omx\ (Xx \Leftrightarrow R'\langle V, x\rangle)\ et\ omU\ (\ U \neq V \Rightarrow om\ x\ ((R'\langle U, x\rangle \Leftrightarrow R\langle U, x\rangle)\ et\ R', s \vDash \psi)$

Dove, $x = s(v)$; $X = s(V)$. Invece, $\langle , \rangle$ è la funzione coppia ordinata[152] che fornisce la piena comprensione del predicato '*è uno di*' integrando la variabile del secondo ordine R. L'adozione della funzione *coppia ordinata* come argomento della variabile predicativa ha lo scopo di provvede alla riduzione di R da *binaria* a *monadica*[153]. Posto infatti che $\langle , \rangle$ sia iniettiva (*one to one*) l'espressione tipo 'Puv' – in cui la parte predicativa è binaria 'P^2' – può essere ridotta ad un'altra il cui unico argomento è la coppia '$\langle u, v\rangle$': P^2uv.

Ad ogni modo possiamo dire che la coppia ordinata $\langle V, x\rangle$ è anche il correlato estensionale di R stessa, una relazione uno-molti che, nel nostro caso assume come primo argomento una variabile (i.e. U o V) del secondo ordine qualsiasi, mentre al secondo oggett*i* del dominio x. Ciò ci permette di intendere pienamente la relazione logica tipica

[152] Cfr. Per estendere questa affermazione a L_{II}, e quindi estendere la proposta Boolosiana da MSOL a SOL bisogna ingegnarsi un poco: "Nonostante la quantificazione plurale fornisca una piuttosto naturale interpretazione della quantificazione su *concetti* monadici, non fornisce acuna naturale interpretazione della quantificazione su *relazioni* (n-arie). questa limitazione può essere superata (al meno per scopi tecnici) se esiste una funzione accoppiamento sul dominio rilevante, cioè, se esiste una funzione π t.c. $\pi(u, v) = \pi(u', v')$ solo nel caso in cui $u = u'$ e $v = v'$. Poiché così la quantificazione sul relazioni binarie può essere rappresentata dalla quantificazione plurale su coppie ordinate. Inoltre, iterando l'applicazione della funzione coppia ordinata possiamo rappresentare n-ple e così anche la quantificazione su relazioni n-arie" (Linnebo 2013). Così, fissata una dunzione binaria e iniettiva π è possibile introdurre variabili predicative n-arie, X^n, e variabili funionali n-arie, f^n. Così, l'espressione 'Xxy', in cui la variabile predicativa è binaria 'X^2', può essere ridotta a '$X\langle x, y\rangle$', in cui la variabile predicativa è monadica 'X' in quanto prende la coppia $\langle x, y\rangle$ come unico argomento. Questa tecnica per estendere la quantificazione plurale da MSOL a SOL ha però un prezzo. L'assunzione della funzione coppia ordinata risulta essere non solo una supposizione arbitraria nel meta-linguaggio ma inoltre ha una conseguenza notevole: risuta essere come un *principio di* infinità, non potendo essere assunta per domini finiti (cfr (Shapiro 1991:63)). Ad ogni modo, Shapiro chiama la soluzione di Boolos una "semantica modellisitica per linguaggi del secondo ordine con variabili relazionali monadiche" (Shapiro 2005:764).

[153] Cfr. n. 152.

di L_{PFO} di 'esere uno dei' poichè, come scrive Boolos, "non sarà in generale il caso che se [due] insiemi x e y sono valori di V, rispetto ad R, allora $x = y$". Pertanto, possiamo dire che la relazione $R\langle V, s(v)\rangle$, equivalente a $R(V, s(v))$, non fornisce una nozione di valore (di una variabile) comparabile con quella *standard*, non solo perchè non dà come valore di V "una unica classe, specialmente propria" (Boolos 1985:336), perché *non* dà un *unico* valore (alla variabile), a prescindere da quale sia il dominio di appartenenza di tale presunto valore. In quest'ultimo senso, è importante sottolineare che x è *un* (e non *il*) valore di V rispetto ad R. E la differenza è solo quella che passa fra una relazione binaria ed una funzione unaria generica: la prima manca della condizione (restrittiva) di unicità del valore, implicita nella seconda.

3.2.3. Nominalismo plurale.

Mediante la strategia appena percorsa MSOL può essere a ragione applicata alla teoria degli insiemi, essendo gli insiemi (individui interpretati) i valori di entrambi i tipi di variabili ammesse in L_{IIM}, senza alcuna menzione di classi (logiche). Come Resnik riassume, ciò che caratterizza questo approccio è che alla variabile predicativa si dà un riferimento 'diviso' grazie all'uso di relazioni in luogo di funzioni generiche per l'assegnazione di valori:

> Non si può considerare un'interpretazione come qualcosa che assegna entità alle variabili del secondo ordine dal momento che Boolos attentamente evita di farlo nella sua teoria della verità. Invece, si deve considerare un'interpretazione come una relazione che correla variabili e predicati agli elementi appropriati del dominio. Naturalmente, anche le nostre interpretazioni per i linguaggi del primo ordine sono relazioni, dal momento che tutte le funzioni di assegnazione sono relazioni. Ma le relazioni che servono quali interpretazioni nello stile di Boolos non devono essere funzioni laddove ci si limita alle variabili del secondo ordine.
>
> Più precisamente, un'interpretazione I nello stile di Boolos di un linguaggio L del secondo ordine in un dominio non vuoto D è una relazione che mette in relazione ciascuna variabile v del primo ordine con un unico elemento v^* di D, ciascuna lettera predicativa n-aria F

> con un'unica relazione n-aria F^* su D, e a ciascuna variabile del secondo ordine con 0 o più elementi di D[154]. (Resnik 1988:82).

Ciò che la semantica bolosiana fornisce è la determinazione dell'estensione della variabile predicativa nel dominio degli individui del primo ordine correlando gli individui di una sotto-classe di U_M alla variabile predicativa, il cui riferimento appare pertanto 'diviso'. Resnik, in proposito, ha sottolineato che, dato $s(v) = x = b$ appartenente a U_M:

> Possiamo vedere che $R\langle V, b\rangle$ vale se e solo se (1) V è una variabile del secondo ordine del linguaggio oggetto, (2) b è un elemento del dominio degli individui, e (3) b appartiene a qualche classe $C(V, r)$, dipendente da V e r, di membri di tale dominio. Pertanto, data una qualsiasi sequenza del tipo utilizzato in una teoria della verità *standard*, i.e., una che assegna classi alle variabili del secondo ordine, vi è una relazione R equivalente nella teoria della verità di Boolos. (Resnik 1988:81).

Il punto sollevato da Resnik può essere chiarito mediante la seguente definizione matematica di *funzione polidroma* (Borges 1967:451), alla quale corrisponde esattamente la nozione di relazione o correlazione *uno-molti* impiegata da Boolos.

DEFINIZIONE 3.1. *Funzione polidroma*. Dati due insiemi qualsiasi X, Y, la funzione $\mathfrak{f}$ t.c. $\mathfrak{f}\colon X \to Y$ è una funzione *polidroma* se, per ogni $x \in X$, $\mathfrak{f}(x) \subseteq Y$ (notiamo che $\mathfrak{f}(x)$ non necessita di essere un insieme chiuso o non-vuoto).

- La funzione *monodroma* (*single-valued*) f è solo un caso speciale di funzione polidroma e, invero, una funzione polidroma da X a Y può ovviamente essere pensata come una funzione monodroma da X a $\wp(Y)$ – con $\wp(Y)$ l'insieme potenza di Y (cui appartiene anche $\emptyset$).

Questa definizione non solo fornisce una giustificazione completa per la soddisfazione della condizione (ii') ma, allo stesso tempo, dà giustificazione e soddisfazione alla condizione (a), dato che nessuna limitazione all'intervallo di variazione è specificata. Pertanto, la semantica di Boolos per MSOL mostra che MSOL è universalmente

[154] Dove la funzione * è la stessa funzione di interpretazione I estesa ad includere anche la funzione di assegnazione.

applicabile, al meno se assumiamo che l'unico contro modello per l'applicazione della semantica standard per MSOL è la teoria degli insiemi.

MSOL può così essere interpretata senza un ulteriore e gravoso impegno ontologico oltre a quello del primo ordine. Ci domandiamo, allora, può la proposta di Boolos basata sul modello delle funzioni polidrome o relazioni (uno-molti) rendere conto adeguatamente di OC? La nostra risposta è positiva. La condizione *a-priori* è fornita in ultima istanza dalla seguente riflessione:

> In effetti, la teoria dei modelli determina solo le *relazioni* tra le condizioni di verità, il riferimento dei termini singolari, le estensioni dei predicati, e le estensioni della terminologia logica. La teoria dei modelli è quindi una definizione funzionale (o strutturale) di questi termini semantici. Per vedere un dato sistema come un'interpretazione modellistica di un linguaggio (formale), si deve solo pensare ai termini del linguaggio come (in qualche modo) referenti al dominio del discorso, e vedere i quantificatori del primo ordine come varianti su quel dominio. Perché lo schema modellistico funzioni, non importa come questo 'riferimento' deve essere compiuto o se possa essere realizzato in conformità con qualche teoria o un'altra. Non c'è nulla di problematico nella considerazione astratta di modelli i cui domini sono al di là di ogni contatto causale. Perché la teoria dei modelli funzioni, di riferimento può essere qualsiasi funzione tra i termini singolari della lingua e l'ontologia. (Shapiro 1997:139).

Ciò detto è fondamentale se si pensa a quanto affermato all'inizio del capitolo circa il fatto che, la quantificazione plurale si basa sulla primitività della nozione di riferimento plurale, in Boolos. Anche Williamson ne sottolinea la primitività: "niente da contestare all'intelligibilità della quantificazione plurale, contro la sua irriducibilità[155] alla quantificazione singolare" (Williamson 2013:243).

In forza di tutto ciò possiamo allora veramente concludere affermando la semantica di Boolos è una alternativa a quella *standard*. Una alternativa in cui le condizioni (a) e (ii') sono soddisfatte. Pertanto ci sentiamo di concludere con le seguenti parole di Boolos:

[155] Qualsiasi riduzione implica l'assunzione dell'esistenza di $\wp(U_M)$. Inoltre, cfr. a riguardo anche (Oliver, Smiley 2013:60).

> Nel caso di una lingua del secondo ordine, come la lingua del secondo ordine della teoria degli insiemi, ci sono almeno due differenti tipi di teorie della verità che possono essere date: in una di queste, sarebbe del tutto naturale definire 'valore' in modo che le variabili del secondo ordine risulterebbero avere classi come valori; nell'altra, non sarebbe così. (Boolos 1985: 334).

IV

LOGICA PLURALE DI OLIVER E SMILEY

Con il presente capitolo ci proponiamo di presentare il sistema di logica plurale, PL, formulato da Oliver e Smiley (2013)[156], delineandone le linee guida e le maggiori idee. Lo scopo del presente capitolo è quello di fornire una guida precisa e sufficiente, sebbene non esaustiva, al calcolo ed alla sua semantica. Già abbiamo detto che l'unica possibilità di distinzione fra categorie sintattiche è resa dalla semantica impiegata. Solo una giustificazione semantica del linguaggio di PL (L_{PL}) permetterà, così, di comprendere la peculiarità di PL funzionalmente, in particolare, all'analisi del linguaggio naturale.

4.1. Il linguaggio plurale e i termini plurali.

Lo scopo del sistema è quello di formalizzare, catturando, quel frammento del linguaggio naturale che presenta e include la capacità denotativa plurale. Un termine del linguaggio naturale che denota una pluralità o molteplicità di oggetti, è detto 'termine plurale'. La nozione di pluralità impiegata in PL è una nozione *inclusiva*, ossia una pluralità si contrappone ad una singolarità non tanto per il numero minimo di valori che un termine può denotare, bensì per il numero *massimo* degli oggetti denotati[157]. Contrariamente

[156] Da ora in avanti il sistema presentato da Oliver e Smiley in (Oliver, Smiley 2013) sarà denotato con la sigla 'PL' anche nelle citazioni, p.es. (PL:pp.). Al contempo ci riferiremo agli autori A. Oliver e T. Smiley mediante la sigla 'AA' nelle occorrenze intertestuali.

[157] "Noi stessi, comunque non facciamo nessuna stipulazione sul numero minimo di valori, e così permettiamo valutazioni in cui ad una variabile (singolare e plurale) non è assegnato alcun valore" (PL:107) e la ragione di ciò sta nell'esigenza di rendere PL *topic neutral* (cfr. 4.1.1) In tal senso PL è una logica *universalmente libera da presupposizione esistenziale* (*universally free logic*) (cfr (PL:187)). Ad ogni modo, nel caso ad una variabile non sia assegnato alcun valore la funzione di assegnazione è una *funzione parziale*. In generale, rispetto al dominio D, le funzioni possono essere di due tipi: quelle *totali* e *parziali*. Sono parziali se non sono totali, ovvero se $\exists x \in D$ per cui la funzione f *non* dà alcun valore ossia, se $\neg\exists y \in C$ t.c. $y = f(x)$ o, equivalentemente, se $\neg\forall x \in D$ la funzione f dà valore $y = f(x)$. Estensionalmente una funzione è detta *parziale sse*, dati due insiemi qualsiasi D e C la funzione associa un solo elemento del co-dominio a ciascun elemento di un *sotto-insieme proprio* E del dominio ($E \subset D$) detto il *campo di esistenza* della funzione. Il campo di esistenza è anche detto (impropriamente) *dominio di definizione* della funzione.

all'intuizione, per cui una pluralità consisterebbe di due o più oggetti, in PL una pluralità può essere costituita anche da un oggetto singolo, in quanto la nozione di pluralità viene intesa in modo *inclusivo*, includente, cioè, anche il caso in cui un solo valore sia assegnato alla variabile plurale. In altre parole, una singolarità è tale *sse* non può avere cardinalità superiore a uno, d'altro canto, una pluralità non ha cardinalità definita. Un termine plurale si affianca così ad un termine c.d. singolare. La tesi fondazionale della proposta degli AA è così quella secondo cui

> [E]siste una tal cosa quale la *denotazione plurale*, una relazione semantica sussistente fra espressioni linguistiche – espressioni nominali contabili [sortali, *Ndr*] o *termini* – e cose, che è plurale nel senso che un termine particolare può denotare diverse cose in una volta, non solo una o forse nessuna.
> Data questa nozione estesa di denotazione, possiamo procedere nel classificare i termini, esaustivamente o esclusivamente, a seconda del numero delle cose che sono capaci di denotare. Un *termine singolare* non può denotare più di una cosa in qualsiasi data occasione, un *termine plurale* ne può denotare diverse. (PL:2).

Formalmente, $f : (E^n \subset D^n) \to C$ è t.c. $f \subseteq (E^n \subset D^n) \times C$ ed è t.c. $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ $(x_1 \in (E_1 \subset D_1) \land \ldots \land x_n \in (E_n \subset D_n))$ *esiste uno ed un solo* $y \in C$ t.c. $\langle\langle x_1 \ldots x_n\rangle, y\rangle \in f$. Se, dunque, almeno un argomento $x \in D$ *et* $x \notin E$ allora si dice che la funzione è *non definita* su D o *indefinita rispetto a* D o *diverge* in quell'argomento. La funzione *totale* può essere considerata come un *caso limite* di quella parziale, caso in cui $E = D$.
Delle funzioni parziali si fa largo uso in matematica, p.es. assumendo $D = C = \mathbb{N}$, allora la funzione radice quadrata, '$\sqrt{\ }$', e sottrazione, '$-$', sono funzioni parziali in quanto, la prima, non ammette valori naturali per alcuni argomenti, e dunque non ammette valori se non per una restrizione dei naturali (ai quadrati perfetti); mentre la seconda non ammette valori quando il minuendo è minore del sottraendo. In matematica comunque non si fa troppa attenzione alle funzioni parziali perché è sempre lecito assumere che la nozione di 'campo di esistenza' coincida con quella di 'dominio di definizione'. Infatti, se $E \subset D$ allora D può sempre venir ristretto ad un $D' = E$. In questo modo, le funzioni parziali sono sempre considerabili alla stessa stregua di quelle totali, e l'assenza di una distinzione non è di per sé problematica. La necessità di prenderle in considerazione non deriva così dal fatto che nelle matematiche sono comuni. Piuttosto, la necessità per cui la logica deve prendere in considerazione tali funzioni riposa sulle relazioni fra la nozione di 'funzione' e quella di 'algoritmo': le *funzioni parziali* corrispondono a quegli *algoritmi* che non danno risultato, cioè che non terminano il calcolo da effettuare. Come ci ricorda sempre Smith, una *teoria generale* delle funzioni *deve ammettere* anche le funzioni *parziali*, senza poter considerare la possibilità di eliminare quest'ultime in favore di funzioni totali con domini ristretti come si fa in matematica: "Sfortunatamente, eliminare le funzioni parziali non funziona. Ad esempio, è un risultato piuttosto elementare della teoria della computazione che si può avere una funzione parziale f computabile – che esista un programma informatico che estrae il valore di f per ogni argomento cu cui è definita – ma che il completamento 'stipulativo' di f produce una funzione totale f^* che non è computabile da nessun programma possibile" (Smith 2013:345-346). Pertanto, in una logica per teorie che fanno uso essenziale delle funzioni parziali, l'eliminazione delle funzioni, in forza delle relazioni e delle *dd*, non può essere compiuto perché la presupposizione dell'esistenza del valore della funzione è l'idea messa in crisi dallo studio delle funzioni computabili.

La possibilità di formalizzare la denotazione plurale passa per l'estensione della funzione di denotazione dal caso singolare a quello plurale. PL così estende anche la nozione *sintattica* di 'termine del linguaggio'. L'assunzione esplicita da cui nasce la proposta PL è che la logica classica[158] (CL) non è capace di catturare quei fenomeni linguistici che non siano relativi a quell'unico tipo di denotazione ammesso e che è la denotazione singolare[159]. Un termine è plurale *sse* può denotare *più* oggetti (distinti) del dominio. L'intuizione è che *non esistono oggetti plurali*. I termini plurali *pluralmente* si riferiscano a oggetti di un dominio di individui. PL, così, rifiuta sin da subito la c.d. *standard view*, rinominata da Schein *la visione oggettuale dei plurali*, secondo cui "esistono oggetti plurali" nel senso che l'espressione 'oggetto plurale' significa "un oggetto cui un (non-degenerato) termine plurale si riferisce" (Schein 1993:4)[160]. Come sottolinea Yi, è errato inferire dalla potenza (espressiva) dei plurali l'esistenza di speciali oggetti plurali, di cui non potremmo parlare usando i termini singolari. Certo è che "ci possono essere nuove cose da dire senza parlare di nuovi oggetti" (Yi 2006:272).

4.1.1. Termini e presupposizione esistenziale.

L'estensione della categoria sintattica dei termini fino a includere i termini plurali avviene da principio come in PFO, estendendo l'alfabeto di L_I mediante variabili plurali (xx) e costanti individuali plurali (aa). Alcuni linguaggi aggiungono anche un connettivo terminale, un operatore di congiunzione fra termini plurali e/o singolari, che genera un termine plurale complesso di tipo funzionale, p.es. denotato dal simbolo '@' nella formalizzazione di Yi (2005, 2006). Essendo @ un operatore fra termini e, dunque, una funzione, è immediato considerare i termini plurali complessi[161] costruiti mediante tale connettivo come altrettante *descrizioni definite plurali* (Yi 2006:244n.7). PL estende a sua volta la nozione di termine plurale complesso a tutti i termini plurali generati mediante operatori terminali, mediante l'estensione della nozione di termine funzionale al caso plurale, denotante le c.d. *funzioni plurali* (*plural functional value terms*). Gli AA sottolineano che tale estensione sia giustificata dal fatto che si tenta di concepire "termini singolari e plurali come due specie distinte di un genere comune", quello dei termini, il

[158] Intendiamo qui per 'logica classica' FOL= ma anche ogni HOL.
[159] In tal senso CL è detta anche 'fregeana' (cfr. (Yi 2005:460)).
[160] Cfr. (Yi 2005:n.44).
[161] I termini funzionali e le descrizioni definite sono termini complessi.

quale consta di descrizioni definite e termini funzionali, tanto quanto costanti individuali. In tal senso, "ciascuno di questi tipi possono denotare alcuna/e cosa/e" (PL:13,75). Intuitivamente, varrebbe il seguente 'motto': accettati i termini singolari non vi sono motivi per non accettare quelli plurali, soprattutto una volta che la nozione di termine singolare è a sua volta stata svincolata da presupposizione esistenziale. Infatti, una volta che un termine non denota necessariamente un solo individuo del dominio, potendo non denotare affatto, è ovvio che non ci sono restrizioni di principio alla numerosità degli oggetti cui un termine permette di denotare (cfr. (PL:74)).

Così, si danno tre casi denotativi: un termine può essere *vuoto* (non denotare), può denotare un solo oggetto e può denotare diversi oggetti. Siccome i termini del linguaggio possono non denotare, tale sistema è anche un sistema di logica libera (*free logic*), *libera cioè da presupposizione esistenziale*[162]. Le ragioni per la scelta di una logica plurale sono principalmente dovute alla soddisfazione della condizione di *topic neutrality* – un caso più generale di applicabilità universale – secondo cui il dominio di riferimento non deve in alcun modo essere affétto da nessuna restrizione, e che si rifà alla seguente argomentazione: CL viola il principio della *topic neutrality*, implicando la c.d. *fallacia esistenziale*, che un'espressione del tipo '$\forall xFx \longrightarrow \exists xFx$' è una *legge logica* che implica, a sua volta, che il dominio di riferimento sia "non-vuoto per una questione di necessità logica" (PL:184). A partire dalla legge del *tertium non datur* si può infatti derivare dalla precedente l'espressione seguente '$\exists x(Fx \vee \neg Fx)$' per la quale deve esserci un modello, per *completezza semantica* di FOL. Se non ci fosse, allora quest'ultima non dovrebbe essere derivabile, ma è derivabile. Per tale ragione, nella semantica modellistica il dominio di interpretazione deve essere *non-vuoto*. Concedendo, così, che il dominio possa essere vuoto (*universally free logic*), bisogna ammettere funzioni *parziali* e per l'assegnazione di valori alle variabili e per l'interpretazione dei simboli del linguaggio,

[162] Essenzialmente, la *logica libera* ammette nomi che *non* denotano. La conseguenza di ciò è che bisogna introdurre, assiomaticamente, per definizione (*via* quantificazione) la nozione di *nome denotante*, poiché non tutti i nomi denotano: un nome denota *sse* esiste un valore di una variabile che coincide con l'oggetto denotato dal nome *sse* $\exists x\ (x = c)$. Questo assioma fornisce la garanzia della denotazione del nome. $E!$ È il predicato di esistenza $E!\,t =_{df} \exists x\ (x = t)$ con t termine singolare qualsiasi (nome, variabile, funzione, descrizione definita).

pena l'indefinibilità della nozione di *soddisfazione* (PL:184). A tal fine PL introduce un termine arbitrario non-denotante '*zilch*'[163] quale valore di funzioni parziali.

4.1.2. Ordine di L_{PL} e l'equivocazione dei predicati.

L'assunzione fondamentale di PL è che CL (in particolare, FOL, FOL= e SOL) è una logica del riferimento singolare e, quindi, il loro linguaggio non costituisce un *medium* adeguato per la rappresentazione dei plurali, o ciò che oggi chiamiamo pluralità (cfr. (Cocchiarella 2014)). Se, da un lato, non esistono oggetti plurali, dall'altro è anche vero che l'assumere la denotazione plurale dà luogo alla introduzione di una nuova *categoria logica*, quella di variabile plurale, alla quale *dovrebbe* corrisponde l'introduzione di una nuova *categoria ontologica*, quella di pluralità[164]. Ma questo è fonte di una certa ambiguità solo nel momento in cui la denotazione plurale può essere stratificata in livelli crescenti di pluralità di pluralità come ammesso da PL, la quale è infatti

> [U]n sistema di logica del primo ordine (*topic neutral*[165]), dal momento che ammette solamente la quantificazione nei posti occupati da termini[166]. […]. […] [È] anche un sistema di pluralità del primo livello. Può essere estesa in una diversa direzione, aggiungendo termini plurali del secondo livello alla lista de termini singolari e plurali (del primo livello). (PL:233).

