Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Filosofia, Sociologia, Pedagogia e Psicologia Applicata

Scuola di Dottorato di Ricerca in
Scienze Pedagogiche, dell’Educazione e della Formazione
CICLO XXVII

Lo sviluppo delle competenze di modellizzazione matematica nella scuola secondaria di secondo grado.

Concezioni iniziali e processi di intervento didattico.

Direttore della Scuola: Ch.ma Prof.ssa Marina Santi

Supervisore: Ch.mo Prof. Paolo Sorzio

Dottoranda: Cristina Cavalli Bertolucci

INDICE

PREMESSA

La mia grande avventura con la matematica è cominciata nell'anno 2000 quando mi sono iscritta al corso di laurea in matematica per diventare una ricercatrice di matematica pura. Nel frattempo ho iniziato ad insegnare la matematica ai ragazzi della scuola media e superiore, scoprendo così un'altra passione: l'insegnamento. La mia esperienza da docente è cominciata quindi nel 2003.

Mi sono laureata in *licenciatura*[1] della matematica presso l'Universidade Federal do Rio Grande do Sul in Brasile nel 2006. Come insegnante di matematica ho sentito la necessità di conoscere il modo in cui un individuo impara, come organizza il suo pensiero e come ragiona in termini matematici. Per tali bisogni ho svolto un master di secondo livello nella Facoltà di Educazione presso la medesima università (2009), maturando così una formazione specifica sui processi di apprendimento e di insegnamento. Ho svolto la tesi *Nozioni di Infinito Matematico in adolescenti ed adulti*, interpretando la conoscenza dell'infinito sull'approccio dell'Epistemologia Genetica. Con l'intenzione di conoscere i processi di costruzione della conoscenza mi sono concentrata sui concetti costruttivisti, nello specifico, per comprendere come avviene la costruzione del ragionamento della logica matematica nell'individuo.

Come docente o come ricercatrice mi faccio spesso delle domande: come si possono rendere i contenuti di questa disciplina veramente significativi per lo studente? Come svilupparli in modo che lo studente possa utilizzarli nel suo quotidiano? Come fare affinché la matematica non sia considerata importante semplicemente per definizioni arbitrarie? Oppure, quali possono essere le applicazioni che può avere la matematica nel futuro dell'apprendente?

Dopo aver insegnato la matematica alla scuola e all'università, mi è venuto il desiderio di fare un'esperienza nuova che potesse arricchire il mio mestiere di docente. Nel cercare delle risposte alle suddette domande e nella volontà di conoscere un'altra cultura, ho deciso di svolgere un dottorato di ricerca in Italia. Essendo cittadina italo brasiliana ho sempre avuto il desiderio di vedere e comprendere come funziona il sistema dell'istruzione italiano. Una volta riconosciuto il nuovo paradigma di insegnamento ed apprendimento europeo, in termine di

1 *Licenciatura* è un termine in portoghese che non c'è una specifica traduzione all'italiano; indica una laurea che abilita allo insegnamento di quella materia, in concomitanza ai tirocini compiuti.

competenze, ho scelto la scuola di dottorato in Scienze Pedagogiche dell'Educazione e della Formazione dell'università di Padova per svolgere la mia ricerca.

Dalla mia esperienza didattica ho colto che uno dei temi che pone maggiori sfide all'istruzione matematica è lo svolgimento del processo di modellizzazione. Come sostenuto nella bibliografia, penso che la modellizzazione sia una possibilità per rendere la matematica più significativa. Attraverso il suo utilizzo si può infatti agevolare la risoluzione dei problemi della vita reale e portare lo studente ad affrontare l'apprendimento come un problema da risolvere, piuttosto che come un mero esercizio di regole e formule. Oggi, le attività che richiedono calcolo tecnico puro possono essere risolte con l'ausilio di una calcolatrice o di un software. Di conseguenza, le attività più impegnative stanno guadagnando importanza, come ad esempio, l'analisi dei problemi che interessano il *mondo reale,* vale a dire, la modellizzazione matematica.

Gran parte delle conoscenze accumulate nella scuola rimangono poco utili nella vita quotidiana, non perché non siano rilevanti, ma perché gli studenti non si esercitano ad usarle in situazioni pratiche. La ricerca si propone di identificare quali sono i maggiori ostacoli che gli studenti affrontano nello svolgimento della modellizzazione e le possibili vie di sviluppo didattico per tale competenza.

Ecco quindi come è nato il progetto di ricerca che ho portato avanti durante il mio dottorato.

Ringrazio la mia famiglia per avermi sempre sostenuto nell'affrontare le mie avventure; mio marito in particolare, che mi ha incentivato e sopportato durante tutto il percorso di questo dottorato. Un grazie di cuore al mio relatore Paolo Sorzio che è stato sempre presente e disponibile e che in un modo competente e rigoroso mi ha orientato durante tutto il percorso della ricerca.

ABSTRACT

Questa ricerca ha lo scopo di indagare le competenze di modellizzazione matematica degli studenti della scuola superiore di secondo grado e il modo in cui insegnanti pensano di adattare le loro metodologie in classe per far fronte agli ostacoli riscontrati. La ricerca si inscrive nel paradigma epistemologico costruttivista; si utilizza la versione elaborata a UC Berkeley da gruppo di lavoro di A. diSessa. Nella tesi la modellizzazione viene trattata come forma di competenza, sottolineando l'interazione fra "costruttivismo" e "competenze". L'indagine è di tipo esplorativo e è divisa in due percorsi:

Nella **FASE 1,** attraverso l'utilizzo dell'intervista clinica si indaga sulla competenza modellistica degli studenti, cercando di individuare i maggiori ostacoli da essi affrontati. In particolare si esplorano gli elementi di base della conoscenza (i primitivi fenomenologici o p-prims) della modellizzazione matematica di fenomeni reali e le forme più articolate della competenza attraverso lo svolgimento di tre attività di modellizzazione: il *Taxi*, la *Statua* e il *Viaggio*. I primitivi fenomenologici sono gli elementi di base della competenza, su cui si costruisce la competenza matematica più avanzata. Nell'analisi abbiamo identificato i p-prims presentati dagli studenti durante lo svolgimento delle attività; lo scopo di tale identificazione è capire quali sono i punti che ostacolano lo sviluppo della competenza di modellizzazione. Si è cercato di analizzare lo studente nelle situazioni concrete, provando a contrastare le sue rappresentazioni e il suo comportamento nella pratica. Inoltre, si presenta uno studio realizzato con gli studenti coinvolti in cui si presentano le loro motivazioni a imparare, la percezione della propria competenza, l'autoefficacia, quale sono le loro concezioni sull'apprendimento della matematica e le possibili connessioni dei contenuti imparati a scuola nel loro quotidiano.

Nella **FASE 2** della ricerca si svolge un'intervista semi strutturata a insegnanti di matematica della scuola superiore di secondo grado. Attraverso una riflessione iniziale sui frammenti riscontrati nella prima fase della ricerca, l'intervista ha indagato quali sono gli ostacoli del processo modellistico affrontato dagli studenti e quali sono le possibili vie di intervento da adattare in classe per sviluppare la modellizzazione come una competenza. L'analisi qualitativa del contenuto ha generato nove categorie per interpretare la competenza modellistica da un altro punto di vista. L'intervento con gli insegnanti ci ha permesso di conoscere come essi comprendono le competenze modellistiche degli studenti, come pensano che le Indicazioni

nazionali per il curriculo possano aiutarli in classe e quali sarebbero gli elementi da considerare in tale documento. I suggerimenti per adattare la modellizzazione nella pratica didattica sono stati significativi e da non sottovalutare.

Da una prospettiva costruttivista, la presenza di concezioni primitive è considerata un aspetto fondamentale e inevitabile dell’apprendimento ed esige la messa in atto di strategie didattiche efficaci per promuovere lo sviluppo della competenza indagata.

ABSTRACT

The present work investigates both the mathematical modelling competencies that high school students develop and the instructional design that teachers consider suitable to promote competencies. The research relies on the constructivist paradigm; the specific version elaborated at UC Berkeley from the group of work directed by A. di Sessa is used. In the dissertation, mathematical modelling is seen as a competence, in this way the link between "constructivism" and "competence" is show. The investigation is exploratory and divided in two paths:

In **stage 1**, through the use of Clinical Interviewing the modelling competency of the students is investigated. Particularly the basic elements of knowledge are investigated (phenomenological primitives or p-prims) of mathematical modelling in real phenomena and the complex shapes of the competence, are investigated through three different activities: *the Taxi, the Statue* and *the Travel.* The phenomenological primitives are the basis elements of knowledge, on which the more complex mathematical competence are constructed. In the analysis the p-prims that the students had presented during the activities are identified; in order to understand which points mathematical competence gets stuck. The students were mainly analyzed by interview about real situations, proving to counteract their representations and their behavior in everyday life. Furthermore, students were asked to express their conceptions about learning mathematics, their motivation to learn and their perception of their self-efficacy.

In **stage 2** of the research some semi-structured interviews with high school mathematical teachers are conducted. Through an initial reflection on scraps from the first stage, each interview inquires what are the obstacles faced by the students in the modeling processes and which are the possible ways to overcome such obstacles in the classroom, in order to develop in class, modelling as a competence. The qualitative analysis of content has generated nine categories for interpreting the modelling competence. The teachers' participation gives us the chance to understand how they manage and discover students' modelling competencies, what they think about the national framework for the curriculum, if it could help them in class and which elements could be worth considering in such a document. The teachers' suggestions for fitting the modelling in daily practice were significant and should not be underestimated.

From the constructivism point of view, the presence of the primitive conception is considered a fundamental aspect of learning and requires the implementation of effective teaching strategies to promote the development of mathematical competence.

INTRODUZIONE

L'introduzione dei curriculi per competenze nelle scuole porta a significativi cambiamenti nelle pratiche di insegnamento e di apprendimento. L'idea di inserire le problematiche del mondo reale in classe congiuntamente a quella di aiutare gli studenti a costruire degli strumenti mentali capaci di trovare applicazione nei problemi della vita quotidiana sono due delle maggiori intenzioni dell'approccio per competenze.

La modellizzazione è una pratica matematica che permette di risolvere dei problemi del mondo reale con l'utilizzo della matematica; si tratta di un processo significativo per affrontare situazioni che culmina con l'effettiva soluzione del problema reale e non con la semplice risoluzione formale di un problema artificiale. Il passaggio dal problema del quotidiano alla modellizzazione matematica richiede un nuovo gruppo di competenze per l'insegnamento e per l'apprendimento sia per gli studenti che per i docenti. La modellizzazione e le sue applicazioni sono considerate importanti quando si discute di didattica.

Questa ricerca ha lo scopo di indagare le competenze modellistiche degli studenti della scuola superiore di secondo grado e il modo in cui insegnanti pensano di adattare le loro metodologie in classe per far fronte agli ostacoli riscontrati. Data la complessità del tema indagato, si è deciso di dividere l'indagine esplorativa in due percorsi:

- Il primo percorso FASE 1: ***Ricostruzione delle competenze di modellizzazione matematica***.
- Il secondo percorso FASE 2: ***Interviste aperte a informatori privilegiati.***

Nella FASE 1, attraverso l'utilizzo dell'intervista clinica si indaga sulla competenza modellistica degli studenti, cercando di individuare i maggiori ostacoli da essi affrontati in tale processo. In particolare si esplorano gli elementi di base della conoscenza (i primitivi fenomenologici o p-prims) del fenomeno indagato e le sue forme più articolate attraverso lo svolgimento di tre attività di modellizzazione: il *Taxi*, la *Statua* e il *Viaggio*. Inoltre, l'indagine ha lo scopo di conoscere le motivazioni degli studenti verso l'apprendimento e la loro concezione della propria competenza.

La FASE 2 della ricerca consiste nello svolgimento dell'intervista aperta agli informatori privilegiati; sono quattro docenti di matematica della scuola superiore che appartengono al contesto di studio indagato e ricoprono in esso la posizione privilegiata di "formatori" di quella particolare comunità di cui possiedono una visione diretta e profonda. Attraverso una riflessione iniziale sui frammenti riscontrati durante la prima fase della ricerca, si è cercato di individuare, insieme agli insegnanti, gli ostacoli del processo modellistico affrontato dagli studenti. Attraverso l'intervista sono state poste agli informatori privilegiati delle domande su quali sono, secondo loro, le possibili vie di intervento da adattare in classe per sviluppare la modellizzazione come una competenza.

La ricerca si inscrive nel paradigma epistemologico costruttivista, si utilizza la versione elaborata a UC Berkeley da gruppo di lavoro di Andrea diSessa che ritengono nello specifico che le conoscenze iniziali di chi apprende hanno la forma di frammenti sparti e non organizzati (i cosiddetti p-prims). Nella prospettiva socio costruttivista di Philippe Jonnaert (2012) le competenze si costruiscono esercitandosi in situazioni complesse; le situazioni sono quindi la fonte delle competenze; sono durante le situazioni che i soggetti costruiscono le loro conoscenze.

Ci concentriamo sulla competenza perché a noi interessa particolarmente che l'apprendimento della matematica diventi effettivamente non un "sapere scolastico", ma una forma, un modo di pensare degli studenti, anche nel corso della loro vita quotidiana, è per questo che si parla più di educazione che di istruzione. Riteniamo che la semplice istruzione sia una idea della matematica molto selettiva, molto rigida e formalistica in rispetto all'educazione. È proprio l'atto di educare e la formazione del pensiero che ci interessano.

L'identificazione e la conoscenza dei processi matematici che gli studenti applicano quando cercano di risolvere un problema sono operazioni complesse. Altrettanto importanti sono le "traduzioni" del compito nel linguaggio della matematica, che corrispondono alla creazione del modello matematico, al trattamento interno di questo problema nel campo della matematica fino alla sua soluzione e, infine, la consapevole interpretazione critica dei risultati ottenuti: si è davvero risposto alla nostra domanda iniziale? Con quale livello di precisione e affidabilità si è ottenuto il risultato? In questo modo, con esempi selezionati, il tipico processo di modellizzazione matematica può diventare un tema centrale in aula, coinvolgendo i metodi di modellizzazione e la precisione della matematica, ovviamente senza perdere di vista il divario tra il modello matematico e la realtà. In questo contesto, la modellizzazione è ritenuta una parte significativa della competenza matematica, perché permette di collegare simboli astratti alla realtà.

Il processo di costruzione del ragionamento dell'individuo può essere descritto come l'unione di "mattoncini" o elementi di conoscenza, che insieme formano le conoscenze più articolate e complesse. Indagare in profondità dei primitivi fenomenologici significa andare a fondo del costruttivismo, andare a vedere quali sono davvero i "mattoncini", e non effettuare una generalizzazione prendendo in esami pochi casi con strumenti standardizzati. Certamente si tratta di una generalizzazione limitata, però ricca e approfondita. L'utilizzo dei p-prims ha il vantaggio di essere un modo dettagliato e accurato, di riconoscimento delle basi del processo di ragionamento degli allievi. I p-prims sono comunque inseriti nell'ottica di tipo costruttivista; attraverso i p-prims si producono ulteriori competenze. I p-prims non si possono domandare direttamente alle persone, poiché rappresentano il modo in cui ragionano, perciò si deve trovare un altro istrumento. L'intervista clinica, cosi come introdotta da Piaget e poi rielaborata da diSessa è uno dei metodi più adatti per tale scopo.

Il modello utilizzato nella presente analisi ritiene lo sviluppo della competenza come il passaggio di semplici elementi di ragionamento intuitivi di limitata applicabilità, i primitivi fenomenologici, alla loro integrazione in schemi di ragionamento strutturati secondo teorie. Tale modello è in contrasto con le concezioni più diffuse, riguardanti la ristrutturazione di schemi esistenti. Con il modello utilizzato abbiamo preteso di presentare un certo punto di vista originale riguardo lo sviluppo delle competenze.

La metodologia dell'intervista clinica è utilizzata in questa tesi perché nasce proprio dalla necessità di andare a conoscere le basi del ragionamento dell'individuo. Piuttosto che somministrare prove standard e richieste molto ridotte o semplificate di spiegazione su quello che gli studenti fanno di solito con gli strumenti standardizzati, nella presente ricerca abbiamo deciso di utilizzare l'intervista clinica effettuare un'indagine dettagliata. Per questo motivo l'indagine coinvolge un numero limitato di studenti, in modo da arricchire moltissimo il livello di dettaglio, impossibile da raggiungere su larga scala.

Attraverso le interviste cliniche analizzate in profondità, si è cercato di identificare proprio quei primitivi fenomenologici specifici della modellizzazione matematica di fenomeni reali. Si è cercato di analizzare lo studente nelle situazioni concrete, provando a contrastare le sue rappresentazioni e il suo comportamento nella pratica.

I dati raccolti nelle interviste sono da un lato esplorativi, nel senso che l'obiettivo non è generalizzare una popolazione, ma dall'altro si tratta anche di effettuare uno scandaglio che in realtà va molto in profondità su una serie di meccanismi che sono talmente p-prims (*phenomenological primitives*), vale a dire talmente primitivi e di base, da essere difficilmente esplicitabili in maniera cosciente e volontaria, perché sono alla base delle esplicitazione. L'intervista clinica ci permette quindi di fare un passo indietro e di identificarli. Ribadiamo che il numero ridotto di studenti non è una limitazione della nostra tesi, cosi come il fatto di aver usato gli specifici protocolli, ma uno strumento adatto per indagare in profondità dei p-prims.

È fondamentale cercare strategie pedagogiche adeguate alla costruzione di un ambiente di apprendimento che portino gli allievi a riconoscere l'importanza delle conoscenze matematiche e la partecipazione alla costruzione dei propri saperi. Con questo proposito, le interviste agli insegnanti sono state organizzate in modo semi strutturato per far emergere la loro soggettività, le convinzioni e le condotte sull'insegnamento e apprendimento della modellizzazione matematica. Attraverso l'analisi del contenuto delle risposte sono state organizzate delle categorie emergenti. Le categorie aperte sono state costruite secondo le problematiche simili, definite implicitamente dalle domande dell'intervista.

L'obbiettivo della discussione con gli informatori privilegiati è l'integrazione della modellizzazione e delle sue applicazioni nelle pratiche di routine alla scuola. Lo svolgimento delle tappe del processo di modellizzazione porta ad una comprensione più completa di un fenomeno è sostanzialmente più profondo e formativo della semplice risoluzione di equazioni o dell'adattamento ai dati sperimentali di funzioni matematiche.

Parlare delle competenze è molto bello ma non è così facile applicarle a scuola. L'insieme delle condizioni che consentono all'individuo di impiegare le proprie conoscenze ed abilità in funzione di un determinato compito di realtà, è la componente più indeterminata e complessa della competenza (Castoldi, 2007). La costruzione di modelli può essere una attività didattica molto formativa, in quanto permette ai discenti di vedere analogie e differenze tra fenomeni tradizionalmente trattati in ambiti diversi; può contribuire ad utilizzare l'approccio scientifico a nella risoluzione di molti problemi, mostrando una visione unitaria della matematica e delle scienze sperimentali.

L'intervento con gli insegnanti ci ha permesso di conoscere come la loro comprensione delle competenze modellistiche degli studenti, come pensano che le Indicazioni nazionali per il curriculo possano aiutarli in classe e quali sarebbero gli elementi da considerare in tale documento. I suggerimenti per adattare la modellizzazione nella pratica didattica sono stati significativi e da non sottovalutare.

Da una prospettiva costruttivista, la presenza di concezioni errate è considerata un aspetto fondamentale e inevitabile dell'apprendimento ed esige la messa in atto di strategie didattiche efficaci per promuovere la piena comprensione dei concetti scientifici.

Nel primo capitolo della tesi si presentano le competenze nell'istruzione e la matematica all'interno del contesto dell'educazione: si indicano nel dettaglio le specifiche competenze matematiche, le loro implicazioni scolastiche e le principali indagini nazionali e internazionali esistenti riguardo la disciplina. Alla fine del capitolo viene presentata un'idea sulla risoluzione di problemi matematici sottolineando le differenze fra un esercizio e un problema matematico.

Nel secondo capitolo si delinea la modellizzazione in quanto concetto matematico e le sue applicazioni in ambito scolastico; si presenta succintamente la storia della modellizzazione, specificamente nell'ambito della ricerca. Alla fine del capitolo tratta la modellizzazione come forma di competenza.

Nel terzo capitolo si presentano le principali teorie dell'apprendimento e il costruttivismo come origine della conoscenza e come metodologia didattica. Una particolare attenzione viene data al pensiero matematico e all'astrazione riflettente, individuando i primitivi fenomenologici e il cambiamento concettuale e si presentano i punti di interazione fra "costruttivismo" e "competenze".

Nel quarto capitolo si delinea la metodologia della ricerca: si presenta una riflessione sul contesto indagato, sulla strutturazione della problematica all'interno della ricerca qualitativa e sui limiti del campionamento. Vengono descritti i concetti fondamentali impiegati, come gli schemi di ragionamento e i primitivi fenomenologici, l'intervista clinica, il "thinking aloud protocol" e il cambiamento concettuale. All'interno del disegno della ricerca si presentano gli obiettivi e le domande della ricerca, il metodo investigativo utilizzato, i soggetti coinvolti, le procedure utilizzate nella raccolta dati, il procedimento adottato per le analisi e le fasi e i tempi della ricerca.

Nel quinto capitolo si presenta uno studio realizzato con gli studenti coinvolti in cui si presentano le loro motivazioni a imparare, la percezione della propria competenza l'autoefficacia, quale sono le loro concezioni sull'apprendimento della matematica e le possibili connessioni dei contenuti imparati a scuola nel loro quotidiano.

Nel sesto capitolo si effettua un'analisi dettagliata delle attività di modellizzazione svolte con gli studenti, presentando le loro concezioni iniziali sul concetto (i primitivi fenomenologici) e le forme più articolate della competenza.

Nel settimo capitolo si presentano le riflessioni svolte con gli insegnanti riguardo gli ostacoli degli studenti nel processo di modellizzazione e le possibili vie di intervento per attenuare gli ostacoli riscontrati. L'analisi qualitativa del contenuto ha generato nove categorie e schemi concettuali per interpretare la competenza modellistica da un altro punto di vista.

Nel ottavo capitolo si presentano le conclusioni generali del lavoro e alcune "buone pratiche" da eseguire.

CAPITOLO 1 LA MATEMATICA NEL CONTESTO DELL'EDUCAZIONE

L'attenzione alle problematiche riguardanti l'educazione matematica non è un fenomeno che si riscontra soltanto negli ultimi anni. Istituita a Roma durante il Congresso Internazionale di Matematici nel 1908, la "Commissione Internazionale d'Istruzione Matematica" (ICMI) è stata incaricata di analizzare le analogie e le differenze dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria tra i diciannove paesi coinvolti. Durante un secolo, l'ICMI[2] si è posta come interfaccia tra matematica ed educazione matematica, cercando di rafforzarne le sinergie tra matematici, didattici, insegnanti e formatori (UNESCO, 2011).

Secondo Michele Artigue (UNESCO, 2011) un'educazione matematica di qualità deve permettere agli allievi di comprendere a quali bisogni risponde la matematica che viene insegnata, deve porre dei problemi o riformularli per renderli accessibili ad un lavoro matematico, di esplorazione e modellizzazione, congettura, simbolizzazione. Inoltre, ha il compito di sviluppare un linguaggio specifico, e il metodo della dimostrazione.

L'attività matematica purtroppo è ancora frequentemente vista come un'attività puramente deduttiva che si traduce spesso nella produzione successiva di teoremi per mezzo di prove formali dal rigore perfetto. Le valutazioni sia nazionali che internazionali mostrano che alla fine della scolarità di base, le conoscenze e competenze matematiche di molti allievi non sono quelle attese (UNESCO, 2011).

La matematica è una scienza viva in piena espansione, connessa con il mondo reale, aperta alle relazioni con le altre discipline. La sua trasformazione si sostiene ed è sostenuta da quella di altri campi scientifici. Possiamo trovarla dappertutto nel mondo d'oggi, negli oggetti tecnologici che ci circondano o nei processi di comunicazione, normalmente in maniera invisibile.

[2] I convegni della commissione *International Congress on Mathematics Education* sono un riferimento internazionale sulle tendenze nella ricerca didattica della matematica e nella pratica dell'insegnamento per tutti i livelli; si tengono ogni 4 anni e riuniscono un'ampia gamma di partecipanti come i ricercatori in matematica, l'istruzione, i formatori di insegnanti, gli insegnanti di matematica e altri interessati in didattica della matematica.

Un’attività matematica sostenuta da un’intenzionalità pedagogica può dinamizzare l’insegnamento e fornire un sentimento favorevole per l’apprendimento della matematica.

Il ruolo che gli educatori matematici devono esercitare in questo secolo è molto importante; notevoli sono le ricerche svolte in tutti i livelli negli ultimi 20 anni, le tendenze internazionali nel campo della ricerca in didattica della matematica nel corso degli anni 90[3] sono: l'insegnamento-apprendimento della matematica; le modifiche curriculari; l'uso di tecnologie dell'informazione e della comunicazione nella didattica e apprendimento della matematica; la pratica di insegnamento, le credenze, concezioni e conoscenze pratiche; conoscenza, formazione e sviluppo professionale degli insegnanti; valutazione della prassi e contesto socio-culturale e politico di insegnamento e di apprendimento della matematica.

Un interessante cambiamento negli ultimi anni è il modo in cui si vede la partecipazione degli studenti e degli insegnanti nel processo di insegnamento e di apprendimento. Attualmente la preoccupazione riguarda quale aiuto fornire agli studenti per imparare la matematica al fine di utilizzarla nella realtà. Oggi non basta più dominare i saperi di base come la conoscenza del sistema decimale di numerazione, le operazioni aritmetiche, la capacità di risolvere i problemi che riguardano il campo dell’aritmetica elementare, la conoscenza dei sistemi di grandezze e delle forme geometriche usuali nel piano e nello spazio. Queste basi non bastano più per rispondere ai bisogni attuali che sono fortemente aumentati.

Assicurare la littéracie[4] matematica di tutti i giovani è l’ambizione fondamentale e prioritaria secondo il documento prodotto da Artigue “*Le sfide dell’Insegnamento della matematica nell’educazione di base*” (UNSECO, 2011)”. Il Programma per la valutazione internazionale dell'allievo - PISA[5] (*Programme for International Student Assessment*) dell’Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico – OCSE definisce come *mathematical literacy* la capacità di agire con intelligenza e in modo adeguato nelle situazioni che comportano una certa forma di sfida matematica. Garantire questa competenza è permettere lo sviluppo di quelle conoscenze e abilità matematiche necessarie alla partecipazione ed all’integrazione di una società che necessita di adattarsi alle evoluzioni.

---

[3] Fiorentini, D. & Lorenzato, S. *Research in Mathematics Education: Theoretical and methodological orientations.* 2nd. ed. Campinas: Authors Associates, 2007.

[4] Littèracie = litteracy. Nelle traduzioni italiane del progetto OCSE PISA è presente il termine competenza

[5] Indagine internazionale promossa dall’OCSE per accertare con periodicità triennale le competenze dei quindicenni scolarizzati.

Pensando ad un’educazione matematica che adempia alle ampie necessità della nostra società, oggi le competenze matematiche devono permettere agli allievi di analizzare e comprendere innumeri dati che vengono presentati in sistemi di rappresentazione diversi e complessi, numerici, simbolici e grafici, spesso in interazione.

È particolarmente essenziale che ogni individuo durante la sua scolarità in matematica sia progressivamente messo a contatto con la complessità del mondo numerico attuale, apprenda ad orientarsi ed agire, familiarizzi con la diversità dei modi di rappresentazione che sono utilizzati. La costruzione di un curriculum per la scolarità di base ha il dovere di coniugare, in modo equilibrato, i due approcci complementari che sono l’approccio in termini di contenuti e l’approccio in termini di competenze trasversali, e ciò rappresenta una sfida reale, avendo mostrato l’esperienza, la difficolta di trovare degli equilibri soddisfacenti (UNESCO, 2011).

il rapporto di Eurydice[6] prende in esame le politiche nazionali per riformare i curricoli di matematica, promuovere metodi di insegnamento e di valutazione innovativi, e migliorare la formazione degli insegnanti. Evidenzia la necessità di politiche globali per l’insegnamento della matematica che si basino sul monitoraggio costante dei risultati delle ricerche. Inoltre presenta argomentazioni a favore di ampie politiche di sostegno per gli insegnanti, una rinnovata enfasi sulle varie applicazioni delle conoscenze matematiche e sulle abilità di problem solving, e l’attuazione di una serie di strategie per ridurre in modo significativo il rendimento scarso. Secondo Androulla Vassiliou[7], il rapporto, basato sulle ultime ricerche e su un’ampia varietà di dati per paese, rappresenterà un contributo tempestivo al dibattito su un insegnamento efficace della matematica. Sarà di grande aiuto per tutti coloro che si adoperano per aumentare il livello delle competenze matematiche dei giovani europei.

[6] Rapporto *“L’insegnamento della matematica in Europa: sfide comuni e politiche nazionali”.* La rete Euridice è una Rete di informazione sull'istruzione in Europa - L’unità italiana di Eurydice opera, dal 1985, nell'ambito della rete europea di informazione sull'istruzione su incarico del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, presso INDIRE .La rete Eurydice offre informazioni e analisi sui sistemi educativi europei e sulle politiche sviluppate in questo settore. Dal 2011, è costituita da 37 unità nazionali con sede nei 33 paesi che partecipano al programma dell’Unione europea nel campo dell’apprendimento permanente. È coordinata e gestita dall’Agenzia esecutiva per l’istruzione, gli audiovisivi e la cultura.

[7] Commissario responsabile per l’istruzione, la cultura, il multilinguismo e la gioventù (2010 - 2014).

1.2 Le competenze nell'istruzione

Definizione del concetto

Dal 2000 si avvia in diversi paesi l'introduzione dei *curriculi scolastici per competenza*, organizzati di modo che si facciano entrare delle situazioni di vita reale in classe. Lo scopo principale è cercare di costituire nella scuola condizioni di apprendimento "autentico" che diventino patrimonio personale. In Italia sono state introdotte le "Indicazioni nazionali per il curricolo[8]" (D.M. 03/08/2007, n. 68) in accordo con la Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006.

Il sistema scolastico italiano assume come punto di riferimento il quadro delle competenze chiave per l'apprendimento permanente (Raccomandazione del 18 dicembre 2006). Le competenze chiave costituiscono un patrimonio trasferibile e flessibile di conoscenze, di saper-fare e di disposizioni, che sono necessarie alla completezza e sviluppo personale, all'inclusione nella vita sociale e civile e all'impiego di ognuno. Gli otto ambiti di competenze chiavi definite sono: 1) comunicazione nella madrelingua; 2) comunicazione nelle lingue straniere; 3) competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia; 4) competenza digitale; 5) imparare a imparare; 6) competenze sociali e civiche; 7) spirito di iniziativa e imprenditorialità; 8) consapevolezza ed espressione culturale. Tali competenze dovrebbero essere acquisite al termine del periodo obbligatorio di istruzione o di formazione e servire come base al proseguimento dell'apprendimento nel quadro dell'educazione e della formazione permanente (Pellerey, 2004).

Secondo il Decreto ministeriale n. 139 (22/08/2007) per competenze si intende "la comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale; le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia".

Le conoscenze costituiscono i saperi del soggetto, ovvero la porzione di patrimonio culturale a disposizione dell'individuo per inserirsi attivamente nella vita sociale (Castoldi, 2007). Riprendendo la definizione proposta nella CM 84/2005 "le conoscenze rappresentano il sapere

[8] D.M. 3 Agosto 2007, n. 68 - Indicazioni nazionali per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo di istruzione.

che costituisce il patrimonio di una cultura, sono un insieme di informazioni, nozioni, dati, principi, regole di comportamento, teorie, concetti codificati e conservati perché ritenuti degni di essere trasmessi alle nuove generazioni".

Le abilità "rappresentano il saper fare che una cultura reputa importante trasmettere alle nuove generazioni, per realizzare opere o conseguire scopi. È abile colui che non solo produce qualcosa o risolve problemi, ma colui che conosce anche le ragioni di questo "fare", sa perché, operando in un certo modo e rispettando determinate procedure, si ottengono determinati risultati" (CM 84/2005). Si tratta di condotte pratiche assimilate dal soggetto per agire in modo adeguato ed efficace nel contesto sociale, in quanto prodotto della razionalità tecnica accumulata in un dato contesto culturale, e usate in modo consapevole ed intenzionale in relazione ai propri obiettivi (Castoldi, 2007).

Storia

La parola **"competenza"** deriva in realtà dal latino "cum petere", ovvero chiedere insieme, pretendere, ma evoca anche il vero italiano "competere" cioè far fronte a una situazione sfidante, o il sostantivo competizione, che riporta all'immagine di atleti che si confrontano per vincere una gara (Pellerey, 2004).

La storia dell'educazione e della pedagogia ci hanno aiutato a comprendere come nel corso delle vicende umane la centralità posta dai processi educativi alla crescita delle varie dimensioni della persona umana sia spesso mutata, se non completamente rivoluzionata. Di conseguenza ogni pratica umana, ed educativa in particolare, è segnata sia storicamente, sia culturalmente. E inevitabilmente avviene lo stesso anche per il concetto di competenza, sia come qualità dell'agire dell'educatore, sia come qualità da promuovere nell'agire degli educandi (Pellerey, 2004).

Purtroppo il termine "competenza" è stato usato, e viene usato, secondo una molteplicità notevole di significati, a volte molto diversi tra loro.

Nell'ambito educativo, conforme venivano definiti gli obiettivi didattici della scuola negli anni sessanta e settanta, secondo Pellerey (1994, tratto da Pellerey, 2014), l'errore più frequente era quello di confondere l'obiettivo con quello che noi insegnanti abbiamo intenzione di fare. Ciò significa centrare l'attenzione più sul comportamento dell'insegnante che su quello dell’allievo. Un secondo errore era costituito dalla tendenza a descrivere l’obiettivo in termini di processo di apprendimento più che di prodotto o risultato dello stesso. Un terzo errore comune era l’indicare soltanto il contenuto o argomento di studio.

Nell'ambito del mondo del lavoro e della formazione professionale il concetto di competenza emerge alla fine degli anni’ 70, distinguendosi tra qualificazione rispetto a uno specifico posto di lavoro, assunta come il possesso del saper fare e delle conoscenze necessarie per occuparlo, e qualificazione di un soggetto, proveniente sia di un saper fare anche più generale, sia dell'insieme delle conoscenze ottenute attraverso la formazione e l’esperienza professionale (Pellerey, 2004). Competenza è sicuramene la parola più utilizzata nella scuola a partire dalla fine degli anni’90[9]. Le prime definizioni del concetto di competenza richiamavano una prospettiva comportamentista, identificandosi con una prestazione del soggetto osservabile e misurabile, in un certo modo analogo alla nozione di abilità. Sulla base di un paradigma progettuale e valutativo basato sulla razionalità tecnica si mirava a scomporre la competenza in un insieme di prestazioni empiricamente osservabili, la cui sommatoria consentiva di verificare il livello di padronanza del soggetto.

Nei decenni successivi si assiste ad un’articolazione progressiva del concetto; gli elementi fondamentali che costituiscono le competenze sono quindi, le conoscenze che permettono di comprendere come le cose funzionano; i saper fare che indicano come farle funzionare; le meta conoscenze che permettono di gestire le conoscenze e che non sono acquisite soltanto dall’esperienza.

Macedo (2005) propone che la competenza sia compresa in tre comuni ed interessanti modi: competenza come **precondizione del soggetto**, come **precondizione dell’oggetto** e come **acquisita**. Competenza come precondizione del soggetto significa un dono o una grande facilità per un’attività, spesso chiamato anche di talento. In questo senso implica l’idea di dipendenza o condizione, ad esempio qualunque bimbo nato deve acquisire delle competenze che gli permettano di leggere e scrivere. Competenza come precondizione dell’oggetto è indipendente dal soggetto che la utilizza. A scuola, questa forma di competenza è presente, per esempio, quando giudichiamo un maestro per la 'competenza' del libro che adotta o della scuola dove insegna; troppo spesso, si giudica un bambino in base alla scuola in cui studia: si tratta di una

[9] Valutare le competenze Certificare le competenze – dossier elaborato da Mario Castoldi, Piero Cattaneo e Franco Peroni, 2006.

competenza dell'oggetto, poiché non è dipendente dal soggetto. Competenza come acquisita oppure **relazionale** indica una competenza interdipendente: non è sufficiente essere un esperto in una materia o possedere oggetti potenti e adeguati, quello che importa è come questi fattori interagiscono.

La situazione che si trova in un gioco è un buon esempio della competenza relazionale. Non si vince il gioco prima di cominciarlo. In una fase precedente l'inizio del gioco ci sono tante azioni che si possono realizzare come allenarsi, studiare le partite, ecc., ma sono le letture o le interpretazioni fatte nel momento del gioco, le prese di decisione, le coordinazioni fra i partecipanti che definiranno le possibilità di vincere o perdere. L'aula è un buon esempio; ci sono dei fattori che possono essere definiti prima della lezione: studiare, preparare e selezionare i materiali, scrivere il testo o definire lo schema ad essere seguito. Ma ci sono altri fattori che possono essere decisi e definiti soltanto nel momento della lezione, in funzione di altri che non possono essere anticipati giustamente perché sono costruiti nel gioco delle interazioni fra il docente, gli studenti e i materiali di insegnamento (Macedo, 2005).

La competenza relazionale indica certi aspetti che si manifestano soltanto nel contesto interattivo; tale competenza suppone un'apertura per la diversità. Il gioco come processo è un esercizio di interdipendenza, di cooperazione, non di competizione, anche fra gli giocatori competitivi. Secondo Macedo (2005) la cooperazione è un metodo per lavorare con questa qualità; secondo Piaget un metodo pedagogico che promuove la cooperazione è più costruttivo che un metodo che non la promuove. Senza la cooperazione è molto difficile costruire qualcosa. L'autore riporta anche l'autonomia[10] nella prospettiva della competenza relazionale considerandola come una orientazione didattica, come una disciplina che promuove una competenza relazionale negli studenti. Nel gioco ad esempio, il giocatore è sfidato a conquistare l'autonomia, pianificare le mosse, valutare, nel senso di regolare se sue azioni in ogni momento della partita in funzione dell'obiettivo, delle mosse del avversario, ecc.

La differenza fra competenza e abilità, in un primo momento dipende dal taglio. Risolvere problemi ad esempio è una competenza che si presuppone il dominio di varie abilità. Calcolare, leggere, interpretare, prendere delle decisioni, rispondere di forma scritta, ecc.. sono esempi di

[10] L'autonomia è più che una questione morale o etica, è un principio didattico che presuppone lo sviluppo di una competenza di insegnamento con questa qualità costruttiva. Piaget diceva che "la logica dell'azione corrisponde ad una morale del pensiero". L'autonomia è una forma de morale del pensiero che, essendo libero, riflette sull'oggetto ma che, responsabile, non confonde questo pensiero con la propria realtà sulla quale si riflette (Macedo, 2005).

abilità richieste per la soluzione di problemi di aritmetica. Ma se usciamo del contesto del problema e consideriamo la complessità coinvolta nello sviluppo di queste abilità, possiamo valorizzarle come competenze che invece richiedono tante abilita (Macedo, 2005). L'autore sostiene che la competenza sia un'abilita di ordine generale mentre l'abilità è una competenza di ordine particolare, specifica. Ad esempio la soluzione di un problema non si riduce specificamente ai calcoli che lo implicano, ma non vuol dire che il calcolo non sia una condizione importante.

Secondo Pellerey (2004) una competenza è definita a partire dal compito o dall'insieme di compiti che il soggetto deve saper svolgere positivamente, cioè secondo un modo e un livello valido e produttivo, che siano riconoscibili non solo a chi la esplica, ma anche agli altri. Il quadro sotto elencato rappresenta le caratteristiche di una competenza secondo l'autore:

LE CARATTERISTICHE DI UNA COMPETENZA (Pellerey, 2004, p. 28)
1) **Una competenza è definibile a partire dalla tipologia di compiti** o attività che si devono svolgere validamente ed efficacemente. Esse, in base ai compiti per i quali sono richieste, possono essere più specificatamente legati a una disciplina o materia di insegnamento, oppure avere carattere trasversale.
2) **La complessità e la novità del compito** o della attività da sviluppare caratterizzano anche la qualità e il livello della competenza implicata. Tali caratteristiche dipendono dall'età e dall'esperienza dello studente.
3) Una competenza si manifesta perché si riesce a **mettere in moto e coordinare** un insieme di conoscenze, abilita e altre disposizioni interne al fini di svolgere positivamente il compito o attività prescelta. Queste risorse interne debbono essere quindi possedute a un grado di significatività, stabilità e fruibilità adeguato, tale cioè da poter essere individuate e messe in moto quando esse siano necessarie per affrontare il compito richiesto.
4) Tra le risorse che occorre saper individuare, utilizzare e coordinare molto spesso occorre considerare non solo **risorse interne**, ma anche **risorse esterne**. Non si tratta solo di risorse di natura fisica o materiale come libri, strumenti di calcolo, computer, ma anche umana come il docente stesso, i compagni altre persone che è possibile coinvolgere nella propria attività.

Durante lo svolgimento di un'attività emergono immediatamente due possibili caratterizzazioni del compito che devono essere svolte e che evidenziano la presenza o meno di competenze specifiche: la loro **complessità** e la loro **novità**, definite da Pellerey (2004) come le *tipologie di competenze.*

La complessità e la novità sono delle caratteristiche fondamentali del compito che occorre saper affrontare; dipendono in gran parte dell'età e dall'esperienza dei soggetti: una stessa competenza può essere letta a vari livelli di novità e complessità. Occorre ricordare anche come viene assunta la dimensione della complessità e della novità; entrambi hanno un carattere soggettivo**.** Possedere o meno una competenza è una questione eminentemente personale, che dipende non solo dall'esperienza scolastica, ma soprattutto, da quella extrascolastica (*idem*, p. 29). La **dimensione della complessità** è data da un campo di azione continuo che va dai compiti, o situazioni da affrontare, più semplici e immediati fino a impegni più complessi e altamente sfidanti. Di conseguenza, l'azione da realizzare esige la capacità di interpretare adeguatamente la complessità dell'impegno per attivare non solo le risorse interne necessarie e già disponibili, ma anche le risorse esterne eventualmente necessarie e le conoscenze o abilità ancora da perfezionare. La **dimensione della novità** o della non familiarità con il compito da svolgere da una parte può essere ormai divenuta cosi familiare e comunemente assolta da essere portata a termine correttamente in modo automatico. Dall'altra, essa può sembrare talmente estranea alla propria esperienza da non essere neanche in grado di rendersi conto della sua natura e complessità.

La figura sotto elencata rappresenta quello che Pellerey (2004, p. 31) intende per novità-familiarità e complessità-semplicità di un compito.

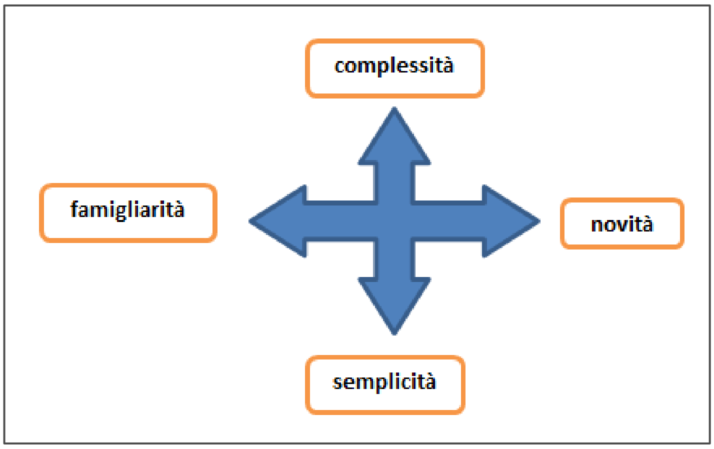


Figura 1 - Rappresentazione della natura dei compiti (Pellerey, 2004, p.31)

L’autore spiega cosa si intende per ognuno dei quadranti rappresentati nella figura 1: *Primo quadrante*: compiti di complessità più o meno elevata e che inoltre presentano un certo grado di novità. Per poterli affrontare occorre possedere competenze notevolmente elevate anche dal punto di vista della creatività. *Secondo quadrante*: include compiti complessi con i quali il soggetto però ha già un certa familiarità, fino al punto da rappresentare per lui una routine. Si può pensare a competenze disciplinari di studenti particolarmente dotati in alcuni campi specifici, come la matematica o la fisica, e che hanno ormai una grande dimestichezza con questioni anche abbastanza impegnative per la loro età. *Terzo quadrante*: riguarda compiti semplici e familiari; che per uno studente del terzo anno della scuola secondaria di primo grado possono risultare assai complessi e del tutto nuovi per uno studente del secondo biennio della scuola primaria. *Quarto quadrante*: compiti semplici ma meno familiari, fino al punto di costituire una novità che può, comunque, mettere in difficoltà. Un esempio è dato dalle competenze linguistiche legate in particolare a una lingua straniera. È evidente che uno studente che vive in una famiglia bilingue abbia già sviluppato queste competenze anche in età infantile, a differenza di compagni che non hanno tale esperienza.

Tornando agli elementi fondamentali che costituiscono le competenze, secondo Le Boterf (1994) possono essere esplicitati in tre ambiti di conoscenze fondamentali: **sapere, saper fare**, **saper essere**. Il “saper agire” costituisce la sintesi operativa dei “saperi” del soggetto, dei “saper fare” e dei “saper essere”, mobilitati in funzione della capacità di affrontare un compito nella vita reale.

All’interno del concetto di competenza è possibile riconoscere alcune dimensioni del processo di apprendimento, da intendersi come componenti elementari del livello di padronanza manifestato dal soggetto**: le conoscenze**, **le abilità** e le **disposizioni ad agire** (Castoldi, 2007). La definizione di Castoldi si avvicina molto a quelle Le Boterf, il quale afferma che le conoscenze si possono classificare in tre categorie: le conoscenze *dichiarative*, *procedurali* e *condizionali.*

Le conoscenze *dichiarative,* “sapere cosa”, si riferiscono al sapere, o alle conoscenze: sono le idee acquisite dal soggetto attraverso lo studio, la ricerca o l’esperienza. Le conoscenze *procedurali, “*sapere come/ saper fare”, si riferiscono alle abilità: sono relative alle modalità operative di svolgimento dell’azione; designano la capacità di utilizzare le proprie conoscenze in determinati compiti. Le conoscenze *condizionali,* “saper essere”, sono le disposizioni ad agire: sono relative alle condizioni d’uso del sapere in rapporto al contesto d’azione. Il saper essere corrisponde alle disposizioni interne e si riferiscono a caratteristiche personali di tipo sociale o motivazionale e sono spesso relative a sistemi di credenze e valori che posizionano e sostengono l'individuo ad operare in un certo modo (Castoldi, 2007).

Secondo Castoldi (et al.,2006), alcuni autori hanno proposto di rappresentare la competenza come un iceberg, mettendo in evidenza la duplicità delle componenti presenti nella sua rilevazione, conforme alla figura 2: una componente esplicita e visiva che viene espressa attraverso le prestazioni osservabili riguardo al patrimonio di conoscenze e abilità possedute dal soggetto; una componente "invisibile", implicita, che esige un'esplorazione di dimensioni interiori connesse ai processi motivazionali e socio-emotivi dell'individuo. L'immagine rappresentata nella figura 2, mostra con evidenza le difficoltà con cui si misura una valutazione delle competenze.

Figura 2 L'iceberg della competenza

Una valutazione di competenza richiede, secondo Castoldi (et al., 2006) una visione pluriprospettica, attenta a rilevare e a confrontare le diverse dimensioni, con l'obiettivo di comporre un quadro di insieme capace di restituire le diverse componenti delle competenze richiamate nell'immagine 2, sia quelle più visibili e manifeste, sia quelle implicite e latenti. Secondo l'autore, il rigore della valutazione consiste proprio nella considerazione e nel confronto intrecciato fra le diverse prospettive, in modo da riconoscere analogie e differenze, conferme e scarti tra i dati e le informazioni raccolte.

Castoldi (2011) fornisce degli indicatori di cosa si intende per una *competenza esperta*: capacità di ricostruire lo “spazio del problema”; repertorio ricco di strategie di soluzione; principi chiave e quadri interpretativi sul dominio di conoscenza; uso funzionale delle variabili contestuali; flessibilità nell’uso dei propri “script”; abilità di auto-regolazione dal “saper fare” al “saper agire”. Riporta inoltre che il valutare le competenze comporta l’accertamento non di ciò che lo studente sa, ma di ciò che sa fare con ciò che sa.

La competenza emerge da problemi complessi e aperti che sollecitano la mobilitazione del proprio sapere: ai compiti autentici; al sapere complesso; alla rielaborazione; ai percorsi aperti. Castoldi (2011) ritiene che il sapere imparato a scuola diventa una competenza quando non si tratta di una somma di conoscenze dichiarative e procedurali da applicare in compiti specifici, ma quando essi sono applicati in modo dinamico a problemi complessi in situazioni non standardizzate.

La mobilizzazione della competenza si esercita nelle situazioni complesse che richiedono di stabilire il problema prima di risolverlo, determinando delle conoscenze pertinenti e riorganizzandole in funzione della situazione. Le Boterf (1994) paragona la competenza ad un “saper-mobilitare”:

> Possedere conoscenze o competenze non significa essere competente. […] L'esperienza quotidiana dimostra che le persone che hanno conoscenze o abilità non sempre le sanno impiegare in modo pertinente in una situazione opportuna. L'aggiornamento di ciò che si sa in un singolo contesto rivela il "passaggio" alla competenza. Questo si realizza nell’azione (Le Boterf, 1994, p. 16, trad. nostra).

Castoldi (2011) inoltre, apporta delle ragioni a favore di un approccio per competenze alla scuola: richiama alle esigenze sociali ed economiche come una condizione per un inserimento nella vita attiva e nel mondo del lavoro; richiama una visione socio-costruttivista dell’apprendimento, di costruzione attiva del sapere nel contesto culturale e sociale; proporziona la costruzione di una cittadinanza attiva passa attraverso un sapere vivo e contestualizzato; rappresenta una rivoluzione copernicana per l’insegnamento e per la scuola.

Secondo Perrenoud (2003) è più produttivo descrivere e organizzare la diversità delle competenze che discutere una distinzione tra capacità e competenze. Decidere se condire un piatto, rileggere un testo o organizzare una festa sono delle capacità o delle competenze avrebbe senso se ciò comportasse un funzionamento mentale molto diverso. Ma non succede in questo modo. Concreti o astratti, comune o specializzato, di facile o di difficile accesso, una competenza consente il confrontarsi regolarmente in modo adeguato con una famiglia di compiti e situazioni, rivolgendosi a idee, conoscenze, procedure, metodi, tecniche o altre competenze, più specifiche.

Attualmente si tende anche a considerare la conoscenza di base come "blocchi elementari", considerati più specifici ma con un'applicabilità più ampia, la cui correttezza dipende soprattutto dal contesto in cui vengono utilizzati. Di Sessa (1993) ha presentato un modello che identifica una varietà di schemi e di risorse denominate *primitivi fenomenologici*: si tratta delle convinzioni dello studente sul funzionamento di fenomeni che gli considera ovvie e irriducibili; l'origine di tali concezioni è la sua conoscenza intuitiva. Quello che risulta produttivo o improduttivo infatti, è l'organizzazione e la contestualizzazione di queste idee.

Secondo diSessa (2007) i primitivi fenomenologici sono intesi come strutture atomistiche[11] di conoscenza che vengono automaticamente e inconsciamente attivati dallo studente in risposta ad una particolare situazione. Questi primitivi fenomenologici sono la base su cui una persona assegna un senso a una situazione; la lente attraverso quale emerge l'interpretazione dello studente. Così, lo studente può costruire una serie di spiegazioni in risposta a un particolare fenomeno, basandosi sui primitivi fenomenologici invocati e sui mezzi attraverso i quali ragionano basandosi su tali.

DiSessa (Smith et al., 1993/1994) propone che lo sviluppo delle competenze venga considerato a partire dai modelli mentali iniziali rigidi e limitati dell'individuo, come i primitivi fenomenologici e le "knowledge-in-pieces"; attraverso il loro sviluppo, questi frammenti di conoscenza si integrano per costruire una concezione. Queste concezioni iniziali degli studenti non sarebbero quindi da cambiare, ma da integrare e sviluppare i nuovi saperi. In questa prospettiva le competenze vengono sviluppate quando il soggetto sviluppa delle strategie specifiche per un determinato compito.

Einstein (1950 citato in Smith et al., 1993/1994) ha proposto una visione della conoscenza scientifica che ha sottolineato il legame tra l'esperienza e i concetti teorici primitivi. I ragionamenti eseguiti giornalmente dai soggetti forniscono delle risorse di astrazioni di

[11] Atomistico: Formatosi da diversi elementi. La molteplicità e la varietà dei fenomeni che offre l'esperienza.

esperienza fisica che sono utili nella vita quotidiana. Da queste idee quotidiane, lo scienziato costruisce un insieme di assiomi. Per Einstein, il processo di assiomatizzazione, non induzione, è stato il nucleo della pratica scientifica. Attraverso questi processi le intuizioni quotidiane sono alterate nel carattere e nella struttura, diventando delle rigorose basi di un sistema di conoscenza deduttiva.

Aspetto critico

Nonostante la propagazione ed il successo del concetto di competenza, questo è ancora utilizzato in modo molto diverso, in base ai contesti, agli studi e agli approcci teorici a cui fa riferimento. Dall'analisi della letteratura emerge che le molteplici definizioni di "competenze" non si esauriscono. Secondo alcuni studiosi, le competenze riguardano la capacità di applicare ciò che si è appreso in ambiti complessi e esterni al tipico compito scolastico. Ad esempio, ragionare in termini di variabili nel caso di un fenomeno complesso come l'inquinamento o l'economia. Secondo altri studiosi, le competenze sono assunte come un uso flessibile e critico dei contenuti. Ad esempio, la capacità di analizzare un problema matematico complesso e nuovo senza farsi spaventare, senza perdersi in procedure meccaniche, ma guardandolo concettualmente.

Frequentemente si evoca il trasferimento delle conoscenze, che tuttavia non funziona molto bene: un determinato studente, che domina la teoria in una verifica, si dimostrerebbe incapace di usarla nella pratica perché non è mai stato allenato a farlo.