Ad ogni modo, per il momento, concentriamo l'attenzione sul fatto che PL è una logica del primo ordine, poiché quantifica su variabili singolari e plurali che variano entrambe sul dominio del primo ordine[167].

---

[163] Ecco come si comporta la funzione parziale di assegnazione s_{PL} nel caso delle variabili singolari: "Per ciascuna variabile singolare x, $s(x)$ è un individuo o *zilch*" (PL:196). Il termine non denotante 'zilch' è denotato dal simbolo 'O'.

[164] "Non segue, inoltre, che avere pluralità quali valori delle variabili del primo ordine significhi impegnarsi ontologicamente ad una nuova categoria o tipo di entità, le pluralità, in più e oltre gli oggetti singoli. Questo è esattamente ciò che è suggerito dalla logica della relazione di 'essere fra' [PFO e anche PL, *Ndr*] con la sua distinta categoria o tipo di variabile per pluralità insieme con i relativi quantificatori, il che significa che le variabili non possono essere prese unicamente come lettere schematiche" (Cocchiarella 2014).

[165] Le cui funzioni di assegnazione sono *parziali*.

[166] Infatti "un termine è definito come un 'sintagma nominale contabile'" (PL:300). "Nonostante possano stare in posizioni occupate da termini, le variabili non sono esse stesse termini per come sono stati qui definiti. Solamente rispetto ad una particolare assegnazione di valore che si può dire che denotino qualche cosa o cose particolari" (PL:106).

[167] Nel caso della c.d. *Mid plural logic* (MidPL), in cui le variabili plurali non sono quantificate, è chiaro che anch'esso è un sistema di pluralità del primo livello in quanto ogni sistema con variabili libere equivale ad un sistema le cui variabili sono quantificate universalmente sebbene in forma *prenessa*, ovvero il

L_{PL} fornisce una soluzione a quella che gli AA chiamano problema dell'equivocazione predicativa. Questo problema si può riassumere come segue. Il linguaggio naturale non distingue fra predicazione singolare e plurale in quanto lo stesso predicato è adottato in entrambi i casi. FOL= è di per sé incapace di rappresentare tale fenomeno. MSOL+ e PFO+ si stagliano, invece, contro il seguente problema: la predicazione plurale in CL suppone la distinzione fra costanti predicative del primo e del secondo ordine e solo le costanti predicative del secondo ordine, correlate alle costanti predicative di L_I possono avere argomenti plurali, qualora tradotte in PFO+. Pertanto, la predicazione purale è essenzialmente distinta dalla predicazione singolare in quanto le costanti predicative adottate per ciascun caso appartengono a gradi diversi del linguaggio. La predicazione, così, non è uniforme, bensì è equivoca. In L_{PL} questo problema è risolto in quanto ciascun predicato può assumere sia argomenti singolari che plurali come in PFO+.

Un dato linguaggio ha un ordine, in funzione della quantificazione: se la quantificazione ha per indici solamente le variabili individuali (argomenti di predicati e/o funzioni) allora è al primo ordine, altrimenti è di qualche ordine superiore, determinato dall'ordine massimo delle variabili per cui tale linguaggio ammette la quantificazione. La nozione di *termine* in generale non coincide affatto, però, a quella di *argomento*. Infatti, nel caso di SOL, possono essere quantificati i termini funzionali (p.es. $\forall f\ \big(f(x) = f(x)\big)$). Se l'ordine di L_{PL} è il primo, allora lo è soltanto se non ammette la quantificazione di tutti i termini, p.es. quelli funzionali.

4.2. Singolarità, inclusione e identità plurale.

Vediamo allora le nozioni caratterizzanti L_{PL} e come queste si comportano. Ci interesseremo in particolare alla distinzioni fra le variabili singolari e plurali; al predicato logico di inclusione, specialmente con riguardo alla sua relazione con la relazione di identità e alla distinzione fra predicazione distributiva e collettiva. Ci occuperemo anche delle descrizioni definite plurali (*ddp*).

---

quantificatore universale ha come scopo tutta la *fbf* aperta. Inevitabilmente però il sistema PL permetterà, nelle regole di formazione l'uso degli operatori di descrizione che legano variabili plurali, cosa che il sistema MidPL non può fare, per definizione.

4.2.1. Vocabolario e regole di formazione di PL.

L'estensione di L_I in L_{PL} non riguarda solo i termini. L_{PL} contiene oltre ai simboli di L_I anche i seguenti (PL:235):

- *Variabili plurali* (xx, yy, etc. oppure indicizzate xx_i, con $i \geq 1$), che possono essere quantificate, p.es. $\forall xx$, $\exists xx$.
- *Operatori per descrizioni definite plurali* (ι, :), per formare le descrizioni definite *uniche* (o singolari, *dds*) *e/o pluralmente uniche* il primo, e *esaustive* (*ddp*) il secondo;
- *Un predicato logico binario* ($\preccurlyeq$) detto *inclusione*, che intuitivamente significa il predicato 'essere uno dei'.

Diversamente PFO, che ammette termini plurali esclusivamente alla destra della relazione di inclusione (cfr. (Linnebo 2013)), la definizione induttiva dell'insieme di *ffbf* di PL deve essere alla base estesa al caso atomico '$t \preccurlyeq t'$', in cui t, t' sono indifferentemente termini plurali o singolari. Il passo dell'induzione come in PFO è esteso fino alla quantificazione plurale (p.es. $\forall xx\ \varphi$).

4.2.2. Variabili, quantificazione e singolarità.

L'introduzione delle variabili plurali nel LO di PL comporta la necessità di distinguerle da quelle singolari. *Prima facie*, a questa distinzione corrisponde la distinzione fra due tipi di funzioni (parziali) di assegnazione dei valori una singolare ed una plurale, s_s e s_p: ad una variabile singolare x, s_s assegnerà *al massimo* un *unico* valore alla volta; mentre, per il caso plurale xx, l'assegnazione s_p dovrebbe assegnare più valori alla volta. Contrariamente all'intuizione, per cui una pluralità consiste di due o più oggetti, in PL una pluralità può essere costituita da un oggetto singolo, in quanto la nozione di pluralità viene intesa in modo *inclusivo*, includente, cioè, anche il caso in cui zero o un solo valore sia assegnato alla variabile plurale. Per unificare la semantica di PL, gli autori scelgono di assumere un'unica funzione di assegnazione nel ML al costo di *ri*-presentare tale distinzione nel LO non più mediante la distinzione fra due tipi di variabili, bensì (per via assiomatica) mediante l'assunzione di un *assioma* che determini quando un termine abbia al massimo un valore assegnato (PL:212-213)[168]. L'assioma è il seguente:

[168] La numerazione si deve a PL.

A12 Sx

Dove S è la c.d. *condizione di singolarità*[169] che definiremo una volta definita l'identità plurale. Questa manovra permette, a differenza di molti sistemi che non la propongono[170], di uniformare non solo la semantica ma anche la sintassi, non necessitando dell'introduzione nel LO delle variabili singolari, fornendo la possibilità di "rimpiazzare le variabili singolari con una variabile plurale ristretta 'xx tale che Sxx'" (PL:110). Per il fatto di assumere una nozione inclusiva di pluralità si rende omogenea anche la quantificazione[171] di tali variabili.

4.2.3. Inclusione e identità plurale.

L'inclusione $\preccurlyeq$, come detto, ammette occorrenze di termini (logici e non) sia singolari che plurali, alla sua destra come alla sua sinistra. Due sono le interpretazioni (fissate) possibili di tale predicato logico, a seconda dei tipi di termine che occorrono nell'espressione '$t \preccurlyeq t'$':

- Se t' è *singolare*, $\preccurlyeq$ si comporta come l'*identità* in $L_{I=}$, indipendentemente da che t sia o meno plurale

L'identità di FOL= è, così, un *caso limite* della relazione logica di inclusione. Per questa ragione L_{PL} estende L_I e non $L_{I=}$.

- Se t' è *plurale*, $\preccurlyeq$ si legge 'è/sono fra' o anche 'è uno dei'/'sono alcuni dei', a seconda che t sia singolare/plurale in ciascuna delle due letture.

L'inclusione ha, poi, le tre seguenti proprietà che fanno sì che $\preccurlyeq$ induca un ordine parziale (non-stretto) sul dominio: riflessività; antisimmetricità, transitività[172]. L'inclusione è caratterizzata dalle seguenti ulteriori due proprietà dovute alla parzialità

[169] Che vedremo definita successivamente, una volta introdotta la relazione logica di inclusione. L'assioma A12 si legge 'x è una variabile singolare', o meglio: 'x è denota via assegnazione al massimo un solo oggetto'.

[170] Cfr. (Yi 2006) e (Burgess, Rosen 1997) in quanto non ammettono il senso *inclusivo* della pluralità. Pertanto, il caso plurale è automaticmente distinto nel linguaggio-oggetto, mediante l'ammissione di entrambi i tipi di variabili.

[171] In proposito (cfr. (Cocchiarella 2014)): il fatto di trattare le pluralità in modo inclusivo permette tra l'altro di definire in modo duale la lettura plurale (quando affissi da variabili plurali) dei quantificatori esistenziale ('*some thing or things*') e universale ('*any thing or things*') come nel caso singolare. Questo comporta la completa inter-definibilità delle due nozioni: assumendo $\exists xx$ come primitivo, $\forall xx =_{def} \neg\exists xx \neg$, da cui $\forall xx\ Fxx \equiv \neg\exists xx\ \neg Fxx$, mentre assumendo $\forall xx$ come primitivo, $\exists xx\ Fxx \equiv \neg\forall xx\ \neg Fxx$.

[172] L'nclusione propria, $\prec$, è così definita: $t \prec t' =_{df} t \preccurlyeq t' \wedge \neg(t' \preccurlyeq t)$ e induce *ordine parziale* (stretto).

delle funzioni di assegnazione e, dunque, relative al tipo di predicazione (plurale) che codifica: a) $\preccurlyeq$ è *forte* (*strong*)[173], ossia t.c. l'espressione in cui occorre è *falsa* se almeno *uno qualsiasi* dei due termini (di qualsiasi tipo sia) non denota, (sia vuoto)[174]; b) $\preccurlyeq$ è un predicato *collettivo*[175] al secondo posto (quello alla sua destra), t.c. si predica di tutti, ma non di ciascuno, gli individui costituenti la pluralità includente. Vediamo alcune fondamentali *nozioni derivate* (ottenute per definizione) direttamente da $\preccurlyeq$ e che verranno impiegate nella formulazione degli altri assiomi caratteristici del sistema formale PL[176].

L'*identità plurale* fra termini plurali qualsiasi t e t' è, così, definita:

- $t = t' =_{df} \; t \preccurlyeq t' \wedge t' \preccurlyeq t.$

Per le proprietà dell'inclusione (riflessività e transitività) (i) l'identità plurale è una relazione di equivalenza. Infatti, se $\preccurlyeq$ è affiancata da due termini singolari allora l'identità in PL corrisponde al quella in FOL=. Essendo, poi, $\preccurlyeq$ collettivo relativamente alla seconda occorrenza (a destra) e dato che l'identità $t = t'$ (per definizione) non esprime altro che la proprietà anti-simmetrica dell'inclusione, allora (ii) l'identità plurale sarà *collettiva* per entrambe le occorrenze. Infine, essendo l'inclusione un predicato *forte*, anche (iii) l'identità plurale $t = t'$ sarà *forte*.

L'interpretazione *forte* dell'inclusione e, quindi, dell'identità è però fortemente problematica perché è *restrittiva*. In PL, come in tutte le logiche *libere*, se due termini non denotano non significa che hanno lo stesso valore, piuttosto se non denotano allora non hanno un valore. Ma, allora, l'identità perde di significato. Nel caso generale di due termini complessi, la teoria della quantificazione obbliga la definizione di una identità *debole* (*weak*) ($\equiv$), tale da essere *vera* non solo quando $t = t'$ è vera, ma anche quando *entrambi* t e t' non denotano.

---

173 Sulla distinzione *forte-debole*. In generale diremo che un predicato F^n (con $n \geq 1$) è *debole* (*weak*), in particolare all'i-esimo posto, se $F^n(t_1 \dots t_n)$ non è falso se almeno uno dei termini t_i (con $1 \leq i \leq n$), in particolare l'i-esimo termine, che F^n assume ad argomento è vuoto, o non denotante. Altrimenti diciamo che un predicato F^n (con $n \geq 1$) è *forte* (*strong*), in particolare all'i-esimo posto, quando cioè, se almeno un termine argomentale, in particolare l'i-esimo t_i (con $1 \leq i \leq n$), è vuoto, se $F^n(t_1 \dots t_n)$ è falso. Cfr. (PL:90). Comunque, un predicato *debole* può essere vero per O quale argomento. In ogni caso, in logica *libera*, per ogni predicato F, $F(O) \not\Leftrightarrow \neg\exists x\, Fx$ e $F(O) \not\Leftrightarrow \neg\exists xx\, Fxx$.

174 Cfr. nota immediatamente precedente.

175 Cfr. prossima sottosezione per la distinzione *distributivo-collettivo*.

176 Intendiamo quegli assiomi in cui occorre almeno uno dei seguenti simboli: '$\preccurlyeq$', 'xx', ':'.

Mediante $\preccurlyeq$ si ridefinisce così il predicato di esistenza, $E!$[177] richiesto dalle logiche libere per esplicitare i casi in cui la denotazione dei termini sia effettiva: la definizione di $\equiv$ suppone tale predicato nella seguente definizione:

- $t \equiv t' =_{df} t = t' \vee (\neg E!\, t \wedge \neg E!\, t')$

Altra importante nozione che avevamo lasciato sospesa è quella di *singolarità* ottenibile mediante l'applicazione della *condizione di singolarità*, S. La singolarità di t, St, dove t è un termine qualsiasi – da leggersi: i t sono al massimo uno – è coì definita[178]:

- $St =_{df} \forall xx\, \forall yy\, \big((xx \preccurlyeq t \wedge yy \preccurlyeq t) \to xx = yy\big) =_{df} \forall xx\, (xx \preccurlyeq t \to xx = t)$

Il nostro resoconto non è però completo. Infatti, manca ancora l'esposizione delle descrizioni definite plurali. Ci riserviamo però di trattarle solo dopo aver esposto la teoria della distinzione fra predicazione distributiva e collettiva in PL, per il semplice motivo che le nozioni di distributività e collettività avranno un ruolo fondamentale per la teoria delle descrizioni definite plurali. Ad ogni modo, la dipendenza di PL da queste poche e semplici nozioni è evidenziata dal fatto che gli assiomi caratteristici di PL sono i tre assiomi che governano rispettivamente i seguenti simboli del linguaggio ':' , '$\preccurlyeq$' e 'S'. Costanti individuali e termini funzionali non hanno bisogno di assiomi logici speciali, ma saranno naturalmente regolati da particolari assiomi qualora il calcolo verrà applicato a un particolare argomento (cfr. (PL: 212)).

4.2.4. Predicazione distributiva e collettiva.

Quine in **ML** (1981:189) rintraccia l'origine della distinzione fra appartenenza elemento-classe e inclusione fra classi nei termini della distinzione fra predicazione distributiva e collettiva:

> La distinzione tra l'inclusione e l'appartenenza è divenuta pienamente chiara solo con l'avvento della teoria quantificazione; era chiara a Frege nel 1879, a Peano nel 1889, a Peirce nel 1885. Ma in una forma sperimentale la distinzione esisteva presso la logica tradizionale come una distinzione fra la predicazione "distributiva" e "collettiva", disegnata

[177] In PL, invece del simbolo di identità si usa, nella definizione di $E!$, l'*inclusione* nel modo seguente: $E!\, t =_{df} \exists x\, (x \preccurlyeq t)$. Ovviamente, *se* in PL t è singolare, essendo x una variabile singolare a sua volta, la definizione dell'esistenza si riduce al caso per FOL= *libera* (FOL*=).

[178] La definizione deriva dalla seguente: $St =_{df} \forall x\, \forall y\, (x \preccurlyeq t \wedge y \preccurlyeq t \to x = y) =_{abr} \forall x\, (x \preccurlyeq t \to x = t)$ sicuramente più intuitiva ma che, però, impiega variabili singolari. Un'altra nozione derivata è quella di *esistenza singolare*, $S!\, a$, da leggersi: esiste esattamente un a: $S!\, a =_{df} (E!\, a \wedge Sa) =_{abr} \exists x\, (x = a)$.

> per risolvere le fallacie della composizione e della divisione (ad esempio, Pietro è un apostolo, gli apostoli sono dodici, quindi Pietro è dodici). (Quine 1981:189).

Ciò che PL contesta a questa interpretazione – e che contraddistinguerebbe PL da qualsiasi logica ‘fregeana’ – è che, sebbene “la distributività sia una questione di *necessità logica*” (PL:112), la logica fregeana suppone uno solo dei due tipi di predicazione, quella distributiva. In questi termini, la predicazione collettiva non sarebbe ammessa anche qualora in SOL venissero introdotte costanti predicative del secondo ordine – costanti predicative che avrebbero per argomenti variabili predicative – interpretate su $\wp(U_M)$. Infatti, la critica degli AA consiste nel sostenere che la predicazione relativa ad entità del secondo ordine sarebbe comunque distributiva, dato che la relazione di inclusione fra classi, mediante cui si definisce l’insieme potenza $\wp(U_M)$, stabilisce – in ultima istanza – la relazione di appartenenza della classe inclusa all’insieme potenza costruito a partire dalla classe includente. L’esito di tale processo, sarebbe la riduzione della predicazione per inclusione fra classi alla predicazione distributiva, dato che le classi sono degli oggetti logici individuali, le *classi come uno* (*classes as one*)[179] – per riprendere una terminologia dovuta a Russell (2011:§69-70). La predicazione modellata sull’appartenenza è, infatti, non-transitiva[180], ossia gli individui appartenenti alla classe inclusa non appartengono all’insieme potenza generato dalla classe includente, pertanto la predicazione si rivolge alla singola classe e non alla molteplicità dei suoi elementi.

Una delle applicazioni fondamentali della relazione di inclusion di PL è nella definizione della distinzione fra uso distributivo e collettivo delle costanti teoriche assunte nel linguaggio (predicatività e collettività della predicazione teorica). La definizione di un predicato di PL (t.c. assume argomento plurale) distributivo è la seguente:

- P è *distr.* $\Leftrightarrow_{df}$ P è vero di *alcuni elementi del dominio* $\Leftrightarrow$ P è vero di *ciascuno di essi* $\Leftrightarrow_{df}$ $\forall xx\ (Pxx \leftrightarrow \forall x\ (x \preccurlyeq xx \rightarrow Px))$[181]

[179] Contrariamente alle *classi come molteplicità*, (*classes as many*).

[180] *Non* vale cioè: $x_i^M \in (F^M \subseteq U_M)\ et\ F^M \in \wp(U_M) \Rightarrow x_i^M \in \wp(U_M)$.

[181] Nel caso generale in cui P è n-ario, ciascun i-esimo posto argomentale, con $i \leq n$, deve poter essere distributivo o collettivo, p.es. un predicato *bi*-nario R è *distributivo* solo al secondo posto *sse* $\forall xx\ \forall yy\ (xxRyy \leftrightarrow \forall y\ (y \preccurlyeq yy \rightarrow xxRy))$. Il caso di $\preccurlyeq$ è più che indicative sebbene sia distributivo al primo posto e collettivo al secondo (cfr. (PL:3)).

Il passaggio, possibile in PL, da Pxx a Px, assunto che P sia distributivo, accresce il potere deduttivo di PL rispetto a MSOL in cui *non* vale il passaggio da $P(F)$ a Px, anche ammesso che Fx. La distributività in PL è dunque molto differente da quella in CL.

Un predicato è, così, *pienamente collettivo* o, semplicemente, è *collettivo sse* non è distributivo[182]:

- P è *coll.* $\Leftrightarrow_{df}$ P è vero di *alcuni elementi del dominio* $\Leftrightarrow$ P è vero di *tutti questi* $\Leftrightarrow_{df}$

$$\Leftrightarrow_{df} \neg\forall xx\,\big(Fxx \leftrightarrow \forall x\,(x \preccurlyeq xx \rightarrow Px)\big)$$

4.3. Denotazione plurale e descrizioni definite plurali.

La nozione di *denotazione plurale* è funzionale alla formulazione delle *condizioni di soddisfacibilità e verità* degli enunciati in PL, adeguate cioè alla predicazione in PL. Dato che PL è *libera*, tali condizioni di verità e soddisfazione devono essere considerate nel caso in cui l'argomento della predicazione sia *soggetto logico*[183] (cfr. (PL:96)). Le condizioni di verità degli enunciati in PL sono presentate mediante le *descrizioni definite*. Relativamente ad un modello M,

- $F(t)$ è vero $\Leftrightarrow$ F è vero di t $\Leftrightarrow$ F è vero di *le* cose che t denota $\Leftrightarrow$ *le* cose che t denota sono le F

Dunque è evidente come in PL la relazione fra descrizioni definite e denotazione plurale sia fondamentale. In questa sezione analizzeremo entrambe le nozioni da cui emergono due questioni interessanti, l'indeterminazione della denotazione plurale (rispetto alla predicazione in PL) e che la critica alle descrizioni definite plurali *à la* Russell è dovuta alla non uniformità del campo (unione di dominio e codominio) delle funzioni descrittive costruite a partire da predicati n-ari c.d. *omogenei*.

[182] Un predicato distributivo assume argomenti tanto plurali che singolari. Due sono i modi in cui allora un predicato può non essere distributivo, a seconda di quale tipo di argomento rifiuta, singolare o plurale. Due sono i modi di essere distributivo, all'*insù* (*upward*) o all'*ingiù* (*downward*), a seconda di quale *verso* della doppia implicazione materiale consideriamo (cfr. (PL:113-4)): (*up*) da 'ciascuno dei' a 'tutti i', $\forall xx\,\big(Fxx \leftarrow \forall x\,(x \preccurlyeq xx \rightarrow Fx)\big)$; (*down*) da 'tutti i' a 'ciascuno dei': $\forall xx\,\big(Fxx \rightarrow \forall x\,(x \preccurlyeq xx \rightarrow Fx)\big)$. Se non vale uno dei versi, il predicato è definito *relativamente collettivo*.

[183] "Un termine t è *soggetto logico sse* è analitico che $F(t)$ è falso se t non denota" (PL 2013:91) e (cfr. (PL:102-104)).

4.3.1. Indeterminatezza della denotazione plurale e descrizioni definite.

La relazione mediante cui i termini di L_{PL} sono connessi con l'universo del discorso è relazione di denotazione plurale e la denotazione plurale può essere sia *distributiva* che *collettiva*[184] – nel senso che un termine plurale può rispettivamente denotare ciascuno dei molti[185] suoi denotati oppure tutti e soli i molti suoi denotati, rispettivamente – a differenza della denotazione singolare, per la quale tale distinzione collassa nella singolarità[186] del riferimento.

Se già Quine nel 1960 con la nozione di *imperscrutabilità delil riferimento* (Quine 2008:§30) allentava la connessione fra riferimento e descrizioni definite, teorizzata da Russell con quella che prese il nome di *teoria descrittiva delil riferimento* o *teoria estensionale del significato* (cfr. (Salmon 2005)), l'analisi della nozione di denotazione plurale ha il merito di allentare tale relazione anche sotto un altro rispetto. La denotazione plurale, sia che sia distributiva che sia collettiva, si combina con la verità e la soddisfazione in modo da generare condizioni di verità corrette per la predicazione in PL (cfr. (PL:103)). In questo senso, si rivela l'*indeterminazione della denotazione* (plurale).