Perrenoud (2003) fa presente che la scuola ha sempre desiderato che i suoi insegnamenti sono stati utili. Spesso accade di perdersi di vista in questa ambizione globale, lasciandosi trascinare da una logica verso l'accumulo dei saperi, sollevando l'ipotesi che alla fine ci serviranno a qualcosa. In questo senso, lo sviluppare delle competenze nella scuola non è una nuova moda, ma un ritorno all'origine e alle ragioni della scuola come istituzione.

Le competenze richieste nella vita quotidiana non sono irrilevanti, gran parte degli adulti che hanno frequentato la scolarità di base rimangono sprovveduti davanti alle tecnologie e alle regole della vita quotidiana. In questo senso, non delimitando il ruolo della scuola agli apprendimenti di base, Perrenoud (2003) ci pone la domanda: "A che serve istruire un individuo durante 10 o 15 anni della sua vita se continua ad essere impreparato, ad esempio, all’interpretazione di un contratto di assicurazione o di un foglio illustrativo farmaceutico? Ad esempio, tra conoscere il concetto di “interesse” e comprendere l'evoluzione del tasso di un mutuo c’è una grande differenza. Gli esercizi scolastici classici consentono il consolidamento della nozione degli algoritmi del calcolo, ma non affrontano la mobilizzazione. Per andare in questa direzione, sarebbe necessario mettersi in situazioni complesse come le obbligazioni, i mutui, i prestiti, i leasing. Non fornisce alcun aiuto il fatto di mettere quelle parole nei dati di un problema matematico in modo che questi concetti siano appresi, nemmeno per mobilitare la conoscenza. Tra sapere cosa è un virus e proteggersi consapevolmente dalle malattie virali, la differenza non è meno rilevante.

In generale si osserva frequentemente una mancanza delle conoscenze basilari degli studenti. Le nozioni fondamentali sono state studiate nella scuola, ma al fuori di qualsiasi contesto. Secondo Perrenoud (2003) è per questa ragione, e non per rifiuto alle conoscenze, che conviene sviluppare competenze a partire della scuola, relazionando costantemente i saperi alla sua operazionalizzazione in situazioni complesse. Intanto si richiama l’attenzione su uno dei problemi principali del progettare attività didattiche volte alle competenze: quello di identificare i criteri a quali ispirarsi e allo stesso tempo mantenere chiaro il senso della diversità delle attività educative svolte a scuola.

1.2 Le competenze matematiche

Rispetto alla concezione rigida e procedurale che spesso si accompagna all'insegnamento scolastico tradizionale, la matematica come competenza diventa un sapere flessibile e creativo. Nel suo ruolo attivo, lo studente impara ad orientarsi e ad agire in situazioni diverse e più complesse costruendo delle conoscenze operative. Queste conoscenze si esprimono nella capacità di mobilizzare strumenti matematici per affrontare le situazioni nuove e potenzialmente problematiche, non focalizzandosi solo nella capacità di riprodurre delle procedure apprese nei classici contesti (OECD, 2006; UNESCO, 2011).

Le competenze matematiche possono essere definite come la capacità di agire con intelligenza e in modo adeguato nelle situazioni che comportano una certa forma di sfida matematica.

Assicurare la literacy[12] matematica di tutti i giovani è l'ambizione fondamentale e prioritaria (UNESCO 2011). Garantire questa competenza è permettere lo sviluppo di quelle conoscenze e abilità matematiche necessarie alla partecipazione ed all'integrazione di una società che necessita di adattarsi alle evoluzioni.

Il *Modello sulle Competenze e Apprendimento della matematica* – progetto KOM, sviluppato in Danimarca e servito di base alla riforma dell'educazione secondaria danese attuata nel 2005 ha ispirato il concetto di *"mathematical literacy",* in italiano è stato tradotto con *competenza matematica.* Tale concetto è assunto nelle linee guida delle normative *Competenze chiave per l'apprendimento permanente* - Raccomandazione del parlamento europeo e del consiglio del 18 dicembre 2006; nelle *Indicazione nazionali per il curriculo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* – Decreto Ministeriale del 31 luglio 2007 e C.M. del 18 aprile 2012; nelle *Indicazioni nazionali per i Licei* e le *Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali* - Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca del 15 marzo 2010.

1.2.1 Il progetto KOM

Il progetto **Sviluppo delle competenze e apprendimento della matematica** presenta delle idee e ispirazioni per lo sviluppo dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica. Con il nome originale *Kompetencer Og Matematiklærinè*, il progetto viene chiamato di *KOM* e è stato creato in Danimarca da un gruppo de esperti che comprendeva i coordinatori Mogens Niss e Tomas Højgaard.

Le descrizioni sul progetto che seguono si riferiscono al documento *Competencies and Mathematical Learning Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark* (Niss & Højgaard, 2011):

Il progetto è stato avviato nell'estate del 2000 su iniziativa del Consiglio nazionale per l'educazione scientifica e il Ministero della Pubblica Istruzione. L'iniziativa è partita dal Consiglio Nazionale per l'educazione scientifica, che ha voluto agevolare la strada per uno sviluppo della matematica come progetto "punta di diamante" per un possibile corrispondente sviluppo in altre materie.

[12] Il termine literacy è stato tradotto come *competenza* nelle traduzioni italiane del progetto OCSE PISA.

Uno dei punti di partenza della riflessione è stata l'organizzazione del curriculum. Tradizionalmente in Danimarca un curriculum di matematica per ogni fase era specificato mediante tre componenti: a) Lo scopo dell'insegnamento; b) Il programma, vale a dire il contenuto matematico spesso presentato come un elenco di argomenti, concetti, teorie, metodi e risultati da raggiungere (eventualmente integrato con gli obiettivi specifici correlati); c) Gli strumenti di valutazione e i test utilizzati per l'accertamento di quello che gli studenti hanno imparato dal programma prescritto (in relazione agli obiettivi specifici del punto b). In pratica questo significa che quando si tratta di programma scritto (bandi ministeriali, guide di studio, curricula locale, ecc) il curriculum gioca un ruolo predominante, mentre le finalità, gli obiettivi e la valutazione svolgono un ruolo secondario. Invece, quando si tratta di didattica quotidiana gli esami e le valutazioni finali giocano un ruolo molto più determinante nel definire le attività e gli atteggiamenti degli studenti e degli insegnanti.

Di conseguenza gravi obiezioni possono essere sollevate a questo modo di specificare un curriculum. Un programma basato sulla descrizione del curriculum porta facilmente la competenza matematica ad essere identificata con la padronanza del programma: competenza nelle abilità e nelle conoscenze dei fatti relativi allo specifico argomento del programma. Considerando il fatto che tutti i professionisti coinvolti con l'acquisizione di conoscenze matematiche sarebbero d'accordo sull'esistenza di un rapporto molto più profondo da una semplice *padronanza del programma*, questa identificazione banalizza e riduce la nozione di competenza matematica e si traduce con un livello troppo basso di ambizione per l'insegnamento e l'apprendimento. "Se abbiamo solo un programma basato sui curriculi specifici a nostra disposizione in didattica della matematica, qualsiasi confronto tra matematica nelle diverse fasi del sistema di istruzione può essere fatto solo tramite confronti dei diversi curricula". Queste riflessioni hanno portato il gruppo a voler creare un mezzo generale per specificare il curriculum di matematica che, come una base comune appartenente alla maggioranza del sistema di istruzione, può contribuire adeguatamente a:

- Identificare e caratterizzare cosa significa il padroneggiare (cioè sapere, capire, fare e usare) la matematica in se stessa e in diversi contesti, indipendentemente da quale specifico contenuto matematico o programma sia stato coinvolto;
- Descrivere lo sviluppo e la progressione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica all'interno e tra diversi curricula;

- Caratterizzare i diversi livelli di dominio per descrivere lo sviluppo e la progressione nella competenza matematica del singolo studente;

Confrontare diversi curricula di matematica e diversi tipi di didattiche della matematica in fasi parallele o in fasi diverse di educazione, in un modo che vada oltre ad una mera comparazione dei curricula (Niss & Højgaard, 2011, pag. 46, trad. nostra).

Il progetto mira a produrre una caratterizzazione appropriata degli argomenti specifici della matematica basato sulle competenze come mezzo per rispondere ad alcune delle sfide e affrontare alcuni dei problemi. Il progetto ha scelto le caratteristiche problematiche e le descrizioni di competenza come i due "pilastri" degli argomenti specifici della matematica. La comprensione del lavoro è stato determinata da due domande: “Come sarebbe ragionevolmente possibile accogliere altri aspetti di grande importanza per l'insegnamento della matematica dato che gli “obiettivi” sono descritti in termini di competenze?” e “In quali aree e in che misure la potenzialità dell'approccio per competenza può contribuire ad una soluzione dei problemi e delle sfide identificate nel progetto?"

Il compito del gruppo di lavoro sull'applicazione delle competenze matematiche come mezzi per descrivere la matematica come materia di istruzione si basa ampiamente sul lavoro precedente dal presidente del gruppo Mogens Niss[13], in virtù della sua appartenenza al gruppo di esperti del progetto OCSE/PISA sulla matematica, che ha anche esercitato l’influenza sull'uso di questo progetto di competenze come una parte centrale della fondazione del gruppo di lavoro.

Gli autori ritengono utile ricordare ciò che il progetto **non** mira a raggiungere, ma che potrebbe essere assunto da includere e che, inoltre, potrebbe essere importante in sé. Il progetto KOM:

- Non è un progetto di ricerca nel suo senso vero e proprio, potendo essere caratterizzato meglio come un *progetto di sviluppo analitico*.
- Non pretende di essere o di creare una soluzione generale per la didattica della matematica in senso teorico o pratico: ciò richiederebbe molto più dei chiarimenti presentati nel progetto.
- Non pretende di prendere una posizione coerente per la giustificazione della matematica come “ragione di essere” nelle diverse parti del sistema di formazione.

[13] Veda ad esempio Niss, M. (1999). *Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse*, Uddannelse 9: 21–29 e Niss, M. (2000). *Gymnasiets opgave, almen dannelse og kompetencer*, Uddannelse 2: 23–33.

La discussione è in che modo e sotto quali condizioni l'organizzazione dell'insegnamento della matematica debba essere situata in contesti pertinenti.

- Non pretende di discutere l'istruzione generale o il contributo effettivo della matematica come una disciplina a questo tipo di istruzione.
- Non pretende di discutere le diverse forme di competenze generali di un intellettuale, personalità e carattere sociale. Nonostante l'importanza di queste competenze, non ultimo per lo sviluppo delle competenze matematiche, essi non rappresentano il focus di questo progetto. Lo stesso vale per il mercato del lavoro e le competenze di business di carattere specifico o generale.
- Non pretende di capire le misure concrete necessarie per implementare le idee e le raccomandazioni, sia quando si tratta di strutture giuridiche, economiche o amministrative (per l'insegnamento della matematica nelle diverse fasi del sistema di istruzione), o quando si tratta di istruzioni concrete per l'insegnamento, (la valutazione, la produzione di sussidi didattici, ecc).

1.2.2 L'identificazione delle competenze matematiche

Il Programma per la Valutazione Internazionale dell'Allievo - PISA[14] (*Programme for International Student Assessment)* dell'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico – OCSE definisce il concetto di *mathematical literacy* come la "Capacità di un individuo di individuare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino impegnato, che riflette e che esercita un ruolo costruttivo".

Come descritto precedentemente, il progetto KOM ha individuato quali sono le competenze matematiche pertinenti da sviluppare, identificando otto distinte competenze; ognuna ha una propria identità ma tutte sono mutuamente collegate. Ciascuna competenza consente,

[14] Indagine internazionale promossa dall'OCSE per accertare con periodicità triennale le competenze dei quindicenni scolarizzati.

basandosi su conoscenze fattuali e concrete abilità[15], che non sono generalmente descritte nella caratteristiche effettive della competenza, di svolgere determinati tipi di attività matematiche (Niss & Højgaard, 2011). Le otto competenze sono state suddivise in due gruppi, che possono essere identificate nella figura 1. Il primo fa riferimento alla capacità di fare e di rispondere alle domande nella e con la matematica; il secondo riporta alla capacità di affrontare il linguaggio e gli strumenti matematici.

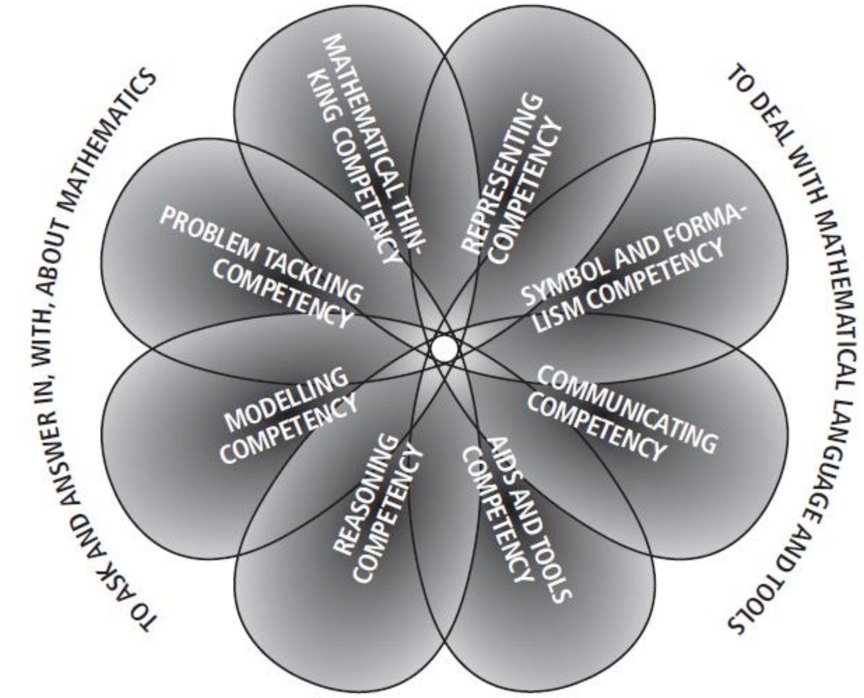


Figura 3 - Rappresentazione visiva delle otto competenze matematiche - Progetto KOM (Niss & Højgaard, 2011)

L'abilità per fare e rispondere alle domande comportano le competenze di (Niss & Højgaard, 2011; OCDE, 2006):

Pensiero e ragionamento: consiste nel formulare domande che sono tipiche della matematica ("C'è…?", "Se è così, quanti?", "Come troviamo…?"); nel conoscere i tipi di risposte che la matematica dà a tali domande; nel distinguere tra diversi tipi di enunciati (definizioni, teoremi, congetture, ipotesi, esempi, affermazioni di tipo

[15] Nelle caratterizzazioni delle singole competenze, la parola "Abilità" è talvolta usata. È necessario notare che questo è solo una substantivation linguistica di "essere capaci di", e per nulla un termine psicologico volto al riferimento alla personalità mentale di una persona, tratti generali o facoltà mentali (Niss & Højgaard, 2011).

condizionale); e nel comprendere e trattare la portata e i limiti di determinati concetti matematici.

Argomentazione: consiste nel conoscere cosa sono le dimostrazioni matematiche e come differiscono da altri tipi di ragionamento matematico; nel seguire catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nell'avere un'idea dell'euristica ("Che cosa può o non può accadere? E perché?"); e nel creare ed esprimere ragionamenti matematici.

Modellizzazione: consiste nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata; nel tradurre "la realtà" in strutture matematiche; nell'interpretare i modelli matematici in termini di "realtà"; nel lavorare con un modello matematico; nel validare il modello, nel riflettere, analizzare e valutare un modello e i suoi risultati; nel comunicare ad altri il modello e i suoi risultati (compresi i limiti di tali risultati); e nel monitorare e controllare il processo di modellizzazione.

Formulazione e risoluzione di problemi: consiste nel porre, formulare e definire diversi tipi di problemi matematici (quali problemi "puri", "applicati", "aperti" e "chiusi") e nel risolverli in vari modi. (OCDE, 2006 p. 111 – 112).

Analogamente, essendo in grado di affrontare il linguaggio matematico e i loro strumenti contemplano le competenze di:

Comunicazione: consiste nel sapersi esprimere in vari modi su questioni di carattere matematico, in forma orale e scritta e nel comprendere gli enunciati scritti od orali di altre persone circa tali questioni.

Rappresentazione: consiste nel decodificare e codificare, tradurre, interpretare e distinguere le diverse forme di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche e le relazioni tra le varie rappresentazioni; nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione a un'altra, in relazione alla situazione e allo scopo.

Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni: consiste nel decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale e nel comprendere il suo rapporto con il linguaggio naturale; nel tradurre il linguaggio naturale nel linguaggio simbolico/formale; nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengano simboli e formule; e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli.

Uso di sussidi e strumenti: consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti (comprese le tecnologie dell'informazione) che possono facilitare l'attività matematica e nel conoscerne i limiti. (OCDE, 2006 p. 112).

In questa ricerca si affrontano in modo dettagliato le competenze di modellizzazione. Le riflessioni teoriche sul concetto cosi come l'approccio in didattica della matematica e le implicazioni in classe vengono delineati nel § *La modellizzazione matematica.*

1.2.3 Le implicazioni delle competenze matematiche nella scuola

Una competenza deve permettere all'individuo di fare delle scelte ragionevoli basandosi sulla comprensione, la modellizzazione e di controllare i loro effetti in situazioni inattese e spesso caratterizzate da incertezza. È dunque particolarmente essenziale che ogni individuo, durante la sua scolarità di base in matematica, sia progressivamente messo in contatto con la complessità del mondo numerico attuale, apprenda ad orientarsi ed agire, familiarizzi con la diversità dei modi di rappresentazione che sono utilizzati (UNESCO, 2011).

La competenza matematica non può essere ridotta alla sola conoscenza della terminologia matematica, dei fatti e dei procedimenti, e neanche alle abilità necessarie per svolgere certe operazioni e applicare certi metodi, sebbene presupponga tutto ciò. La competenza matematica comporta l'uso creativo dell'insieme di tali elementi per rispondere a quanto richiesto dalle situazioni esterne (OECD, 2006). Con tutte le trasformazioni tecnologiche, sociali e culturali che si osservano negli ultimi anni, una questione pratica e relazionale comincia ad imporsi con grande evidenza. Abbiamo molti problemi da risolvere, molte decisione da prendere, molte procedure da imparare. Macedo (2005) afferma che questo non significa che dominare i contenuti non sia importante.

Sviluppare delle competenze matematiche significa utilizzare la matematica in contesti di vita reale: viaggiando, facendo degli acquisti, preparando da mangiare, tenendo la propria contabilità o valutando questioni politiche. Un cittadino si confronta spesso con situazioni nelle quali l'uso di ragionamenti di tipo quantitativo o spaziale o di altre competenze matematiche può aiutare a chiarire o a risolvere un problema.

Identificare e conoscere i processi matematici che gli studenti applicano quando cercano di risolvere un problema è un'operazione complessa. Secondo l'OECD (2006) le specifiche competenze necessarie per risolvere un problema sono in relazione alla natura del problema stesso e le competenze utilizzate si riflettono sulla soluzione trovata.

Il problema pratico affrontato dal PISA è come valutare se gli studenti di 15 anni siano "competenti" sotto il profilo matematico in termini di capacità di matematizzare. In linea di principio, per stabilire se gli studenti di 15 anni siano in grado di far uso delle conoscenze matematiche acquisite per risolvere i problemi matematici che incontrano nel mondo reale, occorrerebbe raccogliere informazioni circa la loro capacità di matematizzare in tali situazioni complesse (OECD, 2006).

La rilevazione PISA focalizza l'attenzione su problemi del mondo reale e non si limita al tipo di problemi e di situazioni che generalmente si affrontano nelle aule scolastiche. Un tale uso della matematica è basato sulle abilità apprese a scuola ed esercitate attraverso il tipo di problemi che normalmente sono presentati nei libri di testo e alla lezione. Tuttavia esso richiede la capacità di applicare tali abilità in un contesto meno strutturato, in cui le istruzioni sono meno chiare e in cui è lo studente a dover decidere quali conoscenze siano pertinenti e in che modo esse possano essere utilmente applicate. PISA non intende misurare le competenze matematiche separatamente una dall'altra. Fra tali competenze, infatti, esiste una considerevole sovrapposizione e, quando ci si serve della matematica, è generalmente necessario attingere simultaneamente a molte di queste competenze. Qualsiasi sforzo di valutare singole competenze, quindi, porterebbe a quesiti artificiosi e a un'inutile compartimentazione dell'ambito della literacy matematica (OECD, 2006, p. 112).

Il problema è che quello che si fa spesso nelle classi di matematica durante tutto l'anno è tutt'altro che lavorare con questo tipo di problemi e gli obiettivi cui fanno riferimento. In questo senso l'indagine PISA e anche INVALSI vanno a rilevare delle competenze degli studenti che sono ben poco sviluppate e prese in considerazione dagli insegnanti e dalla scuola.

Pellerey (2011) nella sua riflessione sulle competenze e la scuola italiana sottolinea che occorre ridurre la quantità dei saperi da acquisire per dare spazio a un'attività sistematica che mira a imparare a servirsene in maniera intelligente nel risolvere problemi, elaborare progetti, produrre artefatti. La tendenza, invece, è quella di aumentare i contenuti proposti per le varie discipline di insegnamento. Inoltre nella tradizione scolastica italiana ben poco spazio viene dato alle cosiddette *applicazioni* dei concetti e procedimenti propri delle varie discipline, si è più attenti a presentare una loro costruzione logica ben strutturata.

È vero che le competenze e le abilità matematiche possono modificarsi o migliorarsi nel tempo per effetto dell'esercizio, della maturazione e dell'esperienza. Le abilità non vanno dimostrate, ma accresciute. Secondo De Corte (2007), l'acquisizione delle competenze matematiche implica che gli studenti necessitano di comprendere i concetti matematici, le operazioni e le relazioni; ragionare di modo flessibile, precisa e adeguata; riflettere, spiegare e giustificare logicamente.

L'idea non è solo quella di creare, raccogliere e mettere a disposizione degli studenti documenti e strumenti di lavoro, ma anche di adattarli al percorso del profilo formativo in questione. Per affrontare l'esperienza didattica in modo nuovo, come previsto dalla Riforma della scuola superiore[16], ci vuole un percorso di formazione o di autoformazione degli insegnanti. De Corte (2007) ritiene che l'acquisizione delle competenze matematiche sia possibile a partire dalla creazione di un ambiente in classe in cui gli studenti devono avere l'opportunità di imparare la matematica come una disciplina dinamica e in costante evoluzione e non ridurla alla memorizzazione e di procedure.

Come si può osservare attraverso le diverse idee presentate, il concetto di competenza è considerato tanto **statico**, relazionato alla conoscenza approfondita, quanto **dinamico**, relazionato alla capacità di mobilitazione. Si intende che è in questa prospettiva dinamica che è possibile dar un senso all'apprendimento scolastico e alla costruzione della conoscenza, di uguale importanza alla formazione di cittadini competenti. Come sostiene De Corte (2007), il raggiungimento delle competenze implica nella disposizione dello studente all'apprendimento della matematica. L'argomento della modellizzazione matematica si inserisce nella prospettiva dinamica, permettendo un lavoro in classe che conceda la costruzione della conoscenza e delle competenze matematiche. Lo studente, una volta inserito attivamente nelle differenti tappe della modellizzazione, ha la possibilità di costruire nuove conoscenze e sviluppare quindi diverse competenze. Su questo torneremo in modo più approfondito nel prossimo capitolo.

Una domanda chiave in tutto l'ambito della scuola superiore è: in base ai Nuovi Regolamenti della Scuola Secondaria di secondo grado, come si potrebbe adattare la pratica didattica in modo da promuovere queste competenze matematiche specifiche?

1.3 Le indagini nazionali e internazionali sulla matematica

Attualmente il rendimento in matematica degli studenti viene valutato attraverso due indagini internazionali su ampia scala: TIMSS e PISA. Il Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) fornisce dati sul rendimento in matematica degli studenti relativamente alla IV classe della scuola primaria e alla III classe della scuola secondaria di I grado in vari paesi.

[16] Nuovi Regolamenti della Scuola Secondaria di secondo grado: Regolamenti di riordino dei licei, degli istituti tecnici e degli istituti professionali emanati dal Presidente della Repubblica in data 15 marzo 2010 (Registrati alla Corte dei Conti in data 1 giugno 2010)

L’indagine PISA (Programme for International Student Assessment) misura le conoscenze e le competenze matematiche degli studenti di 15 anni. A livello nazionale il rendimento viene valutato attraverso l’indagine INVALSI: l’ INVALSI *SNV* condotta nelle classi II e V della Scuola Primaria e in nella classe I della Scuola Secondaria di Primo Grado e INVALSI - *Esame di Stato I ciclo* condotta nella classe III della Scuola Secondaria di Primo Grado.

L'indagine TIMSS è condotta ogni quattro anni (1995, 1999, 2003, 2007, 2011) ed è promossa dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Assessment). Lo studio analizza il rendimento degli studenti in matematica e scienze in oltre 60 paesi: fornisce informazioni circa il progresso degli studenti attraverso i gradi di istruzione e misura i cambiamenti nel tempo (trend) degli apprendimenti. Il gruppo di studenti valutato in quarta primaria in un ciclo TIMSS raggiunge la terza secondaria di primo grado il ciclo dopo[17]. Inoltre, identifica i punti di forza e di debolezza dei sistemi educativi per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento e monitora l’implementazione dei curricoli scolastici nei Paesi partecipanti all'indagine.

L’indagine PISA (2000, 2003, 2006, 2009, 2012) è promossa dall’Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico OCSE (*Organisation for Economic Co-operation and Development*), con periodicità triennale, misura le conoscenze e le competenze degli studenti di 15 anni in lettura, matematica e scienze. Ogni ciclo di valutazione dell’indagine PISA approfondisce in particolare un ambito di competenza[18]. La matematica è stata il principale ambito di indagine nel 2003 e nel 2012 e tali indagini comprendevano domande legate all’atteggiamento degli studenti nei confronti dell’insegnamento della matematica. Non si è trattato di un semplice test sulle abilità matematiche degli studenti 15enni e di quanto essi sappiano eseguire operazioni matematiche, ma piuttosto di una valutazione su quanto essi siano in grado di riconoscere, formulare e affrontare problemi matematici in un contesto di vita reale.

Nel 2000 32 paesi diversi (28 membri dell'OCSE e 4 paesi partner) hanno partecipato alla prima indagine PISA. La partecipazione a livello mondiale è gradualmente aumentata, al PISA 2012 hanno partecipato 65 paesi di cui 34 paesi membri dell'OCSE. L’importanza di PISA deriva anche

[17] Disponibile in http://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2011/index.php?page=timss2011_it_00

[18] Gli ambiti che è sono stati approfonditi nelle indagine sono: 2000 lettura, 2003 matematica, 2006 scienze, 2009 lettura, 2012 matematica e nel 2015 sarà *approfondito quello* delle *scienze*.

dal considerare una popolazione di studenti particolarmente significativa, i 15-enni, un'età alla soglia della vita adulta e in prossimità del termine dell'obbligo scolastico nella maggior parte dei paesi, ma indipendentemente dal percorso e dal grado scolastico in cui essi sono coinvolti (INVALSI, 2012).

Come viene definita la competenza matematica (OCDE, 2006), e per rendere possibile la misurazione del grado di competenza di uno studente attraverso il modo in cui utilizza conoscenze e abilità matematiche per risolvere i problemi di vita reale, le prove sono costruite tenendo conto di tre diverse componenti (OCSE, 2003): le situazioni o i contesti in cui il problema è situato; il contenuto matematico che deve essere usato per risolvere il problema; le competenze che devono essere attivate durante il processo risolutivo attraverso il quale il mondo reale, all'interno del quale hanno origine i problemi, viene messo in relazione con la matematica.

Per quanto riguarda il contenuto matematico, nella costruzione delle prove PISA sono state prese in considerazione quattro diverse aree di contenuto, denominate: *Quantità* (si riferisce principalmente all'aritmetica); *Spazio e forma* (si riferisce principalmente alla geometria); *Cambiamento e relazioni* (si riferisce principalmente all'algebra); *Incertezza* (si riferisce principalmente alla statistica e probabilità). I risultati della rilevazione vengono forniti su cinque diverse scale di valutazione. La prima scala riguarda il punteggio raggiunto da ciascun paese partecipante sulla scala complessiva di competenza matematica; le altre quattro scale si riferiscono al punteggio ottenuto in ognuna alle quattro aree di contenuto (Quantità, Spazio e forma, Cambiamento e relazioni e Incertezza). Il punteggio valuta dal livello più basso al livello più alto della scala, partendo rispettivamente dal livello 1 (compreso tra 358 e 420 punti) al livello 6 (superiore a 669 punti). La differenza di punteggio tra un livello e l'altro è di 62 punti. Il livello 3 corrisponde al livello medio.

Come si evince dal grafico mostrato nella figura 4 in cui sono rappresentati i soli paesi OCSE, l'Italia si colloca lievemente ma significativamente sotto la media OCSE con un punteggio di 485. Questi dati fanno riferimento all'ultima indagine matematica di PISA.

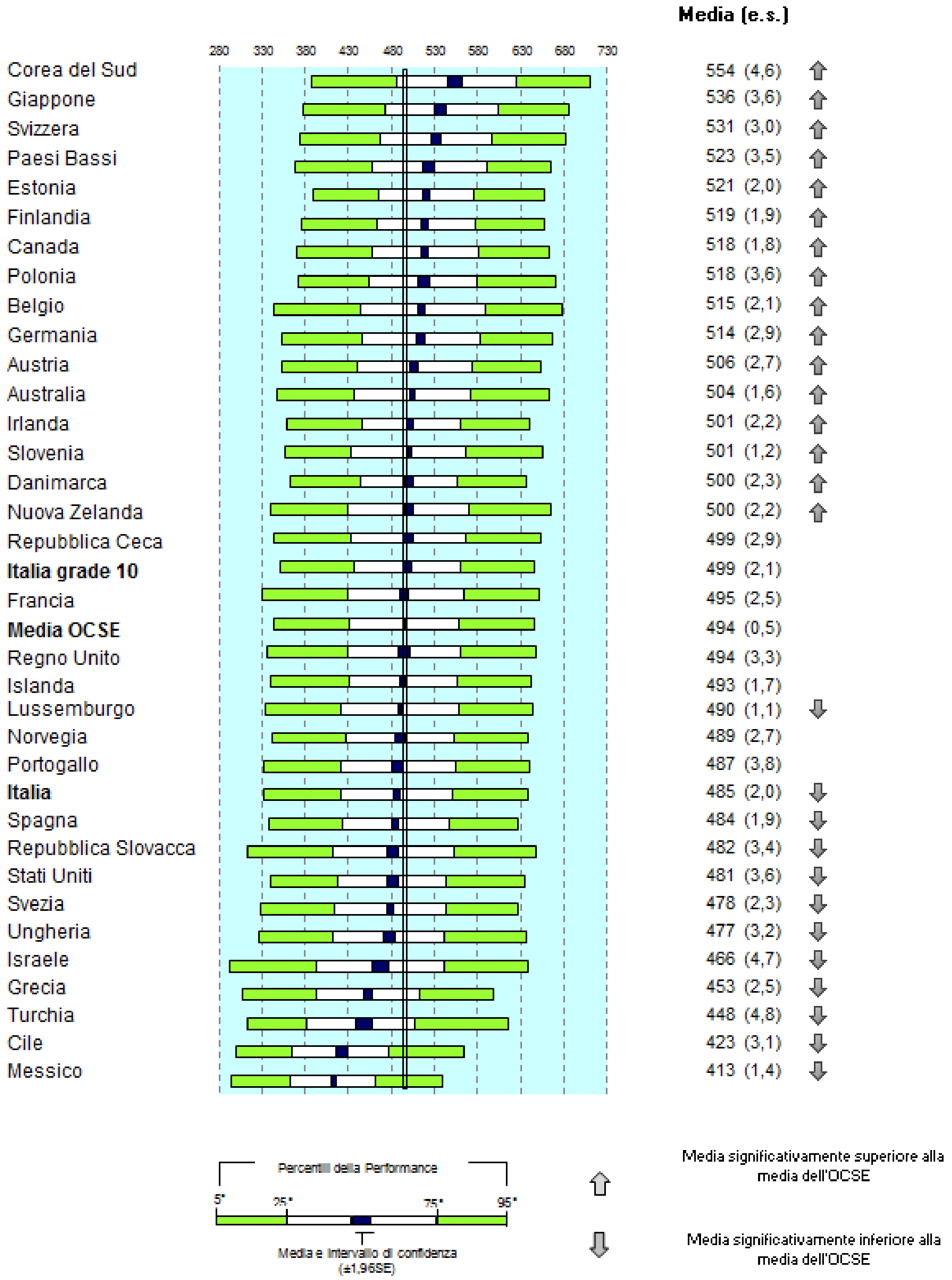


Figura 4 - Distribuzione della performance in matematica nei paesi OCSE (2012)[19]

[19] Fonte: elaborazioni INVALSI su database OCSE PISA 2012

Nella figura 5 si può osservare che l'Italia ha ottenuto buoni risultati, ma il suo punteggio rimane ancora al di sotto della media OCSE (485 punti rispetto a 494). Rispetto al PISA 2003, anno in cui la matematica è stata per la prima volta ambito principale di indagine, il nostro Paese ha aumentato la percentuale di studenti a livelli alti di competenza e diminuito la percentuale di studenti al di sotto del livello due[20].

Da quando è iniziata l'indagine PISA, si osserva una crescita nel punteggio medio degli studenti italiani. Gli studenti quindicenni in Italia regolari che partecipano all'indagine PISA che frequentano la seconda secondaria di secondo grado sono il 78,5% (OCDE, 2012).

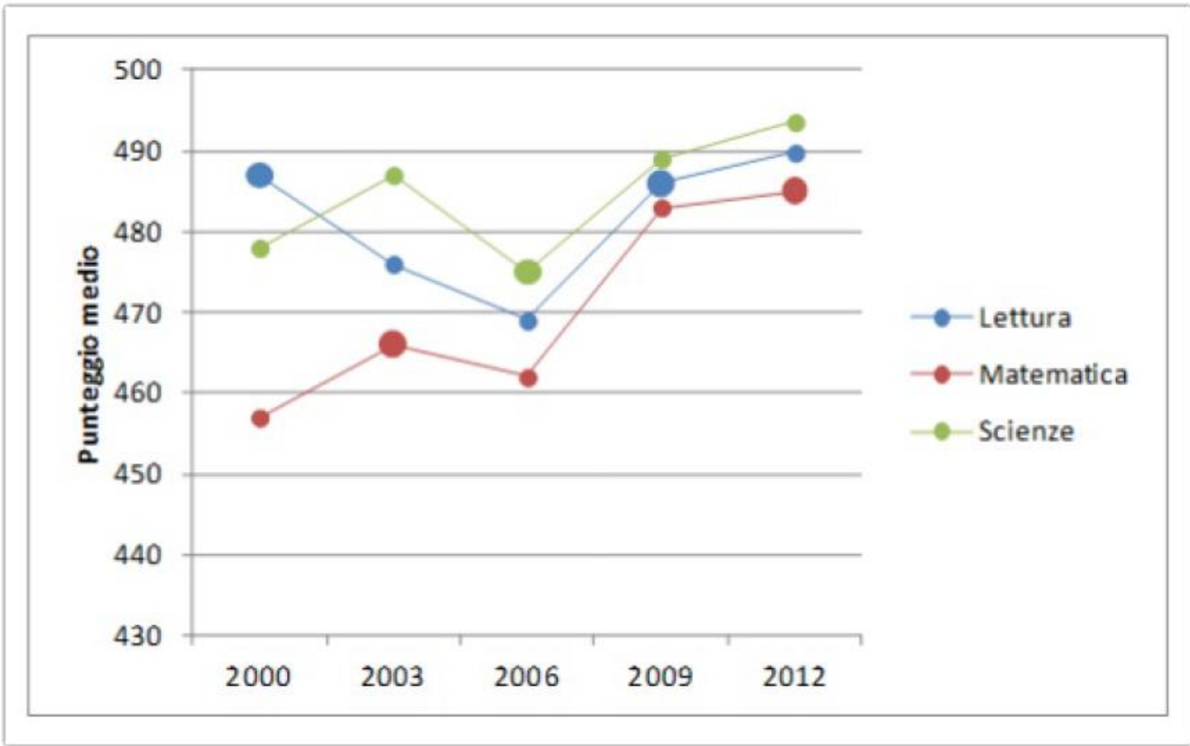


Figura 5 - Andamento dell'Italia nelle rilevazioni PISA[21].

L'Italia consegue una performance peggiore della media OCSE. Confrontando il 2012 con le prime edizioni della rilevazione PISA l'Italia evidenzia però segnali di miglioramento: tra 2006 e

---

[20] Il livello 2 è considerato il livello base di competenza matematica che è richiesto per poter partecipare pienamente alla società moderna.

[21] A un pallino di dimensioni maggiori corrisponde l'ambito che in quella rilevazione è stato oggetto del focus specifico.

2009 i risultati si innalzano e il 2012 conferma tale inversione di tendenza. Il pattern dei risultati interni all'Italia è coerente con quello delle rilevazioni nazionali condotte dall'INVALSI: ampi sono i divari territoriali, con le regioni del Nord Ovest e del Nord Est avanti, mentre il Mezzogiorno, pur con segnali di miglioramento dal 2006 in poi, specie in alcune regioni, è sotto la media nazionale, sui cui valori si situa il Centro.

Gli ambiti in cui il miglioramento è più evidente, in particolare considerando le due indagini aventi per focus la matematica (2003 e 2012) e per le quali tale maggior dettaglio è disponibile, sono quelli definiti da PISA come *"Change and relationship* e *Uncertainty and data"* corrispondenti nelle Indicazioni Nazionali, agli ambiti "Relazioni e Funzioni" e "Dati e Previsioni" che sono quelli in cui il rinnovamento curricolare introdotto dalla riforma è più evidente (INVALSI, 2012).

L'Italia consegue una performance peggiore della media OCSE. Confrontando il 2012 con le prime edizioni della rilevazione PISA l'Italia evidenzia però segnali di miglioramento: tra 2006 e 2009 i risultati si innalzano e il 2012 conferma tale inversione di tendenza. Il pattern dei risultati interni all'Italia è coerente con quello delle rilevazioni nazionali condotte dall'INVALSI: ampi sono i divari territoriali, con le regioni del Nord Ovest e del Nord Est avanti, mentre il Mezzogiorno, pur con segnali di miglioramento dal 2006 in poi, specie in alcune regioni, è sotto la media nazionale, sui cui valori si situa il Centro.

Gli ambiti in cui il miglioramento è più evidente, in particolare considerando le due indagini aventi per focus la matematica (2003 e 2012) e per le quali tale maggior dettaglio è disponibile, sono quelli definiti da PISA come *"Change and relationship* e *Uncertainty and data"* corrispondenti nelle Indicazioni Nazionali, agli ambiti "Relazioni e Funzioni" e "Dati e Previsioni" che sono quelli in cui il rinnovamento curricolare introdotto dalla riforma è più evidente (INVALSI, 2012).

Nelle indagini precedentemente descritte, per rilevare la *literacy matematica* si preferisce ricorrere a problemi in cui soluzione e interpretazione siano legate a contesti extra-matematici, dal momento che tali problemi sono i più simili a quelli che si incontrano nella vita quotidiana (OCDE, 2006). Il problema è che nella scuola questi problemi non vengono affrontati, anche se le competenze degli studenti vengono valutate attraverso questi interventi.

La modellizzazione e il rilevamento OCSE PISA

La valutazione nel rilevamento OCSE PISA è effettuato attraverso punteggi raggruppati in sei livelli di competenza, in ordine cronologico dal livello più basso al livello più alto. La competenza di modellizzazione riguarda dal livello 4 (medio alto) al livello 6. Secondo l'OCSE (2006) gli studenti di: 4° livello sono in grado di servirsi in modo efficace dei modelli dati applicandoli a situazioni concrete complesse anche tenendo conto di vincoli che richiedono di formulare supposizioni; 5° livello sono in grado di sviluppare modelli di situazioni complesse e di servirsene, di identificare vincoli e di precisare le supposizioni fatte; 6° livello sono in grado di modellizzare situazioni problematiche complesse.

Prendendo in considerazione le rilevazioni di PISA riguardo l'anno di 2006 e 2012 per la matematica e suddividendo gli studenti per livelli di competenze per quanto riguarda l'Italia si ottiene che:

Livelli di competenza	PISA 2006 % degli studenti italiani	Media OCSE 2006	PISA 2012 % degli studenti italiani	Media OCSE 2012
Livello 1	**19,3**	13,6	**16,1**	15,0
Livello 2	**25,5**	21,9	**24,1**	22,5
Livello 3	**22,1**	24,3	**24,6**	23,7
Livello 4	**13,3**	19,1	**16,7**	18,2
Livello 5	**5**	10,0	**7,8**	9,3
Livello 6	**1,3**	3,3	**2,2**	3,3

Tabella 1 – Rilevazione PISA 2006 e 2012 –Livelli di competenza matematica

Si osserva quindi che, sommando le percentuali presenti nei tre livelli più alti, nel 2006 il 19,6% degli studenti dimostra di possedere competenze di modellizzazione; nel 2012 la percentuale è pari al 26,7%.

1.4 La risoluzione di problemi matematici

1.4.1 Esercizio o problema in matematica

All’interno della didattica della matematica spesso l’esercizio matematico viene considerato come un problema; nel senso comune tale considerazione è ancora più frequente. È importante fare la distinzione fra un problema e un esercizio perché spesso anche nei libri didattici o a scuola sono affrontati come se fossero equivalenti. Inoltre, la gran parte dei documenti ministeriali e le proposte delle competenze si concentrano sulla pratica della risoluzione di problemi.

Cosa significa esattamente un esercizio? Ad esempio, l’atto del camminare è un esercizio se abbiamo già acquisito questa abilità. L’esercizio presuppone la ripetizione di un’acquisizione, in questo caso motoria, di una abilità che per chi lo esegue non costituisce un problema. Come ci spiega Macedo (2005), il camminare non è un problema di per se perché si tratta di ripetere un padronanza, uno schema già imparato. Tuttavia nel decorrere del percorso si possono affrontare dei problemi, come: dover attraversare una via affollata e essere obbligati a stare attenti alle macchine, decidere il percorso, non distrarsi con delle cose interessanti presenti nel paesaggio, ecc. Questi sono esempi di problemi perché implicano delle situazioni inaspettate, implicano una risoluzione e delle decisioni riguardo variabili che non erano previste nel corso dell’attività del camminare. Queste sono delle caratteristiche abituali nelle situazioni problematiche, l’interpretazione della sfida proposta nel contesto, la pianificazione della soluzione o delle possibile soluzioni, l’esecuzione della soluzione pianificata e anche la valutazione dei risultati (Macedo, 2005).

Ci sono dei problemi in cui la sfida non è data per il modo come si presenta, anche perché a volte è già conosciuta, ma per il suo contenuto che è nuovo, insolito, unico e originale. La realizzazione di un calcolo può costituirsi come un esercizio oppure un come un problema. Come ritiene Macedo (2005), se si tratta semplicemente di applicare delle procedure di ripetizione è un *esercizio. Problema* implica la realizzazione di un calcolo che non è stato precedentemente preparato in modo sufficiente: per la sua tipologia, per l’struttura, per il grado di difficoltà, ecc.

Blum et al. (2002) mettono in guardia sul fatto che spesso i problemi scolastici sono preventivamente strutturati, oppure rappresentano niente più che un “vestirsi” di un problema puramente matematico in parole, come un segmento del mondo reale. In questi casi la matematizzazione significa semplicemente “spogliarsi” del problema; di conseguenza il processo di modellizzazione consiste solo in tale svestizione, l'uso della matematica è ridotto ad una semplice interpretazione.

1.4.2 La risoluzione di problemi matematici

In letteratura esistono diversi studi che si occupano della risoluzione di problemi matematici. Evidenzieremo in breve i principali studi sul pensiero riflessivo di John Dewey, le strategie per risolvere i problemi di George Polya e le abilità che un individuo dovrebbe possedere per risolvere i problemi di matematica di Alan Schoenfeld.

Un’importante analisi sul problem solving è stata fatta da J. Dewey, quale ha analizzato il modo di agire degli individui nelle diversi fasi di risoluzione di un problema. In realtà l’autore nel suo libro “How we think” pubblicato nel 1933 fa un’analisi sul pensiero riflessivo impiegato nella risoluzione di problemi. Il tale analisi si sottolinea il fatto che il pensiero riflessivo si sposta tra due estremi: dalla situazione *incerta* all’inizio del problema verso la situazione *comprensibile* e risolta alla fine. Dewey approfondisce la questione di come il pensiero umano possa essere esercitato alla risoluzioni dei problemi e sostiene la necessità di sviluppare negli individui tale capacità (Stanic & Kilpatrick, 1989).

Le idee di Dewey hanno influenzato il matematico George Polya[22], il quale è occupato di analizzare i metodi generali che gli individui utilizzano per risolvere i problemi e di descrivere come tali metodi di risoluzione potrebbero essere trasferiti e insegnati. Nel suo notevole libro “How to solve it” (1945, trad. it. *Come si risolvono i problemi*, 1976) presenta uno schema di risoluzione che rappresenta una serie di suggerimenti e di domande pertinenti per imparare a

[22] György Pólya, è stato un famoso matematico ungherese della seconda metà del secolo scorso. Lavorò su una grande varietà di argomenti matematici, incluse le serie, la teoria dei numeri, il calcolo combinatorio e la probabilità. Negli ultimi tempi della sua vita cercò di caratterizzare i metodi generali che usiamo per risolvere i problemi, descrivendo come le loro soluzioni dovrebbero essere recepite e insegnate. Scrisse tre libri dal titolo: "*How to Solve It*", "*Mathematics of Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*" e "*Mathematics of Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Reasoning*".

risolvere un problema: fornisce soluzioni generali euristiche per risolvere problemi di ogni tipo, non solo quelli matematici. Tale schema aiuta gli studenti sia a risolvere il problema proposto che a sviluppare delle abilità per risolvere in modo autonomo i problemi affrontati successivamente.

Secondo Polya (1976) indipendentemente dal modo in cui la scuola fornisce le nozioni matematiche, se non si insegna agli studenti come adoperare tale nozioni, queste saranno dimenticate. L'autore sostiene che la risoluzione dei problemi sia un'abilità concreta che si apprende attraverso l'imitazione e la pratica. Polya fa una distinzione di quattro fasi principali attraverso le quali si articola la risoluzione di un problema: 1) la comprensione del problema; 2) la compilazione di un piano di risoluzione; 3) lo sviluppo e l'esecuzione di questo piano; 4) la verifica del procedimento e il controllo del risultato.

Per ognuna di queste fasi l'autore espone delle strategie euristiche per riuscire a svolgere ogni fase. Per la comprensione lo studente dovrebbe considerare le parti principali del problema con attenzione, in modi diversi per individuare i dati e le incognite. Per la costruzione del piano di risoluzione si devono identificare le relazioni esistenti tra le varie informazioni, conoscere i calcoli o le costruzioni che si devono effettuare per risolvere il problema e mobilitare delle conoscenze già imparate. L'autore ritiene anche che la terza fase sia più semplice rispetto alla costruzione del piano: si devono svolgere in modo preciso tutte le diverse tappe che dovrebbero portare alla soluzione. La verifica del risultato è una fase importante, attraverso l'analisi del procedimento che ha portato la soluzione, lo studente potrebbe approfondire le proprie conoscenze e sviluppare la propria abilità nel risolvere problemi (Polya, 1976).

Alan H. Schoenfeld è stato il primo autore ad analizzare le abilità che un individuo dovrebbe possedere per risolvere problemi di matematica. Nel suo libro *Mathematical Problem Solving* risalta che per capire ed insegnare le abilità di risoluzione dei problemi bisogna capire "*che cosa significa pensare in modo matematico*" e "*come si possono aiutare gli studenti a fare questo*". Schoenfeld (1985) sostiene che se in un compito di matematica un individuo ha accesso immediato ad uno schema risolutivo, quel compito deve essere considerato un esercizio e non un problema.

Per spiegare il comportamento di un individuo durante la risoluzione di un problema Schoenfeld (1985) sostiene che sia necessario far ricorso a quattro diverse categorie di conoscenze e comportamenti:

1) *Resources*: Sono le conoscenze matematiche di base che un individuo possiede;

2) *Heuristics*: Includono tutte le tecniche generali di risoluzione dei problemi che sono familiari allo studente;

3) C*ontrol:* Si riferisce alla questione di come un individuo sceglie e utilizza le risorse che ha a disposizione;

4) *Belief systems*: Sono il complesso delle convinzioni che l'individuo porta con se.

Le regole empiriche che consentono di risolvere con successo un problema e che rappresentano dei suggerimenti generali che aiutano lo studente a comprendere e a risolvere un problema, definite da Polya come strategie euristiche, sono sostenute anche da Schoenfeld come una procedura da insegnare agli studenti: le procedure devono essere insegnate non soltanto come strategie generiche di risoluzione, ma anche in forme di sotto-strategie con una precisione di modo che possano imparare a usarle nella risoluzione dei problemi. L'autore evidenzia il fatto che il rendimento di certi studenti nella risoluzione dei problemi è influenzato da diverse *misunderstandings* (tradotto in italiano come concezioni errate) riguardo alla matematica. Schoenfeld (1985) usa il concetto a proposito dei problem solving, insieme alle convinzioni o per spiegarne le interazioni. Questo si osserva quando gli studenti sono in grado di applicare in modo meccanico alcune procedure imparate: la maniera applicata è corretta, ma la loro comprensione è praticamente nulla (p.368).

Tuttavia rimane ancora la questione di come queste strategie debbano costruirsi attraverso le interazioni reali dello studente, invece di essere insegnate dal docente come tappe da seguire.

Per quanto riguarda il sistema di convinzioni degli studenti se ne parlerà più avanti quando si affronteranno specificatamente le concezioni erronee, ingenue o divergenti presenti nel processo di modellizzazione matematica. Una osservazione frequente fatta dagli insegnanti è che spesso lo studente non riesce a leggere un problema di matematica come un problema, cioè la domanda o il compito proposto non implica una sfida.

In un modo generale, le attività di modellizzazione matematica emergono da una situazione problematica del quotidiano; il suo svolgimento è realizzato attraverso la definizione e esecuzione di strategie del soggetto nei confronti del problema. In questo senso la modellizzazione riguarda anche l'analisi di una situazione problema, essendo il soggetto l'autore delle strategie di risoluzione da adottare.

CAPITOLO 2 LA MODELLIZZAZIONE MATEMATICA E LE SUE APPLICAZIONI

2.1 Definizioni teoriche in matematica

Quasi tutte le domande e i problemi di didattica della matematica, ovvero domande e problemi riguardanti l'apprendimento umano e l'insegnamento della matematica, influenzano e sono influenzati dai rapporti tra la matematica e il mondo reale[23] (Blum et al. 2002).

La modellizzazione matematica è il processo che consente di selezionare particolari aspetti di una situazione reale e rappresentarli con un determinato linguaggio e stabilirvi relazioni di tipo matematico (Bassanesi, 2002); tale processo, quindi, traduce problemi reali in problemi matematici attraverso il raggiungimento di un modello. I problemi di modellizzazione sono autentici, complessi e aperti a problemi che si riferiscono alla realtà (Maaß, 2006). È importante riflettere sul fatto che nella matematica applicata anche i problemi non realizzabili fisicamente, e cioè irreali, sono passivi di modellizzazione. Ciò si verifica ad esempio nello studio applicato dell'algebra o dei numeri complessi, istrumenti di fondamentale importanza per l'ingegneria moderna, fisica o chimica ma dove chiaramente si raggiungono modelli anche di natura irreale. Il processo di modellizzazione è dunque, un argomento fondamentale della matematica.

Nel descrivere un pensiero o una situazione a parole si costruisce un modello che raramente rappresenta il tutto; ne vengono astratti i concetti sostanziali che trasmettono il significato di quello che è essenziale esprimere. I modelli matematici possono prendere la stessa forma semplificata, rappresentando il contesto naturale attraverso l'utilizzo del più significativo sottosistema di variabili che vi fanno parte del contesto naturale. Una descrizione può essere fatta anche adottando un linguaggio grafico o magari quello metaforico ed è naturale

[23] Per mondo reale si intende tutto ciò che ha a che fare con la natura, la società o la cultura, compresa nella vita quotidiana, così come la scuola e le materie universitarie o discipline scientifiche e accademiche diverse dalla matematica (Blum et al. 2002).

immaginarli con un grado di complessità di rappresentazione maggiore o minore. Un modello[24] è l'astrazione di un processo, se il modello viene espresso attraverso il linguaggio matematico si tratta quindi di un *modello matematico.*

L'applicazione della matematica al mondo esterno avviene quando si adoperano conoscenze o procedimenti matematici su un contesto naturale, sociale o culturale, allo scopo di capirne meglio il funzionamento, prendere decisioni o spiegare fenomeni (Blum et al. 2007). Per applicare la matematica è necessario un modello, sia esso implicitamente o esplicitamente identificato. In tale contesto, per modello si intende l'insieme formato dal dominio extra-matematico (D) e il dominio matematico (M) e la loro relazione[25]. La figura mostrata di seguito rappresenta l'idea dei processi di modellizzazione ed applicazione (Blum et al, 2002; 2007). L'applicazione implica spesso partire da un fatto matematico isolato, puro, che non è mai stato utilizzato, ma del quale, scontrandosi col mondo esterno è possibile scoprire il ruolo[26].

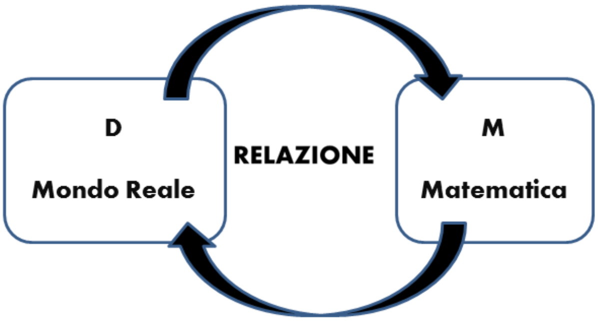


Figura 6 - Processi di modellizzazione ed applicazione

Il ciclo di modellizzazione consiste in: assumere come rilevante un gruppo di elementi in D, come ad esempio fenomeni verificati o campioni raccolti, e trasporli nel dominio matematico M. In seguito essi vengono trattati con gli usuali metodi matematici; i risultati

[24] Un modello di un sistema esprime la conoscenza di un fenomeno e come tale consente di rispondere a domande sul sistema senza la necessità di compiere un esperimento. Esso costituisce quindi un potente mezzo di previsione e descrizione del comportamento di un sistema. Tipicamente il modello matematico di un sistema consiste in un'equazione differenziale che stabilisce una relazione tra le variabili d'ingresso e le variabili d'uscita di un sistema. Il legame matematico consente di determinare le uscite a partire dagli ingressi e quindi di studiare la dinamica o il comportamento di un sistema in un certo ambiente.