Il predicato binario 'denota'[187] è, così, una relazione uno-molti (*debole* al secondo posto, essendo *parziale*) t.c.: dati due oggetti a e b, se il nome 'a' denota[188]:

- 'a' denota_d $b \Leftrightarrow$ i b sono fra gli a
- 'a' denota_c $b \Leftrightarrow$ i b sono gli a

Ad ogni modo, secondo gli AA, vale l'equivalenza seguente:

- 'a' denota_d $b \Leftrightarrow b$ sono fra *le* cose che 'a' denota_c
- 'a' denota_c $b \Leftrightarrow b$ sono *le* cose che 'a' denota_d

Il che rivela come le due accezioni della denotazione siano "interdefinibili" (PL:96). Comunque, nei due ultimi bicondizionali, si fa uso di due distinte *ddp*, '*le* cose che t denota_c' e '*le* cose che t denota_d' rispettivamente e le *ddp*, per un qualsiasi predicato F,

---

[184] *Distributiva*, che giunge *individualmente* su ciascun individuo di una molteplicità; *collettiva*, che giunge *non separatamente* su una molteplicità di individui.
[185] Dove molti è un $n \geq 0$.
[186] "Le condizioni di verità per la predicazione plurale può essere ottenuta per immediata pluralizzazione delle usuali formulazioni per il caso singolare: $F(t)$ è vero *sse* F è vero delle cose che t denota; falso altrimenti" (PL:90).
[187] Se è *distributivo* lo indicheremo con 'denota_d' e se è *collettivo* lo indicheremo con 'denota_c'.
[188] Se 'a' non denota, allora il tutto è ridotto al caso: 'a' denota a (cfr. (PL:94)).

'gli/le F', hanno le seguenti caratterizzazioni a seconda che F sia distributivo, F_d, o collettivo, F_c, (cfr. (PL 2013:95)):

- Caso F_d: se t denota, F_d è vero di ciascun t *sse* 'gli F_d' denota ciascuno di loro
- Caso F_c: se t denota, F_c è vero dei t *sse* 'gli F_c' denota tutti loro.
- $F_{d/c}$: $F_{d/c}$ non è vero di t *sse* 'gli $F_{d/c}$' non denota.

La conclusione è che, data l'interdefinibilità delle denotazioni, è (esclusivamente) l'*articolo definito* che "produce effetti differenti quando combinato con predicati distributivi e collettivi" (PL:96). Infatti, denotazione plurale da sola non è in grado di giustificare alcuna caratterizzazione (distributiva, collettiva) delle clausole di soddisfazione per gli enunciati di PL:

> La verità dei [casi F_d e F_c, *Ndr*] è indipendente dal fatto che la denotazione sia costruita quale denotazione$_d$ distributiva o denotazione$_c$ collettiva. In entrambi i casi, una descrizione ancora denota le cose scelte dai [casi F_d e F_c, *Ndr*]. La differenza è solo che [una descrizione, *Ndr*] comunque denota$_d$ ciascuna e tutte le cose che sono fra loro. Per contro, le denota$_c$ per esclusione di tutte le altre. Ciò vale egualmente per il caso distributivo ['gli F_d'] e il caso collettivo ['gli F_c]. (PL:95).

La conseguenza che traggono gli AA è che "la distinzione tra denotazione distributiva e collettiva non dovrebbe mai essere confusa [*should never be conflated*] con la distinzione fra descrizione distributiva e collettiva" (PL:95). È in questo modo che emerge la nuova *indeterminazione* per la denotazione, da affiancare all'opacità referenziale quineana.

Il fenomeno dell'indeterminatezza rende la denotazione plurale incapace di caratterizzare le condizioni di soddisfazione nei casi di predicazione distributiva e collettiva. Ciò si ripercuote anche in relazione al (meta)predicato di verità 'essere vero di', la relazione modello. Infatti, nei due casi (distributivo e collettivo) della predicazione bisogna operare sostanziali modifiche all'estensione dei predicati ma tali modifiche, come abbiamo visto, non possono dipendere dalla distinzione dei predicati occorrenti nelle descrizioni definite adottate nelle clausole di soddisfazione in PL. Pertanto, rispetto alla predicazione ed alla denotazione anche "l'estensione di 'è vero di' risulta indeterminata"[189] (PL:103).

4.3.2. Descrizioni definite plurali e la critica a Russell.

In CL, vale l'assunzione russelliana della regola *R* per l'*eliminazione contestuale delle descrizione definite*. Nel caso della logica *libera*, non si può più ammettere la validità di *R*[190]. Ciò obbliga a considerare le *dd* come dei *termini genuini*, senza cioè una struttura logica profonda (e distinta da quella che manifestano) esplicitata mediante la quantificazione singolare[191]. Per la teoria generale dei termini descrittivi (complessi) di PL sono, così, fondamentali le descrizioni definite estese al caso plurale. Pertanto, da ora,

---

[189] Dove il predicato binario '*true of*' è *debole* (*weak*) al secondo posto. "Per un F distributivo, 'F è vero di alcune cose' equivale a 'F è vero di ciascuna di queste'. Questa equivalenza però on vale nel caso in cui F è collettivo, da cui segue che 'è vero di' deve essere esso stesso collettivo al secondo posto. […] [Ma] il secondo posto di 'è vero di' non è collettivo nella maniera esclusiva di 'denota$_c$': F può essere vero di alcune cose mentre anche essere vero di una o più cose fra queste, e può essere vero di alcune cose anche completamente differenti" (PL:96-97).

[190] Nelle logiche c.d. *libere da presupposizione esistenziale* o, più semplicemente, *libere*, la teoria delle descrizioni di Russell non vale basandosi questa proprio su tale presupposizione. Nella teoria di Russell, quando i termini *non denotano* si crea infatti una ambiguità di *scopo* della negazione:

- $\neg G(\iota x\, Fx) \Leftrightarrow \neg\exists x(\forall y\,(Fy \leftrightarrow y = x) \land Gx)$
- $\neg G(\iota x\, Fx) \Leftrightarrow \exists x(\forall y\,(Fy \leftrightarrow y = x) \land \neg Gx)$

Ciò indica che la mancanza di un denotato da associare ad un termine non può più essere espressa unicamente mediante la *negazione dell'esistenza* del valore relativo alla variabile occorrente nelle condizioni denotative della *dd*, nel momento in cui quest'ultima è assunta quale argomento di un predicato. Questa è una ragione per cui l'eliminazione contestuale della *dd* in stile russelliano non può essere accettata nel caso si assumano predicati *deboli*, veri cioè anche quando un loro argomento non denota: se la *dd* non denota, ciò non vuol dire che $G(\iota x\, Fx)$ sia falsa, anzi: "Ogni predicato forte F dà luogo a un predicato *debole* $negF$ tale che: $(negF)a \leftrightarrow \neg Fa$ [...]. Se $\iota x\, Fx$ occorre in un posto argomentale debole del predicato 'G', il fatto che la descrizione sia vuota non significa che $G(\iota x\, Fx)$ debba essere falsa. [...] [Q]uando G è debole, il lato sinistro dell'equivalenza russelliana può essere vero mentre il lato destro è falso" (PL:124). Inoltre, ovviamente, ciò si può generalizzare al caso delle funzioni. In cui il predicato G fosse *forte*, se G assume come argomento un *termine funzionale* f a sua volta *debole*, t.c. cioè $f(t)$ denota anche se t non denota, *la regola eliminativa russelliana* per l'espressione '$G(f(t))$' non varrebbe (cfr. (PL:125)). Le funzioni denotate dai termini fnzionali deboli sono dette funzioni *co-parziali*: che assumono un solo valore per nessun argomento.

[191] "Nessuna delle espressioni denotative che Russell affronta nelle pagini iniziali di *On Denoting* è all'altezza dell'ideale di una espressione referenziale. Il secondo assunto è che queste dovrebbero essere considerate quali espressioni quantificative. In particolare, *il* è un quantificatore" (PL:81-82).

"[I]n qualche appropriato sistema logico per operatori di descrizione – inclusa qualche versione di logica libera – si può mostrare che (F) $G(\iota xFx)$ […] è vera in una valutazione *sse* (R) $\exists x\,(Fx \land (\forall y\,(Fy \rightarrow y = x) \land Gx))$ è anche vera. […] ciò rivela che, anche se Russell ha ragione che l'interpretazione (R) abbia le stesse condizioni di verità di 'il F è G', ciò non significa che abbia ragione nel sostenere che le descrizioni siano fondamentalmente qualche tipo di quantificatore. Potrebbe essere che il 'formatore di descrizioni' [*the descriptionformer*] 'il' nel linguaggio naturale spesso funzioni come l'operatore 'ι', p.es. nona come un quantificatore ma come un operatore formatore di funzioni [*a function-forming operator*] da relazione. In altre parole, forse (R) ha le stesse condizioni di verità di 'il F è G' come una *conseguenza* della funzione delle descrizioni sul modello funzionale, piuttosto che perché (R) stessa rifletta la resa corretta della 'forma logica' di enunciati con descrizioni" (Smith 2013:346-347).

distingueremo le descrizioni definite in *singolari* (*dds*) e *plurali* (*ddp*). Gli AA, rinominano la *dds* quale *descrizioni univoche*.

La condizione di non denotazione della *dds*, simbolicamente '$\iota x\ Fx$' è la seguente: se la condizione d'unicità è soddisfatta, la *dds* denota, altrimenti non denota (e il termine è vuoto). Così, la condizione di unicità di una *dds* può essere *non* soddisfatta in due casi: se a) *nessun individuo* soddisfa il predicato rilevante e se b) *più di un individuo* soddisfa il predicato. Nel primo caso, la *dds* non denota – e questo vale, mediante la dovuta estesnsione, anche per le *ddp* – mentre, nel secondo caso, se la *dds* non denota allora la *ddp denota*. Due sono i sensi dell'*articolo determinativo plurale* e quindi gli usi della *ddp*: uno distributivo, detto *esaustivo* (*exhaustive*); l'altro collettivo, detto *pluralmente univoco* (*plurally unique*). Questi sono caratterizzati come segue:

- *Uso esaustivo* di 'gli F': il predicato rilevante è *individualmente-*F. In tal caso si impiega l'operatore ':' per vincolare variabili singolari, p.es. '$x{:}\,Fx$'.
- *Uso pluralmente univoco* 'gli F': il predicato rilevante è *congiuntamente-*F. In tal caso si impiega l'operatore ɿ per vincolare variabili plurali, p.es. '$\iota xx\ Fxx$'.

In generale, nessun caratterizzazione del predicato 'F', evidenzia più la distinzione concettuale fra '*individualmente-F*' e '*congiuntamente-F*', dato che il predicato rilevante, nel primo uso dell'articolo determinativo è "distributivo, indifferentemente dal fatto che F sia distributivo o meno". Allo stesso tempo, l'uso distributivo ha una fondamentale utilità, poichè mediante la *ddp esaustiva* si può definire l' estensione dei predicate:

> E le cose denotate da 'gli F' hanno uno stato unico rispetto a 'individualmente-F', non perché costituiscono direttamente la sua estensione, ma perché, come una questione di necessità, esse la determinano. Infatti l'estensione può essere estrapolata da loro in un modo sorprendentemente semplice: per cose a piacere e qualsiasi, è analitico che esse siano individualmente-F *sse* sono tra gli F. Quando F è distributivo, F e 'individualmente-F' coincidono, ma in generale abbiamo bisogno di prendere il predicato rilevante 'individualmente-F', piuttosto che il semplice 'F', dato che 'F' può essere un predicato collettivo, la cui estensione non è determinata dalle cose che lo soddisfano individualmente. (PL:121-122).

Questo punto dell'analisi di PL ritornerà in tutta la sua rilevanza quando presenteremo il primo dei tre assiomi caratteristici di PL, A10.

Volgiamo invece ora l'attenzione alla critica degli AA alla teoria delle *ddp* di Russell. Rispetto poi alla concezione di Russell, oltre al disaccordo dovuto all'assunzione per cui PL è libera da presupposizione esistenziale, vi è un altro disaccordo profondo che riguarda esclusivamente le *ddp*. L'ambito del disaccordo consiste nell'equivocazione del predicato assunto nel contesto singolare e plurale. La teoria russelliana presentata nei *Principia Mathematica* delle *ddp* è la seguente:

> Introduciamo quello che può essere considerato come il plurale di $R'y$. '$R'y$' era stato definito per denotare 'il termine che è in relazione R con y'. Ora introduciamo la notazione '$R''\beta$' a significare 'i termini che sono in relazione R con i membri di β'. Così, se β è la classe dei grandi uomini, e R è il rapporto della moglie al marito, $R''\beta$ significherà 'le mogli dei grandi uomini' [...]. In generale, $R''\beta$ è la classe di quei referenti che hanno *relata* che sono membri di β. Abbiamo anche bisogno di una notazione per la relazione dei $R''\beta$ a β. Questa relazione la chiameremo R_ϵ. Così R_ϵ è la relazione che sussiste tra le due classi α e β quando α consiste di tutti i termini che hanno la relazione R con qualche membro di β. (Whitehead, Russell 1910: §37).

Ciò conduce alla c.d. *equivocazione* (PL:§4.3) che costringe, di fatto, a sdoppiare i predicati impiegati nelle espressioni contestuali e che hanno per argomento le *dds* mediante predicati ad essi correlati ma di ordine immediatamente successivo così che possano assumere per argomento le *ddp*. Infatti, come nel brano precedente viene sottolineato, se R è il predicato rilevante della descrizione, R' è il predicato nell'uso singolare della *dd*, R'' ne è l'analogo per l'uso *plurale*, dove però R' è una relazione fra individui ($R'y =_{df} \iota x\, xRy$) mentre R'' relaziona classi (cfr. (PL:56)). Dunque, se si assume la semantica modellistica, sebbene le condizioni di denotazione nelle condizioni di verità siano strutturalmente identiche nei due casi, la predicazione avviene a ordini differenti.

4.3.3. La rilevanza della critica di equivocazione.

Per cogliere la rilevanza della questione appena sollevata basta fare caso ad un fatto essenziale: l'equivocità predicativa comporta l'impossibilità di definire un *campo* per i predicati almeno *binari* impiegati nelle *funzioni descrittive*[192]. Abbiamo visto che le classi come è possibile formare funzioni descrittive che descrivono classi piuttosto che individui. Per le funzioni che descrivono classi si usa la seguente notazione: 'sg $R'y$' o '$\vec{R}'\,y$' per denotare la descrizione della *classe delle cose* aventi la relazione R con y, ovvero *i referenti di* y secondo R ($= \hat{x}(xRy)$) e, similmente 'gs $R'x$' o '$\overleftarrow{R}'x$' per denotare la *classe degli* y con cui x ha la relazione R, ovvero *i relata di* x secondo R[193] ($=\ \hat{y}(xRy)$) (Whitehead, Russell 1910:§32). Quando però stiamo descrivendo *le* x e *le* y ci troviamo di fronte alle questione seguente:

> Dovrebbe essere osservato che se R è una relazione omogenea (p.es. una in cui referenti e *relata* sono dello stesso tipo [o ordine, *Ndr*]), allora $\vec{R}$ e $\overleftarrow{R}$ non sono omogenee, ma relazionano una classe a oggetti del tipo dei suoi membri. (Whitehead, Russell 1910:§32).

Il problema identificato dagli AA con l'equivocazione predicativa è rilevante non in quanto è un tratto non presente nel linguaggio naturale e, quindi, selezionato come parametro discriminante fra logiche in modo arbitrario, la cui soluzione apparirebbe un mero esercizio linguistico. Infatti, se l'equivocazione origina dalla non omogeneità fra *referenti* e *relata* (fra argomenti e valori) nelle descrizioni plurali, il tentativo di fornire un resoconto unificato dei contesti in cui le descrizioni definite, tanto singolari quanto plurali, occorrono suppone, suppone a sua volta, l'unificazione dei campi[194] resi dai due predicati 'R'' e 'R''', al fine di ottenere un universo del discorso unico, su cui interpretare i termini delle descrizioni. Ma

[192] Descrizioni che impiegano predicati almeno *binari*, denotanti relazioni.

[193] Oppure, denoteremo rispettivamente, "data una qualsiasi relazione R, la classe dei termini che ha la relazione R con un dato termine y sono chiamati i referenti di y, e la classe dei termini con cui un dato termine x è in relazione R sono detti i relata di x" (PM 1910:§32).

[194] Seguendo Whitehead e Russell, denotiamo con '$D'R$' il dominio di R, la classe dei termini che hanno larelazione R con qualcosa e il co-dominio di R con '$C'R$', la classe dei termini con cui qualcosa ha la ralazione R e a loro unione o somma logica, il campo con '$F'R$'. Consideriamo le *funzioni descrittive*, nel caso $R'y$. Dal momento che "$R'y$ dovrebbe esistere comunque esista qualsiasi cosa avente la relazione R con y" per il fatto che "non ci dovrebbe mai essere più di un termine ad avere la relazione R con un dato termine y", il co-dominio di R è costituito dai "valori di y per cui $R'y$ esiste": $C'R$. Dall'altra partre, il dominio di R sono i "valori che $R'y$ assume per vari valori di y: $D'R$. "Così il co-dominio è la classe dei possibili argomenti per la funzione descrittiva $R'y$, e il dominio è la classe di tutti i possibili valori della funzione".

> Se i valori della funzione $R'y$ non sono dello stesso tipo di quello dei suoi argomenti, p.es. se la relazione R non è omogenea, il campo è senza senso. Così, per esempio, se R è una relazione omogenea, $\overleftarrow{R}$ e $\overrightarrow{R}$ non sono omogenee, e pertanto, '$F'\overrightarrow{R}$' e '$F'\overleftarrow{R}$' sono senza senso. (Whitehead, Russell 1910:§33).

Pertanto, un resoconto unificato è impossibile e l'equivocazione dei predicati è una conseguenza effettiva cui la LC non potrà mai dare una soluzione. Bisognerà vedere se questo problema è di per sé rilevante per la logica o se una sua soluzione non implichi conseguenze indesiderate, almeno dal punto di vista filosofico. Infatti, l'insensatezza del campo non significa che l'equivocazione sia un problema logico. Piuttosto che questo tipo di soluzione in LC non può essere cercata. Certamente, l'equivocazione è *il* problema cui PL dà una soluzione, ma qual è il prezzo da pagare, se ce ne fosse uno? Lasciando tali questioni per gli ultimi capitoli, preferiamo chiudere il presente capitolo presentare il calcolo PL, nella versione (parzialmente) assiomatizzata.

4.4. Il sistema PL ed alcune sue proprietà.

Gli AA sviluppano PL in modo progressivo, a partire da una estensione FOL*= di FOL= *universalmente libera da presupposizione esistenziale* o più semplicemente, *universalmente*[195] *libera* (PL:§11), passando per un calcolo intermedio, MidPL, detto *mid plural logic* (PL:§12), che si distingue da PL per il fatto che non è ammessa la quantificazione delle variabili plurali[196]. La costruzione di MidPL è interessante in quanto sebbene "più ricco in potere espressivo" rispetto a FOL*= "è tuttavia assiomatizzabile" (PL:207), ossia è compatto e completo semanticamente[197]. Senza ripeterci per quanto riguarda la definizione di L_{PL}[198] andiamo subito a vedere gli assiomi logici del calcolo.

[195] Non solo i termini sono liberi da presupposizione esistenziale, ma può darsi il caso che *nulla* esista, che tutti i termini non denotino. Questo avviene quando le funzioni di assegnazione sono parziali. In proposito, cfr. W.O.Quine, 'Quantification and the Empty Domain', *Journal of Symbolic Logic*, 19: 177–179, 1954 e N. Tennant, *Natural Logic*, Edinburgh University Press, 1970.
[196] Se non nel caso della chiusura universale delle *ffbf*. Ciò lo rende equivalente, ovviamente, al sistema i cui assiomi sono la chiusura universale degli assiomi di MidPL e che è un caso particolare di PL.
[197] Inoltre da MidPL è possibile costruire un'algebra dei plurali (cfr. (PL 2013:207-208)).
[198] In relazione a MidPL infatti, non abbiamo necessità di introdurre la regola di costruzione di *ffbf* quantificate pluralmente.

4.4.1. Gli assiomi logici.

In quanto MidPL è un punto di riferimento per comprendere le capacità espressive di L_{PL} e per il fatto che solamente alcune variazioni su alcuni degli assiomi (non quelli caratteristici) di MidPL – e che chiariremo in seguito – vengono effettuate per passare da MidPL a PL, presentiamo gli *assiomi logici* di MidPL. Gli assiomi di MidPL sono tutte le istanze dei seguenti schemi di assioma (con φ, t e t' meta-variabili per *ffbf* e termini rispettivamente), anche qualora prefissati di un numero qualsiasi di quantificatori universali[199]:

A1. φ

Dove here φ è una tautologia

A2. *Distributività del quantificatore*: $\forall x\ (\varphi \to \psi) \to (\forall x\ \varphi \to \forall x\ \psi)$

A3. *Generalizzazione universale*: $\varphi \to \forall x\ \varphi$

dove x non occorre libera in φ

A4. *Eliminazione del quantificatore*: $\forall x\ \varphi(x) \to \big(S!\, t\ \to\ \varphi(t)\big)$

Dove t occorre libero in $\varphi(t)$ t se x occorre libero in $\varphi(x)$

A5. *Identità*: $\forall x\ (x = x)$

A6. *Sostitutività degli identici*: $t = t' \to \big(\varphi(t) \leftrightarrow \varphi(t')\big)$

Dove t' occorre libero in $\varphi(t')$ in zero o nei più posti in cui t occorre libero in $\varphi(t)$

A7. *Sostitutività di termini non denotanti*: $(\neg E!\, t \land \neg E!\, t') \to \big(\varphi(t) \leftrightarrow \varphi(t')\big)$

Dove t' occorre libero in $\varphi(t')$ in zero o nei più posti in cui t occorre libero in $\varphi(t)$

A8. *Identità plurale*: $t = t' \to E!\, t \land E!\, t'$

A9. *Descrizione definita univoca*: $\forall y\ \big(y = \imath x\ \varphi \leftrightarrow \forall x\ (\varphi \leftrightarrow x = y)\big)$

Dove y non occorre $\imath x\ A$

A10. *Descrizione definita esaustiva*: $\forall y\ \big(y \preccurlyeq x{:}\ \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)\big)$

Dove y occorre libera in $\varphi(y)$ dovunque x occorre libera in $\varphi(x)$

A11. *Inclusione*: $t \preccurlyeq t' \leftrightarrow E!\, t \land \forall x(x \preccurlyeq t\ \to\ x \preccurlyeq t')$

dove x non è libero in t e/o in t'

A12. *Singolarità*: Sx

[199] Per esemplificare la regola di inferenza ulteriore di ‘chiusura universale’ che è necessario fornire.

Gli assiomi A1-A9, se non fosse per la possibilità di assumere termini plurali, non introducono alcuna novità rispetto ad ogni FOL*= [200]. A10, A11 e A12 sono così gli assiomi caratteristici di MidPL e vengono specificamente introdotti per controllare i simboli che denotano le nozioni fondamentali di PL, : e $\preccurlyeq$, oltre alla condizione S (PL:212). Unica regola di inferenza è il *modus ponens* (MP)[201].

Per ottenere PL da MidPL basta compiere alcuni aggiustamenti alla sintassi ora proposta. In particolare, non è necessario alcun cambio di vocabolario. È sufficiente i) estendere la quantificazione alle variabili plurali[202]; ii) estendere l'applicazione di 'ι' alle variabili plurali; iii) estendere l'applicazione di ':' anche alle variabili plurali, così da rendere definibili le descrizioni *pluralmente esaustive*. In seguito a i) e ii) bisogna che le regole di formazione di *ffbf* siano estese, in modo da poter definire l'uso dei suddetti simboli e quelli ad essi relativi, p.es. i quantificatori, limitatamente a i)[203]. Verranno così pluralizzati gli assiomi A1-A9 costituendo un secondo insieme di assiomi, da A1* a A9*, da aggiungere al primo[204]. Anche la condizione di chiusura universale (ora ridondante)

---

[200] Gli Assiomi 1–9 "*virtualmente*" ripresentano gli assiomi di FOL*= in (PL:§11.3). "virtualmente" perché possono assumere anche termini plurali. L'unica variazione esplicita la si rinviente in A4, il cui analogo in FOL*= impiega $E!\,t$ in luogo di $S!\,t$, per esprimere la singolarità della variabile quantificata.

[201] Rispetto al nuovo linguaggio, ed al nuovo insieme di assiomi, la deducibilità '$\Gamma \vdash$C' and validità (sintattica) $\vdash$C sono definite come al solito mediante la nozione di sequenza di *fbf*.

[202] Ovviamente,però, "ammettere variabili plurali legate significa che la logica plurale piena [PL, *Ndr*] non è assiomatizzabile" (PL 2013:233). Inoltre, "una variante di [PL] potrebbe fare a meno delle variabili singolari in favore solo di quelle plurali, e in questo rispetto [PL] contrasta nettamente con [MidPL]" (PL 2013:236-237).

[203] Se xx una variabile plurale e φ una *fbf*, $\forall xx\ \varphi$ è una *fbf*, e similmente, per le descrizioni *pluralmente univoche*: se xx è una variabile plurale e φ una *fbf*, $\iota xx\ \varphi$ è un t.

[204] Per PL vengono così assunti gli assiomi A1-A12 in quanto fondamentali per comprendere i limiti entro cui la quantificazione singolare può regolare il regno dei termini plurali (cfr. (PL:240)). La pluralizzazione degli assiomi comporta che le lettere schematiche usate varieranno sopra termini (t e t') e *ffbf* (φ, ψ, γ) di PL e non di MidPL. Eccone gli schemi:

A1+. φ, dove φ è una tautologia

A2+. $\forall xx\ (\varphi \to B) \to (\forall xx\ \varphi \to \forall xx\ B)$

A3+. $\varphi \to \forall xx\ \varphi$, dove xx non occorre ibero in φ

A4+. $\forall xx\ \varphi(xx) \to \big(S!\,t\ \to\ \varphi(t)\big)$, dove t occorre libero in $\varphi(t)$ ovunque xx occorre libero in $\varphi(xx)$

A5+. $\forall xx\ (x = xx)$

A6+. $t = t' \to \big(\varphi(t) \leftrightarrow \varphi(t')\big)$, dove t' occorre libero in $\varphi(t')$ in zero o più posti in cui t occorre libero in $\varphi(t)$

A7+. $\big(\neg\exists xx\ (xx = t) \land \neg\exists yy\ (yy = t')\big) \to \big(\varphi(t) \leftrightarrow \varphi(t')\big)$, dove xx e yy sono le prime variabili plurali *non* libere in t e t', dove t' occorre libero in $\varphi(t')$ a zero o più posti in cui t occorre libero in $\varphi(t)$

A8+. $t = t' \to \big(\exists xx\ (xx = t) \land \exists yy\ (yy = t')\big)$, dove xx e yy sono le prime variabili plurali *non* libere in t e t'

A9+. $\forall yy\ \big(yy = \iota xx\ \varphi \leftrightarrow \forall xx\ (\varphi \leftrightarrow xx = yy)\big)$, dove yy non occorrono in $\iota xx\ \varphi$.

sarà estesa alla quantificazione universale plurale. La connessione fra quantificazione singolare e plurale è poi controllata dal seguente *teorema ponte*[205]:

T8. $\vdash \exists x\, x \preccurlyeq t \leftrightarrow \exists xx\, xx = t$
dove x e xx non occorrono libere in t.

Fatto interessante è che non vi è alcun analogo plurale degli assiomi A10-A12 così che questi si vanno ad aggiungere alla lista A1+-A9+ per completare PL. Per quanto riguarda A12, soprattutto, ma anche A11, il motivo è immediato, mentre per quanto riguarda A10 la questione è più sottile, essendo quest'ultimo il nucleo del rapporto fra PL e MSOL (rapporto che coinvolge A10 e CP (monadico)) la cui analisi rimandiamo all'ultimo capitolo.

4.4.2. Espressività, quantificazione e non assiomatizzabilità di PL.

PL, che tenta una soluzione rispetto ad alcuni fenomeni problematici dovuti alla formalizzazione del linguaggio naturale in logica classica, soprattutto l'equivocazione dei predicati, *deve* essere in qualche modo un calcolo più potente di FOL= (*a fortiori* di FOL). Non solo però PL *non* è una estensione conservativa di FOL ma, essendo in PL valide *ffbf* del tipo '$\forall xx\, Fxx \rightarrow \forall x\, Fx$'

PL è in qualche modo una estensione *non* conservativa anche di SOL (in paritcolare MSOL). Il pensiero degli AA è molto chiaro a riguardo:

> Ci siamo concentrati su una serie di risorse espressive che [PL] condivide con [MSOL]. Questo può sembrare confermare 'il sospetto che [PL] sia 'essenzialmente equivalente' a [MSOL]. Ma questa identificazione sarebbe un grave errore. Per vedere [l'errore], non abbiamo bisogno di deciderci su una particolare interpretazione delle variabili del secondo ordine, come varianti su concetti fregeani o su insiemi, o aventi un'interpretazione plurale à la Boolos [...]. Poiché il problema è ancora una volta l'equivocità [...], e questa è indipendente dalla questione dell'interpretazione. [PL] consente allo stesso predicato di combinarsi con termini argomentali singolari e plurali e perciò, correttamente, valida questo argomento: $\forall xx\, Fxx$, quindi $\forall x\, Fx$. Ma la sua traduzione in [SOL] o anche una sua

[205] Di cui gli AA forniscono la prova in (PL:241).

> estensione non sarà valida, dal momento che il predicato F occorrente nel contesto plurale Fxx verrà tradotto da un predicato del secondo ordine, e quando occorrente nel contesto singolare Fx, sarà tradotto da un diverso predicato del primo ordine. Quindi nessuna connessione logica tra le due occorrenze sarà disponibile, e la presunta traduzione non riuscirà a conservare la [realzione di] conseguenza. (PL:239).

PL è, così, almeno tanto espressiva quanto lo è MSOL e, dato che MSOL non è né assiomatizzabile né per essa vale il teorema di Löwenheim–Skolem (cfr. (PL:236)) sotto l'interpretazione modellistica *standard*, così è per la prima. Il fatto che MidPL sia un calcolo assiomatizzabile e completo giustifica gli AA a ritenere che "sebbene [MidPL] è più ricca espressivamente che" FOL=, "è lo stesso tipo di animale logico" (PL:236). Da ciò risulta chiaro che come fra FOL e SOL la quantificazione gioca un ruolo fondamentale per le meta-proprietà che contraddistinguono, distinguendole reciprocamente, delle due logiche MidPL e PL.

Il nesso fra quantificazione e assiomatizzabilità in PL è il seguente. Intuitivamente, una qualsiasi assegnazione (funzione parziale) di valori assegna un numero definito n di valori ad una variabile. Se questa è singolare, allora sarà $n \leq 1$; se invece è plurale, sarà $n \geq 0$. Il secondo caso è quello interessante. Considerando il sotto-caso $n > 1$, la variabile numerica 'n' può essere, anzi, deve essere quantificata nel meta-linguaggio. A seconda della quantificazione impiegata, universale o esistenziale, il sistema formale costruito si comporta in modo asimmetrico, per così dire. Proprio la distinzione fra quantificazione esistenziale e universale porta con sé delle conseguenze meta-teoriche rilevanti circa la compattezza di PL e, dunque, la sua assiomatizzabilità:

> [M]a nel senso in cui plurale è l'opposto di singolare [...], una variabile plurale deve essere in grado di assumere appena n valori per *qualche* $n > 1$. Ciò permette di introdurre variabili in grado di assumere qualche numero intermedio di valori – due, qualsiasi numero fino a un qualche fissato n finito, qualsiasi numero finito, ecc. [...]. Ad esempio, ciò illumina il confine tra logiche plurali assiomatizzabili e non assiomatizzabili. Poiché, se le sole variabili plurali quantificate sono quelle in grado di assumere fino a n valori per qualche fissato n finito, il sistema risultante è assiomatizzabile, ma se le variabili quantificate sono in grado di assumere qualsiasi numero finito di valori il sistema non è più assiomatizzabile. (PL:107).

Nel caso di PL, non a caso, la prova di non-compattezza e indecidibilità sfrutta la quantificazione plurale "per mimare la formulazione al secondo ordine dell'induzione matematica":

> In inglese: prese cose qualsiasi a piacere, se 0 è una di loro e il successore di un qualsiasi numero naturale tra loro è anche una di loro, ogni numero naturale è una di loro. Nel simbolismo sviluppato [...] e relativizzando quantificatori nel solito modo:
>
> $$\forall xx \left(0 \preccurlyeq xx \ \wedge \ \forall x \left(x \preccurlyeq xx \ \rightarrow \ sx \preccurlyeq xx\right) \rightarrow \forall x \left(x \preccurlyeq xx\right)\right)$$
>
> L'aggiunta di questo ai restanti postulati di Peano produce una teoria i cui modelli sono tutti isomorfi ai numeri naturali, e la non compattezza della logica sottostante segue così come segue per [SOL]. Allo stesso modo si ottiene una formalizzazione plurale finitamente[206] assiomatizzata dell'aritmetica di Peano che è categorica e quindi completa[207], da cui per il teorema di Gödel la non assiomatizzabilità delle verità logiche della logica sottostante può essere dedotta. (Oliver, Smiley 2006:317-318).

Tutto deriva dalla dimostrazione di non compattezza di PL. In altri termini, la non compattezza di PL, da cui derivano le altre meta-proprietà, dipende dalla quantificazione applicata alle variabili plurali in quanto *se non* ci si limita ad un *qualche* n fissato, non è possibile mostrare l'equivalenza logica fra '$\forall xx\, A(xx)$' $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, A(x_1 \ldots x_n)$, dove $x_1 \ldots x_n$ sono le variabili singolari non libere in $A(xx)$. *se non* ci si limita ad un *qualche* n fissato, la connessione fra quantificazione e l'induzione aritmetica, in riferimento alla prova di non-compattezza, è dovuta al fatto che la formulazione in L_{PL} del postulato di induzione può essere sostituita aggiungendo

> $\forall x\, \exists xx \left(x \preccurlyeq xx \wedge \forall y \left(sy \preccurlyeq xx \rightarrow y \preccurlyeq xx\right)\right)$ agli altri postulati di Peano integrati dal [postulato] $\forall x \left(x \neq 0 \rightarrow \exists y \left(x = sy\right)\right)$ di Robinson. Dal momento che ogni numero naturale ha solo finitalmente molti [*finitely many*] predecessori la teoria risultante ha i numeri naturali come modello. D'altra parte, in qualsiasi modello *non standard* degli altri

[206] L'assioma di induzione non è uno schema di assioma in questo caso, come non lo è nella formulazione al secondo ordine. Pertanto, non essendo uno schema, non vale per infiniti assiomi di induzione diversi.
[207] 'Completa' è la formalizzazione dell'assiomatizzazione della teoria, ovvero l'insieme degli assiomi, ma non il calcolo, semanticamente incompleto, né la teoria tanto sintatticamente che semanticamente incompleta.

> assiomi ogni individuo distinto [dai predecessori] deve avere infinitamente molti [*infinitely many*] predecessori, e *l'assioma plurale* [da solo] lo esclude [sotto la condizione, cioè, che ci si limiti ad un *qualche* n fissato, *Ndr*]. Così [in questo secondo caso,] ogni modello della teoria è isomorfo ai numeri naturali. (Oliver, Smiley 2006:346n2), *corsivi miei*.

Inoltre, come osserva Yi, tale risultato compare addirittura nel caso in cui l'unico predicato non logico di PL sia un predicato binario:

> Un'altra importante caratteristica di [PL] è che non è compatta. Per rendersene conto, si consideri il seguente:
>
> [32] $\exists xx\ \big((\forall y\, \exists z\ ((y \preccurlyeq xx \land z \preccurlyeq xx) \land A(\,y, z)\big)$[208]
>
> Ora, sia Γ^* l'insieme infinito {"$A(c_n\,, c_{n+1})$" : n è $un\ numero\ naturale$}. Si può allora osservare che [32] è conseguenza logica degli enunciati in Γ^*, ma non di ogni numero finito di enunciati fra quelli [*among them*] ([32] è una conseguenza modellistica di Γ^*, ma non di ogni sotto-insieme finito di Γ^*). (Yi, 2006:261).

E tale risultato non è dovuto, di per sé, dall'uso delle costanti c_i in $A(c_n\,, c_{n+1})$:

> L'uso delle costanti [individuali, *Ndr*] nell'esempio di cui sopra non è essenziale. Invece di Γ^*, si consideri l'insieme cui appartengono "$\exists x_0 \exists x_1\ A(x_0, x_1)$", "$\forall x_0 \forall x_1\ (A(x_0, x_1) \rightarrow \exists x_2\ A(x_1, x_2)$", "$\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2\ (A(x_0, x_1) \land A(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_3\ A(x_2, x_3)$", ecc.. questo esempio mostra che la logica dei linguaggi plurali che contengono un predicato non logico binario non è compatta. (Yi 2006: n.59).

Insomma, solamente supponendo un *qualche* numero fisso n di valori per le variabili si può costruire un sistema plurale assiomatizzabile e compatto. Ma tale restrizione sarebbe di per sé arbitraria: un sistema *genuinamente* plurale *deve,* per essere *pienamente* plurale, ammettere la possibilità *a priori* di non essere ristretto in tale maniera. Per questo gli AA distinguono fra PL e MidPL e non diversamente.

[208] [32] è formulata diversamente in (Yi 2006) che impiega la quantificazione ristretta. Anche la notazione varia: le variabili plurali sono denotate da espressioni del tipo 'xs', la quantificazione plurale da 'Σ' in luogo di '∃', limitandoci a [32]; e '$\boldsymbol{H}$' è il predicato binario di inclusione, analogo a quello usato in PFO, in quanto assume a sinistra solo termini singolari.

Adesso abbiamo quasi tutti gli strumenti per concederci all'analisi degli assiomi A10 e A11, che abbiamo dovuto lasciare in sospeso. In particolare tramite la loro analisi possiamo entrare nel merito delle relazioni fra PL e MSOL. Per questioni teoretiche preferiamo, però, aspettare ancora all'ultimo capitolo. Nel prossimo capitolo, invece, ci occuperemo di alcune questioni semantiche e sintattiche di PL, connesse alla nozione di *funzione plurale*. Le funzioni plurali sono sia i designati dei *termini funzionali plurali* di L_{PL} che gli strumenti matematici assunti nel meta-linguaggio di PL, per giustificare la nozione di *assegnazione plurale di valori* alle variabili. In questo modo, avremo modo di chiarire gli ultimi presupposti, soprattutto semantici, che ci permetteranno di rendere perfettamente chiaro il ruolo e l'importanza di A10 e A11, i quali, vedremo, sono strettamente connessi l'uno all'altro.

V

FUNZIONI POLIDROME E SEMANTICA

PL, diversamente dai altri sistemi[209], estende i termini funzionali al caso plurale. I termini funzionali sono necessari a una logica atta a catturare il ragionamento scientifico, si pensi alla matematica, e alla capacità di questo strumento di codificare un tipo di informazione (matematica) altrimenti impossibile. Ciò è dovuto al fatto che i termini funzionali sono termini complessi *annidati* (*nested terms*): p.es., data una funzione (unaria) f e la sua applicazione $f(t)$, è possibile sempre assumerla quale argomento di un'altra funzione f' t.c. la sua applicazione è $f'\big(f(t)\big)$. I termini funzionali plurali servono per denotare le c.d. funzioni *polidrome* – da affiancare alle funzioni *monodrome* – della cui esistenza e uso è testimone la matematica.

Le funzioni *plurali* o *polidrome* rivestono, poi, un ruolo fondamentale nella semantica di PL, quali strumento essenziale per esprimere le funzioni di *interpretazione* e, soprattutto, di *assegnazione* di valore alle variabili (plurali). In questo capitolo ci occuperemo, pertanto, delle funzioni polidrome, prendendo in considerazione in modo particolare alcune conseguenze semantiche dovute all'assunzione di tali oggetti matematici.

5.1. PL e le funzioni polidrome.

La giustificazione per cui l'estensione dei termini funzionali a quelli plurali è necessaria consiste in due punti: i) le funzioni polidrome *esistono*, e la prova ne è la pratica e la teoria matematica e ii) le funzioni polidrome sono *radicalmente distinte* tanto da quelle usuali,

[209] Alcuni per pregiudizi, a detta degli AA, altri per scarsa fiducia. Le obiezioni alle funzioni plurali sono riportate nel capitolo a queste dedicato (PL:§9). PL si contraddistingue così rispetto ad alcune proposte 'pluraliste': p.es. in (Linnebo 2003, 2013) i termini plurali complessi di tipo funzionale non sono menzionati mentre lo sono in (Yi 2005, 2006).

monodrome, che dalle *relazioni*. In supporto di i) gli AA portano delle prove storiche di carattere matematico. In supporto di ii) portano delle prove teoretiche. Si mostrerà che le prove teoretiche non supportano quelle storiche nell'uso che ne fanno gli AA, ovverosia che l'accettare l'esistenza delle funzioni polidrome nelle matematiche non implica affatto che tali funzioni siano radicalmente distinte dalle relazioni, almeno sulla base della matematica e della sua pratica. In tal senso, il punto ii) si rivela problematico.

5.1.1. La tesi e la sua giustificazione.

Assumiamo con gli AA l'esistenza delle funzioni polidrome. La tesi degli AA è la seguente. I termini funzionali plurali costituiscono una categoria di termini a sé in quanto le funzioni polidrome a) si distinguono da quelle *monodrome* e b) non sono riducibili a semplici *relazioni*.

Rispetto al punto a), siccome PL è *libera da presupposizione esistenziale*, le funzioni non sono esprimibili mediante relazioni con apparato quantificazionale più identità. Ciò comporta che le descrizioni definite (sia singolari che plurali) siano dei termini *genuini*, *non eliminabili contestualmente*. Siccome le *ddp* sono termini ben distinti dalle *dds,* le *ddp* possono venir impiegate per costruire termini funzionali essenzialmente distinti dai termini funzionali singolari.

Rispetto al punto b) gli AA sostengono che le funzioni e le relazioni sebbene estensionalmente siano "intimamente connesse, esse sono generi differenti di cose" (PL:146), pertanto, le funzioni polidrome non sono riducibili a relazioni. Tale tesi sarebbe supportata dal fatto che le categorie grammaticali cui i rispettivi segni linguistici, termini e predicati, appartengono sono significativamente distinti, i primi avendo per valore un oggetto, qualora applicate, i secondi avendo per valore un valore di verità, qualora predicati. Siccome estensionalmente le funzioni e le relazioni sono lo stesso genere d'oggetto, insiemi di n-ple ordinate[210] ma le relazioni sono usualmente denotate da predicati n-ari, gli AA sono costretti ad assumere che "relazioni e funzioni non sono oggetti estensionali bensì *sui generis*" (PL:214).

[210] Come la definizione 5.1 più avanti, evidenzia.

5.1.2. Termini funzionali plurali.

Un termine funzionale rientra nella categoria grammaticale dei termini descrittivi, o non-logici, e complessi, ovvero strutturati. Dato un segno di funzione unaria 'f', un termine funzionale '$f(x)$' denota il valore 'y' della funzione applicata all'argomento 'x' assunto: $y = f(x)$. L'estensione dei termini funzionali a quelli plurali, denotanti valori di funzioni *genuinamente* polidrome, avviene mediante la pluralizzazione delle funzioni nel linguaggio-oggetto. Seguendo PL, tre sono le tecniche di pluralizzazione che è possibile adottare (cfr. (PL:142)):

- Pluralizzare il termine che denota l'argomento della funzione
- Pluralizzare il termine funzionale che denota il valore della funzione
- Entrambe

Siccome, però, non tutte le funzioni ammettono argomenti plurali, si può fornire un resoconto generale solo percorrendo la seconda opzione, "usando l'apparato descrittivo" (PL:142), adoperando cioè gli operatori di *ddp*, in modo da pluralizzare l'applicazione stessa della funzione, ovvero il valore. Per poter ottenere termini funzionali plurali denotanti valori di funzioni polidrome bisogna però anche soddisfare una seconda condizione: che il valore plurale della funzione sia una pluralità collettiva, in quanto è solo "il segno di funzione collettiva che esprime una funzione polidroma" (PL:143)[211].

5.1.3. Funzioni monodrome e polidrome.

Circa l'esistenza delle funzioni polidrome, molti sono i testi di matematica – p.es. (Knopp 2013), (Hardy 1944), (Borges 1967), (Spiegel 1975) – che affiancano le funzioni polidrome alle usuali (rinominate) *monodrome*. Il problema è vedere come queste funzioni sono definite, per trovare un accordo fra la matematica e la pretesa concezione di PL, soprattutto in relazione al punto b) di cui sopra. In PL l'unica definizione di funzione polidroma la si recupera all'inizio del capitolo §9 (PL:139-151), interamente dedicatovi, anche se è piuttosto vaga e soprattutto informale:

[211] Se ciò che è collettivo è non-distributivo e "f è distributivo se il predicato $yy = f(xx)$ o $yy \equiv f(xx)$ è distributivo" (a *destra* dell'identità), allora la negazione di uno dei versi del bicondizionale:

- $\forall yy\, \forall xx\, \left(yy = f(xx) \leftrightarrow \forall x\, \left(x \preccurlyeq xx \rightarrow yy = f(x)\right)\right)$

è collettivo (cfr. (PL:142)).

> Una funzione polidroma è una che a volte ha diversi valori o *output* per gli stessi argomenti o *input*. A volte, non necessariamente sempre [...]. Il termine funzionale denotante il/i valore/i di una funzione polidroma sarà pertanto qualche volta un termine plurale. (PL:140).

Sulla base del passaggio appena citato, se tentassimo di definire una funzione polidroma, $\mathfrak{f}$, con gli strumenti estensionali usuali, il risultato sarebbe pressappoco il seguente:

DEFINIZIONE 5.1. *Funzione Polidroma*[212] (estensionale). $\mathfrak{f}$ è polidroma *sse* $\forall x_1 \dots x_n \in E^n \subseteq D^n, \exists y \in C$

- Se $E = D$, allora $\mathfrak{f}$ è totale; se $E \subset D$, allora $\mathfrak{f}$ è parziale.

Se $\forall x_1 \dots x_n \in E^n$ il termine funzionale plurale '$\mathfrak{f}(t_1 \dots t_n)$' denota gli m valori (almeno uno) che y assume per ciascuna n-pla di argomenti $x_1 \dots x_n$ (cui $\mathfrak{f}$ è applicata) e che soddisfano l'espressione '$y = \mathfrak{f}(x_1 \dots x_n)$', per $n \geq 1$. Ma se $\exists x_i \notin E_i$, con $1 \leq i \leq n$ in generale si ha che:

- $m = 0$, quindi '$\mathfrak{f}(t_1 \dots t_n)$' *non denota* e la $\mathfrak{f}$ è *parziale*, senza un valore in C.

Se, invece, $\exists x_i \notin E_i$ con $1 \leq i \leq n$ e $m \geq 1$, allora $\mathfrak{f}$ è *co-parziale* e '$\mathfrak{f}(t_1 \dots t_n)$' è detto '*debole*' poiché ha valori 'fuori' di C, o fuori del sotto-insieme I di C delle immagini o *output* di $\mathfrak{f}$, anche se almeno un argomento non denota.