[25] Come già detto, non necessariamente tutti gli elementi di D hanno una corrispondenza su M.

[26] Tornando al caso dei numeri complessi, soltanto nel dopo guerra si raggiunge l'uso reale di questa classe numerica.

ottenuti sono nuovamente trasportati su D per essere interpretati e valutati di modo da constatare se il modello sia soddisfacente. La modellizzazione matematica è formata quindi da un processo circolare con una sequenza di procedure da svolgere. Nonostante la modellizzazione matematica sia definita come *il processo che porta da una situazione problema ad un modello matematico*, è diventato comune usare tale nozione anche per l'intero processo (Blum et. al. 2002).

Analizzando la letteratura sulla modellizzazione e le sue applicazioni si possono trovare differenti modi di rappresentarne i cicli; tali cicli sono diversi tra loro perché dipendono da come viene intesa la modellizzazione e della complessità dei compiti affrontati.

Una delle descrizioni schematiche più complete del ciclo di modellizzazione è stata introdotta da Blum e Leiss (2005, in Borromeo Ferri 2006). Nella presente ricerca si adotta tale rappresentazione.

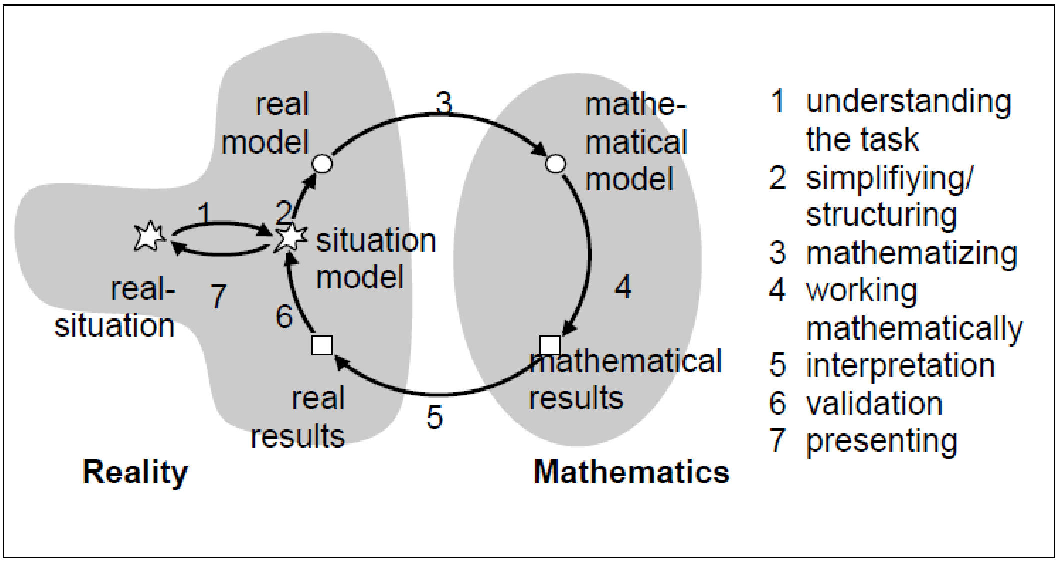


Figura 7 - Ciclo di modellizzazione di Borromeo Ferri (2006, p. 87)

Il processo è diviso in sei fasi e transizioni, vale a dire il passaggio da una fase ad un'altra, di seguito presentate:

- **Real situation:** La situazione reale è la problematica in sé, quella da risolvere.
- **Situation model:** è la rappresentazione mentale della situazione data nel problema.
- **Real model:** è la rappresentazione del modello reale.

- **Mathematical model**: è l’elaborazione del modello matematico che rappresenta il modello reale.
- **Mathematical results:** è l’interpretazione dei risultati trovati nella risoluzione.
- **Real results**: è la corrispondenza della soluzione trovata al problema proposto.

Il passaggio di una fase all’altra è realizzato attraverso le transizioni:

1 Concettualizzazione: Quando si presenta un problema, spesso in forma di testo, lo si deve analizzare e identificare le problematiche in questione. Nel riconoscere un problema occorre l’analisi di qualche episodio o circostanza della vita reale e l’individualizzazione della problematica da risolvere, per poter descriverla, ad esempio, a parole.

2 **Strutturazione:** questa procedura è più complessa, bisogna capire il contesto e identificare quello che deve essere risolto. Per comprendere il problema e successivamente formulare il modello è essenziale rispondere alle domande:

- Che cosa si desidera trovare?
- Quali sono i presupposti?
- È possibile stabilire opportuni collegamenti tra ciò che si conosce e ciò che si desidera conoscere?

In questa fase si cerca di ridefinire il problema in modo che siano identificati gli aspetti essenziali della problematica; identificando dal linguaggio non matematico aspetti come: possibili relazioni tra i dati, esplicite o implicite che siano; quale sono le grandezze da determinare e i dati presenti nel problema (costanti e variabili); stabilire connessioni attraverso l’elaborazione di sotto problemi.

3 Matematizzazione: Consiste nel “tradurre” tutte le indicazioni del problema analizzato in linguaggio matematico, utilizzando strutture e simboli per quelle che sono le variabili del problema.

Per la creazione di un modello è necessario:

- Organizzare i dati (costruzione di liste, alberi, tabelle, grafi)

- Traduzione delle relazioni in forma matematica (equazioni, disequazioni, relazione logiche ecc).

4 Lavoro matematico: Dopo aver costruito il modello matematico, che può prendere la forma di una formula, una funzione, una equazione o un grafico, si mette in atto la strategia matematica. Spesso si tratta di un procedimento algoritmico formato da deduzioni logiche, verifiche statistiche o calcoli numerici o simbolici, con l'intuito di arrivare al risultato.

5 Interpretazione: I risultati ottenuti sulla base del modello sono interpretati per rispondere alle domande in coerenza al contesto del problema analizzato inizialmente.

6 Validazione: Comprendere se il modello è utile e ben funzionante e decidere se ci possono essere risultati reali.

7 Presentazione: Una volta stabilito che il modello è valido e che la soluzione è accettabile, la soluzione viene presentata in termini reali, riportandola al linguaggio iniziale.

A volte soltanto la prima parte del processo, cioè la scelta del modello e la matematizzazione, viene nominata modellizzazione matematica, ma normalmente con questo termine si intende il ciclo completo, dalla concettualizzazione alla presentazione (Borromeo Ferri, 2006). Nel processo di modellizzazione matematica, durante le differenti tappe dello svolgimento, gli studenti hanno bisogno di analizzare le informazioni e usarle di modo opportuno sotto forma dei diversi modi di rappresentazione conosciute, siano esse algebriche, grafiche, geometriche o numeriche. Nella fase successiva si passa alla formulazione dei problemi, allo svolgimento dei modelli e alla ricerca delle soluzioni per finalmente passare alla formulazione e giustificazione delle congetture utilizzate analizzando e interpretando i risultati. Durante il processo di sviluppo delle attività di modellizzazione gli studenti costruiscono nuove conoscenze e diversi competenze.

Modellizzare e applicare in matematica sono processi più profondi e complessi che lavorare con i problemi a parole o le applicazioni standard che appaiono spesso nella pratica matematica. Conosciuti col termine inglese *word problems*, i problemi a parole consistono nella verbalizzazione di un problema puramente matematico che risulta mascherato dal problema reale, pur non essendolo. Secondo Resta (et al., 2012) questi problemi a parole, se utilizzati consapevolmente, possono essere un utile esercizio di interpretazione, cioè di un'attività interna al ciclo di modellizzazione. Bisogna fare attenzione al rischio di relazionare un'immagine irrealistica e forzata della matematica e dei problemi a cui essa vuole rispondere. Le applicazione standard sono degli esempi illustrativi presentati all'esposizione di una regola, un elemento, un procedimento matematico: non sono attribuibili al concetto di modellizzazione perché il modello matematico da utilizzare è già pronto e presentato allo studente.

2.2 Breve storia della modellizzazione matematica

Nel 1908, anno della formazione della Commissione Internazionale d'Istruzione Matematica (ICMI), erano oggetto di dibattito proprio i temi del rapporto matematica-realtà e del laboratorio di matematica.

L'insegnamento delle applicazioni della matematica ha sempre accompagnato quello della matematica stessa, fin dai tempo degli antichi popoli mesopotamici, arabi, egizi, cinesi e indiani, nei problemi vitali come la misurazione della terra o dei cicli lunari (Blum et al. 2007).

Werner Blum nel capitolo introduttivo (Blum et al. 2007) fa una sintesi sull'evoluzione storica della modellizzazione: nella cultura greca si osserva l'elevato livello di astrazione raggiunto nel periodo ellenistico, come Archimede o Eratostene, e si identifica una grande attenzione per quello che riguarda l'applicazione della modellizzazione. Nei volumi di matematica pubblicati dal Medioevo fino all'Ottocento si trovano degli esempi applicativi che coinvolgono dall'astronomia alla balistica. La fisica e le altre scienze erano studiate assieme alla matematica, cosicché le applicazioni e la modellizzazione erano intrinseche nell'insegnamento della propria matematica. Le distinzioni tra la matematica e le sue applicazioni non erano proprio esplicite come avviene oggi.

Nel corso dell'Ottocento la matematica assume una posizione completamente autonoma e separata con l'avvento delle geometrie non euclidee, quelle che negano uno o più dei postulati di euclidei sulla geometria piata, e il successivo sviluppo dell'analisi astratta e della matematica pura. Da questo momento diventa esplicito il riferimento a un'"applicazione" della matematica e si segnala la necessità di studiare sia la matematica pura che quella applicata (Blum et al. 2007).

Negli anni '20 c'è stato un ritorno allo studio della matematica teorica con l'intento di svilupparla scientificamente e tecnicamente, senza l'istantaneo utilizzo pratico, cosi da avere una formazione mentale e personale più completa. L'enfasi sull'attività e l'applicazione arrivò in seguito. Fino alla fine degli anni '40 lo sviluppo era concentrato sulla matematica pura; alla metà degli anni '50 nacquero due nuovi movimenti di pensiero: l'anglosassone e il bourbakista. Il pensiero di origine anglosassone era oriundo dal mondo pratico industriale, laureati che sapevano usare la matematica per il soddisfacimento dei bisogni del quotidiano. L'orientamento bourbakista, invece, era parte dall'insegnamento rinnovato della matematica teorica post anni '40 (Blum et al. 2007).

Le correnti di origine anglosassone e di orientamento bourbakista si sono concentrate in modi diversi: la prima è stata portata ad un sviluppo dell'insegnamento della modellizzazione, principalmente in ambienti scientifici e ingegneristici; la seconda a un'enfasi verso la matematica pura e sulla sua autonomia formale (Blum et al. 2007). Negli anni successivi diventa sempre più rilevante e prioritaria quella dell'insegnamento esplicito dell'applicazione della matematica nell'educazione, entrando nella prassi dell'insegnamento e presente nei curricula di diversi paesi come: Regno Unito, Australia, Danimarca, Austria, Germania.

2.2.1 La modellizzazione nella ricerca educativa:

Le ricerche sull'educazione matematica sulla modellizzazione hanno visto crescere l'interesse negli ultimi 50 anni. Le motivazioni per includere le componenti della modellizzazione nell'educazione matematica sono state presentate durante la fine degli anni 60' e oggi sono presenti in molti curricula in tutto il mondo (Blum et al. 2007).

Nel suo progresso si possono identificare tre fasi principali: la prima coincide con l'inizio di una conferenza organizzata da Hans Freudenthal nel 1968 puntando sulla presa di coscienza sul tema; nella seconda, dalla metà degli anni '70 fino a tutti gli anni '90 predominò lo sviluppo delle ricerche teoriche con Mogens Niss e Werner Blum[27] e quelle storiche con Gabriele Kaiser e Rudolf Messner[28], l'introduzione del tema nei curricula, soprattutto negli Stati Uniti e nel Regno Unito. La terza fase viene rappresentata da una Comunità Internazionale di Insegnamenti e Studiosi di Modellizzazione e Applicazione nell'Educazione Matematica, che dal 1983 organizza una serie di conferenze internazionali sul tema: International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA).

Complessivamente, nel corso degli ultimi decenni c'è stato molto lavoro nella didattica della matematica centrata sull'applicazione della modellizzazione. L'obiettivo principale di molte proposte di ricerca sono state: la costruzione e la sperimentazione di esempi di modellizzazione matematica per l'insegnamento e sperimenti, la scrittura di libri di testo orientati alle applicazioni e implementazioni della modellizzazione nei programmi esistenti o in via di sviluppo innovativo e la sua orientazione nei curriculum scolastici (Blum et al. 2002).

Attualmente esistono specifiche applicazioni nelle ricerche di attività di modellizzazione: l'identificazione delle difficoltà e delle strategie utilizzate dagli studenti quando trattano problemi di applicazioni; la chiarificazione di concetti matematici pertinenti; le relazioni del concetto all'interno delle competenze ; l'osservazione e l'analisi di insegnamento e di studio dei processi di apprendimento; i processi interativi emersi in lezioni orientati di modellizzazione (Blum et al. 2002).

Nonostante la ricerca riesca a produrre un interessante studio, con molte possibilità concrete di applicazione che si affiancano alla pratica in modo progressivo, esiste ancora una distanza tra quello che si ricerca e quello che realmente se applica o si riflette nella prassi. Le nozioni di modelli matematici e di modellizzazione sono prescritti nel curriculum come aspetti centrali della matematica ma, come sostiene Fredj (2012) non ci sono specifiche definizioni dei loro significati. Questa mancanza di definizione nel curriculum può aprire a diverse interpretazioni

[27] Si veda ad esempio Blum W., Niss M. (1991), Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects - state, trends and issues in mathematical instruction. *Educational studies in mathematics*, 22.

[28] Si veda ad esempio Kaiser G., Messner R. (1986). Anwendungen im Mathenatikunterricht, 2 voll., Bad Salzdetfurth, Franzbecker.

circa le nozioni tra insegnanti, studenti, autori di esami nazionali, autore di libri di testo di matematica e altre persone legate alla didattica della matematica (Frejd, 2012).

Precedenti discussioni sulla modellizzazione nella didattica della matematica

All'incirca vent'anni fa, Kaiser-Messmer (1986, tratto da Kaiser & Sriraman, 2006) hanno dimostrato che, in quei tempi, all'interno della discussione sulle applicazioni e modellizzazione, diverse erano le prospettive nei paesi di lingua germanica. Due erano le principali:

- Una **prospettiva pragmatica**, di fondo utilitario, che fa particolare attenzione all'abilità dello studente ad applicare la matematica nel risolvere problemi pratici. Questa visione ha in Pollak la figura di riferimento.
- Una **prospettiva scientifica e umanistica**, orientata verso la matematica come una scienza eppure fondata sugli ideali umanistici di educazione, dove al centro risiede la capacità di creare le opportune relazioni tra la realtà e il mondo matematico. I primi studi di Hans Freudenthal (1973, tratto da Kaiser & Sriraman, 2006) servono come riferimento per questo approccio.

Un terzo filone deriva dai due sopracitati, si chiama **prospettiva integrativa**, e come suggerisce il nome, propone che sia l'applicazione che la modellizzazione dovrebbero servire in armonia alle distinte prospettive (Blum & Niss, 1991).

Kaiser e Messmer (2006) hanno isolato diverse prospettive, varianti tra di se rispetto alla attenzione con riguardo all'applicazione e la modellizzazione; distinguendo obiettivi centrali riguardo la pedagogia, la psicologia, al soggetto e alla scienza.

L'attuale dibattito sulla modellazione in didattica della matematica

L’attuale dibattito segue le differenziazioni presentate in precedenza e si basa sull’analisi della letteratura prevalentemente generata da ICMI e ICTMA. Il quadro distingue in modo sintetico le varie prospettive all’interno delle discussioni della modellizzazione in ambito educativo:

Le prospettive della modellizzazione in ambito educativo (Kaiser & Sriraman, 2006, p.304)			
Nome della prospettiva	Obiettivi centrali	Relazioni con prospettive precedenti	Background
Realistic or Applied modelling	Pragmatico e utilitario: Promuove la comprensione dei problemi del mondo reale attraverso le competenze di modellizzazione.	Prospettiva pragmatica di Pollak	Pragmatismo Anglo-sassone e mathematica applicata
Contextual modelling	Relazionato al soggetto e obiettivi psicologici. Soluzione di problemi del mondo reale.	Approcci relazionati al trattamento di informazioni, ne derivano approcci sistematici, algoritmici	Dibattito americano su problem solving, cosi come la pratica scolare quotidiana e esperimenti psicologici di laboratorio.
Educational modelling a) didactical modelling and b) conceptual modelling	Relazionato al soggetto e obiettivi psicologici. a) La strutturazione del processo di apprendimento e la sua relativa promozione. b) Introduzione e sviluppo di concetti	Prospettive integrative (Blum, Niss) e ulteriori sviluppi dell'approccio scientifico e umanistico	Teorie della didattica e dello apprendimento
Socio-critical modelling	Obiettivi pedagogici come comprensione critica del mondo circostante.	Prospettiva emancipatrice	Approcci socio-critici nella sociologia politica.
Epistemological or theoretical modelling	Obiettivi chiaramente teorici. La promozione dello sviluppo teorico.	Prospettiva scientifica e umanistica nei “primi” studi Freudenthal.	Epistemologia Romana

La seguente prospettiva può essere descritta come un tipo di meta-prospettiva:

Cognitive modelling	Obiettivi di ricerca: l'analisi e comprensione del processo cognitivo che apparve durante il processo di modellizzazione Obiettivi psicologici: la promozione del processo di ragionamento matematico		Psicologia Cognitiva

	attraverso l'utilizzo di modelli come immagini mentali o anche figure fisiche oppure enfatizzando la modellizzazione come un processo mentale, tipo l'astrazione o la generalizzazione.		

2.3 La modellizzazione nel contesto della matematica scolastica

Oggi i modelli matematici e la modellizzazione hanno invaso una grande varietà di discipline, a parte alcuni campi, come ad esempio la storia o la danza, in cui i modelli matematici non giocano nessun ruolo. Questo è stato sostanzialmente sostenuto e velocizzato dalla disponibilità di strumenti elettronici, come calcolatrici e computer (Blum et al. 2002).

Nella disciplina della matematica la modellizzazione viene assunta come una strategia di insegnamento e di apprendimento per sviluppare il contenuto; transitando tra il mondo reale e quello del mondo matematico, si espone agli studenti l’articolazione esistente fra la teoria e la pratica, consentendo loro di comprendere i contenuti matematici, e inoltre aiutandoli nella costruzione delle propria conoscenza perché la strategia propone di iniziare l’analisi a partire dal reale, cioè, della realtà degli studenti.

Attualmente le applicazioni di modellizzazione svolgono un ruolo molto importante in classe in diversi paesi, molto di più che in passato. Intanto, esiste ancora un notevole divario tra gli ideali del dibattito educativo e l’innovazione del curriculum scolastico da un lato, e l'insegnamento praticato tutti i giorni dall’altro. In particolare, le autentiche attività di modellizzazione sono ancora piuttosto rare nelle lezioni di matematica (Blum et. al. 2002).

Esiste un consenso per quanto riguarda l'insegnamento della matematica, quello di focalizzarsi sulla promozione della conoscenza matematica e la capacità di usarla. Questo significa andare oltre le semplici risoluzioni dei problemi matematici e proporre questioni spesso senza significato per lo studente (Biembengut & Hein, 2013). Lavorare con la modellizzazione implica portare il discente ad acquisire una migliore comprensione della teoria matematica e della natura del problema da modellizzare.

In questo modo la didattica della modellizzazione può essere una maniera per risvegliare l'interesse sia negli studenti che negli insegnanti verso argomenti matematici che ancora ignorano e, allo stesso tempo, imparano l'arte di modellizzare matematicamente. Inoltre, da la possibilità agli studenti di affrontare le situazioni problematiche attraverso la ricerca, sviluppando il loro interesse e affilando il loro senso critico (Biembengut & Hein, 2013).

Secondo Bazzanesi (2002) la modellizzazione, nei suoi vari aspetti, è un processo che combina teoria e pratica e motiva i suoi partecipanti alla ricerca del comprendere la realtà che li circonda e cerca di agire su di esso e renderne più significativo. La modellizzazione viene assunta come una metodologia di insegnamento-apprendimento della matematica in qualsiasi livello scolastico, dalla scuola elementare ad un corso di master. Non ci sono restrizioni per la sua applicazione. Biembengut e Hein (2013) sottolineano degli obiettivi raggiunti nel lavorare con la modellizzazione nella disciplina di matematica:

- avvicinarsi ad un'altra area di conoscenza della matematica;
- sottolineare l'importanza della matematica per l'istruzione degli studenti;
- generare l'interesse per la matematica prima dell'applicabilità;
- migliorare la comprensione dei concetti matematici;
- sviluppare la capacità di risolvere problemi;
- stimolare la creatività.

In classe la modellizzazione viene messa in atto nello sviluppo dei contenuti del programma disciplinare. Per sviluppare i contenuti si utilizza un tema che viene scelto dal professore o dagli studenti. L'insegnamento della matematica attraverso la modellizzazione, in una prospettiva critica, non è volto soltanto a indirizzare gli studenti alla costruzione di modelli matematici, ma nel dare loro la possibilità di interpretare la matematica (Biembengut & Hein, 2013); presenta una pratica di insegnamento che non sollecita una sequenza rigida dei contenuti, neanche di tempo o spazio: può essere presentata in diversi momenti dell'anno scolastico (Bassanezi, 2002). Il fatto di poter essere affrontata in qualsiasi momento è un vantaggio riguardo l'applicabilità.

Una domanda che ci poniamo è: come si potrebbero introdurre i giovani studenti al mondo incerto della modellizzazione matematica con cura e sensibilità? A questo proposito Herget &Torres-Skoumal (2006 in Herget & Richter, 2012) propongono un metodo particolare: l'impostazione di compiti basati principalmente a ritagli di giornale che siamo abituati a chiamare "Problemi Pittorici" o le "Illustrazioni Matematiche". Un esempio di questi compiti viene riportato nel disegno della ricerca: si tratta della seconda attività di modellizzazione utilizzata come strumento investigativo nell'indagine eseguita con gli studenti.

L'identificazione di attività con questo potenziale e la conseguente introduzione nelle classi di matematica sono degli aspetti importanti; Sfard (1991) sottolinea che le apparenti difficoltà che molti allievi mostrano in relazione al loro apprendimento indica che esistono differenti modi di pensare matematicamente: "La matematica sembra andare oltre le discipline scientifiche, ci deve essere qualcosa di veramente speciale e unico nel tipo di pensiero coinvolto nella costruzione di un universo matematico" (p. 2, trad. nostra).

La discussione sulla natura e il ruolo della modellizzazione è spesso troppo semplificata perché secondo (Burkhardt et al., 2006) l'insegnamento della matematica è influenzato principalmente dai matematici teorici: questi considerano la modellizzazione come una loro materia, ma hanno un atteggiamento verso la matematica molto diverso dalla gran parte dei cittadini che la usano nella vita quotidiana e nel lavoro. Per questi autori, la ragione per cui la matematica è presente in modo cosi compatto nei curricula scolastici è la percezione della sua utilità.

Secondo Burkhardt e gli altri autori (2006) la ragione per cui la matematica è presente in modo intenso nei curricula scolastici sia storicamente sia ai nostri giorni è la percezione della sua utilità nel risolvere i problemi estranei alla matematica: in sintesi nella nostra società tecnologica sarà sempre più importante educare dei pensatori e non degli esecutori, capaci di usare le proprie conoscenze matematiche per scopi non matematici.

Tutti fanno modellizzazione matematica fin da bambini e continuano a farla nel mondo adulto, ma le persone non individuano in queste attività la modellizzazione che coinvolge la sua risoluzione; tale difficoltà è affrontata anche dagli insegnanti di matematica. Questa mancanza di consapevolezza potrebbe non essere importante se l'educazione scolastica sapesse costruire a partire di queste basi informali i processi di sviluppo alle abilità degli studenti nel usare la matematica per capire e risolvere i problemi pratici; purtroppo la maggior parte dei curricoli fallisce nel trasmettere tutto ciò (Burkhardt et al., 2006).

Rendere le persone in grado di usare la loro conoscenza matematica autonomamente per affrontare i problemi pratici è una sfida didattica. I ragazzi hanno bisogno di modellizzare situazioni pratiche scegliendo e usando la matematica presa da tutto il loro bagaglio di conoscenze, e non sull'argomento che si sta affrontando in classe in quel periodo.

2.4 La modellizzazione come forma di competenza

> "L'attività di modellizzazione dovrebbe essere una via per esprimere le competenze matematiche e simultaneamente sviluppare nuove competenze" Lingefjard, 2006.

Come presentato nel capitolo 1 la competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità di usare modelli matematici di pensiero e di rappresentazione grafica, la capacità di comprendere ed esprimere adeguatamente informazioni qualitative e quantitative, di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi e di progettare e costruire modelli di situazioni reali[29].

Secondo l'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico -OECD nella disciplina della matematica si identificano otto principali competenze, che sono distinte ma non indipendenti (OCDE, 2007). La competenza modellistica è una delle otto e viene nominata come una competenza per: *Poter comprendere, valutare e costruire dei modelli matematici*; questa comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero logico e spaziale e modelli matematici di presentazione come formule, modelli, costrutti, grafici, carte, ecc…[30].

Il Quadro di Riferimento di Pisa 2006 definisce la competenza della modellizzazione come "la strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata; nel tradurre la realtà in strutture matematiche; nell'interpretare i modelli matematici in termini di realtà; nel lavorare con un modello matematico; nel validare il modello, nel riflettere, analizzare e valutare

[29] Regolamento del Nuovo Obbligo di Istruzione fino a 16 anni (D.M. del 22-08-2007).

[30] Raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente.

un modello e i suoi risultati; nel comunicare ad altri il modello e i suoi risultati e nel monitorare e controllare il processo di modellizzazione" (OCDE, 2007 p. 112).

L'argomento della modellizzazione appare nella definizione di competenza matematica del Decreto Ministeriale (22/08/2007, p.15) "consiste nell'abilità di individuare e applicare le procedure che consentono di esprimere e affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati. La competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero… di progettare e costruire modelli di situazioni reali"[31]. Inoltre, viene evidenziato il fatto che la competenza non si limita a conoscenze e operatività, ma ha un significato più complesso.

Riguardo la disciplina della matematica, la modellizzazione è presente nelle Indicazioni Nazionali per il Curriculo[32] della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (D.M. n. 89 del 20 marzo 2009):

> Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni…) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti.

L'argomento della modellizzazione nella scuola secondaria di primo grado si estende anche all'astronomia e scienze della terra:

> Osservare, modellizzare e interpretare i più evidenti fenomeni celesti attraverso l'osservazione del cielo notturno e diurno, utilizzando anche planetari o simulazioni al computer.

La pratica della modellizzazione matematica è presente in tutte le indicazioni curriculari della scuola superiore di secondo grado: Istituti Tecnici, Professionisti e in tutti gli indirizzi dei Licei,

[31] Decreto Ministeriale 22 agosto 2007, N. 139 Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/obbligo_istruzione///DM22agosto2007_139_doc_tecnico.pdf

[32] Regolamento recante Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione a norma dell'articolo 1, comma 4, del Decreto del Presidente della Repubblica 20 marzo 2009, n. 89.

con più enfasi nello Scientifico. Secondo le Indicazioni degli Istituti Professionali[33] (p.42) e Tecnici[34] (p. 45) le abilità da svolgere riguardo la modellizzazione entro il primo biennio sono:

> Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica (p. 45 e p. 71).

A conclusione dei percorsi di ogni liceo[35] , riguardo l'area scientifica, matematica e tecnologica, gli studenti dovranno:

> Essere in grado di utilizzare criticamente strumenti informatici e telematici nelle attività di studio e di approfondimento; comprendere la valenza metodologica dell'informatica nella formalizzazione e modellizzazione dei processi complessi e nell'individuazione di procedimenti risolutivi (p. 4 allegato A).

Gli studenti, alla conclusione del percorso di studio del liceo scientifico oltre a raggiungere i risultati di apprendimento comuni, dovranno:

> Saper utilizzare strumenti di calcolo e di rappresentazione per la modellizzazione e la risoluzione di problemi (p. 11 allegato A).

A seguito di diversi lavori di ricerca, le *competenze di modellizzazione matematica* sono stati definite da Blum et al. (2007) come "la capacità di identificare le domande pertinenti, le variabili, i rapporti e le ipotesi di una determinata situazione reale, di tradurne matematicamente, di interpretarne e validarne la soluzione del problema matematico in relazione alla situazione data" (p.12, trad. nostra).

La competenza modellistica è più che l'atto dell'applicazione di concetti matematici e metodi per risolvere situazioni del mondo reale. La ricerca ha dimostrato che da sola la conoscenza non è sufficiente per la modellizzazione: lo studente deve anche scegliere di utilizzare tale conoscenza e monitorare il processo in corso. (Tanner & Jones, 1995, p.63 citato in Maaß, 2006). Ci sono persone che mostrano anche di avere la conoscenza su alcuni concetti, ma a volte, quando si confrontano con qualche situazione problematica, avendo bisogno di usare

[33] ISTITUTI PROFESSIONALI: Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento (d.P.R. 15 marzo 2010, n. 87, articolo 8, comma 6).

[34] ISTITUTI TECNICI: Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento (d.P.R. 15 marzo 2010, articolo 8, comma 3)

[35] Regolamento recante "Revisione dell'assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei ai sensi dell'articolo 64, comma 4, del decreto legge 25 giugno 2008, n. 112, convertito dalla legge 6 agosto 2008, n. 133". Allegato A
http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/doc/Allegato_A_definitivo_02012010.pdf

questa conoscenza, non ci riescono nel primo tentativo. Hanno bisogno di riflettere sulla situazione per quanto riguarda il concetto, per ricercare un'interpretazione e un uso adeguato.

La modellizzazione matematica permette la mobilizzazione delle competenze variate, associate anche alla risoluzione di problemi come:

> Selezionare variabili che sono rilevanti per la costruzione del modello, problematizzare […] formulare delle ipotesi esplicative del fenomeno affrontato, ricorrere alle conoscenze matematiche possedute per la risoluzione del problema […], confrontare le conclusioni teoriche con i dati empirici esistenti e, eventualmente […] modificare il modello in modo a corrispondere più precisamente alla situazione reale (BRASIL, 2006, p. 85, trad. nostra).

Allo stesso modo, l'esatta comprensione delle competenze e delle capacità di modellizzazione è strettamente legata alla definizione del processo di modellazione, identificato nella prima parte di questo capitolo.

Secondo De Corte (2007), l'acquisizione delle competenze matematiche implica la necessita degli studenti di comprendere i concetti matematici, le operazioni e le relazioni, il ragionare in modo flessibile, preciso e adeguato. Inoltre devono riflettere e giustificare logicamente i ragionamenti assunti. Lavorare con una metodologia che è flessibile e necessita della partecipazione attiva dello studente favorisce lo sviluppo di questo tipo di competenze. La modellizzazione ha un ruolo chiaro nello sviluppare un'attitudine sperimentale nei confronti della matematica, si mettono in gioco le proprie conoscenze e competenze per risolvere un problema del quotidiano, si assume un ruolo attivo nella costruzione del proprio sapere. Tale svolgimento richiede una riflessione da parte dello studente, dei processi in modo da risolvere il problema, legati alle loro abilità di pianificare strategie di soluzione affrontando ambiti problematici più complessi (Blum et al., 2007; Niss & Jensen, 2002).

La modellizzazione matematica è un tema molto rilevante della didattica, l'International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications[36] fornisce un quadro dettagliato di ricerche raccolte in diversi ambiti educativi svolte in tutto il mondo. Rispetto alla lunga e intensa discussione su come i compiti scolastici si colleghino ai problemi del mondo reale, ci sono ancora pochi studi dettagliati sulle competenze di modellizzazione (Maaß, 2006). I

[36] L' ICTMA realizzano delle conferenze biennali dal 1983; si costituisce nel maggiore acervo bibliografico riguardo le ricerche sulla Modellizzazione Matematica e Applicazioni svolte in tutto il mondo.

principali studi che si riferiscono alla competenza di modellizzazione sono, da come riportati in Maaß, (2006):

- L'importanza di integrare la modellizzazione e le applicazioni nella pratica scolastica quotidiana (Kaiser & Messmer, 1986; Maaß, 2004, 2006; Blum & Niss, 1991);
- Il ruolo della matematica pura nello sviluppo della competenza di modellizzazione (Blum et al. 2002);
- L'identificazione delle competenze matematiche richieste all'acquisizione della competenza modellistica (Ikeda, 1997; Galbraith & Clathworthy, 1990);
- La conoscenza del processo di modellizzazione e le contribuzioni all'acquisizione di competenze (Galbraith & Clathworthy, 1990; Tanner & Jones 1993).
- Il lavoro e le discussioni in piccoli gruppi sostengono autonomamente lo sviluppo delle competenze di modellizzazione (Galbraith & Clathworthy, 1990; Ikeda & Stephens, 2001; Tanner & Jones, 1995).
- L'importanza della motivazione da parte dello studente: scelta delle conoscenze e monitoraggio del processo (Tanner & Jones, 1995).

Differenti studi dimostrano nello specifico che gli errori che compaiono quando gli studenti modellizzano un problema, avvengono spesso durante la creazione del collegamento tra la matematica e la realtà (transizioni 1 e 2 della figura 8 -Ciclo di Ferri) e anche nella semplificazione e strutturazione degli elementi della realtà[37] (transizioni 6 e 7 della figura 8).

All'interno del dibattito didattico, il concetto di ciò che si intende per competenze di modellizzazione è spesso basato su schemi analitici che valutano i risultati degli studenti, come ad esempio le indagini internazionali PISA. Invece i matematici Werner Blum Gabrielle Kaiser (1997, in Maaβ, 2006) hanno specificato dettagliatamente le competenze di modellizzazione

[37] Kaiser-Meßmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematik-unterricht, 2 Vol*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker. Hodgson, T. (1997). On the use of open-ended, real-world problems. In: K. Houston, W. Blum, I. Huntley, .T. Neill, (Eds.), *Teaching and learning mathematical modelling.* (pp.211-218). Chichester: Albion publishing limited.

Christiansen, I. (2001) The effect of task organisation on classroom modelling activities. In J. Matos, W.Blum, K. Houston, & S. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education, Ictma 9*: Applications in Science and Technology (pp. 311-320). Chichester: Horwood Publishing.

Haines, C., Crouch, R., & Davies, J (2001). Understanding students' modelling skills. In J. Matos, W. Blum, K. Houston, & S. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education, Ictma 9*: Applications in Science and Technology (pp. 366-380). Chichester: Horwood Publishing.

ricostruendo una lista di sotto competenze che sono collegate alla loro interpretazione del processo di modellizzazione:

Competenze nella comprensione del **problema** reale e nella costruzione del **modello** basato sulla realtà:

- Formulare ipotesi per il problema e semplificare la realtà;
- Riconoscere le grandezze che influenzano la realtà, assegnarle un nome e identificare le variabili chiave;
- Costruire le possibili relazioni tra le variabili;
- Analizzare le informazioni disponibili e distinguere in informazioni rilevanti da quelle trascurabili.

Competenze nella creazione del **modello matematico dal modello reale:**

- matematizzare le quantità rilevanti e le loro relazioni;
- Semplificare le quantità rilevanti e le loro relazioni, se necessario, e ridurne il loro numero e la loro complessità;
- Scegliere l'appropriata notazione matematica e rappresentare la situazione graficamente, se possibile.

Competenze nella **risoluzione di questioni matematiche** all'interno del modello matematico:

- Utilizzare strategie euristiche tra le quali: la divisione del problema in sotto parti, stabilire relazioni con problemi simili e riformulare il problema, visualizzare il problema in diverse forme, verificare le quantità o i dati disponibili;
- Utilizzare le conoscenze matematiche per risolvere il problema.

Competenze nell'**interpretazione dei risultati matematici** nella situazione reale:

- Interpretare i risultati matematici in contesti non matematici;
- Generalizzare soluzioni sviluppate per una particolare situazione;
- Rivedere le soluzioni del problema utilizzando un appropriato linguaggio matematico e/o per comunicare le soluzioni.

Competenze nella **verifica delle soluzioni:**

- Verificare e riflettere criticamente sulle soluzioni trovate;
- Rivedere alcune parti del modello o ancora indagare fino in fondo il processo di modellazione → se le soluzioni non si adattano alla situazione;
- Riflettere sulla possibilità di sviluppare il problema diversamente;
- Analizzare la possibilità di cambiare modello.

(Maaβ, 2006, p.116 trad. nostra)

Uno degli obiettivi della presente ricerca è conoscere le competenze di modellizzazione degli studenti e rivelare su quali punti del processo si trovano i maggiori ostacoli. Tale analisi prende in considerazione l'elenco di sotto-competenze sopra citato.

Le competenze richiedono un elemento di riflessione da parte dello studente sui processi richiesti o utilizzati per risolvere un problema. Esse sono legate all'abilità dello studente di pianificare strategie di soluzione e di applicarle affrontando ambiti problematici più complessi e meno familiari (OECD, 2006). Gli studenti hanno bisogno di passare attraverso l'intero processo di modellizzazione per acquisire le competenze di modellizzazione.

È importante che lo studente acquisisca la consapevolezza che l'intelligenza e la capacità di apprendere non sono definiti una volta per tutte, ma che sono fattori in evoluzione e che la continua modificazione degli stessi può essere operata dallo stesso soggetto in apprendimento, con il necessario impegno ed opportunamente guidato.

Un altro concetto che sembra molto importante per questo studio è il concetto della meta cognizione. Studi empirici fanno riferimento alla significativa importanza sulla meta cognizione in problems solving e compiti complessi (Sjuts, 2003 p. 26; Schoenfeld, 1992 p. 355). Maaß (2006) ritiene che cosi come le strategie di problem-solving sono necessari per lo svolgimento dei processi di modellizzazione, la meta cognizione è un importante fattore per sviluppo delle competenze di modellizzazione (Maaß, 2006). La meta cognizione è la riflessione del proprio modo di pensare e di gestire il proprio pensiero. Maaβ (2006) evidenzia tre tipi di meta cognizione: *dichiarativa*, *procedurale* e *motivazionale*, che possono essere brevemente sintetizzate rispettivamente in: "cosa so", "cosa faccio", "cosa voglio". Secondo Sjuts (2003) questo studio assume i seguenti concetti di meta cognizione:

- Meta cognizione dichiarativa: comporta la riflessione su un proprio pensiero, il pensiero critico sul compito e le conoscenze strategiche sul percorso per risolvere un problema.
- Meta cognizione procedurale: comporta la pianificazione, il rilievo e l'analisi che significa il monitoraggio delle proprie azioni.
- Meta cognizione motivazionale: le condizioni necessarie per l'utilizzo della meta cognizione sono la motivazione e la forza di volontà per la realizzazione del compito.

Secondo Maaβ (2006), per concedere la meta cognizione e collegarla con le competenze di modellizzazione è prudente svolgere nelle classi:

- Il trasferimento della meta conoscenza sui processi di modellizzazione, che significa la meta cognizione dichiarativa;
- Le discussioni sulle diverse percezioni da parte degli studenti dei processi di modellizzazione;
- L'affrontamento produttivo dell'errore, con la conseguente analisi.
- L'esigenza della pianificazione, del monitoraggio e della convalida delle proprie azioni; Il confrontare e il discutere sulle diverse soluzioni e il riflettere sulle rispettive ragioni;
- L'indicazione degli esempi positivi nell'auto-monitoraggio nel corso della modellizzazione;
- Il monitoraggio esterno per l'apprendimento personale (Maaβ, 2006, p. 118, trad. nostra).

CAPITOLO 3

LE COMPETENZE E IL COSTRUTTIVISMO NELLO SVILUPPO DELLA CONOSCENZA

3.1 Le teorie dell'apprendimento

L'apprendimento è un processo mediante il quale si acquisiscono nuove conoscenze. Dalla seconda metà dello scorso secolo fino ad oggi i principali modelli d'apprendimento che orientano l'insegnamento delle discipline scientifiche derivano da due diverse teorie psico-cognitive: il comportamentismo ed il costruttivismo.

La scienza ha espresso diverse ipotesi teoriche e ciascuno di noi educatori ha una sua personale concezione dell'apprendimento. Riteniamo utile a questo proposito rivedere alcuni modelli classici dell'apprendimento per cogliere la scelta epistemologica assunta nella ricerca.

A partire dagli anni '40 l'apprendimento è stato definito in conformità al paradigma educativo di riferimento, come:

- Comportamentismo: un cambiamento di comportamento dovuto alla manipolazione di condizioni ambientali;
- Cognitivismo: una modificazione delle strutture mentali dell'individuo;
- Costruttivismo: un processo attivo di costruzione delle conoscenze.

Limitandosi ad una semplice analisi dell'affermazione temporale dei tre paradigmi educativi illustrati, il costruttivismo sembra di fornire una prospettiva certamente diversa rispetto ai suoi predecessori. Si tratta di un'altra concezione dell'apprendimento che, come ha definito Varisco (1995), passa da una concezione oggettivista della conoscenza ad una costruttivista.

Negli ultimi anni si è osservata una sorta di rivoluzione in rapporto all'idea di insegnamento e di apprendimento. Castoldi (2007) definisce la rivoluzione come "copernicana": dalla visione “geocentrica”, che assumeva come pietra angolare la logica dell’insegnamento si è passati ad una visione “eliocentrica”, che assume come pietra angolare la logica dell’apprendimento.

Le teorie di apprendimento che sottolineano la raffinatezza delle concezioni iniziali degli studenti devono essere informate da profonde analisi scientifiche delle competenze, cioè, devono sapere verso quale direzione sta andando l'apprendimento. Ma devono anche mostrare nel dettaglio come la competenza venga acquisita dalle risorse inizialmente previste dagli stati più ingenui. Una teoria adeguata di apprendimento deve sia fornire descrizioni ricche di conoscenza e spiegare la graduale trasformazione di quella conoscenza in stati più avanzati (Smith et al. 1993/1994).

Il Comportamentismo

Nel modello di apprendimento comportamentista, anche chiamato di behaviorismo, la mente dell’essere umano viene considerata inizialmente vuota e si “riempie” grazie ai legami che si formano in seguito alle esperienze compiute. L’apprendimento è assunto come creazione di nuove associazioni; da questo l’origine del termine “associazionismo”: ogni nuovo concetto va a concentrarsi con quelli preesistenti per concomitanza o somiglianza.

L’elemento fondamentale nel processo di apprendimento è l’associazione di contiguità: esiste l’apprendimento quando si stabilisce una connessione prevedibile tra un segnale nell’ambiente (*lo stimolo*), un comportamento (*la risposta)* e una conseguenza (*il rinforzo)*. In questo modo l’apprendimento viene studiato analizzando le connessioni esistenti tra stimolo e risposta. Il processo di rinforzo/punizione è assunto per consolidare le catene associative. Secondo Cohen (1987) l’idea centrale del comportamentismo è che “il comportamento degli individui è un prodotto del loro condizionamento, essi sono macchine biologiche e non agiscono in modo cosciente, ma reagiscono agli stimoli”.

Burrhus Frederic Skinner è considerato il padre del comportamentismo e dai suoi studi derivarono gran parte dei dati sperimentali alla base della teoria comportamentista dell’apprendimento. Altri membri prominenti di questo filone, dominante dai primi decenni del secolo scorso al 1960, sono Ivan Pavlov, John B.Watson, Clark Hull e Edward Thorndike. In questo approccio rientrano la scuola riflessologica russa con Pavlov e il condizionamento classico, e con Skinner il behaviorismo americano e il condizionamento strumentale.

I sistemi di insegnamento che si fondano sulla visione comportamentista dell'apprendimento si concentrano sul condizionamento del comportamento del discente: la sua mente è vista come un vaso vuoto, una *tabula rasa,* che va riempita e indirizzata verso la produzione dei cambiamenti nei comportamenti. Il ruolo dello insegnante è quindi quello di preparare i condizionamenti e gli stimoli che consentono agli allievi di modificare i propri comportamenti, determinando le abilità e le capacità che portano al comportamento desiderato e assicurandosi che gli studenti se ne acquisiscano in modo graduale. Nonostante il modello comportamentista abbia evidenziato i suoi limiti, in certi contesti l'insegnamento delle discipline scientifiche è ancora impregnato da pratiche che richiamano tale modello: la didattica di tipo trasmissiva.

Il Cognitivismo

Dall'inizio degli anni Sessanta dello scorso secolo si è assistito a un progressivo aumento e ramificazione degli studi di impostazione cognitivista; i principali teorici sono il filosofo dell'educazione John Dewey e i gli psicologi dell'educazione Lev Vygotsky, Jean Piaget, Jerome Bruner e Edward Tolman. Come nel comportamentismo, i cambiamenti di comportamento sono studiati attentamente, ma questa volta in termini di quello succede nella mente del discente.

Nella teoria cognitivista[38] l'apprendimento viene studiato analizzando i cambiamenti che avvengono nelle strutture cognitive del soggetto e nella sua personalità; è assunto come un processo conoscitivo che trae origine dal bisogno di costruzione e di strutturazione del reale. Il discente guarda la realtà oggettiva, propria di ogni momento e situazione della vita, utilizzando la realtà esterna, imposta socialmente ed esistente solo a livello cognitivo, come modello mentale. Nel rapporto fra motivazione e apprendimento incidono numerosi fattori capaci di condizionare il successo dell'apprendimento (Carletti & Varani, 2005).

Secondo la teoria della Gestalt l'apprendimento avviene grazie a processi cerebrali centrali, come la memoria e le aspettative; queste agiscono da integratori di un comportamento diretto ad una finalità. L'apprendimento non avviene per tentativi ma attraverso una ristrutturazione percettiva del problema, che viene risolto per intuizione.

[38] Detta anche teoria fenomenologica.

I sistemi di istruzione e di insegnamento che si fondano sul cognitivismo si focalizzano sulla trasmissione al discente di modelli mentali che egli/ella dovrà seguire.

L'attivismo pedagogico sostenuto principalmente da Dewey e Montessori viene definito come un "*modello della scoperta*", essendo costituito da un processo attivo di ricostruzione del sapere e di ricerca della soluzione. In questa prospettiva si presuppone che l'apprendimento sia una naturale curiosità del discente, basandosi sul suo sforzo autonomo di andare oltre le informazioni disponibili, seguendo lo stesso percorso degli scienziati per arrivare alle stesse conclusioni finali.

Nel cognitivismo il prodotto finale è espresso in obiettivi e diventa il centro del processo educativo. La valutazione è centrata sulle performance e sul confronto tra obiettivi e risultati. A livello educativo sono varie le ricadute, in particolare quelle della corrente cognitivista che rientra sotto il nome di costruttivismo, la quale affonda le sue radici nell'opera di studiosi come Dewey, Vygotsky, Piaget.

Il Costruttivismo

Il costruttivismo è un quadro teorico di riferimento che pone il soggetto che apprende al centro del processo formativo, assumendo che la conoscenza è il prodotto di una costruzione attiva da parte del soggetto, strettamente collegata alla situazione concreta in cui avviene l'apprendimento (Becker, 2003).

Nel paradigma costruttivista la conoscenza non è un'immagine riflessa del mondo reale, ma una costruzione prodotta dall'attività cognitiva del soggetto in relazione adattativa con la realtà. Nel costruttivismo si assume che la formazione sia un'esperienza situata in uno specifico contesto: il soggetto, spinto dai propri interessi e dal proprio background culturale, costruisce attivamente una propria integrazione della realtà attraverso un processo di integrazione (Varisco, 2002).

Di recenti alcuni autori (come ad esempio Varisco, 2002) hanno provato ad individuare diversi filoni costruttivisti attraverso l'analisi del pensiero di quegli studiosi che in generale vengono considerati come i fondatori di tale approccio. Le classificazione concepibile sono: costruttivismo interazionista, costruttivismo situazionista, costruttivismo sociale, ecc. Il costruttivismo è un approccio pragmatico che non si pone il problema di definire la realtà o la verità ma di come individui e culture costruiscano la propria visione del mondo.

Secondo la psicologia costruttivista, apprendere significa soprattutto *sviluppare l'uso degli strumenti del fare significato per costruire la realtà*. È su questo principio fondamentale che si basa la didattica costruttivista. Dal punto di vista operativo esistono numerosi approcci didattici che aiutano a sviluppare "gli strumenti del fare significato": l'apprendimento per competenze, la sperimentazione attiva, la discussione, l'apprendimento cooperativo, ecc.

Nell'approccio costruttivista secondo Papert (1994) lo scopo della formazione non sarà più quello di proporre al soggetto del sapere codificato, bensì quello di assumersi il compito di far conoscere al soggetto stesso le specifiche conoscenze di cui ha bisogno: il vero sapere che si promuove è quello che aiuterà ad acquisire un altro sapere.

Jonnaert (2012) fa una interessante distinzione fra saperi e conoscenze: Il concetto del sapere fa riferimento a un sapere sociale e culturalmente determinato. Le conoscenze fanno riferimento a elementi costitutivi del patrimonio cognitivo di un individuo. L'autore afferma che il **sapere codificato** si riferisce ai saperi descritti nei programmi di studio, manuali scolastici o altri riferimenti. Il sapere codificato è organizzato per essere insegnato e è determinato culturalmente: una determinata società lo ha scelto e "codificato" in programmi di studi perché lo ritiene necessario ai suoi membri. Si tratta dei contenuti dei programmi scolastici organizzati per essere imparati da tutti. Questo "sapere" è fortemente determinato socialmente e culturalmente, ma non sono solo codificati nei programmi di studio; i saperi quotidiani sono acquisiti fuori della scuola, i saperi scientifici sono elaborati da specialisti per le determinate materie.

Le **conoscenze** sono quindi gli elementi costitutivi del patrimonio cognitivo del soggetto. Secondo Glasersfeld (1994) le conoscenze sono costruite da colui che impara e sono "mantenute" per tutto il tempo necessario. Questo vuol dire che, articolate con altre risorse (affettive, sociale, contestuali, ecc.) queste conoscenze adattabili permettono di affrontare una serie di situazioni. Jonnaert (2012) individua quatto caratteristiche per le conoscenze in una prospettiva costruttivista:

1- Le conoscenze sono costruite (e non trasmesse)
2- Le conoscenze sono valide solo temporaneamente

3- Necessitano di una pratica riflessiva (e non sono ammesse come tali senza essere messe in causa)
4- Sono situate in contesti e situazioni (e non decontestualizzati).

Vari programmi di studi contemporanei[39] inseriscono i loro discorsi in un paradigma epistemologico della conoscenza che sarebbe socio costruttivista. Ma questo è compatibile con un approccio per competenze? Jonnaert (2012) ricorda che il socio costruttivismo non è un metodo e neanche una corrente pedagogica: non esiste un “metodo” socio costruttivista, come neanche un “progetto pedagogico” socio costruttivista cosi come non esiste una “didattica” socio costruttivista dei saperi codificati. Il socio costruttivismo è un paradigma epistemologico[40] della conoscenza.

È importante definire di quale costruttivismo si tratta. Il modello socio costruttivista e interattivo di Philippe Jonnaert e Vander Borght (1999, citato in Jonnaert, 2012) annuncia i fondamenti di un interessante modello costruttivista:

- la dimensione *costruttivista* del processo di appropriazione e di costruzione delle conoscenze per un soggetto,
- la dimensione *interattiva* di questo stesso processo, dato che le conoscenze del soggetto sono messe in interazione con l’oggetto dell’apprendimento,
- si aggiunge necessariamente la dimensione *socio,* dato che ci interessiamo agli apprendimenti nel contesto scolastico a proposito dei saperi codificati per una determinata comunità.

L’articolazione di queste tre dimensioni costituisce i fondamenti del modello precisato da Philippe Jonnaert e Vander Borght. Nella dimensione *costruttivista* il soggetto costruisce le sue conoscenze attraverso un’attività riflessiva su quello che sa già, adattando le proprie conoscenze alle esigenze della situazione con la quale si confronta e alle caratteristiche che lui stesso decodifica nell’oggetto da apprendere. L’attività è riflessiva nel senso matematico del termine; dato che chiude un circuito in termini di conoscenze del soggetto. Quest’attività è anche dialettica perché mette in interazione le conoscenze già strutturate del soggetto con l’oggetto nuovo da apprendere, adattandosi all'altro e viceversa. Quest’attività riflessiva e

[39] Si riferiscono ad esempio ai nuovi programmi di studi in Québec e nel Belgio francofono.
[40]Un paradigma epistemologico della conoscenza è un quadro generale di riferimento; all’interno di esso si articolano i concetti e le categorie che guidano il pensiero e l’azione di coloro che si interessano a questioni relative a costruzione, all’acquisizione, alla modifica, il rifiuto o lo sviluppo delle conoscenze.

dialettica è possibile soltanto se le conoscenze del soggetto sono messe in interazione con l'ambiente fisico che lo circonda. Altrimenti, a che cosa si adatterebbero le sue conoscenze? Si tratta di un'attività cognitiva di analisi dei risultati di un'azione. È attraverso l'analisi delle connessioni che il soggetto può stabilire rapporti di causalità.

La dimensione interattiva evoca le situazioni in cui il soggetto è confrontato e all'interno delle quali le sue conoscenze si trovano con i nuovi oggetti (che possono essere, fra le altre cose, il sapere codificato). Si tratta di far interagire le conoscenze del soggetto, quello che sa già, le sue rappresentazioni, le teoria che ha in testa e le sue connessioni, con il nuovo da apprendere, riscontrato in situazioni contestualizzate. Il "sapere codificato" è uno di quelli oggetti che il soggetto trova nelle situazioni e nei contesti particolari, fisici e sociali, della scuola. Gli apprendimenti si sviluppano in funzione delle interazioni che il soggetto stabilisce con l'ambiente a cui appartiene. In termini di apprendimenti scolastici, questo significa che il soggetto può soltanto imparare all'interno della situazione: nel contesto scolastico le situazioni con le quali il soggetto si confronta contengono il "sapere codificato" da imparare. Sono attraverso queste "situazioni" che la dialettica riflessiva "sapere" / "conoscenza" può effettivamente avere luogo.