Secondo gli AA le funzioni polidrome sono un "luogo comune" nella matematica e "l'inversa di una funzione monodroma è tipicamente polidroma" (PL:140). Diciamo allora f essere una funzione (monodroma) e f^{-1} la sua inversa, così che f^{-1} è $\mathfrak{f}$. Non ci resterebbe, allora, che fornire una definizione estensionale di funzione inversa a partire dalla definizione 5.1:

DEFINIZIONE 5.2. *Funzione Inversa*[213]: $f^{-1} = \{\langle y, \langle x_1 \dots x_n \rangle\rangle : \langle\langle x_1 \dots x_n \rangle, y\rangle \in f\}$

---

[212] Adoperiamo un cambio di simbolo solo per evitare ambiguità notazionali.

[213] L'inversione di una relazione comporta lo scambio dei due insiemi: il dominio diventa il co-dominio e viceversa. Da manuale, la relazione inversa deve rispettare la definizione di funzione. In matematica, perché una funzione sia l'inversa di un'altra originaria dobbiamo verificare:

- Se ogni elemento del dominio (nella relazione inversa) è dotato di almeno una immagine. Ovvero, se ogni elemento del co-dominio (nella relazione originaria) è dotato di almeno una contro-immagine. Pertanto, la funzione originaria deve essere *suriettiva*.

Secondo tale definizione, la funzione inversa è una funzione che semplicemente inverte, mutuando, gli insiemi dominio e co-dominio (D e C, rispettivamente) della funzione generica originaria (usiamo la seguente notazione: $D' = C$ per il *dominio inverso* e $C' = D$ per il *co-dominio inverso*). Ma per poter invertire l'ordine di D e C e far sì che f^{-1} sia anch'essa una *funzione*, non basta che la correlazione originaria f sia una funzione, in quanto f^{-1} deve soddisfare a sua volta la *condizione di funzionalità*, in particolare nella forma seguente:

- Se esistono due coppie ordinate t.c. $\langle y, \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rangle \in f^{-1}$ e $\langle y, \langle z_1, \dots, z_n \rangle \rangle \in f^{-1}$, allora $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$[214]

Ma f^{-1} *non può* soddisfare questa condizione se f è una *semplice* funzione *non* ulteriormente caratterizzata. Eppure, secondo gli AA, l'inversione di una generica funzione f genera una funzione polidroma. L'esempio tipico che portano è quello della funzione $\sqrt{x}$:

> Qui e altrove ci occupiamo di $\sqrt{x}$ come dell'inversa di x^2 [$\sqrt{x} = x^{1/2}$, *Ndr*], e si presuppone che il suo dominio comprende i numeri interi positivi e negativi[215]; oltre a ciò, il dominio è irrilevante per la discussione, anche se naturalmente influenzerà la misura in cui la funzione √ è parziale. Ma naturalmente non stiamo negando che ci sono contesti in

---

- Se ogni elemento del dominio (nella relazione inversa) è dotato di una sola immagine. Ovvero, se ogni elemento del co-dominio (nella relazione originaria) è dotato di una sola contro-immagine. Pertanto, la funzione originaria deve essere *iniettiva*.

Le condizioni affinché l'inversa di una funzione *f* rispetti la definizione di funzione sono l'*iniettività* e la *suriettività* della funzione originaria *f*: tale funzione, quindi, deve essere *biiettiva*. Pertanto, una funzione si dice *invertibile* quando anche la sua relazione inversa rispetta la definizione di funzione, da cui il teorema: Una funzione è *invertibile sse* è *biiettiva*.

[214] In generale, $\langle x_1 \dots x_n \rangle = \langle z_1 \dots z_n \rangle \Leftrightarrow x_i = z_i$ con $i \in \mathbb{N}$ e $\langle x \rangle =_{df} x$.

[215] Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri relativi, o interi positivi e negativi, che si ottiene dall'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali definendo nel nuovo insieme i naturali quali interi positivi e definendo i numeri negativi come i positivi cui si applica la funzione 'cambio di segno' o 'segno opposto' (p.es. se assumiamo per base $a \in \mathbb{N}$ e definiamo $a = +a$ e $b = -a$). Gli AA considerno f definita su $D = \mathbb{Z} = C$, p.es. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, e t.c. $x \longmapsto_f x^2$. f, pertanto, è t.c. per due qualsiasi numeri $a, b \in \mathbb{Z}$ con stessa base e segno opposto, $f(a) = f(b) = c$, con $c \in \mathbb{Z}$. Seguendo gli AA, $f^{-1}(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$. Ma, siccome √ assume argomenti solo positivi, √ è *parziale* in quanto non assume valori $\forall x$ ($x \in \mathbb{Z}$ *et* $x \notin \mathbb{N}$) e $\forall x \in \mathbb{N}$ che siano *quadrati perfetti*. Se fosse definita sui reali f^{-1} sarebbe comunque una *funzione* parziale, poiché $\sqrt{x} = y$ *sse* $|z| = y$. La condizione che $|z| = y$ significa esattamente che √ può essere considerata *la funzione inversa* di f (se $f(x) = x^2$), *sse* il valore y (appartenente a $C' = D$) è ristretto a $|z|$ ossia *sse* y è positivo. Con questa nuova condizione √ non è affatto polidroma, sebbene sia la funzione (parziale) inversa di quella data.

cui è intesa solo la radice quadrata positiva, come quando un autore dice che la Sezione Aurea è $(1+\sqrt{5})/2$". (PL:140-141).

Ovviamente, se $f(x)=x^2$ allora f è una funzione generica e pertanto è non-iniettiva, t.c. non mappa, cioè, ciascun elemento su due immagini distinte. Secondo la teoria matematica delle funzioni, per poter trasformare una funzione f nella sua inversa f^{-1} bisogna che f soddisfi una condizione: f deve essere una funzione *biettiva*. Se f *non* è biettiva ma è una funzione generica *totale*, una sola è la strada percorribile: si deve restringere il dominio di f rendendola così *iniettiva*, di modo che automaticamente f^{-1} sia anch'essa iniettiva, se è anche *parziale*. In questo modo, f^{-1} è anche *suriettiva*[216].

Con riferimento al caso invocato in PL, $f(x)=x^2$, secondo gli AA si avrebbe che $f^{-1}(x)=x^{1/2}=\sqrt{x}=y$ ed è in questo senso che f^{-1} sarebbe polidroma[217]. Ma ciò suppone che vi siano due valori per l'applicazione della funzione inversa. E ciò non vale. Infatti, l'identità $\sqrt{x}=y=\pm z$ non vale. Piuttosto, si ha che $f^{-1}(x)=x^{1/2}=\pm\sqrt{x}=\pm y$, con $\sqrt{x}\neq\pm\sqrt{x}$ e, in generale, $\sqrt{x}=y\ sse\ \pm\sqrt{x}=\pm y$[218]. Infatti, si ha che $\sqrt{x}=y\ sse\ y=|z|$, dove l'operazione *modulo*, $|\quad|$, restringe il co-dominio di f^{-1}. Il simbolo '$\pm$', infatti – che denota a sua volta una funzione[219], diciamo g – che deve essere

216 Se restringiamo il co-dominio di f (se $f(x)=x^2$) dagli *interi* agli interi *positivi* allora sarà f a divenire *suriettiva*, senza però essere *iniettiva*.
217 Gli AA non ammettono entrambe le condizioni 'f è iniettiva' e 'f^{-1} parziale', ma ammettono solamente la seconda.
218 $|\quad|$ è la funzione *modulo* t.c. lascia positivi i numeri positivi e rende positivi i numeri negativi.
219 Infatti, nel contesto estensionale, $\pm$ è esattamente quella funzione che per ogni numero naturale prima produce gli interi positivi, applicando la funzione segno '$+$' e poi per ciascuno stesso numero produce un intero negativo, applicando la funzione 'cambio di segno' o 'opposto' o '$-$'.

applicata[220] *dentro*[221] f^{-1}. Quando g è applicata dentro la funzione f^{-1} risulta come quella funzione che sdoppia il valore (che si suppone positivo) della radice $\surd$ distinguendone i due c.d. *rami*[222] derivati dalla applicazione di $^{1/2}$ e che sono $+\sqrt{x} = +y$ e $-\sqrt{x} = -y$, ciascuno dei quali appartiene ad uno ed uno solo dei sotto-insiemi di $\mathbb{Z}$, quello degli interi positivi il primo e quello degli interi negativi il secondo. Questi due rami, chiamiamoli $w_1 = +\sqrt{x}$ e $w_2 = -\sqrt{x}$, anche estendendoci al campo dei *reali*[223], sono considerati *due valori generati per applicazione di due funzioni* (distinte) in quanto, variando con continuità x tra 0 e $+\infty$, ognuna delle due diramazioni varia separatamente dall'altra e, quando ci si restringe ad una di esse, p.es. a w_1 (detto, ramo *principale*), w_2 (detto, ramo *opposto*) non entra mai in considerazione. Analogo discorso vale per *tutte* altre funzioni polidrome *reali*, quali le potenze frazionarie $x^{n/m}$, per n, m interi o l'arcotangente. In somma, proprio perché nel campo *reale* $\mathbb{R}$ è *impossibile passare con continuità da un ramo all'altro* di una polidroma, la nozione stessa di 'funzione polidroma' risulta di *scarsa utilità* e di solito non è *neanche* menzionata.

Ma, allora, in che senso gli AA sono *giustificabili* quando affermano che "la lettura corretta" della funzione '$\pm$' (applicata per esempio a 2), "è 'più *e* meno 2'" e che '± 2' è "un genuino e immediato termine plurale" (PL:141)? Se la funzione radice quadrata è *tipicamente* polidroma, continuano gli AA, lo è perché il campo tipico mediante cui definire il modello matematico di funzione polidroma è quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$:

---

[220] L'applicazione di una funzione ad una funzione genera una funzione composta, la quale è regolata dalle regole che definiscono l'operazione di composizione, che è la fondamentale *operazione* fra funzioni. Consideriamo tre insiemi X, Y, Z e le funzioni: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. La f fa corrispondere ad ogni $x \in X$ uno ed un solo $y \in Y$; a tale elemento y, la g fa corrispondere uno ed un solo $z \in Z$. Possiamo riassumere quanto detto nello schema:

- $x \longmapsto_f y \longmapsto_g z$

ovvero, con riferimento all'elemento $x \in X$ da cui trae origine la corrispondenza:

- $x \longmapsto_f f(x) \longmapsto_g g\big(f(x)\big)$

È possibile considerare una *nuova* funzione che faccia direttamente corrispondere all'elemento $x \in X$ l'elemento $g\big(f(x)\big) \in Z$. Essa è denominata funzione *composta* delle due funzioni considerate e si indica con la scrittura: $g \circ f$ oppure, gf. Per convenzione, *si indica per prima la funzione che opera per ultima*, per analogia con l'ordinamento nella scrittura $g\big(f(x)\big)$ dell'elemento corrispondente di x nella funzione composta $g \circ f$, che può così essere definita: date le funzioni $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$, si dice *funzione composta* $g \circ f$ (o gf) la funzione che ad ogni elemento $x \in X$ fa corrispondere l'elemento $g\big(f(x)\big) \in Z$.

[221] Nel senso che f^{-1} è la *composizione* di due funzioni g e g', p.es. f^{-1} è $g \circ g'$, dove g è la funzione $\pm$ e g' è $\surd$.

[222] Detti anche *branche*.

[223] Naturalmente, nel campo reale, $g(x)$ è definita solo per valori positivi, p.es. per $x \in \mathbb{R}_+$.

> È nel regno dei numeri complessi, comunque, che il fenomeno dienta omnipresente. Guidata dal bi-valorato $\sqrt{-1}$, la molteplicità dei valori [*multivaluedness*] è ora la norma[224]. (PL:141).

La domanda che ci poniamo è, così, la seguente: è o non è impossibile estendere quanto detto sull'applicazione della funzione radice quadrata fino al campo dei *reali* anche al campo dei *complessi*?

5.1.4. Analisi delle fonti storiche.

Tre sono le fonti che gli AA invocano a supporto della loro impostazione in qualità di prova storico-teoretica dell'esistenza delle funzioni polidrome, in particolare come entità essenzialmente distinte da quelle monodrome (oltre che dalle relazioni)[225] e del loro largo uso nella pratica matematica: Eulero (1707-1783), G.H. Hardy (1877-1947), R. Penrose (1931-)[226].

5.1.4.1. Eulero.

Cominciamo, seguendo l'ordine presentato dagli AA, da Eulero. Il rimando a Eulero è fondamentale perché con la pubblicazione dell'*Introductio Analysis Infinitorum* del 1748 la nozione di 'funzione' "divenne il concetto fondamentale dell'analisi" (Boyer 1980:512)[227]. Eulero, nel capitolo §10, mette in evidenza il carattere polidromo delle

---

[224] Ricordiamo che $\sqrt{-1}$ suppone il segno '$+$' davanti al segno di radice.

[225] Gli AA sono dichiaratamente avversi alle tesi di Peano, Frege, Quine, Church e altri con riguardo a come intendere le funzioni polidrome. Per una sintesi teoretica della concezione classica rispetto a tali funzioni cfr. (Church 1956:16n41).

[226] Non tutte e tre le fonti sono propriamente rilevanti per quanto concerne anche l'analisi complessa (relativa al campo $\mathbb{C}$). Solamente il brano estratto da (Penrose 2004) lo è esplicitamente. Eulero e Hardy sono rilevanti da un punto di vista maggiormente teoretico, in quanto inquadrano la questione da un punto di vista della natura stessa delle funzioni e della generalità della definizione di tali oggetti per una applicazione adeguata ad ogni contesto.

[227] Dall'opera di Eulero cominciò ufficialmente l'epoca dell'analisi relativa allo studio di procedimenti infiniti, il metodo delle flussioni e il calcolo differenziale che con lui finalmente e definitivamente furono unificati.

funzioni *irrazionali*[228] (opposte a quelle razionali[229]). Le funzioni irrazionali sono quelle in cui l'argomento compare sotto radice: p.es. se f è una funzione irrazionale $f(x) = x^{1/n} = \pm\sqrt[n]{x} = \pm y$. La bontà dell'analisi fornita nella sezione precedente è rivelata da una espressione presente nel brano citato dagli stessi AA secondo cui sono proprio "i segni di radice" che "sono equivoci [*equivocal*] e danno valori accoppiati".

Lo stesso Boyer ci informa della concezione che Eulero aveva della nozione generale di funzione: "Il quarto capoverso dell'*Introductio* definisce la funzione di una quantità variabile come 'una qualsiasi espressione analitica formata da quella quantità variabile e da numeri o quantità costanti'" (Boyer 1980:512)[230]. Un'ulteriore novità introdotta dal matematico di Basilea fu la definizione dei logaritmi "in termini di esponenti", che gli permise di fornire "il concetto esatto del significato dei logaritmi dei numeri negativi"[231]. Continua Boyer, "i logaritmi dei numeri negativi non sono dunque numeri reali, come avevano creduto Jean Bernoulli e d'Alembert, ma numeri immaginari puri" (Boyer 1980:517-518). Eccoci entrati nel campo dei complessi. Sempre Boyer, però, ci ricorda anche che, sempre nell'*Introductio*, Eulero stesso si riferisce alla nozione di funzione come a "la relazione fra due coordinate dei punti di una curva su un piano" (Boyer 1980:512).

---

[228] Una funzione f è detta irrazionale *sse* la variabile indipendente (ascissa, argomento) x figura sotto il segno di radice, p.es. $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} = y$.

- Se l'indice $n \in \mathbb{N}$ è *pari*, allora il radicando $f(x) \geq 0$ e il *segno* della funzione è positivo, p.es. $y \geq 0$ e, quindi, il dominio della funzione è costituito da tutti i numeri reali diversi da quelli che rendono il radicando negativo
- se l'indice n è *dispari*, allora il radicando o $f(x) \geq 0$ o $f(x) < 0$ e il segno della funzione, i) se $f(x) \geq 0$, è positivo o nullo ($y \geq 0$); ii) se $f(x) < 0$, è negativo ($y < 0$) e, quindi, il dominio della funzione è costituito dall'insieme dei numeri reali.

[229] Una *funzione razionale* $f(x)$, se *intera*, è scrivibile come un polinomio ($f(x) = P(x)$) o, se *fratta*, è scrivibile come il rapporto fra polinomi ($f(x) = P(x)/Q(x)$, con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi in x); la *f. r.* può essere *reale* o *complessa* a seconda che i coefficienti dei polinomi siano numeri reali o complessi.

[230] Sebbene tale definizione *non* sia pienamente soddisfacente oggi, in quanto non esplicita il significato operazionale di 'espressione analitica'. La trattazione analitica delle funzioni trigonometriche fu codificata in larga misura proprio dall'opera di Eulero, secondo cui, p.es. la funzione *seno* non era più un segmento, bensì un numero o un rapporto: l'ordinata (variabile dipendente, y) di un punto del cerchio di raggio unitario, avente centro nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane.

[231] Che fino ad allora era inteso essere lo stesso di quello dei numeri positivi , p.es. $\lg(-x) = \lg(x)$. Riporta sempre Boyer (1980:518): "Asserzioni come $\lg(-1)^2 = \lg(+1)^2$, equivalente a $2\lg(-1) = 2\lg(+1)$ ossia a $\lg(-1) = \lg(+1)$, avevano messo in difficoltà i miglior matematici dei primi decenni del XVIII secolo", con riferimento soprattutti a J. Le Rond d'Alembert (1717-1783) e Jean Bernoulli (1667-1748).

5.1.4.2. Hardy.

Il secondo brano citato in (PL) è di Hardy (1921:43-44). Supponendo che x e y siano variabili continue (su $\mathbb{R}$[232]), Hardy sostiene che la nozione generale di funzione non deve essere ristretta ad una che soddisfi le seguenti caratteristiche: (1) totalità, (2) unicità del valore e (3) analiticità della formula che esprime la dipendenza funzionale fra le variabili x e y[233]. Per Hardy, "tutto ciò che è essenziale è che ci sia una qualche relazione [*some relation*] fra x e y t.c. a qualche valore di x corrispondano valori di y". Hardy è ben attento a sottolineare, fra gli esempi, che data l'equazione $y^2 = x$ e se x è positivo (variando le variabili su $\mathbb{R}$ (e non su $\mathbb{C}$)) l'equazione definisce due valori di $y = \pm\sqrt{x}$ per ciascun valore di x. Continua Hardy affermando che "Cioè, questa funzione perciò possiede la caratteristica (3) ma non né la (1) né la (2)" (Hardy 1921:44).

L'esempio è interpretato male dagli AA perché, in luogo di supportare l'idea che le funzioni polidrome siano da distinguere dalle relazioni, non solo ma conferma la precedente analisi, ma le considera tali: non solo siccome il campo di variazione delle variabili è $\mathbb{R}$ – e non $\mathbb{C}$, dato che inoltre (al titolo) l'argomento x della radice deve essere positivo[234] – il comportamento della funzione $\pm$ è sempre (almeno riducibile ad un comportamento) monodromo; ma inoltre – ed è Hardy stesso a dirlo – tutto ciò che è essenziale ad una definizione così generica di funzione è "una qualche relazione".

Pertanto, quale prima conclusione ci sembra lecito affermare che l'equivocità – almeno per Hardy, se non anche per Eulero, visto quanto scrive Boyer – non è problematica, a patto di fornire una definizione di funzione più debole e generale, in grado di uniformare la trattazione matematica anche a quei casi in cui si presenti l'equivocità in maniera strutturale: estendendo la nozione di 'funzione' a quella di semplice *relazione* e non, dunque, introducendo la nozione di 'funzione polidroma', nel senso degli AA. Una estensione, questa che, data la nostra analisi della nozione di funzione, sarebbe comunque

---

232 Il brano è estratto dal capitolo §20 intitolato *Functions of Real Variable*.

233 "Da cui il valore di y corrispondente ad un dato valore di x può essere calcolato per diretta sostituzionedi quest'ultimo". Le *funzioni analitiche* sono una sottoclasse delle *funzioni continue*: non tutte le funzioni sono analitiche – Frege p.es. considerava la proprietà (3) sempre soddisfatta (o soddisfacibile) dalla nozione di 'funzione' (Cellucci 2013:189). Una funzione $f(x)$ è continua nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ *sse* l'approssimazione di $f(x)$ a x_0 (il limite di $f(x)$ al tendere di x a x_0) dà per valore y lo stesso valore ottenuto dell'applicazione della funzione a x_0: $y = f(x_0)$. Formalmente, $\lim_{x \to x_0} f(x) = y = f(x_0)$.

234 Se non lo fosse la funzione, qualora definita sui reali, dovrebbe essere parziale rispetto ad argomenti negativi. Ma dato che la condizione è esplicita, la funzione non è parziale se non per quegli argomenti i cui valori sono *irrazionali*, p.es. *radice di* 2.

trattabile senza problemi mediante la definizione 'ristretta' di funzione (monodroma) fintantoché i valori che le variabili sono reali.

Il riferimento alla nozione generale di 'funzione' operato da Hardy non si oppone in alcun modo alla condizione generale per cui una funzione è *invertibile sse* è *biiettiva* (iniettiva e suriettiva), anzi. Inoltre, l'idea di relazione è consistente anche con la nozione di *corrispondenza* catturata dalla definizione *libera* fornita da Eulero. In questo senso, l'inversa di una funzione è *tipicamente* una relazione o una *corrispondenza uno-molti*.

5.1.4.3. Penrose e Spiegel.

Il terzo brano citato in (PL) esprime il pensiero di Penrose (2004:94-95) che si sofferma sul comportamento polidromo delle funzioni esponenziali nell'analisi complessa (in cui le variabili *tipiche* z e w variano su $\mathbb{C}$[235]): p.es. per ogni valore di w, escluso 0, esiste uno z t.c. $w = e^z$. In tale contesto queste funzioni hanno più di un valore.

Per comprendere il valore di questo brano con riferimento alle funzioni polidrome riteniamo adeguato fare riferimento ad uno dei testi più autorevoli in materia di analisi complessa, lo (Spiegel 1975). Questo testo si apre con una panoramica sui vari sistemi numerici, dai naturali ai complessi, e sulle operazioni fondamentali eseguibili su questi ultimi[236]. Il secondo capitolo invece introduce direttamente il lettore alla nozione di funzione, e si apre richiamando l'attenzione sulla simbologia elementare usata nel mondo dei complessi. Nel presentare la notazione relativa alle funzioni Spiegel subito include il caso polidromo di una funzione:

---

[235] 'e' è il nome del numero di Eulero (di Nepero) ed è una costante che denota un numero *irrazionale* (in particolare, trascendente) che, pertanto, non è esprimibile come frazione o come numero decimale periodico. Il numero di Eulero è usato nella funzione esponenziale, che associa ad un numero *reale* x il numero dato dalla potenza e^x, e con la funzione logaritmo naturale (l'inversa dell'esponenziale).

[236] $\mathbb{N}$ è l'insieme dei naturali o interi positivi: l'insieme dei naturali è induttivamente chiuso rispetto alle operazioni di addizione, p.es. $a + b$, e moltiplicazione, p.es. $a \cdot b$, con a e b naturali; $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi (positivi e negativi): l'equazione $x + b = a$ con a e b naturali, e soddisfatta dagli interi, ovvero l'operazione di sottrazione è ora l'inversa della addizione, p.es. $x = a - b$ e tale insieme è chiuso rispetto a tale operazione; $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali, introdotti per risolvere le equazioni di tipo $bx = a$ per a e b interi con $b \neq 0$: la divisione ora è l'operazione inversa della moltiplicazione, p.es. $x = a/b$ e tale insieme è chiuso rispetto a tale operazione; $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, cioè di tutti i numeri, compresi quelli non esprimibili mediante un quoziente a/b con a e b interi e $b \neq 0$, e tale insieme è chiuso rispetto a questi numeri (trascendenti): $\mathbb{C}$ è l'insieme dei numeri complessi t.c. soddisfano la seguente equazione algebrica $x^2 + 1 = 0$. Un numero complesso qualsiasi z ha la forma $a + bi$ dove a e b sono reali e i , l'unità immaginaria, sottostà alla condizione $i^2 = -1$. Se $z = a + bi$ a è la parte reale, mentre b è la parte immaginaria, z è la variabile complessa.

> Se ad ogni valore assunto dalla variabile complessa z corrispondono uno o più valori della variabile complessa w, si dice che w è *funzione* di z e si scrive $w = f(z)$, $w = G(z)$, ecc. a volte si dice che z è una *variabile indipendente*, mentre w è una *variabile dipendente*. Il *valore* assunto da *una funzione* per $z = a$ si indica spesso con $f(a)$. Così se ad es. $f(z) = z^2$, si ha $f(2i) = (2i)^2 = -4$. (Spiegel 1975:33).

Il titolo del paragrafo immediatamente successivo al brano appena riportato è indicativo: 'Funzioni ad un valore e funzioni a più valori'. Lo riportiamo per intero, essendo breve e chiaro:

> Se ad ogni dato valore di z corrisponde un *solo valore* di w, si dice che w è una funzione *monodroma* o *univoca* o *ad un sol valore* di z. Se invece a un singolo valore di z corrispondono più di un valore di w, si dice che w è una funzione *polidroma* o *polivoca* o *a più valori* di z.
>
> Una funzione a più valori può essere considerata come un insieme di funzioni ad un solo valore; si dice che ogni elemento dell'insieme costituisce un *ramo* o una determinazione della funzione. Usualmente uno di questi elementi è preso come *ramo principale* della funzione a più valori e il valore corrispondente a questo ramo è detto *valore principale*.
>
> **Esempio 1**: Se $w = z^2$, per ogni valore di z si ha un solo valore di w. Perciò $w = f(x) = z^2$ è una funzione ad un solo valore di z.
>
> **Esempio 2**: se $w = z^{1/2}$, per ogni valore di z si hanno due valori di w. Perciò $w = f(z) = z^{1/2}$ è una funzione di z a più valori (nel caso particolare, a due valori).

Sembra, allora, che a ragione gli AA vogliano distinguere fra funzioni monodrome e polidrome. Eppure, a complicare le cose per la tesi degli AA, ci ha pensato lo stesso Spiegel affermando (nel brano citato) che "una funzione a più valori può essere considerata come un insieme di funzioni ad un solo valore"[237]. In questo senso la pratica matematica nell'ambito dell'analisi complessa non pone alcuna riserva sulla possibile riduzione di una funzione polidroma sulla base dello schema 'fregeano' basato sulle funzioni monodrome e sugli insiemi.

[237] Innanzi tutto, riprendendo la funzione di radice quadrata, nel campo reale la radice è solo definita per valori positivi di x, mentre nel campo complesso è definita ovunque (l'estensione della radice ai negativi è il marchio di fabbrica dell'algebra complessa!): le variabili complesse, z e w sono definite $z = x + iy$ e $w = u + iv$, con $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ e i detta 'base immaginaria' t.c.: $i^2 = -1 \Leftrightarrow |i| = \sqrt{-1} \Leftrightarrow \pm i = \pm\sqrt{-1}$.

Nonostante questo, però le differenze che emergono quando si passa al campo complesso sono notevoli. Scrive Shapiro,

> Il linguaggio informale dell'analisi complessa assume un termine 'i' che si suppone denotare una delle radici quadrate di -1. Almeno grammaticalmente 'i' è una costante, un nome proprio. E, ovviamente, il ruolo di una costante è quello di denotare un oggetto singolo – almeno in un linguaggio sufficientemente regimentato. Ma delle radici quadrate 'i' seleziona? Non è come se la comunità matematica avesse deciso di identificare una delle radici, al fine di battezzarla con il nome 'i'. Sembra che non possono farlo, in quanto le due radici sono indiscernibili. (Shapiro 2012:381).

Nel campo complesso le funzioni polidrome presentano un carattere di *continuità* sconosciuto a quelle di variabile *reale*, nel senso che i due rami di una polidroma 'comunicano' tra loro. Per farla breve, una polidroma complessa, a differenza di una reale, è un tutt'uno che poco si presta ad essere tagliato in rami in un modo che non sia *arbitrario*. Ma il carattere di discontinuità può essere facilmente spiegato nei termini seguenti. La funzione (predicato) "essere il doppio di", $y = 2x$, definita sugli interi è interpretata come una mappa *iniettiva*. Ovvero, una corrispondenza "uno-a-uno", ma dove non tutti gli elementi del co-dominio sono necessariamente raggiunti da frecce (non suriettiva), fra l'intero insieme dei numeri *interi* (negativi e positivi): $\{\ldots, -2, -1,1,2, \ldots\}$, e l'insieme dei numeri interi *pari* $\{\ldots - 4, -2,2,4, \ldots\}$ che è un sottoinsieme degli interi. Tutte le frecce che connettono uno ad uno gli elementi dei due insiemi mantengono quindi la *distinzione* degli elementi stessi. Se però definiamo la funzione (predicato) "essere quadrato di", $y = x^2$, sui numeri *reali* (come anche solo sugli *interi*), con il *co-dominio* definito esclusivamente sui reali (o *interi*) positivi, la funzione diventa *suriettiva*: "al minimo uno-a-uno", in quanto tutti gli elementi del co-dominio sono raggiunti da almeno una freccia, ma *più* di un elemento del dominio può puntare allo stesso elemento del *co-dominio*. La relazione suriettiva, dunque, *non* mantiene la *distinzione* fra gli elementi. Infatti, a ogni *coppia* di numeri uno positivo, l'altro negativo, p.es., 1,1; -2,2; -3,3;…) del dominio, corrisponde un solo numero quadrato (1;4;9;…) nel co-dominio.

Se nei reali è sempre possibile operare restrizioni dei domini e co-domini, in modo che una relazione possa essere trasformata in una funzione, ciò non accade nei complessi. Ma, allora, ciò che è mal definito potrebbe essere il termine 'i' il quale non si comporta come un nome proprio denotante un oggetto singolo. Da un punto di vista matematico, infatti, risulta sufficiente postulare che non è possibile considerare 'i' come un nome proprio per risolvere la questione, soprattutto sulla base dell'evidenza che quand'anche si tenti di dividere i due rami della radice in questione, l'ambiguità persisterebbe. In tal senso, l'inversa di una funzione suriettiva (ma non iniettiva) è una relazione 'uno-molti' e tale relazione garantisce una certa *continuità* fra i rami della funzione di cui è l'inversa. Ci si può ora porre la domanda se ci sia comunque un modo di ottenere due funzioni ordinarie (cioè ad un sol valore) dalla polidroma a due valori $g(z) = z^{1/2}$. La risposta è 'si'[238], seguendo il metodo di Spiegel e quelli di Church (Church 1956:16n.41). L'unico prezzo che si paga è che i due rami g_1 e g_2 risultano ora funzioni *discontinue*. E se si volesse evitare questo prezzo, comunque si può sempre considerarla una relazione ossia, estensionalmente, un semplice insieme di coppie ordinate.

Insomma, l'assunzione secondo cui le funzioni polidrome a) sono funzioni di altro tipo rispetto a quelle monodrome e b) non sono riducibili a relazioni non sembra poi del tutto così pacifica, almeno non quanto gli AA lascino pensare, a meno di farne una questione di solo *nome*.

Limitandoci al punto b) per il momento possiamo dire che l'incompatibilità concettuale fra *relazione* e *funzione polidroma* non è giustificabile *se* relazioni e funzioni sono considerate estensionalmente. L'unica questione emerge rispetto al fatto che nella logica classica si usano due distinte categorie semantiche, una per le relazioni, i predicati, e un'altra per le funzioni, i termini. Secondo tutte le fonti matematiche citate dagli stessi AA, le funzioni polidrome sono delle relazioni, ossia coppie ordinate. Ma sia le funzioni

---

[238] Si scelga un punto $z = p \neq 0$ e, arbitrariamente, uno dei due valori di $f(p)$, diciamo w_1. Così si può ottenere una funzione g_1 ad un sol valore restringendo z ad un insieme *connesso* S che contiene p, ma non contiene il punto di diramazione. Se inizialmente avessimo scelto l'altro valore w_2, mediante una costruzione analoga, avremmo ottenuto una differente funzione ad un sol valore, g_2. Stabilito questo, la domanda successiva è: come estendere il dominio S dei rami in modo da ottenere le radici quadrate di qualunque punto del piano? Quello che resta è il piano senza una semiretta dall'origine (0) all'infinito (taglio o linea di diramazione). Si ha così un'estensione di S al piano senza una qualunque curva chiusa C che circonda l'origine e che parta da p. Questo evita che ci siano in S cammini chiusi intorno al punto di diramazione. In conclusione, risultano ben definiti in S due rami g_1 e g_2. Ma S può anche essere esteso a tutto il piano. Consideriamo un punto e sul taglio. Immaginiamo che z viaggi lungo un cerchio centrato nell'origine che passa per e. Allora $g_1(z)$ si avvicina a due valori differenti a seconda che il movimento di z sia orario o anti-orario. A questo punto, se arbitrariamente stipuliamo che $g_1(e)$ sia il valore ottenuto per un avvicinamento anti-orario, g_1 risulta definita *univocamente* su C e quindi su tutto il piano complesso. Similmente, possiamo estendere a tutto il piano il dominio di g_2. Il prezzo che si paga per questa estensione è che g_1 e g_2 risultano funzioni *discontinue* sul taglio C, esattamente come seguendo il metodo di Spiegel e Church.

che le relazioni non sono considerate in PL come degli oggetti estensionali. Il punto della questione, allora, è che gli AA pretendono che i valori di quegli oggetti matematici che sono le relazioni uno-molti siano in generale denotati da termini plurali (o collettivi o distributivi).

5.1.5. Una definizione matematica.

L'assunzione a) è vera o se si escludono dai complessi tutti i casi reali (lasciando gli immaginari) oppure se ci si limita a funzioni polidrome *omogenee* (nel senso di Russell, per le quali ha senso costruire un campo). Il problema posto dalle funzioni polidrome è il problema di come rappresentarle nel linguaggio-oggetto. Il problema è rilevante poiché il dominio di interpretazione, di denotazione e di variazione delle variabili è *unico* e coincide al *campo* di una relazione o funzione. In matematica questo problema è rilevante fino ad un certo punto, dato che è sempre possibile costruire funzioni senza tener conto della natura del dominio e del co-dominio, sebbene sia impossibile definire il campo di una tale funzione, qualora questa mappasse un insieme p.es. sull'insieme potenza dello stesso, i cui individui avrebbero ordine logico distinto. Ad ogni modo, una delle frequenti definizioni di funzione polidroma in matematica è la seguente (cfr. (Borges 1967:451)):

DEFINIZIONE 5.2. *Funzione Polidroma*. Per ogni insieme X, Y, la funzione $\mathfrak{f}: X \to Y$ polidroma se per ogni $x \in X$, $\mathfrak{f}(x) \subseteq Y$ (degno di nota è che $\mathfrak{f}(x)$ non deve essere chiuso o non vuoto)

- La funzione *monodroma* f è così solo un caso speciale di funzione polidroma. Infatti, una funzione polidroma da X a Y può sempre essere pensata come una funzione monodroma da X a $\wp(Y)$ – al quale appartiene anche $\emptyset$

In questo caso, si vede chiaramente che una funzione polidroma può essere ridotta ad una monodroma, al prezzo però di non poter costruire il campo della funzione, come già avevamo riscontrato nella teoria russelliana delle *ddp*. Ad ogni modo, gli AA considerano tale proposta come una versione della strategia chiamata *changing the subject* (*cambiare l'argomento*) che consisterebbe nel trattare un termine plurale denotante una pluralità di oggetti come un termine singolare denotante un oggetto singolare, p.es. un insieme, una classe. Ma l'*obiezione* cardinale a tale strategia 'singolarista' è piuttosto che:

> Una funzione polidroma può mappare un argomento suriettivamente [*onto*] su troppe [*too many*] cose per formare un insieme, nel qual caso esse non possono essere rimpiazzate nel modo proposto [con un insieme di oggetti, *Ndr*]. Un esempio è *gli insiemi che hanno x come membro*. (PL:151).

A differenza della proposta di Boolos che non tenta una formalizzazione della logica plurale, limitandosi a interpretare pluralmente (nel meta-linguaggio) la quantificazione al secondo ordine, in PFO come in PL sorge il problema di come definire, in base a problemi derivanti dalla cardinalità degli oggetti ammessi, il dominio su cui interpretare PL. Per confrontarci direttamente con questo tema, presentiamo i tratti essenziali della semantica di PL la quale fa largo uso delle funzioni polidrome.

5.2. Funzioni polidrome e semantica non-insiemistica.

Rispetto a ML_{PL} presenteremo le condizioni di soddisfazione delle espressioni tipiche di PL le quali assumono, come introdotto nel capitolo precedente, che la funzione di assegnazione da L_{PL} al dominio sia essa stessa una funzione polidroma. Vedremo inoltre come è definito il dominio e come è definita tale funzione in forza del fatto che PL è una logica libera da presupposizione esistenziale.

5.2.1. La semantica di PL.

Possiamo riassumere l'intera struttura semantica di PL nelle seguenti parole degli AA, fra le quali spicca una caratteristica fondamentale: la nozione di modello per L_{PL} è definita senza fare ricorso ad un dominio insiemistico:

> Definiamo la verità logica e la conseguenza logica come per la logica singolare; nel meta-linguaggio usiamo la quantificazione plurale su individui piuttosto che la quantificazione singolare su domini insiemistici. Ci riserviamo di trattare anche la 'valutazione' o val come una parola ombrello conveniente per coprire tre diversi assegnazioni: oggetti a termini, relazioni a predicati, e funzioni a termini funzionali. Relazioni e funzioni non sono oggetti

> insiemistici, ma sono *sui generis*, e generalizzare su tutte le assegnazioni nel meta-linguaggio quindi comporta la quantificazione al secondo ordine (o superiore).
> Per i termini come argomenti, $val(t)$ sta per uno o più individui, o è vuoto. Così val è parziale e generalmente polidroma. Ogni termine può essere vuoto, incluse le variabili, sia singolari e plurali. In altri rispetti il comportamento di val varia con il tipo di termine. Se assegna un valore a una variabile singolare, il valore deve essere un singolo individuo, mentre il/i valore/i di una variabile plurale può/possono essere più di uno. Come prima, interpretando il linguaggio implica specificare gli individui, se esistenti, su cui variano le variabili singolari, ma nessuna ulteriore specifica è necessaria per la variabile plurale. (PL:214-215).

In PL le clausole semantiche sono in stile tarskiano sebbene si faccia uso della funzione di assegnazione polidroma che, per comodità, chiameremo $\mathfrak{f}$. Essendo $\mathfrak{f}$ polidroma e essendo PL *libera* da presupposizione esistenziale, se t è un termine qualsiasi di PL, $\mathfrak{f}(t)$ produrrà n valori per $n \geq 0$[239].

5.2.2. Il dominio di PL.

La semantica modellistica è strettamente legata a due condizioni: a) la quantificazione su un dominio insiemistico (non-vuoto) e b) la cardinalità del dominio del primo ordine è numerabile. In riferimento alla soddisfazione di a) l'adozione di una logica universalmente libera permette di assumere un dominio insiemistico vuoto, mentre l'adozione della quantificazione plurale nel meta-linguaggio permette di assumere un dominio non insiemistico *tout court*. In questo modo, la soddisfazione della condizione b) sembra poter non essere necessaria al fine di avere un modello per PL. Sembrerebbe così che l'evitare la condizione a) metterebbe automaticamente in salvo dalla condizione b), esattamente ciò che avviene in PL:

---

[239] La nozione di assegnazione in PL è così definita (PL:235):
- Per ogni variabile singolare x, $\mathfrak{f}(x)$ è un individuo un termine nessuno
- Per ogni variabile plurale xx, $\mathfrak{f}(xx)$ è/sono qualche/alcuni individuo/i o nessuno.

Di conseguenza, la soddisfazione in PL nei casi quantificati è definita dalle seguenti clausole (cfr. (PL:236)): in un modello M,
- $I, \mathfrak{f} \vDash \forall x\, \varphi \Leftrightarrow om\mathfrak{f}'\, I, \mathfrak{f}' \vDash \varphi$
- $I, \mathfrak{f} \vDash \forall xx\, \varphi \Leftrightarrow om\mathfrak{f}'\, I, \mathfrak{f}' \vDash \varphi$

"Dove $\mathfrak{f}'$ è o la x-variante o la xx-variante di $\mathfrak{f}$, a seconda che assuma variabili singolari o plurali. Nel caso plurale $\mathfrak{f}'$ è una valutazione che differisce da $\mathfrak{f}$ al massimo per quelle xx che ne sono il/i valore/i ed in ciò che il/i valore/i può/possano esser".

> Possiamo così rigettare quello che Richard Cartwright (1994)[240] chiama il *principio del tutto-in-uno* [*the All-in-One Principle*], che quantificare su qualche cosa suppone che esista un insieme (o una classe propria o qualche altro oggetto singolo) al quale esse appartengono. […] Le definizioni modellistiche di verità logica e conseguenza logica tipicamente quantificano su domini [insiemistici, *Ndr*]. Ma ciò po' essere raggirato impiegando i plurali nel meta-linguaggio […] [N]elle interpretazioni parliamo di *gli individui* e non di *un* dominio di individui, e la quantificazione singolare ('su non importa quale dominio') è rimpiazzata dalla quantificazione plurale. (PL:188-189).

Ma allora, nel caso si introducessero pluralità di pluralità (di secondo livello) mediante ulteriori oggetti linguistici, quali sarebbero le conseguenze relative al dominio rispetto alle questioni sollevate dall'eventuale aumento della sua cardinalità? Intuitivamente a nostro avviso sembrerebbe che per evitare la condizione b) non basti evitare a) poiché, infatti, è solo in forza del fatto che una funzione polidroma può mappare su *troppi oggetti* per costruire un insieme che poggia la necessità di rinunciare ad a). Infatti, qualora noi assumessimo la definizione di funzione polidroma nei termini della definizione insiemistica data (5.2), alla funzione polidroma corrisponderebbe sempre una funzione monodroma sull'insieme delle parti del dominio. In tal caso, prescindendo dal fatto che è sempre possibile singolarizzare gli n-valori che la funzione polidroma produce (attribuendogli un nuovo *status* ontologico), l'assegnazione collezionerebbe gli n-valori di ƒ tutti insieme in un dominio (non insiemistico) di interpretazione che non solo sarebbe di volta in volta più grande del precedente, ma che a differenza del dominio (non insiemistico) di partenza dovrebbe essere anche *più che numerabile*[241].

[240] Gli AA fanno riferimento a R. Cartwright, 'Speaking of Everything', *Noûs*, 28:1-20, 1994.
[241] $Card(U_M) = \aleph_0 \ et \ \left(Card(U_M) < Card\big(\wp(U_M)\big) \Rightarrow Card\big(\wp(U_M)\big) = 2^{\aleph_0}\right)$.

VI

CONCLUSIONE: LOGICITA' E LINGUAGGIO NATURALE

In questo capitolo conclusivo intendiamo domandarci e cercare di capire se PL è o non è una logica. Come precondizione dobbiamo terminare l'analisi di PL presentando gli assiomi A10 e A11, che avevamo lasciato senza commenti. A partire dalla critica di Quine a SOL il quesito circa la logicità di quest'ultima si è sviluppato in modo rilevante in una direzione: quella di stabilire delle condizioni per un *criterio* la cui soddisfacibilità deciderebbe di un sistema logico (calcolo e relativa semantica) se può o meno considerarsi una *logica pura*. Non entreremo nel merito della adeguatezza e della sufficienza di un sistema di condizioni al fine di fissare un tale criterio. L'evoluzione storico-teoretica del dibattito fra Quine e Boolos fu sufficientemente illuminante riguardo le condizioni formali che una logica deve (almeno) soddisfare. Un tale criterio di logicità è stato formulato da Linnebo in (Linnebo 2003). Presenteremo suddetto criterio e ne mostreremo l'applicazione a PFO ed anche a PL. Trarremo così le nostre conclusioni sulla logicità di PL. In ultima istanza presenteremo alcune critiche alla logica plurale in relazione al linguaggio naturale i cui fenomeni plurali sia PFO che PL tentano di catturare.

6.1. Gli assiomi caratteristici di PL.

L'assunzione fondamentale implicita alla proposta PL era che FOL (e/o FOL=) e SOL sono logiche *singolari*, i cui termini denotano individui singoli, i cui predicati sono soddisfatti da individui singoli, le cui variabili del secondo ordine (e maggiore) sono mappate su classi (individui singoli). Per ovviare questa 'restrizione singolarista' gli AA costruiscono PL e la dotano di una semantica costituita da un dominio non insiemistico connesso al linguaggio mediante la quantificazione plurale anche meta-linguistica. PL è così un sistema di logica del primo ordine, in quanto ammette solo quantificazione sulle variabili individuali e plurali, entrambe del primo ordine. PL è però anche "un sistema di pluralità del primo livello" che "può essere esteso però aggiungendo termini plurali di secondo livello a quelli singolari e a quelli plurali del primo livello" (PL:233). I termini di secondo livello, deotanti p.es. pluralità di pluralità, sono costruiti nel linguaggio mediante l'operatore di *ddp esaustive* (:) vincolanti variabili plurali. Tralasciando l'assioma A12 di cui abbiamo già parlato, gli assiomi A10 e A11 sono quelli che dobbiamo analizzare essendo caratteristici del calcolo.