Nella dimensione "socio" del processo di costruzione delle conoscenze le interrelazioni sociali non si riferiscono soltanto al contesto scolastico e costituiscono una componente essenziale del processo di costruzione della conoscenza. Queste interazioni sociali sono eseguite mediante l'intercambio con i compagni e con gli adulti. Secondo Jonnaert (2012), le interazioni sociali sono solo una delle tante dimensioni dell'apprendimento. Egli afferma che la dimensione "socio" nel processo di costruzione della conoscenza presenta un triplo impianto: quello delle interazioni sociali che provoca conflitti socio-cognitivi inter e intra individuali; quello dell'iscrizione della scuola e dei saperi codificati in un ambiente sociale finalizzato; quello dell'etica, della responsabilità di quello che impara di fronte alle conoscenze che costruisce, che sono necessariamente proprie.

3.2 Il costruttivismo come origine e costruzione della conoscenza

L'epistemologia genetica è la teoria che rende più comprensibile l'origine e la costruzione della conoscenza. Tale teoria, dal nome originale *Épistémologie génétique,* studia i processi di natura della conoscenza; è stata proposta dal biologo e epistemologo Jean Piaget che si è sempre occupato di comprendere come la conoscenza si sviluppa e cresce nell'individuo. L'Epistemologia Genetica afferma che il processo di costruzione della conoscenza dell'essere umano inizia dalla nascita e persiste per tutto l'arco della vita. Dal punto di vista intellettuale, un bambino quando nasce non ha delle strutture cognitive pronte, ma porta con se la capacità di costruirne.

3.2.1 Lo sviluppo cognitivo e gli schemi di ragionamento

Come sostiene Piaget (1979) dalla nascita sono costruite strutture cognitive attraverso la coordinazione di successive azioni esercitate dal soggetto sugli oggetti e sulle proprie azioni. Piaget (1995) attribuisce un doppio significato a azione, differenziandola dai due tipi di esperienza che un soggetto può vivere in situazione:

- L'esperienza fisica: consiste nell'agire su altri oggetti per scoprire le sue proprietà attraverso semplici astrazioni o, come definito precedentemente nel capitolo 1, *l'astrazione empirica.* Ad esempio, il soggetto può scoprire che il peso di un oggetto è indipendente del suo colore.
- L'esperienza logico matematica: consiste nell'agire su oggetti, però le informazioni che ottiene non sono dagli oggetti in quanto tali, ma delle proprietà che l'azione introduce negli oggetti. Non si tratta di un'astrazione semplice, ma di una *astrazione riflettente,* definita in questa tesi nel capitolo 1. Quest'ultima permette di scoprire delle proprietà che costituiscono i risultati delle azione sugli oggetti[41].

[41] Ad esempio, attraverso la manipolazione di oggetti concreti, un bambino organizza una collezione di tre oggetti ed un'altra di quattro e constata che ottiene lo stesso risultato di quando ha messo insieme una collezione di quattro oggetti con un'altra di tre: ottiene sette in entrambi i casi. Scopre che "3 + 4 = 4 + 3", la proprietà della commutatività della somma.

Piaget dimostrò che le strutture cognitive del bambino aumentano e migliorano con lo sviluppo, muovendosi da pochi riflessi innati come il pianto e il succhiare a attività mentali altamente complesse. In base alle strutture che il soggetto ha già costruito, è capace di assimilare nuove conoscenze.

All'interno del quadro teorico costruttivista, l'elemento che descrive il processo di adattamento è la nozione di schema (Piaget, 1995). Il concetto di schema viene descritto da un punto di vista funzionale, dove vengono specificati l'adattamento e la gerarchia degli schemi di ragionamento e le possibili organizzazioni cooperative per l'adattamento a nuove situazioni.

Nella teoria piagetiana uno **schema** viene definito come l'unità più elementare della conoscenza che si sviluppa attraverso l'interazione con l'ambiente per processi di assimilazione e accomodamento. Gli **schemi di azione** attraverso un processo di interiorizzazione diventano **schemi mentali**. Gli schemi mentali si organizzano in unità più ampie dando origine alle strutture mentali o cognitive (Piaget, 1975; 1979).

Le strutture cognitive o **schemi di ragionamento** sono "il risultato di una costruzione, che non sono date negli oggetti perché dipendono di un'azione, e neanche nel soggetto, perché il soggetto deve imparare come coordinare le sue azioni" (Piaget, 2005, p.73, trad. nostra).

Le strutture cognitive si modificano attraverso il processo di crescita e di adattamento all'ambiente: l'assimilazione e l'accomodamento sono gli elementi di base di tale processo (Piaget, 1975). L'assimilazione coinvolge l'interpretazione di eventi in termini di strutture cognitive esistenti. L'accomodamento si riferisce al cambiamento delle strutture cognitive per rendere conto dei cambiamenti ambientali. L'assimilazione non avviene mai in forma pura, ma è sempre equilibrata da qualche componente di accomodamento. L'accomodamento è lo sforzo di adattare il comportamento dell'organismo all'ambiente; perciò i due processi sono opposti, ma allo stesso tempo complementari.

Assimilazione e accomodamento vengono definiti diversamente, ma in realtà non possono distinguersi in un atto adattivo: tutti e due avvengono simultaneamente e sono collegati in modo inseparabile. L'assimilazione agisce per conservare le strutture; l'accomodamento lavora per modificarle, svilupparle e cambiarle (Piaget, 1975).

Attraverso il processo di adattamento, il soggetto assimila i nuovi elementi alle strutture già esistenti e li accomoda, interpretando tutto ciò che per lui rappresenta una novità. Il processo di adattamento può essere concepito come un equilibrio fra assimilazione e accomodamento. Secondo Piaget (1979), l'assimilazione è necessaria e garantisce l'incorporazione di nuovi elementi ad una struttura già esistente. L'autore riconosce che un nuovo tipo di equilibrio fra assimilazione e accomodamento può essere raggiunto a ogni livello di sviluppo; con la crescita il bambino raggiunge forme di equilibrio sempre più soddisfacenti e raffinate. Con lo sviluppo, i bambini diventano capaci di acquisire la conoscenza di oggetti ed eventi lontanissimi da loro.

Le strutture organizzano l'insieme di tutti gli schemi. Quando il soggetto accomoda, egli modifica se stesso per incorporare i nuovi elementi, derivanti dall'assimilazione (Becker, 2003). Attraverso questa procedura, il soggetto costruisce schemi che gli danno l'opportunità di aumentare ogni volta la sua conoscenza, attraverso l'interazione con l'ambiente fisico e sociale.

Il principio fondamentale della teoria di Piaget è che **le strutture cognitive sono suscettibili di evoluzione**; si può pensare quindi ad uno sviluppo intellettuale come passaggio da una condizione di *squilibrio strutturale* ad una di *equilibrio,* che a ogni passo si rinnova a livelli superiori.

Il problema centrale dello sviluppo è comprendere la formazione, l'elaborazione, l'organizzazione e il funzionamento delle strutture della conoscenza. Piaget sostiene che le funzioni mentali si sviluppano gradualmente con la crescita evolutiva e con la maturazione del sistema nervoso, attraverso una serie di stadi: il senso motorio, il preoperatorio, l'operatorio concreto e l'operatorio formale (Piaget, 1970). Gli stadi di conoscenza presentano caratteristiche ben determinate e particolari (Piaget, 1970). Durante ognuno di questi stadi si può osservare lo sviluppo di vari schemi di azione e mentali, che alla loro base vi sarebbe qualche struttura comune che li spiega e conferisce allo stadio la sua unità.

Le intervenzioni pedagogiche possono accelerare e completare il processo, ma non possono cambiare l'ordine degli stadi. Inoltre, Piaget (2005, p.106) afferma che la transizione di uno stadio all'altro è, pertanto un'equilibrazione nel senso più classico della parola. Perciò il passaggio a un nuovo stadio indica che sta avvenendo un processo piuttosto fondamentale di riorganizzazione.

Ogni stadio è definito in termini di una struttura operatoria che, in qualche modo, stabilisce i vincoli e le possibilità cognitive. La conoscenza cognitiva attraverso gli stadi consecutivi non è lineare, ma discontinua. Ogni stadio corrisponde ad una specie di rivoluzione nell'organizzazione dell'intelligenza e, corrispondentemente, del mondo, in un dominio cognitivo e di esperienza che evolve allo stesso tempo con il sistema cognitivo evoluto. Ogni stadio si presenta come una riorganizzazione, in un piano diverso dalle principali acquisizioni avvenute negli stadi anteriori (Cerutti, 1989).

Gli stadi di conoscenza si seguono l'un l'altro in un ordine che è ritenuto uguale per tutti i bambini. Questo intanto non significa che i bambini sono totalmente definiti dalla maturazione: ogni stadio si basa su quello che lo precede, e così la costruzione precedente è necessaria per la successiva. La teoria piagetiana ritiene che l'ordine degli stadi è lo stesso per tutti i bambini, ma la velocità del movimento certamente non lo è. Quando parla delle varie età, Piaget (1975b) si riferisce a una media, riconoscendo che vi possono essere grandi distanze da esse. Molti teorici criticano Piaget per il discorso degli stadi e affermano che tale teoria rimette ogni età ad un stadio. Questa è una interpretazione sbagliata e superficiale della teoria di Piaget, in nessuna delle sue opere l'autore fa tale affermazione.

La teoria di Piaget non è una teoria maturazionista; è vero che Piaget riconosce un evidente ruolo alla maturazione del sistema nervoso, ma questo non fa altro che "aprire possibilità" o limitarle temporaneamente. Questo è un altro indizio che ci permette di capire che l'autore non relaziona lo sviluppo cognitivo alle età degli individui.

Piaget (1972) riconosce che la dinamicità del passaggio da un periodo di sviluppo al successivo è influenzata dall'ambiente sociale e culturale. Tuttavia, tutto dipende dal fatto che il bambino riesca ad assimilare o meno ciò che l'ambiente gli offre.

3.3 Il costruttivismo come metodologia didattica

Il costruttivismo non ha sviluppato un modello didattico unilaterale, ma puntualizza una serie di presupposti che devono essere considerati per poter rendere l'attività formativa appropriata alle diverse esigenze delle situazioni quotidiane.

I costruttivisti hanno abbandonato l’idea che una conoscenza è una copia secondo la realtà esterna al soggetto, come ritiene la realtà ontologica. Costantemente, ogni individuo cerca di costruire il mondo costruendosi in se stesso, in modo da inserirsi nel mondo (Jonnaert, 2012).

La didattica costruttivista è uno dei paradigmi pedagogici più recenti e innovativi, i cui principi fondamentali sono ispirati dalla psicologia costruttivista (Ammieta et. al, 2012).

Il costruttivismo non si riduce ad un metodo pedagogico in particolare, almeno nella prospettiva di Piaget; come ritiene Macedo (2005) si caratterizza per principi o proprietà in cui diversi metodi possono coesistere. La disponibilità all’apprendimento, cioè, la condizione attiva, significativa è una di queste proprietà. Esistono metodi di insegnamento che si “impegnano”, nel senso che formulano dei progetti e che danno senso a ciò che viene fatto a scuola. Lo stesso si applica a certi insegnanti; alcuni possiedono caratteristiche personali molto positive, sono impegnati, hanno autostima, sono interessanti, hanno un compromesso con il loro lavoro, gli piacciono bambini e sanno coinvolgerli, sanno come dare un senso alle attività proposte. In altre parole, sono competenti. Ci sono metodi competenti, ci sono insegnanti competenti (Macedo, 2005).

Secondo Munari (Amietta et al., 2011) negli ultimi decenni si è progressivamente affermata una nuova idea di apprendimento, che ha avuto origine dall’approccio cognitivista, il quale aveva già spostato il fuoco della ricerca psicopedagogica sui processi interni al soggetto. L’elemento più caratteristico è quello costruttivo, denotando il processo di apprendimento come ricostruzione di quanto il soggetto già conosce, come rielaborazione degli schemi mentali e delle conoscenze pregresse. In questa prospettiva l’attenzione del docente si sposta dalle performances ai processi cognitivi messi in atto nell’apprendimento.

Come descritto nelle teorie di apprendimento, nel costruttivismo l’apprendimento individuale è prodotto della costruzione attiva del soggetto. Ha un carattere situato e si svolge anche attraverso forme di collaborazione e negoziazione sociale. È centrato sulla “costruzione di significato” individuale, intenzionale e in quanto tale non predeterminabile.

Il costruttivismo non si pone il problema di definire la realtà o la verità ma di come individui e culture costruiscano la propria visone del mondo. Nella costruzione della conoscenza, l’individuo, con la sua configurazione cognitiva e le sue strutture di conoscenza, elabora un’interpretazione soggettiva della realtà, diventando un agente epistemico. I significati individuali diventano reciprocamente compatibili all’interno di un graduale processo di accomodamento e adattamento, attraverso procedure di scambio, dialogo e negoziazione sociale.

In una prospettiva costruttivista, lo studente agisce partendo dalle sue proprie conoscenze, regolandole, cambiandole e ricostruendole in funzione delle caratteristiche delle situazioni che, testano la viabilità delle conoscenze di quello che impara. L’apprendimento è assunto come un processo di progressivo adeguamento delle strutture cognitive e degli schemi rappresentativi che si rivelano inadatti e insufficienti alle nuove situazioni che si presentano. L’apprendimento individuale è quindi un prodotto della costruzione attiva del soggetto ed è centrato sulla costruzione di significato individuale e intenzionale

Una delle funzioni dell’insegnante è mettere gli studenti in situazioni per costruire conoscenze a partire dai saperi codificati dei programmi di studio. La questione della costruzione delle conoscenze si trova nel nucleo di tutte le riflessioni sull’insegnamento e formazione dei docenti. È importante che ogni docente abbia ben chiaro quale paradigma epistemologico della conoscenza ispira i propri approcci pedagogici e didattici (Jonnaert, 2012).

Il formatore non determina l’apprendimento. L’insegnante e i materiali d’istruzione a disposizione del soggetto diventano risorse all’interno di un processo in cui l’apprendimento avviene in molti modi complessi. L’acquisizione di un habitus riflessivo è una condizione essenziale per l’insegnante costruttivista. La riflessione si riferisce al suo lavoro in aula, alla manutenzione della sua identità; all’adeguare costantemente il proprio agire professionale al mutamento in atto.

Nella prospettiva costruttivista si deve consentire allo studente di mettere in azione un’esplorazione attiva, che corrisponda ai propri interessi e motivazioni all’apprendimento di nuove conoscenze. Questo non significa che si promuove un processo di “autoapprendimento”, ma che la struttura dei materiali messi a disposizione e le attività didattiche promosse consentono di attivare un processo conoscitivo rilevante per lo studente. L’esperienza dell’apprendimento si fonda sul costante processo di riadattamento flessibile della conoscenza già consolidata e in funzione dei bisogni posti dalla nuova situazione formativa. In questa prospettiva dal problem-solving ad esempio, risultano delle ottime strategie didattiche: non essendo finalizzate alla memorizzazione di numerose definizioni e procedure meccaniche, riescono a fare interiorizzare un concetto applicandolo in un'attività pratica. Il fatto di presentare più fattori significativi in una situazione problematica sviluppa nello studente l'attitudine di "ricercatore", promuovendo l'abitudine di prendere delle decisioni efficaci, di rielaborare le conoscenze possedute in funzione delle nuove esigenze: promuove un pensiero creativo.

3.4 Il pensiero matematico

Nell'ambito dell'educazione matematica diversi autori (Tall, 2002, 2004; Sfard, 1991; Dubinsky, 1991, e altri) si sono dedicati allo studio del pensiero matematico. Nello specifico David Tall affronta il pensiero matematico e i processi cognitivi relazionati ad esso. Le indicazioni sul funzionamento del pensiero matematico possono essere osservate, secondo Tall (2004) nel rapporto degli studenti con gli oggetti matematici che possono essere visualizzati o rappresentati attraverso i simboli, in contatto con le definizioni, i teoremi o le dimostrazioni.

D'accordo con David Tall il pensiero matematico emerge dalla percezione degli oggetti del mondo esteriore e dall'azione esercitate su di loro. Dal punto di vista cognitivo, si considera che i soggetti partono dalla percezione degli oggetti dal mondo esterno verso le azioni su ciò che ne percepiscono. L'approfondimento delle relazioni con gli oggetti richiede al soggetto delle abilità che vanno oltre il percepire e l'osservare: esige la realizzazione di astrazioni, di generalizzazioni e di prove che, secondo Tall (2004) sono i modi più sofisticati di pensare matematicamente.

In questa direzione Tall (2002, 2004) sostiene che le espressioni di pensiero matematico più o meno sofisticate debbano essere associate al modo come l'individuo affronta i processi cognitivi come la *rappresentazione*, l'*astrazione* e le interazioni fra i due processi. Nella strutturazione di una prospettiva teorica sull'apprendimento degli allievi di matematica, Tall collega l'apprendimento con lo sviluppo matematico del soggetto e argomenta che la rappresentazione, l'astrazione e i processi a questi concetti vincolati, ben come l'articolazione, sono aspetti che possono essere relazionati a quello che l'autore definisce dei *Tre Mondi Mentali della Matematica,* definiti come:

a) Mondo concettuale incarnato: si riferisce alle percezioni del mondo e il pensiero sulle cose che sono percepite e sentite non solo nel mondo fisico, ma in un mondo mentale di significati.

Le modalità di funzionamento nel mondo concettuale incarnato sono associate alla percezione, all'osservazione e alla descrizione; lo scopo è la comprensione delle proprietà relative ai concetti matematici.

b) l mondo proceptual-simbolico È il mondo dei simboli che vengono utilizzati per i calcoli e nelle manipolazioni in aritmetica, nell’algebra e nel calcolo, ad esempio. Le attività in questo mondo iniziano con le azioni e sono incorporate come concetti attraverso l’utilizzo dei simboli.

c) Il mondo assiomatico-formale: si basa sulle proprietà espresse in termini di definizioni formali che vengono utilizzate come assiomi per specificare le strutture matematiche (ad esempio 'gruppo', 'campo', 'spazio vettoriale' e 'spazio topologico’) che costituiscono il sistema assiomatico della matematica. Nel complesso, questo mondo presuppone un movimento verso al formalismo nelle rappresentazioni e nell'uso di concetti (Tall, 2004).

In questo senso, nella prospettiva di David Tall lo sviluppo cognitivo degli studenti non è necessariamente sequenziale; vengono considerate le azioni in relazione ai tre mondi caratterizzati. In termini cognitivi possiamo considerare che gli studenti transitano su i tre mondi contemporaneamente, invece di assumerli come degli stadi consecutivi da percorrere. Ogni individuo, attraverso le esperienze autentiche con la matematica sviluppa il suo pensiero matematico.

Lo sviluppo matematico degli individui è investigato e caratterizzato da vari autori; Tall nei suoi studi fa riferimento a tre di essi:

- Il lavoro di Sfard (1991) sostiene che durante lo sviluppo dei concetti gli studenti passino attraverso tre stadi di strutturazione, caratterizzati come: interiorizzazione, condensazione e reificazione;
- Lo studio delle astrazioni empiriche, pseudo empiriche e riflessive di Piaget, basate sulla percezione, azione e riflessione sugli oggetti;
- I modi di rappresentazione mentale, sensorio motore, iconico e simbolico definiti da Bruner, come sequenziali nella crescita cognitiva dell’individuo.

La prospettiva di David Tall nasce dallo studio di queste teorie che affrontano lo sviluppo cognitivo e della necessità di spiegare come avviene l’apprendimento nella matematica; riferendosi nello specifico alle esperienze matematiche. Poiché lo riteniamo più significativo, faremo una riflessione sul secondo riferimento proposto da Tall.

3.4.1 Il processo di apprendimento e l'astrazione riflettente

L'esperienza, nel senso che Piaget attribuisce al termine, comporta l'acquisizione di nuova conoscenza attraverso l'azione sugli oggetti. Le due tipologie che sono più importanti per la sua teorizzazione sono l'esperienza fisica e l'esperienza logico-matematica. L'esperienza fisica genera la conoscenza delle proprietà degli oggetti che vengono usati. L'esperienza logico-matematica produce conoscenza non degli oggetti ma delle azioni stesse e dei loro risultati (Piaget, 1995).

È importante osservare che i tipi di azione che producono esperienza logico-matematica sono proprio gli stessi tipi che forniscono le basi per gli schemi di ragionamento. Quando si parla di esperienza logico-matematica, Piaget sottolinea che anche le forme più alte di ragionamento astratto derivano dall'azione. È nel discutere come avviene la costruzione degli schemi di ragionamento che Piaget introduce il concetto di astrazione riflessiva. I processi di astrazione sarebbero collegati tanto con l'esperienza fisica, quanto con l'esperienza logico-matematica. Piaget (1995) descrive lo sviluppo cognitivo come una crescita di tipo astrazione raggiunta: l'astrazione empirica, l'astrazione riflettente e l'astrazione riflessa, che vengono definite come:

L'astrazione empirica ha per base gli osservabili, gli oggetti sono fonti di informazione e anche le proprie azioni del soggetto sulle sue caratteristiche.

L'astrazione riflettente (*Abstraction réfléchissante*) ha per base le coordinazioni delle azioni dei soggetti. Questo processo riflettente può essere consapevole oppure no. Quando avviene in modo consapevole, abbiamo quello che Piaget ha definito astrazione riflessa. Nella spiegazione piagetiana, l'astrazione riflettente presuppone l'auto regolazione del processo di apprendimento.

L'astrazione riflessa[42] (*Abstraction réfléchie*) è quando l'astrazione riflettente torna consapevole. L'*action réfléchie* è intesa da Piaget nel duplice senso di riflesso (*réfléchissement*[43]) e di riflessione (*réflexion*[44]). Ci sono due ragioni per cui Piaget definisce *riflessiva* l'astrazione che parte dalle azioni: la costruzione al livello più basso è "*riflessa*" o

[42] Data la mancanza di traduzione in italiano al termine *Abstraction réfléchie,* il ricercatore ha consultato il professore Alberto Munari (che fu allievo e collaboratore diretto di Jean Piaget al Centro Internazionale di Epistemologia Genetica di Ginevra) e ci ha consigliato di tradurre in italiano come "riflettuta", oppure "riflessa", intesa nei due sensi di *réfléchissement* e *réflexion*.

[43] Secondo Munari, il termine *réfléchissement* si potrebbe tradurre in italiano con il sostantivo "il riflesso".

[44] Secondo Munari, il termine *réflexion* si potrebbe tradurre come *"la riflessione".*

"*proiettata*" sul livello più alto. E, secondariamente, una "*riflessione*" aumentata, nel senso di ponderazione e consapevolezza intensificate, caratterizza il cambiamento.

Secondo Dubinsky (1991), Piaget considerava che l'astrazione riflessa nel suo modo più avanzato conducesse ad un tipo di ragionamento matematico, nel quale "forma" o "processo" sono separati dal "contenuto", questi processi sono convertiti nella mente del matematico come nuovi oggetti di contenuto[45].

Secondo Piaget (1980) lo sviluppo cognitivo può essere rappresentato da una specie di spirale crescente, come se fosse un'elica costruita all'interno di un cono rovesciato; tale idea viene rappresentata nella figura 6: Ad ogni momento (t) la spirale cognitiva f(t) evoluisce in decorrenza di un movimento verticale endogeno verso in alto, rappresentato nella figura 6: per il movimento $\uparrow$a. Tale movimento è originato dalle astrazioni riflettenti e di un doppio movimento orizzontale indicato per $\underset{\rightarrow}{b}$ e per $\underset{\rightarrow}{c}$: $\underset{\rightarrow}{b}$ genera una movimentazione dall'esogeno (provenienti dalle astrazione empiriche) allo endogeno e un'altra movimentazione nel senso contrario, dall'esogeno verso le astrazioni riflettenti, indicati da $\underset{\rightarrow}{c}$.

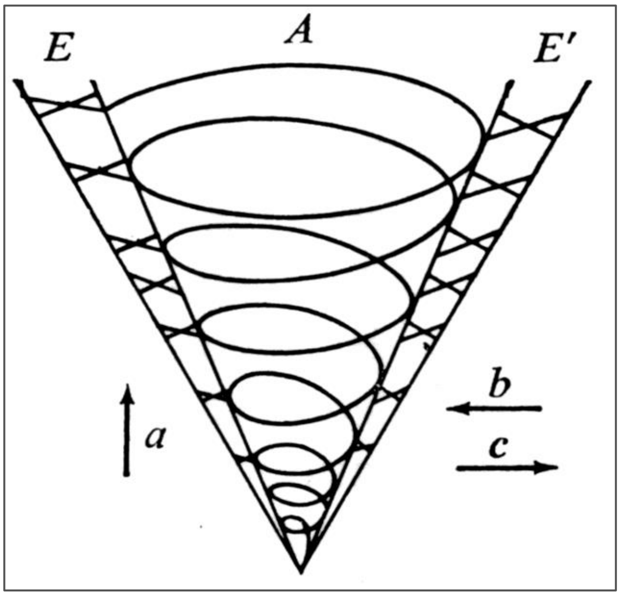


Figura 8 Rappresentazione di un cono rovesciato, che rappresenta l'epigenesi delle funzioni cognitive (Piaget, 1980, p. 94).

[45] Anche se Piaget credessi nell'importanza dell'astrazione riflessiva per la matematica avanzata, il suo lavoro si è concentrato allo sviluppo logico del pensiero del bambino.

È possibile mettere in relazione la meta cognizione con l'astrazione riflessa. L'astrazione riflessa somma le attività del riflettere, nel senso di proiettare ad un livello superiore qualcosa già costruita. Inizialmente viene fatta in un livello inferiore, attraverso la realizzazione delle riflessioni coscienti nel senso di ricostruire e riorganizzare quello che è già stato trasportato.

Anche se Piaget non ha lavorato in modo esplicito al tema dello sviluppo metacognitivo, è possibile una lettura della sua teoria alla luce del termine *metacognizione*. L'astrazione riflessa somma le attività del *riflettere*, nel senso di progettare ad un livello superiore qualcosa già costruita, con le *riflessioni* coscienti, nel senso di ricostruire e riorganizzare ciò che è stato trasferito. La progressione degli stati di equilibrio conducono all'equilibrazione[46] e all'autoregolamentazione che possono essere identificate come l'astrazione riflessa, portando ad auto-monitoraggio del processo cognitivo. In questo senso si può dire che Piaget anticipa temi che integrano oggi il campo della ricerca metacognitiva.

Dubinsky (1991) considera che il concetto di astrazione riflessa possa offrire una base teorica per comprendere cos'è il ***pensiero matematico avanzato*** e come l'insegnante possa aiutare gli studenti a svolgere delle abilità per svilupparlo. L'autore ripercorre le basi di quello che chiama "una teoria dello sviluppo dei concetti in matematica avanzata", isolando gli aspetti essenziali dell'astrazione riflessa, considerando il suo ruolo nella matematica superiore e riorganizzando questi aspetti, nel senso di formulare una teoria coerente della conoscenza matematica e della sua costruzione. Il suo studio è di taglio epistemologico, avendo speciale interesse negli schemi che gli studenti costruiscono per comprendere i concetti. I suoi studi lo hanno condotto a ricerche didattico-pedagogiche con approcci rivolti ad indurre gli studenti allo sviluppo del pensiero matematico avanzato.