6.1.1. A10 e CP.

Essendo lo scopo fondamentale dei calcoli plurali, p.es. PFO, quello di evitare il ricorso a SOL soprattutto con riferimento alla sua restrizione monadica MSOL, lo stretto rapporto fra MSOL e PL implica che deve essere presente un principio analogo a CP in PL. In quanto assioma logico CP, come del resto ogni suo analogo plurale, è logicamente *valido*. La distinzione fra le formulazioni impredicativa e predicativa di CP si basa unicamente sulla possibilità o meno che la variabile predicativa occorra, rispettivamente, *legata* o *meno* nelle *ffbf* a destra del bicondizionale in CP che definiscono le relazioni ad esse equivalenti. Così, a ciascuna delle formulazioni impredicativa e predicativa di CP corrispondono una formulazione impredicativa e una predicativa in PL, come in PFO. Per quanto concerne il tema del capitolo è rilevante la formulazione impredicativa, in quanto è quella legata alla posizione realista, da cui la critica di Quine. Vediamo in successione le tre formulazioni, rispettivamente in MSOL, in PFO e in PL dello stesso assioma:

CP $\exists X\, \forall x\, \big(Xx \leftrightarrow \varphi(x)\big)$

dove X non è libera in $\varphi(x)$

CPpl $\exists y\, \varphi(y) \rightarrow \exists xx\, \forall y\, \big(y \prec xx \leftrightarrow \varphi(y)\big)$

dove xx non è libera in $\varphi(y)$

A10 $\forall y\, \big(y \preccurlyeq x{:}\, \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)\big)$

dove y è libera in $\varphi(y)$ dovunque x è libera in $\varphi(x)$

Rimandando al capitolo III le discussioni su CP e CPpl, ci concentriamo ora su A10. In A10 il quantificatore universale e l'operatore di *ddp* vincolano variabili individuali *correlate*, essendo la variabile y libera in $\varphi(y)$ dovunque x è libera in $\varphi(x)$. In questo modo anche A10 è impredicativo e si legge: 'ciascun individuo che è incluso nella pluralità degli φ è esso stesso un φ'. Gli AA affermano che A10 "migliora [*improves on*] CPpl" e lo fa in due rispetti:

i) A10 evita l'antecedente esistenziale di CPpl, dal momento che A10 è vero a prescindere dalla verità di $\exists y\ \varphi(y)$[242]
ii) A10 *specifica* gli individui rilevanti, nel caso ci siano, usando la *ddp* esaustiva $x{:}\,\varphi(x)$, (piuttosto che essere un *posit* esistenziale)

CPpl è così derivabile da A10 e altri assiomi di PL (PL:242) e la derivazione di CPpl, oltre ad A10, assume anche A11[243]. Ma vediamo di chiarire le due condizioni. Relativamente a i), in PL sia le *dds* che le *ddp*, in quanto termini genuini, non possono essere contestualmente eliminate e l'enunciato '$G(gli\ \varphi)$' può essere vero anche se l'espressione '$gli\ \varphi$' non denota[244]. Allo stesso tempo però, $\preccurlyeq$ è un predicato *forte* (*strong*), t.c. per essere soddisfatto *non* ammette termini che *non* denotano. Ma, allora, *se* l'espressione '$y \preccurlyeq x{:}\,\varphi(x)$' alla sinistra del bicondizionale in A10 è *vera*, la descrizione *denota* e, automaticamente, la condizione $\varphi(y)$ *è soddisfatta*. Allo stesso modo, *se* la condizione '$\varphi(y)$' *non è soddisfatta*, lo è perché il lato sinistro del bicondizionale in A10 *non è vero* (è falso) e, così, la descrizione *non denota*. Il bicondizionale A10, allora, è

---

242 La condizione esistenziale serviva per includere il caso in cui la variabile predicativa 'X' in CP è interpretata in modo t.c. nessun oggetto gli cade sotto, ossia come la *classe vuota*, la cui condizione definitoria è '$x \neq x$'. CPpl afferma: "se esiste un φ, allora esistono alcune cose che includono ciascuna cosa che è φ e null'altro. Lo schema è impredicativo, dal momento che φ può essere qualsiasi *fbf* del linguaggio della logica plurale. Se l'antecedente esistenziale viene tolto, ovviamnte non risulta più adeguato: se non esiste nessu φ, non esistono cose che includono ciascun φ e null'altro. Lo schema diverrebbe comunque inadeguato se una variabile plurale yy venisse sostituita ovunque da una variabile singolare y. Per rendersene conto, sia φ un predicato vero di alcune cose ma falso di qualsiasi cosa individuale (p.es. 'sono due di numero') [collettivo, *Ndr*]" (PL:239).

243 Cfr. 6.1.2. riguardo a A11. Ad ogni modo, la prova di CPpl fornita in (PL:243) impiega il *Teorema 8*, dimostrato in (PL:241), il quale a sua volta impiega il caso particolare di A11: $E!\,a \rightarrow a = a$.

244 "L'ostacolo per l'eliminazione è semplicemente uno. Se $\iota x\ Fx$ occorre in un posto *debole* del predicato G, il fatto che la descrizione sia vuota non significa che $G(\iota x Fx)$ debba essere falso. In altre parole, quando G è *debole*, il lato sinistro dell'equivalenza russelliana può essere vero mentre il lato destro falso. La procedura eliminativa crolla, lasciando in generale nulla da mettere al suo posto, e lo stesso vale per l'analoghe equivalenze per $x{:}\,Fx$ e $\iota xx\ Fxx$" (PL:124).

sempre vero e non necessita della condizione esistenziale[245]. Riflettiamo ora sul punto ii). A10 Non è meramente quantificazionale, come CPpl. Piuttosto, A10 restringe la quantificazione degli individui che soddisfano la condizione φ, a quelli denotati dalla *ddp* a sinistra del bicondizionale. Infatti, se è vero che la descrizione $x\colon \varphi(x)$ denota gli individui nell'estensione di $\varphi(x)$, è anche vero che la $x\colon \varphi(x)$ denota in funzione della condizione $\varphi(x)$ che è correlata a $\varphi(y)$ dalla condizione sulle variabili libere. Ricordiamo che:

> L'espressione '$gli\ F$' denota gli individui, quantunque molti, che individualmente sono F. Sia detto questo l'uso *esaustivo* dell'articolo 'gli'. Questa esplicazione evidenzia il predicato rilevante, cioè 'individualmente F'. Tale predicato è distributivo, a prescindere se F sia distributivo o meno. E gli individui denotati da '$gli\ F$' hanno uno stato univoco rispetto 'individualmente F', e non perché essi costituiscano direttamente la sua estensione ma perché, di necessità, la determinano. Infatti, l'estensione può essere estrapolata da loro in una maniera sorprendentemente semplice: per qualsiasi individuo a scelta è analitico che loro siano individualmente F *sse* essi sono fra $gli\ F$. (PL:121).

A10 permette, così, di passare dalla denotazione di termini alla determinazione di estensioni (e *vice versa*) in maniera immediata.

Rispetto a CP e a CPpl, A10 mette in evidenza i "due ruoli differenti delle pluralità, uno quali i *referenti* di espressioni quantificate pluralmente" e "uno quali i *denotati* di espressioni nominali plurali, e in particolare delle descrizioni definite plurali", in quanto "quest'ultimi occorrono come 'termini' o 'argomenti' di predicati, ed in particolare come argomenti (alla destra) del predicato 'è fra'" ('è uno dei') mentre, dal canto loro, "le espressioni nominali plurali quantificate non occorrono come 'termini' naturalmente, bensì solamente come espressioni quantificate" (Cocchiarella 2014:2).

6.1.2. A11 e la nozione di sub-pluralità arbitraria.

A10, come il suo analogo CPpl, non può garantire che le pluralità esistano, che *non* siano vuote. A11 fornisce una soluzione a questo problema incorporando in parte la funzione

[245] Ciò pone un problema rispetto a CP e CPpl: come garantire che le pluralità esistano, che non siano vuote? A10 non può garantirlo. A11 fornisce una soluzione a questo problema.

che l'assioma NEP svolge in PFO. Allo stesso tempo, A11 governa anche il comportamento dell'inclusione[246]. A11 codifica entrambe queste informazioni:

A11. $a \preccurlyeq b \leftrightarrow E!\, a \wedge \forall x\, (x \preccurlyeq a \rightarrow x \preccurlyeq b)$
dove x non occorre libero in a o b

A11 afferma che per ogni termine a, b e ogni *fbf* della forma '$a \preccurlyeq b$' non solo ogni pluralità b è *non-vuota*[247], ma anche che, nel caso in cui a sia un termine plurale, a denota una *sub-pluralità arbitraria*, qualunque dominio stabilisca b. In sintesi A11 si legge: 'l'inclusione fra pluralità equivale all'*esistenza di una sub-pluralità arbitraria*'. A differenza di PFO, ove tale nozione rimaneva implicita come anche nelle estensioni successive, p.es. PFO+[248], in PL tale nozione deve essere assunta esplicitamente in quanto l'inclusione ammette termini plurali tanto alla sua sinistra che alla sua destra.

6.2. Il criterio di logicità di Linnebo e la sua applicazione a PFO.

Boolos argomentò in favore della pura logicità di SOL contestando a Quine l'assunzione principale cu cui tale critica si basava: che le variabili, anche predicative, fossero posti per nomi. La critica quineana giunge alla conclusione che SOL è di fatto *una* teoria degli insiemi[249] poiché le variabili sono posti per nomi di individui che sono classi. Non solo SOL introduce ulteriore impegno ontologico, quantificando su entità del secondo ordine, ma le nozioni di denotazione (termini singolari) e di riferimento (quantificazione e assegnazione) sono supposte equivalenti nella misura in cui la natura predicativa delle variabili predicative scompare in luogo di quella nominale.

[246] Ricordiamo che a differenza di L_{PFO} l'inclusione in L_{PL} non è ristretta ad assumere termini plurali *solo* alla sua destra.
[247] La condizione di esistenza o *non-vacuità* della pluralità *b* è imposta mediante il predicato '$E!$' applicato al termine 'a'.
[248] Il *principio di estensionalità* per pluralità: $a = b \leftrightarrow E!\, a\ \wedge\ \forall x\, (x \preccurlyeq a \leftrightarrow x \preccurlyeq b)$, non solo è una verità logica in PL (PL:110), ma è derivabile in PL.
[249] Diremmo 'delle classi', dato che Quine è comunque consapevole, come riferisce Boolos (1975) che la formulazione *impredicativa* di CP, secondo la semantica *standard*, non porta ad alcuna contraddizione, al contrario della sua formulazione *impredicativa* nella teoria *naïve* degli insiemi.

Ad ogni modo, se da un lato fu l'insorgere del paradosso di Russell che denunciò per prima la *non-logicità* della nozione di insieme iterativo – e, pertanto, della relazione primitiva di appartenenza che caratterizza tale nozione – dall'altro, basta assumere una *two-sorted semantics* per rendersi conto che in un L_{II} così interpretato la relazione di predicazione, via *appartenenza*, è non di certo logica bensì *teorica*. L'*ulteriore impegno ontologico* rendeva così problematica SOL.

La contro critica di Boolos, secondo cui le variabili predicative hanno natura predicativa anziché nominale, ebbe come esito il riconoscimento che SOL *non* era *universalmente applicabile* secondo la semantica *standard*. In questo nuovo senso SOL non poteva ancora di diritto dirsi logica. La soluzione 'plurale' di Boolos mostrò la logicità di MSOL. Non solo mostra che MSOL soddisfa la condizione di *parsimonia* (o innocenza) *ontologica*, la cui violazione conduce all'immediata critica di Quine, ma anche quella di *applicabilità universale*.

Linnebo (2003) propone un criterio di logicità[250] cui sottoporre PFO e che si basa sulle tre condizioni intorno alle quali si puntellò l'evoluzione del dibattito circa la logicità di SOL (MSOL) da Quine a Boolos. Nei prossimi paragrafi presenteremo tale criterio e ne mostreremo la applicazione a PFO, considerando le conseguenze che ne trae Linnebo. Come ultimo passo applicheremo a PL il suddetto criterio, controllando il comportamento del sistema sulla base del quale giungere, infine, a conclusioni.

6.2.1. Il criterio di logicità di Linnebo.

Siccome non esiste un criterio generale[251] cui affidare, qualora soddisfatto, la decisione della logicità di un sistema formale, il criterio proposto da Linnebo in (Linnebo 2003) si propone come condizione almeno necessaria di logicità. Tale criterio deriva dal percorso teoretico emergente dal dibattito incominciato da Quine nel 1970 circa la non-logicità di SOL. Tre sono le condizioni che costituiscono il criterio:

(**OI**) *Innocenza ontologica*: il dominio di interpretazione dei quantificatori è solo quello del primo ordine

[250] Per il dibattito sopra la validità di altri criteri di logicità cfr. (Dutilh-Novaes 1912).
[251] Vari criteri sono stati proposti per valutare la logicità dei sistemi formali a partire, almeno da Tarski (1986) per una critica cfr. (Duthil Novae 2012) e (Bellotti 2003).

(**UA**) *Applicabilità universale*: la natura degli oggetti del dominio di interpretazione dei quantificatori non deve in alcun modo essere ristretta ad oggetti di un certo e non un altro tipo

(**CP**) *Priorità cognitiva*: non deve essere presupposta alcuna nozione extra-logica

La prima, **OI** (per *ontological innocence*), obbliga ad un'ontologia *piatta*, limitando il riferimento ad un unico dominio. Tale criterio deriva direttamente dalla critica di Quine a SOL. La seconda, **UA** (per *universal applicability*), dice che l'ontologia deve essere *neutrale*, incondizionante, in quanto si afferma l'assoluta indifferenza della logica ad ogni caratterizzazione degli individui del dominio. Infine, **CP** (per *cognitive primacy*), impedisce di codificare l'informazione della teoria logica a partire da concetti e/o nozioni teoriche specifiche, p.es. l'appartenenza di classe/insiemi assunta da Quine, per interpretare SOL.

6.2.2. Applicazione del criterio di Linnebo a PFO.

La tesi di Linnebo contro la logicità di PFO consiste nel concludere che CPpl impredicativo non è un principio puramente logico. La ragione è che l'aggiunta di CPpl ad una qualunque teoria del primo ordine suppone una completa comprensione del dominio di variazione delle variabili plurali legate. Il che comporta:

> Piuttosto, ciò che dobbiamo giustificare è che esistano pluralità corrispondenti a tutte le espressioni della forma '$gli\ \varphi$', anche quando in φ occorrono variabili plurali quantificate. Eppure, per far ciò, dobbiamo comprendere ciò su cui tali variabili plurali legate variano. Questo significa che dobbiamo comprendere la nozione di una determinato intervallo di *sotto-pluralità* arbitrarie del dominio originale. (Linnebo 2003:85).

La nozione di *sotto-pluralità arbitraria* è esprimibile come segue: ogni volta che xx forma un dominio allora è determinato quali individui, yy, soggetti alla condizione $\forall x\ (x \prec yy \rightarrow x \prec xx)$, possono essere valori delle nostre variabili plurali (cfr. (Linnebo 2003:n40)). Secondo Linnebo in tutte le estensioni di PFO, a partire da PFO+, tale nozione viene implicitamente assunta dato che, permettendo alle variabili plurali di essere argomento di predicati (collettivi), ci impegnamo ad ammettere di poter collezionare insieme tutte le pluralità così formate, finendo col costruire pluralità di livello sempre maggiore. Per il *teorema di Cantor*, il poter collezionare insieme tutte le pluralità così formate implica che non si ha possibilità di evitare d'estendere il dominio originario. L'estensione del dominio comporterebbe, così, che una logica basata sul dominio originario non è in definitiva capace di parlare di tutte le pluralità conducendo alla violazione di **UA**.

Alcuni, come Carrara e De Florio di concerto con Boccuni, hanno giustamente sottolineato che quest'argomento (contro la logicità di PFO) vale solamente se le pluralità sono intese essere già delle *entità* vere e proprie e di qualche tipo:

> Linnebo sembra implicitamente distinguere fra cose, come per esempio oggetti concreti, e entità più generali, e considerare la non-reificazione delle pluralità come l'affermazione secondo cui queste non sono cose. In fatti, che la combinatoria non abbia nulla a che fare con l'ontologia viene dal fatto che la combinatoria è completamente indifferente alla natura delle entità che combina: può combinare cose, […] e oggetti astratti […] in una veramente ampia varietà di disposizioni. Così, senza alcun riguardo al tipo di oggetti siano le pluralità, esse possono essere combinate. È chiaro, pertanto, che Linnebo condivide con altri critici di Boolos la visione per cui le pluralità sono entità di qualche sorta. Ma, allora, la quantificazione plurale non è ontologicamente neutrale. (Carrara, De Florio 2015:10-11)[252].

Ad ogni modo, Linnebo non si pronuncia definitivamente sulla logicità di PFO e, soprattutto, non si pronuncia definitivamente per la violazione da parte di PFO delle prime due condizioni, **OI** e **UA**. Piuttosto, Linnebo argomenta che sebbene la combinatoria sia indifferente alle questioni ontologiche, la nozione di *sotto-pluralità arbitraria* è una nozione così complessa nella sua accezione strettamente matematica, in particolare insiemistica p.es. quella di *sotto-insieme arbitrario*, che l'assunzione di CPpl, implicandola, comporterebbe l'assurdo secondo cui tale nozione sarebbe allo stesso tempo tanto complessa e oscura in teoria degli insiemi quanto chiara e pacifica in PFO. Di fronte a ciò, Linnebo giunge a concludere che per lo meno la terza condizione **PC** (cfr. (Linnebo 2003:89) e (Shapiro 2005)) sembra non poter essere soddisfatta, non potendo tale nozione essere considerata pacificamente una nozione strettamente logica.

[252] Ma cfr. anche (Boccuni, Carrara 2016).

6.2.3. Applicazione del criterio di Linnebo a PL.

PFO, ammette due tipi di predicazione, una teorica esercitata dalle costanti predicative ed un'altra, quella plurale, regolamentata dalla relazione logica di inclusione. Cocchiarella (1975:33-34) analizzando la natura delle teorie espresse in un linguaggio del secondo ordine distingueva fra due tipi di teorie, in funzione delle relazioni fra predicazione e denotazione che queste sono in grado di codificare. Due sono i casi:

(1) Se la relazione fra variabili predicative e entità del relativo dominio include la relazione di denotazione dei termini singolari

(2) Se la natura delle entità cui riferiscono le variabili predicative è tipicamente predicativa

Nel secondo caso, differentemente dal primo, tali entità non possono essere mai argomenti o soggetti logici di predicazione, in qualsiasi senso logicamente simile a quello in cui gli individui lo sono.

Per quanto riguarda le teorie espresse in un linguaggio plurale del primo ordine, fintanto che ci limitiamo a PFO, il tip (1) è escluso, in quanto PFO, contrariamente a PFO+, non ammette variabili plurali quali argomenti di predicati teorici. Rispetto alla relazione di predicazione plurale, invece, le variabili plurali sono argomento dell'inclusione. Ciò può far pensare la predicazione plurale violi il punto (2). Allo stesso tempo però, le *ffbf* plurali di PFO sono soggette alla restrizione sintattica secondo cui la relazione di inclusione non può assumere variabili plurali a sinistra. In questo modo, il comportamento della relazione di assegnazione alle variabili differisce rispetto a quelle che possono occorrere a sinistra e a quelle che possono occorrere a destra dell'inclusione.

Ciò che accade per PFO però non accade per PL in quanto PL è almeno un'estensione non conservativa di PFO, potente almeno quanto PFO+. Due sono i fatti da tenere in considerazione. In primo luogo, come l'assioma A10 esplicita, la relazione di inclusione in PL ammette *ddp* (sia *esaustive* che *pluralmente esaustive*) alla sua destra. In quanto le *ddp* sono termini, la relazione di inclusione non riesce a tradurre correttamente la relazione di predicazione in MSOL, in quanto confonde sistematicamente fra denotazione e predicazione, e similmente fra denotazione e riferimento. In secondo luogo, non solo la prima tesi del nominalismo N1 è valida in PL, ma in PL è derivabile l'analogo plurale del principio d'estensionalità, il che implica che anche la seconda tesi del nominalismo, N2, è soddisfatta (cfr. 2.2.).

Ulteriormente, mediante l'assioma A11, in PL si assume esplicitamente la nozione di *sotto-pluralità arbitraria*, quale caratteristica imprescindibile per comprendere il comportamento di $\preccurlyeq$. Come ulteriore prova della differenza sostanziale fra PFO e PL vale il fatto che CPpl *impredicativo* è derivabile da A10 e A11. In questo senso la critica di Linnebo può essere presentata nei confronti di PL. Ma allora gli assiomi A10 e A11 caratterizzano la nozione di predicazione in PL al modo di una teoria della predicazione nominalista.

6.2.4. È PL una logica pura?

All'inizio del capitolo abbiamo ricordato con le parole degli AA in che genere di sistema logico consiste PL. Dalle loro parole emergeva che nulla vieta di estendere PL ad un sistema che ammette pluralità del secondo livello (oltre a quelle del primo) senza per questo cambiare l'ordine logico del sistema. Allo stesso tempo tale introduzione incide sul sistema di assiomi assunti implicando l'aggiunta di un assioma per ciascuna delle nozioni ulteriori con cui si intende estendere il calcolo PL. Estendere PL che ammetta pluralità del secondo livello (pluralità di pluralità) e di livelli successivi implica, in un certo senso, qualcosa di problematico (almeno limitandoci a PL) dovendo assumere che A10 vale anche per *ddp pluralmente esaustive*.

Certamente la critica di Linnebo è rilevante nella misura in cui associa pluralità a tutte le espressioni denotative della forma '$gli\ \varphi$', anche quando in φ occorrono variabili plurali quantificate. Sebbene la nozione di sotto-pluralità arbitraria sia meramente combinatoria rimangono in mente le parole degli AA citate nel capitolo precedente (cfr. (PL:151)) secondo cui le funzioni plurali sono in grado di mappare un argomento qualsiasi su una molteplicità di oggetti troppo grande (numerosa) per formare insiemi. Non solo le funzioni polidrome sono assunte nel meta-linguaggio di PL ma la quantificazione meta-linguistica è a sua volta *plurale*, in modo da permettere che il dominio di interpretazione di PL non sia di natura insiemistica (contrariamente alla soluzione di Boolos). L'assunzione di un dominio non insiemistico sembra essere congeniale a risolvere le conseguenze dovute all'iterazione della nozione di sotto-pluralità arbitraria operata mediante la progressiva introduzione di *ddp*, a partire da quelle del primo livello (*ddp esaustive*) fino a quelle di livello superiore, le *ddp pluralmente univoche e pluralmente esaustive*.

L'estensione del linguaggio di PL sembra comportare effettivamente ciò che preoccupava già Linnebo: la continua estendibilità del dominio e la sua conseguente l'*inesaustibilità*. Se così fosse, allora non ci sarebbero dubbi nel sostenere che PL non soddisfi **UA** per la stessa ragione per cui PFO non la soddisferebbe: l'incapacità di parlare di tutte le pluralità. Eppure, così non è. Infatti ciò vale *sse* il dominio è insiemistico, ossia se è definito e determinato l'ultimo intervallo su cui variano le pluralità. In PL il dominio non è insiemistico. Pertanto, PL non viola **UA**.

Eppure, forse, si può considerare l'assunzione di un dominio non-insiemistico proprio come una ipotesi *ad hoc*. Un'ipotesi, cioè, necessaria per evitare l'*inesaustibilità*[253] del dominio postulando l'indeterminatezza stessa del dominio come del resto, della quantificazione. Se questo fosse il caso allora certamente la condizione **UA** non sarebbe ancora violata, ma ci sarebbero dei possibili argomenti per cui considerare la nozione di sub-pluralità arbitraria tanto problematica da far almeno dubitare della sua origine logica. In questo senso ci sarebbero delle buone ragioni per affermare che PL quantomeno non soddisfa la terza condizione, **CP**. Se così fosse, allora chiaramente PL non soddisfarebbe il criterio di logicità di Linnebo.

È vero che in questa sede non ci siamo per nulla occupati di analizzare le limitazioni, il significato filosofico e le conseguenze teoretiche implicite nell'assunzione del criterio di Linnebo. Ma se quest'ultimo fosse a ragione un criterio almeno necessario per vagliare la logicità di un sistema allora, *a fortiori*, PL potrebbe non doversi considerare pura logica.

6.3. Conclusione: predicazione plurale e linguaggio naturale.

In sintesi, potremmo dunque dire che la teoria moderna, fregeana, della predicazione in logica, è concepita, come il resto del pensiero scientifico moderno, in modo da liberare il linguaggio dai *legami con l'ontologia classica*. Nello specifico, per liberarlo da ogni dipendenza con la teoria medievale degli *universali*.

[253] E, quindi, anche la conseguente violazione di **UA**.

Tutta la teoria moderna della predicazione prende le mosse, infatti, dalla nozione fregeana di *saturazione* (*Vollständigkeit*) di una proposizione, come fondamento della sua *unità logica* (composizione di soggetto/predicato), mediante composizione di:

- *Parte satura:* soggetto della proposizione designante un individuo
- *Parte insatura:* predicato (verbale e/o nominale) della proposizione designante una proprietà e/o una relazione

Dal punto di vista ontologico, ciò significa l'assoluta *irrilevanza della copula* '*è*' in quanto esprimente la semplice *relazione di appartenenza* fra le due parti che costituiscono l'enunciato. Ciò fa tutt'uno con una più generale *interpretazione relazionale dei predicati*[254]. La *conseguenza ontologica*, seppur andando contro gli intenti di chi ha sviluppato questa logica, è quella di un'assolutizzazione di una *metafisica della relazione*: l'individuo non sarebbe altro che un *nodo di relazioni* con altri individui, se stesso compreso[255].

Come Galvan fa correttamente notare (cfr. (Galvan 2012:28-41)) nella logica estensionale dei predicati c'è un unico modo consentito per dare visibilità alla copula 'è': quando essa significa *identità*, come nelle già ricordate *descrizioni definite* e in generale quando abbiamo a che fare con la quantificazione *singolare*. Prendiamo questi tre enunciati del linguaggio naturale:

1. Aristotele è *un* filosofo (la predicazione è *nominale*)
2. Aristotele è filosofo (la predicazione è *aggettivale*)
3. Aristotele è *il* filosofo (la predicazione è *singolare*)

---

[254] In quanto il predicato designa una relazione fra (nomi che designano) individui. In questo senso PL, rifiutando la usuale semantica estensionale per i predicati rifiutano anche tale ontologia relazionale. Come sottolinea Frigerio "L'idea [sintattica di Oliver e Smiley, *Ndr*] è che 'sollevare' abbia due posti, ma che ogni posto abbia un numero indefinito di posizioni, cioè possa essere occupato da un numero indefinito di oggetti. La formalizzazione corretta di "Paolo e Anna hanno sollevato il tavolo insieme" sarebbe quindi $S(p,a;t)$, ove la virgola separa le posizioni e il punto e virgola i posti. Ma, sul piano semantico, questo renderebbe vero l'enunciato se la ennupla $\langle\langle p,a\rangle,t\rangle$ viene mappata sul vero, cioè se esiste una certa relazione [estensionale] fra la coppia $\langle p,a\rangle$ e t. Questo tuttavia equivale ad affermare che [sintagma nominale, *Ndr*] 'Paolo e Anna' si riferisce alla coppia ordinata $\langle p,a\rangle$, cioè ad un insieme. Abbiamo quindi abbandonato l'idea del riferimento plurale e l'abbiamo ridotto a riferimento a singoli insiemi" (Frigerio 2012).

[255] D'altra parte, invece, i logici sono molto onesti a denotare *i referenti* delle proposizioni analizzate con un tale calcolo logico, non in termini intenzionali ed ontologici di 'enti', e neanche in quelli fenomenologici di 'oggetti', ma molto correttamente in termini di 'stati-di-cose'. Ovvero, come si dice ancor più correttamente in inglese *states-of-affaires*, letteralmente, *stati di reciproche relazioni*.

In logica classica non si distingue fra predicazione *nominale* e *aggettivale*, pertanto in 1. e 2. la copula ha il medesimo senso dell'*appartenenza* (del predicato al soggetto e quindi del nome denotante l'individuo alla classe denotata dal predicato). In questo senso, la copula può essere *cancellata* come irrilevante. In 3., invece, il predicato ha la stessa funzione del soggetto grammaticale di *denotare un individuo*. La 3. andrebbe scritta così, $a = f$, nei termini cioè di un'identità soggetto/predicato, dove il predicato è un *nome* (f, per *il filosofo*) esattamente come il soggetto (a, per Aristotele). La differenza fra la 3. da un lato e 1. e 2. dall'altro esemplifica la differenza fra la teoria fregeana della predicazione come *teoria dell'appartenenza di classe* e la teoria parmenidea e neo-platonica (anche medievale) della predicazione come *teoria dell'identità*, dove i predicati in quanto denotanti entità esistenti (universali, a loro modo esistenti), potevano essere denotati da nomi come gli individui.

6.3.1. Pluralità e predicazione: PL e il linguaggio naturale.

Il punto contro la logica fregeana a favore di PL è così il riconoscimento che la predicazione nominale debba in qualche modo essere ripristinata all'interno della logica. Infatti i casi significativi di predicazione plurale derivano proprio dai casi in cui le espressioni hanno soggetti plurali e la predicazione è collettiva. Il punto a sfavore però della soluzione fornita da PFO come PL è che le pluralità difficilmente possono comportarsi come nel linguaggio naturale si comportano in generale i denotati dei nomi comuni. Nel caso si estendesse PL, aggiungendo al suo linguaggio operatori modali (N per la necessità e M per la possibilità) e la regola di necessitazione (*Nec*) emergerebbe che i seguenti principi[256]

$N_{\prec}$ $\quad x \prec yy \rightarrow N(x \prec yy)$

$N_{\neg\prec}$ $\quad \neg(x \prec yy) \rightarrow N\neg(x \prec yy)$

– nella versione assiomatizzata di tale calcolo – devono essere accettati. Linnebo, p.es. non li trova problematici. Ad ogni modo, chiaramente la loro accettazione deve passare per l'accettazione del fatto che una pluralità "deve includere precisamente gli oggetti che

[256] "[I] due principi sopra, tra l'atro, possono essere facilmente evitati semplicemente restringendo l'assioma di estensionalità alle formule estensionali, p.es. formule in cui nessun operatore temporale o modale occorre. La legge di Leibniz per termini singolari può essere lasciata senza alcun cambiamento, fintantoché tale legge si applica solo ai termini singolari. (Cocchiarella 2014:6).

di fatto include" dove 'deve' esprime esattamente la necessità *aletica*[257] (Linnebo 2013). Ma allora, i nomi comuni plurali sono in altre parole 'rigidi' allo stesso modo in cui sono rigidi i nomi propri in *logica modale*. In questo senso, ciò sembra "confondere le pluralità con gli insiemi, i quali hanno i loro essere nei loro membri e non nei concetti plurali" o nomi comuni "espressi da tali espressioni" (Cocchiarella 2014:6). Anche Williamson si pronuncia in questo senso affermando ancora più chiaramente che $N_{\prec}$ "per un necessitista costituisce l'analogo dell'ampiamente accettato principio che l'appartenenza insiemistica è rigida[258]". Inoltre, continua Williamson, "i due principi insieme $N_{\prec}$ e $N_{\neg\prec}$ presentano una fotografia piuttosto chiara e semplice: $\prec$ non è contingente" (Williamson 2013:247-248).

Ciò che distingue le pluralità dai nomi comuni o concetti plurali è di fatto che le espressioni che esprimono i secondi "possono riferirsi a differenti pluralità in tempi differenti, e certamente in differenti mondi possibili" (Cocchiarella 2014:6). Ma se le ragioni per affondare una logica plurale risiedevano nella volontà di caratterizzare la logica del linguaggio naturale dove le pluralità sono i denotati delle espressioni plurali, perché accettare tale limitazione?

Ad ogni modo, come già van Heijenoort (1974) sottolineava, innanzi a casi di soggetti collettivi (li chiamava 'termini di massa', p.es. 'l'acqua'[259]) è evidente che i sintagmi nominali che li denotano "saltano la copula", ossia in generale I sintagmi nominali del linguaggio naturale si possono trovare tanto come soggetti che come predicati, in una espressione della forma soggetto-predicato (van Heijenoort 1974:261). Ma solo sulla sponda di un certo riduzionismo fisico (fisicalismo o atomismo) in generale questi termini "sono dispensabili". Ciò comporta infatti una riduzione della materia indivisa in atomi,

---

[257] Relativa al vero ed al falso. Le modalità aletiche si distinguono in a. *Logiche*: 'è necessariamente vero', 'è possibilmente vero' (logiche proposizionali modali); b. *Ontologiche*: 'è necessario', 'è contingente' (ontologie formali, che a loro volta distinguono fra necessità fisica e metafisica). Entrambe le interpretazioni sono soddisfacenti in questo contesto. Ovviamente, comunque, per ragioni espositive si sta sovra-semplificando rispetto ai valori di verità. Le logiche aletiche non sono infatti solo a due valori, anzi proprio perché spesso si devono muovere nell'ambito di teorie dimostrative che non suppongono la co-estensività dei principi di non contraddizione e del terzo escluso (come, p.es., le logiche di tipo intuizionistico, quelle quantistiche, le logiche fuzzy etc.) hanno una grande rilevanza sia logiche a più valori, sia logiche libere senza presupposizione esistenziale (come, p.es., logiche dove una certa relazione non è fra individui esistenti ma solo fra possibili), etc..

[258] P.es. "un membro di un insieme non potrebbe non essere un membro di quell'insieme" (Williamson 2013:247).

[259] "Linguisticamente, i termini di massa possono essere caratterizzati, in inglese, come termini plurali non contabili [*much-terms*], in opposizione a quelli contabili [*many-terms*]" (van Heijenoort 1974:263).

ossia in individui. Certamente però, da un punto di vista logico è sufficiente domandarsi "di cosa è fatto un atomo" o domandarsi della questione logica della continua e indefinita divisibilità (ovvero della densità), per rendersi conto che "la concezione atomistica del mondo non elimina l'ontologia della materia" (van Heijenoort 1974:264).

Il gioco delle parti dunque consisterebbe nel fatto che il rapporto fra i sintagmi nominali (anche plurali) collettivi da un lato, con la denotazione insieme alla predicazione dall'altro è così "complesso" nel linguaggio naturale che "risulta impossibile inquadrare" i sintagmi nominali "nella forma soggetto-predicato" se questa è integrata da "un'ontologia di individui" (van Heijenoort 1974:264). Di fatto, per comprendere nella forma più generale il problema posto dal linguaggio naturale circa il passaggio dalla funzione di soggetto a quella di predicato, che in parte si propongono di risolvere anche gli AA mediante la teoria della denotazione plurale, deve fare i conti con espressioni il cui uso "sembra suggerire un'altra ontologia" (van Heijenoort 1974: 265) da quella usuale. Sembra piuttosto molto "più naturale riconoscere che esista […] un'ontologia della materia che coesista, sebbene in una forma differente, con quella degli individui" (van Heijenoort 1974:264).

In somma, con cautela concludiamo di concerto con van Heijenoort affermando che nei sintagmi nominali "abbiamo trovato caratterisitche che rifuggono un'ontologia di individui" e "alcuni linguaggi sistematizzati, come la sillogistica aristotelica o la fisica teorica, pure rifuggono quell'ontologia" (van Heijenoort 1974:266). Ma, allora, in che altra direzione andare dato che, p.es., la sillogistica aristotelica è un linguaggio fondamentalmente basato sull'appartenenza? (cfr. Galvan 2012:70). La logica plurale del tipo esaminato nel presente lavoro in tal caso certamente non si pone come una soluzione adeguata.

BIBLIOGRAFIA

(Bagaria 2014) – J. Bagaria, ‘Set Theory’, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, (Winter 2014 Edition), E.N. Zalta (ed.).

(Barcan-Marcus 1960) – R. Barcan-Marcus, “Extensionality”, *Mind*, New Series, Vol. 69, No. 273:55-62, 1960.

(Barcan-Marcus 1972) – R. Barcan-Marcus, “Quantification and Ontology”, *Noûs*, Vol. 6, No. 3:240-250, 1972.

(Barcan-Marcus 1978) – R. Barcan-Marcus, “Nominalism and the Substitutional Quantifiers”, *The Monist*, Vol. 61, No. 3, 1978, pp. 351-362.

(Barone 1977) – F. Barone, *Il neopositivismo logico*, 2 Voll. Laterza, Roma-Bari 1977.

(Bellissima 2008) – F. Bellissima, *Fondamenti di matematica*, Carocci, Roma 2008.

(Bellotti 2003) – L. Bellotti, “Tarski on Logical Notions”, *Synthese* 135:401–413, 2003.

(Berto, Plebani 2015) – F. Berto, M. Plebani, *Ontology and Metaontology*, Bloomsbury, London 2015.

(Bochenski 1972) – J.M. Bochenski, *La logica formale*, Einaudi, Torino 1972.

(Bochenski 1974) – J.M. Bochenski, “Logic and Ontology”, *Philosophy East and West*, Vol. 24, No. 3: 275-292, 1974.

(Bochenski 1995) – J.M. Bochenski, *Nove lezioni di logica simbolica*, ESD 1995.

(Boccuni 2012) – F. Boccuni, *Logicismo plurale*, Aracne, Roma 2012.

(Boccuni, Carrara 2016) – F. Boccuni, M. Carrara, E. Martino, “The Logicality of Second-Order Logic. An Analysis in Term of Plural Arbitrary Reference and Acts of Choice”, in M. Carrara, A. Arapinis, F. Moltmann, *Unity and Plurality. Logic, Philosophy, Semantics*, Oxford University Press, 2016 (in pubblicazione).

(Borges 1967) – C.J.R. Borges, “A Study on Multi-valued Functions”, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 23, No. 3, 1967.

(Bostock 2002) D. Bostock, *Intermediate Logic*, Clarendon Press, 2002.

(Boyer 1980) – C. B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori 1980.

(Bricker 2014) – P. Bricker, “Ontological Commitment”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2014 Edition), E.N. Zalta (ed.).

(Burgess, Rosen 1997) – J.P. Burgess, G. Rosen, *A Subject with No Object*, Clarendon Press, 1997.

(Carrara, De Florio 2016) – M. Carrara, C. De Florio "On an Account of Logicality", (in pubblicazione).

(Carrara, Arapinis 2016) – M. Carrara, A. Arapinis, F. Moltmann, *Unity and Plurality. Logic, Philosophy, Semantics*, Oxford University Press, 2016 (in pubblicazione).

(Casari 1972) – E. Casari, *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli 1972.

(Cellucci 2002) – C. Cellucci, *Filosofia e matematica*, Laterza, Roma 2002.

(Cellucci 2007) – C. Cellucci, *La filosofia della matematica del Novecento*, Laterza, Roma 2007.

(Cellucci 2013) – C. Cellucci, *Rethinking Logic: Logic in Relation toMathematics, Evolution and Method*, Springer Berlin, 2013.

(Cellucci 2014) – C. Cellucci, "Knowledge, Truth and Plausibility", *Axiomathes*, on-line.

(Church 1956) – A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Priceton University Press, Princeton 1956.

(Cocchiarella 1975) – N.B. Cocchiarella, "Second-Order Theory of Predication: Old and New Foundation", *Noûs*, 9: 33–53, 1975.

(Cocchiarella 1988) – N. B. Cocchiarella, "Predication versus Membership in the Distinction Between Logic as Language and Logic as Calculus", Synthese, 77:37-72, 1988.

(Cocchiarella 1989) – N. B. Cocchiarella, "Philosophical Perspectives on Formal Theories of Predication", in D. Gabbay & F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol IV (*Topic in the Philosophy of Language*), Reidel P.C. 1989, pp. 253-326.

(Cocchiarella 2001) – N.B. Cocchiarella, "Logic and Ontology", *Axiomathes*, 12: 117–150, *Kluwer Academic Publishers*, 2001.

(Cocchiarella 2007) – N. B. Cocchiarella, *Formal Ontology and Conceptual Realism*, Springer Dordrecht, 2007.

(Cocchiarella 2014) – N.B. Cocchiarella, "Two Views of the Logic of Plurals and the Reduction of One to the Other", *Studia Logica*, published on line, 2014.

(Dalla Chiara 1974) – M.L. Dalla Chiara, *Logica*, ISEDI, Milano 1974.

(De Florio 2007) – C. De Florio, *Categoricità e modelli intesi. Temi di filosofia dell'aritmetica*, Franco Angeli, Milano 2007.

(Donnellan 1966) – K.S. Donnellan, "Reference and Definite Descriptions", *The Philosophical Review*, vol. 75, no. 3, 1966, pp. 281-304.

(Dunn, Belnap 1968) – J.M. Dunn & N. D. Belnap, "The Substitution Interpretation of Quantifiers", *Noûs*, Vol. 2, No. 2, 1968, pp. 177-185.

(Dutilh-Novaes, 2012) – C. Dutilh-Novaes, "The Undergeneration of Permutation Invariance as a Criterion of Logicality", *Erkenntnis*, Springer, online 2012.

(Enderton 2001) – H.B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, London 2001.

(Frege 1960a) – G. Frege, 'Function and Concept', (1891) in P. Geach, M. Black (eds.), *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Basil Blackwell, Oxford 1960.

(Frege 1960b) – G. Frege, 'On Concept and Object', (1892) in P. Geach, M. Black (eds.), *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Basil Blackwell, Oxford 1960.

(Frege 1960c) – G. Frege, 'On Sense and Reference', (1892) in P. Geach, M. Black (eds.), *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Basil Blackwell, Oxford 1960.

(Frege 1964) – G. Frege, *The Basic Laws of Arithmetic*, University of California Press 1964.

(Frigerio 2008) – A. Frigerio, *Quantificazione e riferimento plurale*, Carocci, Roma 2008.

(Frigerio 2012) – A. Frigerio, 'Riferimento plulare', *Aphex*, 6, 2012.

(Frixione, Palladino 2011) – M. Frixione, D. Palladino, *La computabilità, algoritmi, logica, calcolatori*, Carocci, Roma 2011.

(Galvan 2012) – S. Galvan, *Logica*, La Scuola, 2012.

(Geach, Black 1960) – P. Geach, M. Black (eds.), *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Basil Blackwell, Oxford 1960.

(Gödel 2011) – K. Gödel, *Scritti scelti*, (a cura di) G. Lolli, Bollati Boringhieri, Torino 2011.

(Haack 1978) – S. Haak, *Philosophy of Logic*, Cambridge University Press, London 1978.

(Halmos 1964) – P.R. Halmos, *Teoria elementare degli insiemi*, Feltrinelli, Milano 1964.

(Hand 2006) – M. Hand, "Objectual and Substitutional Interpretations of the Quantifiers", in D. Jacquette (ed.), *Philosophy of Logic*, North Holland 2006, 649-674.

(Hardy 1921) – G.H. Hardy, A Course in Pure Mathematics, Cambridge University Press, 1921 (3rd ed.) on line at http://www.gutenberg.org/files/38769/38769-pdf.pdf.

(Hintikka 2000) – J. Hintikka, *On Goedel*, Wadsworth, Belmont 2000.

(Jacquette 2002) – D. Jacquette, *Ontology*, Acumen 2002.

(Jacquette 2006) – D. Jaquette (ed.), *Philosophy of Logic*, North Holland 2007.

(Kneale 1956) – W. Kneale, "The Province of Logic", *Contemporary British Philosophy* (3rd Series), Allen & Unwin, London 1956:237-261.

(Kneale 1957) – W. Kneale, "The Province of Logic", *Mind*, Vol. 66, No. 262:258, 1957.

(Knopp 2013) – K. Knopp, *Theory of Functions*, Voll. II, Dover Publications, NY 2013.

(Linnebo 2003) – Ø. Linnebo, "Plural Quantification Exposed", *Noûs*, 37:1, 71-92, 2003.

(Linnebo 2010) – Ø. Linnebo, "Pluralities and Sets", *Journal of Philosophy*, 107 (3):144-164, 2010.

(Linnebo 2013) – Ø. Linnebo, "Plural Quantification", in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2004, revised 2010.

(Lolli 2008) – G. Lolli, Guida alla teoria degli insiemi, Springer, Milano 2008.

(Malley 2009) – D. Malley, 'Introduction: A Guided Tour of Metametaphysics' in Chalmers, Manley and Wasserman (eds), *Metametaphysics. New Essays on the Foundations of Ontology*. Oxford: Clarendon Press, pp. 1–37.

(McKay 2006) – T. McKay, *Plural Predication*, Clarendon Press, Oxford 2006.

(Moltmann 2016) – F. Moltmann, "Plural Reference and Reference to a Plurality. Linguistic Facts and Semantic Analysis", in M. Carrara, A. Arapinis & F. Moltmann (eds.), *Unity and Plurality. Logic, Philosophy, and Semantics*. Oxford University Press 2016 (forthcoming).

(Negri, von Plato 2001) – S. Negri, J. von Plato, *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, 2001.

(Oliver, Smiley 2006) – A. Oliver, T. Smiley, 'A Modest Plural Logic', *Journal of Philosophical Logic*, 35: 317-348, Springer 2006.

(Oliver, Smiley 2013) – A. Oliver, T. Smiley, *Plural Logic*, Oxford University Press 2013.

(Parsons 1990) – C. Parsons, *The Structuralist View of Mathematical Objects*, Synthese, 84, 3 1990.

(Parsons 2008) – C. Parsons, *Mathematical Thought and Its Object*, Cambridge University Press 2008.

(Penrose 2004) – R. Penrose, *The Road to Reality*, Academic Press, London 2004.

(Quine 1937) – W.O. Quine, 'New Foundation for Mathematical Logic' *The American Mathematical Monthly*, Vol. 44, No. 2:70-80, 1937.

(Quine 1963) – W.O. Quine, *From a Logical Point of View*, Harper, NY 1963.

(Quine 1969) – W.O. Quine, *Set Theory and Its Logic*, Harvard University Press, 1969.

(Quine 1972) – W.O. Quine, *Manuale di logica*, Feltrinelli, Roma-Bari 1972.

(Quine 1981) – W.O. Quine, *Mathematical Logic*, Harvard University Press 1940, revised 1981.

(Quine 1986) – W. O. Quine, *Philosophy of Logic*, Harvard University Press (1970) 1986.

(Quine 2008) – W.O. Quine, *Parola e oggetto*, Il Saggiatore, Milano 2008.

(Resnik 1988) – M.D. Resnik, "Second-Order Logic Still Wild", *The Journal of Philisophy*, 85: 75–87, 1988.

(Russell 1997) – B. Russell, *Introduzione alla filosofia della matematica*, Newton Compton, Roma 1997.

(Russell 2005) – B. Russell, "On Denoting", *Mind*, New Series, Vol. 114, No. 456:873-887 (1905) 2005.

(Russell 2011) – B. Russell, *I principi della matematica*, Bollati Boringhieri, Torino 2011.

(Salmon 2005) – N.U. Salmon, *Reference and Essence*, Prometheus Books, NY 2005.

(Schein 1995) – B. Schein, *Plurals and Events*. MIT Press, Cambridge (Mass.) 1995.

(Shapiro 1991) – S. Shapiro, *Foundation without Foundationalism*, Oxford U.P., 1991.

(Shapiro 1997) – S. Shapiro, *Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, 1997.

(Shapiro 2005) – S. Shapiro , "Higer Order Logic", in S. Shapiro (ed.), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005.

(Shapiro 2005a) – S. Shapiro (ed.), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005.

(Shapiro 2012) – S. Shapiro, "An 'i' for an i: Singular Terms, Uniqueness and Reference", *The Review of Simbolic Logic*, Vol. 5, No. 3:380-415, 2012.

(Smith 2013) – P. Smith, *An Introduction to Folrmal Logic*, Cambridge UP, 2013.

(Spiegel 1975) – M. R. Spiegel, *Complex Variables*, McGraw-Hill 1964, trad. it. *Variabili complesse*, Etas, 1975.

(Soames 1999) – S. Soames, "The Indeterminacy of Translation and the Inscrutability of Reference", *Canadian Journal of Philosophy*, 29:321-370, 1999.

(Soames 2003) – S. Soames, *Philosophical Analysis in the Twentieth Century*, Vol. 1, Princeton University Press 2003.

(Tarski 1986) – A. Tarski, "What are logical notions?", edito (con una introduzione) da J. Corcoran, *History and Philosophy of Logic*, 7:143–154, 1986.

(van Heijenoort 1967) – J. van Heijenoort, "Logic as Calculus and Logic as Language", *Synthese*, Reidel Publishing, 17:324-330, 1967.

(van Heijenoort 1974) – J. van Heijenoort, "Subject and Predicate in Western Logic" *Philosophy East and West*, Vol. 24, No. 3:253-268, University of Hawai'i Press, 1974.

(van Inwagen 1998) – P. van Inwagen, 'Meta-Ontology', *Erkenntnis*, 48: 233–50, repr. in Id. (2001): 13–31.

(Wallace 1970) – J. Wallace, "On the Frame of Reference", *Synthese*, 22:117-150, Dodrecht 1970.

(Whitehead, Russell 1910) – A. N. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica*, Vol I, 1910.

(Williamson 2013) – T. Williamson, *Modal Logic as Metaphysics*, Oxford University Press, 2013.

(Yi 1999) – B. Yi, "Is two a property?", *Journal of Philosophy*, 95:163-190, 1999.

(Yi 2005) – B. Yi, "The Logic and Meaning of Plurals. Part I", *Journal of Philosophical Logic*, 34: 459–506, 2005.

(Yi 2006) – B. Yi, "The Logic and Meaning of Plurals. Part II", *Journal of Philosophical Logic*, 35: 239–288, 2006.