Dubinsky (1991) nei suoi studi si è preoccupato della motivazione dello studente per la costruzione delle strutture cognitive; il suo interesse era correlazionale la motivazione dello studente e l'approccio metodologico dell'insegnante in classe. L'autore afferma che se l'obiettivo da raggiungere è presentato e sostenuto dall'insegnante nel modo tradizionale, il raggiungimento è condizionato all'imitazione e alla memorizzazione, non portando alla costruzione di strutture cognitive. La motivazione per lo sviluppo del pensiero matematico dipende da un processo iniziale di comprensione di concetti e di costruzioni gradativi e coscienti

[46] Si tratta dell'autoregolazione delle capacità assimilativa e accomodativa; trattate nel capitolo tre della tesi.

da parte dello studente. Cosi, per l'autore, le pratiche di insegnamento tradizionale si mostrano inefficaci come elementi di spinta allo sviluppo delle strutture cognitive matematiche.

3.5 I primitivi fenomenologici, "knowledge in pieces" e il cambiamento concettuale

Gli educatori sono consapevoli che gli studenti dimostrano molte difficoltà nell'apprendimento della matematica. Nonostante alcune accortezze, perché gli studenti continuano a manifestare difficoltà cosi grandi? Diverse teorie sull'apprendimento sono state applicate all'educazione, con l'intento di far acquisire agli studenti certi "concetti critici" con maggiore facilità. Nonostante l'impiego di approcci comportamentisti, cognitivisti e socio-costruttivisti alle scienze dell'apprendimento, gli studenti non riescono ancora ad afferrare certi concetti fondamentali della matematica.

Parecchi ricerche svolte in ambito psicologico negli ultimi quarant'anni sull'apprendimento e sull'istruzione hanno mostrato che gli individui costruiscono la loro conoscenza a partire dall'esperienza quotidiana nel mondo fisico, naturale e sociale. Tuttavia i problemi fondamentali sorgono quando le idee della maggior parte degli studenti sono caratterizzate come "misconceptions[47]" (diSessa, 1987). Le concezioni erronee sono generalmente considerate come errori che impediscono l'apprendimento, un panorama difficile di conciliare con la premessa che gli studenti costruiscono la loro conoscenza matematica e scientifica (Hammer, 1996). Il termine teorico "concezione erronea o equivoco[48]", è ampiamente usato per descrivere e spiegare la performance degli studenti in specifici domini di conoscenza. Tale definizione è stata creata per indicare le rappresentazioni mentali possedute dai soggetti che risultano non corrette dal punto di vista della conoscenza disciplinare consolidata, e che di conseguenza interferiscono spesso negli apprendimenti successivi (Smith et al., 1993/1994).

---

[47] Il termine di origine inglese misconceptions è tradotto in italiano come idee sbagliate, concezioni erronee.

[48] Le ricerche sulle *misconcepions* ha generato una grande varietà di termini per caratterizzare le concezioni degli studenti, tra cui: "*preconceptions*" (Clement, 1982b; Glaser & Bassok, 1989; Wiser, 1989), "*alternative conceptions*" (Hewson & Hewson, 1984), "*naive beliefs*" (McCloskey, Caramazza, & Green, 1980), "*alternative beliefs*" (Wiser, 1989), "*alternative frameworks*" (Driver, 1983; Driver & Easley, 1978), and "*naive theories*" (McCloskey, 1983; Resnick, 1983) in Hammer, 1996.

È diventato ampiamente consapevole e accettato come verità, tra coloro che seguono o partecipano alla ricerca didattica delle scienze, che gli studenti arrivano ai corsi di scienze con concezioni sul mondo che differiscono da quello scientifico, e che questi malintesi o interpretazioni sbagliate devono essere affrontate in classe. Secondo Hammer (1996) l'ampia accettazione e applicazione di questa prospettiva assicura una certa preoccupazione, perché rimane ancora una serie di ragioni per mettere in discussione la validità e la completezza di tale concetto.

Dai primi studi cognitivi realizzati principalmente nel dominio da fisica (McCloskey, 1983; diSessa, 1993) fino ad oggi sono stati documentati molti studi sulle comprensioni poco precise da parte degli studenti, riguardo a concetti di vari domini di conoscenze scientifica. Gli studenti portano a scuola le concezioni che hanno costruito nel corso della loro vita con esperienze formali ed informali. Molte volte tali concezioni risultano primitive e diverse dalla conoscenza scientifica insegnata a scuola (Perez-Tello et al., 2005). Alcuni studi hanno dimostrato come gli studenti manifestino grande difficoltà ad apprendere nuovi concetti chiave in praticamente ogni aspetto dell'educazione alle scienze, dal concetto di forza nelle fisica newtoniana (McCloskey, 1983) o alla teoria evolutiva in biologia (Southerland et al., 2001). I ricercatori di fisica hanno riferito che i *misconceptions* causano agli studenti anche delle percezioni errate in eventi di laboratorio e nelle dimostrazioni in classe (Resnick, 1983, in Hammer, 1996).

L'idea che gli studenti arrivino ai corsi di scienze avendo dei *misconceptions* è diventata quindi accettata da coloro che seguono o partecipano di ricerca all'istruzione. DiSessa e i suoi colleghi (diSessa, 1988, 1993; Smith, diSessa & Roschelle, 1993/1994) hanno questionato la validità teorica ed empirica della prospettiva dei *misconceptions* e hanno proposto una spiegazione alternativa alla struttura cognitiva, definite come primitive fenomenologiche.

Secondo quanto definisce diSessa (1987, 2007) i primitivi fenomenologici (concept of phenomenological primitive: p-prims) descrivono lo sviluppo di conoscenza intuitiva degli allievi e identificano degli aspetti di significato che non sono implicati necessariamente nel ragionamento corretto su concetti formali.

Una volta che i p-prims sono stabiliti a livello fenomenologico, essi poi diventano stabiliti e interiorizzati, per dare senso alle esperienze future. Questo processo di creazione del senso si verifica ad un livello cognitivo molto profondo, il che spiega il motivo per cui lo studente è in gran parte inconsapevole della base della sua comprensione. I p-prims svolgono un ruolo importante nel permettere allo studente di interpretare la proprio esperienza, ma i p-primis non hanno una propria spiegazione all'interno della struttura di conoscenza dello studente (Hammer, 1996). Invece, p-prims sono pezzi fondamentali di conoscenza che sono sottintesi allo studente, non hanno bisogno di alcuna spiegazione, in quanto operano presupposti già impliciti di come funziona il mondo fisico. Nelle parole di diSessa (1993), p-prims permettono agli studenti di capire che "qualcosa accade perché è così che stanno le cose”(p. 112).

Smith et al. (1993/1994) hanno costruito i loro argomenti a partire dai precedenti lavori di diSessa (1988, 1993) e comparano la prospettiva dei *misconceptions* con la prospettiva della conoscenza intuitiva: **knowledge-in-pieces** "conoscenza in pezzi". Nella prospettiva della conoscenza in pezzi gli studenti non hanno una comprensione del mondo fisico in base a riflessioni sulle teorie coerenti o analisi sistematica del contesto. Piuttosto sono viste come costruzioni spontanee, come risultanti dall'attivazione degli elementi primitivi di conoscenza, che diSessa (1993) descrive come i primitivi fenomenologici.

In generale le presunzioni circa la diversità e la dimensione delle conoscenze coinvolte in competenze matematiche e scientifiche non sono state molto analizzate. Le analisi tradizionali sul ragionamento degli esperti si sono concentrate sull’uso di potenti, o pezzi comuni di conoscenza di base, come ad esempio F = ma o la conversione di denominatore comune (Smith et al., 1993/1994). Ma le conoscenze matematiche e scientifiche di esperti e principianti sono distribuite in un numero molto maggiore di componenti generali e specifici del contesto interconnesso di quanto suggerito da qualsiasi analisi delle competenze o libri di testo.

Andrea di Sessa ha mostrato con l’ausilio del computer, la straordinaria difficoltà che gli studenti dimostrano nell’interagire con i concetti del mondo newtoniano, dove le forze sono correlate alla velocità e non alla posizione, come nella meccanica aristotelica. La maggior parte degli studenti, infatti, possiede una concezione ingenua, che l’autore chiama di primitivi fenomenologici.

DiSessa (1993) argomenta che gli studenti acquisiscono gradualmente la meccanica del mondo reale - “un senso di come le cose funzionano, quale eventi sono necessari, voluti, possibili o impossibili” (p.106). Egli suggerisce che il senso dei meccanismi sia basato sulla attivazione di piccoli e profondamente radicati p-primis che sono poi utilizzati per costituire una spiegazione.

Lo sviluppo della competenza è ritenuto come il passaggio di semplici elementi di ragionamento intuitivi di limitata applicabilità (p-prims), alla loro integrazione in schemi di ragionamento strutturati secondo teorie. Tale modello è in contrasto con le concezioni più diffuse, riguardanti la ristrutturazione di schemi esistenti. Nella presente ricerca, tramite interviste cliniche analizzate in profondità, si identificano proprio quei primitivi fenomenologici specifici della modellizzazione matematica di fenomeni reali.

Cambiamento concettuale

Da un punto di vista costruttivista l'apprendimento delle scienze potrebbe essere considerato come un apprendimento per cambiamento concettuale. I cambiamenti avvengono dal momento in cui l'individuo richiede la revisione della conoscenza al fine di integrare con successo le nuove concezioni nella sua struttura cognitiva preesistente.

Il cambiamento concettuale considera le strutture mentali degli allievi come reticoli di concetti e le convinzioni interconnesse, collocando l'accento sui contenuti di pensiero anziché sulla forma (diSessa, 2007). Le strutture cognitive e i loro cambiamenti sono *specifici per dominio* e riguardano argomenti distinti.

Secondo Berti (2002) i due filoni di studio sul cambiamento concettuale, quello evolutivo e quello educativo, hanno contribuito in modo complementare alle costruzione di un quadro dettagliato delle concezioni[49] presente in età diverse. L'analisi delle condizioni che hanno indotto alcuni scienziati ad aderire ad un nuovo punto di vista (ad esempio la teoria copernicana del sistema solare) e altri a rimanere attaccati a quello vecchio (ad esempio la teoria tolemaica) può, in questa prospettiva, fornire delle indicazioni sia sui fattori che ostacolano negli studenti il cambiamento, sia sugli interventi didattici che lo possono promuovere (Berti, 2002).

Come ritiene Berti (2002) sia la teoria di Piaget che l'approccio del cambiamento concettuale sottolineano la necessità di prendere come punto di partenza le strutture mentali dei discenti. La teoria di Piaget considera lo sviluppo concettuale come una progressione lineare fortemente ancorata alla maturazione di abilità cognitive generali come, l'egocentrismo a modelli che ne

[49] oppure teorie ingenue, intuitive, alternative, popolari; tutti modi per sottolineare le differenze da quelle scientificamente accreditate (Berti, 2002).

sottolineavano le analogie con il progresso scientifico, caratterizzato dalla progressiva sostituzione di modelli teorico-concettuali nuovi a quelli vecchi non più efficaci.

L'identificazione del cambiamento concettuale consente la comprensione delle strutture di rappresentazione della conoscenza e dei modi in cui l'istruzione può collaborare efficacemente a produrre la loro ricostruzione di significato. L'applicazione della modellizzazione in classe è un tipo di intervento che favorisce il cambiamento concettuale sia degli alunni che dei docenti.

3.6 Il costruttivismo e le competenze: i punti di intersezioni

L'approccio per competenze influenza coloro che concepiscono i programmi di studi attuali in un buon numero di paesi occidentali. Di conseguenza, i responsabili ministeriali sviluppano oggi programmi di studio seguendo la logica delle competenze. Secondo Jonnaert (2012) le competenze si iscrivono in un paradigma epistemologico socio costruttivista. Nella sua opera *Compétences et socioconstructivisme* l'autore sviluppa una riflessione in ambito educativo fra il concetto di competenza e di socio costruttivismo, definito precedentemente in questo capitolo, evidenziando i legami e le relazioni che si possono farne.

Jonnaert (2012) evidenzia che una delle grande ricchezze dell'approccio per competenza è l'inversione dell'ingresso degli apprendimenti scolastici. Anticamente i contenuti erano prima insegnati e era compito dello studente trovare o no, delle situazione per utilizzarli. L'approccio per competenze è inserito quindi all'interno delle situazioni. Le **situazioni** si trovano al centro dell'approccio per competenze, sono nelle situazioni che gli studenti trovano dei sensi ai saperi codificati. La situazione è la fonte dell'attivazione di una competenza attraverso la sua performance. L'autore utilizza i chiarimenti di De Terssac (1996, tratto da Jonnaert, 2012) per definire la competenza come *tutto ciò che è coinvolto nell'azione e tutto ciò che permette di dar conto dell'organizzazione dell'azione.* Da un altro punto di vista, le competenze di un individuo si appoggiano nel suo potenziale; in questo senso l'autore intente che l'azione è la condizione del potenziale. Le competenze sono quindi *i modi in cui gli individui gestiscono le loro risorse* *cognitive e sociali nell'azione in situazione*. In questa prospettiva un'azione non può essere prevedibile: dipende dal potenziale dell'individuo come dalla situazione e del suo contesto.

Oggi, attraverso la "competenza" l'approccio è contestualizzato, relativo ed è impiantato simultaneamente nell'azione e nelle potenzialità del soggetto. Nel definire di quale azione si tratta, Jonnaert (2012) ritorna ai lavori di Piaget e il suo gruppo ginevrino, inserendola in una prospettiva costruttivista. L'autore ci ricorda[50] che fu Piaget negli anni '70 a designare esplicitamente la sua epistemologia come costruttivista. In questa prospettiva ci allontaniamo dei discorsi che vedono l'azione, come precedentemente descritta in questo capitolo, come la semplice manipolazione di oggetti concreti.

Negli anni 90' si è iniziato pure a sostenere che il concetto di competenza può essere descritto utilizzando il concetto di schema. Piaget considera uno schema operativo la "struttura invariante di una operazione o di un'azione", che permette accomodamenti più semplici di fronte a una varietà di situazioni che si riferiscono alla stessa struttura. Secondo Pellerey (2004) gli schemi operativi implicati in una competenza si imparano dalla pratica o dall'esercizio concreto; questo non significa che non si appoggino su alcuna teoria. Anzi, quello che permette di collegare tra loro le varie esperienze operative è una varietà di riflessione critica, che è tanto più efficace, quanto più sostenuta da quadri concettuali appropriati.

Secondo Perrenoud (2003) l'approccio per competenze richiede lo sviluppo di schemi logici di mobilitazione intenzionale delle conoscenze. Tali schemi logici non si acquisiscono con la semplice assimilazione delle conoscenze ma attraverso la pratica. La costruzione di competenze avviene insieme alla costruzione di schemi di mobilitazione intenzionale di conoscenze, messe allo stesso tempo al servizio di un'azione efficace.

Riconosciuta la complessità del concetto di apprendimento e l'apparizione del concetto di competenza come costrutto capace di rispondere a tale complessità, si tratta di riconoscere in quali dimensioni l'idea di insegnamento rifletta tali orientamenti culturali.

Nel paradigma costruttivista le informazioni, così come si conoscono, mancano di validità oggettiva. Ciò significa che ogni nozione ricevuta dallo studente è costruita in maniera del tutto unica e personale, con la conseguenza che un insegnamento fondato sulla trasmissione di

[50] L'autore fa riferimento all'opera di Inhelder e Caprona (1985), Constructivisme et création de nouveautés: introduction. *Archives de psychologie*, 53 (204), 7-17.

informazioni risulta poco efficiente. Nella didattica costruttivista, l’obbiettivo principale è quello di sviluppare competenze. Le competenze vengono costruite dal soggetto attivo. Quando una competenza viene personalizzata, si può parlare di un diverso modo di applicazione di quella particolare abilità, cosa che di solito non porta a conflitti o problemi, ma incoraggia il confronto e la discussione.

Una volta stabilito che la didattica costruttivista mira a sviluppare competenze, cercando di incoraggiare la partecipazione attiva dello studente, è fondamentale indagare come sarebbe tale partecipazione. All’interno delle strutture educative, la discussione è uno strumento semplice, efficace e di facile applicazione. La discussione e il confronto permettono di perfezionare i propri costrutti mentali.

La discussione spinge il singolo individuo a rimodellare i propri costrutti mentali permettendogli di contestualizzare le conoscenze all’interno dell’ambiente sociale. Ogni volta che lo studente esprime le nozioni acquisite, lo farà in un modo leggermente diverso e più raffinato, perché inevitabilmente deve adattarsi sia alle esigenze del contesto che alle esigenze imposte da se stesso. Ciò lo aiuta a comprendere sempre meglio e a riorganizzare le idee sul concetto acquisito (Macedo, 2005).

Perrenound (2003) ci pone la domanda: una competenza e dunque un semplice schema? L’autore ritiene che essa orchestri un insieme di schemi. Uno schema è un insieme costituito, che è alla base di un'azione o un'operazione unitaria. Una competenza di una certa complessità mette in atto degli schemi di percezione, di pensiero, di valutazione e di azione, che sottendono inferenze, anticipazioni, trasposizioni analogiche, generalizzazioni, la stima delle probabilità, l'avvio di una ricerca diagnostica a partire da un insieme di indizi, la ricerca di informazioni di diversa natura, il formarsi di una decisione, ecc. Perrenound (p. 33) citta l’esempio del football: la competenza del centravanti che conduce un contrattacco è quella di smarcarsi, ma anche di chiedere il passaggio, di anticipare i movimenti della difesa, di stare attenti al fuorigioco, di cercare la posizione dei suoi compagni, di osservare l'atteggiamento del portiere avversario, di valutare la distanza dalla porta, di immaginare una strategia di sfondamento, di individuare la posizione dell'arbitro... Altrettanti schemi che possono essere curati con l'allenamento, ma di cui solo l'orchestrazione consente un'attuazione efficace.

Le competenze si costruiscono esercitandosi in situazioni complesse (Perrenoud, 2003). Nella prospettiva socio costruttivista le situazioni sono quindi fonte delle competenze; sono nelle situazioni in cui i soggetti costruiscono le loro conoscenze.

Considerazioni conclusive

A tutt'oggi il costruttivismo ha un notevole successo nella società della conoscenza che richiede sempre più che ogni individuo diventi protagonista responsabile di una formazione continua lungo l'arco della sua vita. Fornire al soggetto di una metodologia conoscitiva che sviluppa competenze metacognitive e un pensiero critico diventa oggi uno strumento essenziale per affrontare le costante sfide nella scuola, mondo del lavoro, rapporti sociali, ecc.

Il costruttivismo ha contribuito a modificare due aspetti della conoscenza del processo di apprendimento della conoscenza matematica: la didattica si è allontanata da una prospettiva sincronica e statica della conoscenza matematica, completa e codificata, per avvicinarsi a una prospettiva diacronica e dinamica della matematica come una specificità attività, uno specifico processo di costruzione; in secondo luogo, si è passati dalla centralità dell'insegnante come colui che trasmette conoscenza alla centralità del soggetto che interpreta attivamente le proprie esperienze da interazione con l'ambiente circostante e di comunicazione con l'insegnante (Sorzio, 1999).

Partendo dalla definizione della ***conoscenza*** e mettendo il concetto di ***competenza*** sullo stesso livello, secondo la linea teorica che abbiamo assunto, mostriamo che l'approccio per le competenze può rimanere coerente se si iscrive in un paradigma socio costruttivista. Le conoscenze sono costruite per quello che impara. Articolati con altre risorse, queste conoscenze permettono al suo autore di essere competente in diverse situazioni. Queste situazioni non devono quindi essere soltanto significative per lo studente ma anche relativamente pertinenti alle pratiche socialmente stabilite. Infatti, sono queste pratiche che mettono in causa le conoscenze di quello che impara. In altre parole, non è il contenuto disciplinare che determina l'apprendimento, ma le situazioni in cui lo studente può utilizzare i suoi saperi pertinenti come risorse per mostrarsi competente nella situazione Jonnaert (2012).

Possiamo stabilire che, in una prospettiva socio costruttivista, le conoscenze sono situate in un certo contesto sociale e fisico. Possiamo ugualmente stabilire che le competenze possono definirsi in funzione delle situazioni, e sono quindi situate come le conoscenze in un contesto sociale e fisico.

Certamente esercitare le competenze e insegnare seguendo gli orientamenti costruttivisti non è un’attitudine che si può improvvisare da un giorno all'altro. L’aggiornamento teorico, la consapevolezza della nuova proposta di educazione è il provvedimento iniziale per il raggiungimento dell’obiettivo. Occorre adeguare attentamente il proprio modo di insegnare e modificare le proprie abitudini: richiede la sperimentazione nella prassi quotidiana.

Operare sulle competenze e insegnare seguendo gli orientamenti costruttivisti non è una cosa che si raggiunge da un giorno all'altro. Per questo è necessario adeguare gradualmente il proprio modo di insegnare e modificare le proprie abitudini: è fondamentale riflettere seriamente e sperimentare nella prassi quotidiana, essere consapevole che si può fallire ma che comunque si deve riprovare.

CAPITOLO 4 METODOLOGIA

4.1 Riflessioni sul contesto della ricerca

La presente ricerca ha come obiettivo un'approfondita analisi dello svolgimento delle *competenze di modellizzazione matematiche.* In particolare attenzione, si pone l'attenzione su come il processo di sviluppo della competenza si presenta negli studenti della scuola superiore di secondo grado e quali sono le trasformazioni che la scuola potrebbe fare per promuovere tale sviluppo.

In conformità alle normative *Competenze chiave per l'apprendimento permanente (*Raccomandazione del parlamento europeo e del consiglio del 18 dicembre 2006), alle *Indicazioni nazionali per i Licei* e le *Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali* (Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca del 15 marzo 2010), si riconosce l'evoluzione e l'importanza dello sviluppo delle competenze matematiche nel contesto scolastico. Niss & Højgaard (2011), nel loro significativo lavoro *"Competencies and Mathematical Learning"* evidenziano il modo in cui si potrebbero misurare le competenze nelle diverse fasi del sistema di istruzione e, più importante, il modo in cui si possono garantire la progressione e la coerenza nell'insegnamento della matematica in tutto il sistema di istruzione. Come evidenziato nel capitolo 1, le proposte de Niss e Højgaard hanno ispirato le definizioni e gli obiettivi definiti da PISA – OCSE.

Come si può osservare attraverso le diverse idee precedentemente presentate, il concetto di competenza è tanto considerato **statico,** relazionato alla conoscenza approfondita, quanto **dinamico**, in relazione alla capacità di mobilitazione. In questa prospettiva dinamica si intende che è possibile dare un senso all'apprendimento scolastico e alla costruzione della conoscenza e, non meno importante alla formazione di cittadini competenti. Come sostiene De Corte (2007), il raggiungimento delle competenze implica la disposizione dello studente verso l'apprendimento della matematica. La modellizzazione matematica si inserisce nella prospettiva dinamica: permette un lavoro in classe che consente la costruzione della conoscenza e delle competenze matematiche.

Nel corso degli anni, diversi paesi sono riusciti a migliorare le conoscenze e le competenze matematiche degli studenti; alcuni hanno ridotto il divario tra gli allievi dal rendimento scarso e quelli dal rendimento elevato. Ciò nonostante, in Europa rimane ancora una grande quantità di studenti che non raggiungono il livello atteso di competenza matematica (Eurydice, 2011).

Agganciare la teoria matematica al mondo reale è uno degli obiettivi dell'istruzione più importanti da raggiungere (Niss & Højgaard, 2011; UNESCO, 2012). Le problematiche riguardo all'insegnamento della matematica e l'assenza di collegamento con il mondo quotidiano degli studenti è oggetto di studio da anni nella didattica della matematica. In questa prospettiva un'educazione alla modellizzazione come motore di innovazione didattica è in grado di promuovere l'interazione dinamica tra mondo reale e mondo matematico; elemento chiave del processo di insegnamento-apprendimento. Il collegamento della teoria matematica al mondo reale stimola l'interesse dello studente e promuove un apprendimento attivo, aiuta ad affrontare il processo di studio come una scoperta e favorisce la comprensione dei concetti matematici.

Il processo di modellizzazione consente ai ragazzi di conoscere le potenzialità del linguaggio matematico e fornisce loro una specie di "chiave di lettura" per assimilare con consapevolezza la teoria. La competenza di modellizzazione viene definita come la disposizione del soggetto a condurre in modo efficace tutte le tappe del processo di modellizzazione matematica applicata ad una determinata situazione, come definiscono Blomhoj e Jensen (2003). Riteniamo che la competenza di modellizzazione sia qualcosa di più dell'atto di applicazione di concetti matematici e metodi per risolvere situazioni del mondo reale. Ci sono persone che mostrano di avere la conoscenza su alcuni concetti, ma a volte, quando si trovano davanti a una situazione problematica e hanno bisogno di usare questa conoscenza, non sempre riescono al loro primo tentativo. Hanno bisogno di riflettere sulla situazione per quanto riguarda il concetto, per la ricerca di un'interpretazione e l'uso adeguato.

Nella scuola spesso viene messo in luce il problema della mancanza di tempo per adempiere al programma scolastico, mettendo in difficoltà l'applicazione della modellizzazione matematica.

Questo aspetto viene riconosciuto, secondo Bazzanesi (2002), come il maggiore ostacolo alla competenza di modellizzazione.

Come si potrebbe visualizzare in modo concreto l'applicazione della modellizzazione in classe? L'impostazione teorico-metodologica del curriculum di matematica dell'UMI[51] (Unione Matematica Italiana) assegna un ruolo fondamentale al laboratorio didattico nell'attività di insegnamento-apprendimento. Per promuovere l'effettivo sviluppo della modellizzazione in classe è necessario confrontare quindi gli elementi essenziali del laboratorio didattico con il cambiamento del contratto didattico tradizionale. In questa direzione si intende che il laboratorio didattico può diventare un ambiente privilegiato per la modellizzazione.

Le problematiche affrontate nelle ricerche sulla modellizzazione in diversi ambiti educativi svolte in tutto il mondo vengono dibattute dall'*International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*. Come evidenziato nel capitolo 2, per quanto concerne la lunga e intensa discussione sul collegamento dei compiti ai problemi del mondo reale, ci sono ancora pochi studi dettagliati sulle competenze di modellizzazione (Maaß, 2006). Riguardo al processo di modellizzare, le maggiori problematiche si osservano nel creare un collegamento tra la matematica e la realtà, nel semplificare e strutturare gli elementi della realtà.

Nonostante il riconoscimento dell'importanza della modellizzazione nello sviluppo delle competenze matematiche e la presenza di tale argomento nel curriculum della scuola superiore, esiste ancora un notevole divario tra gli ideali dell'innovazione del curriculum scolastico e l'insegnamento praticato tutti i giorni. In particolare, le autentiche attività di modellizzazione sono ancora piuttosto rare nelle lezioni di matematica (Blum et al., 2002); un termine forse ancora non molto diffuso nella pratica dell'insegnamento matematico in Italia (Resta et al., 2012). Nelle indagini PISA i problemi di modellizzazione si riferiscono ai livelli superiori di complessità (4, 5 e 6), in Italia gli studenti che appartengono a questo gruppo sono il 36% (INVALSI, 2009). I problemi di modellizzazione sono presenti in quest'indagine, intanto la maggior parte delle analisi svolte **si concentra sui risultati presentati piuttosto che sui processi di ragionamento impiegati dagli studenti.**

[51] Matematica 2003 - http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/

Esiste un consenso per quanto riguarda l'insegnamento della matematica, al meno a livello teorico, sulla necessità di focalizzarsi sulla promozione della conoscenza matematica e sulla capacità di usarla. Questo significa andare oltre alle semplici risoluzioni dei problemi matematici, spesso senza significato per lo studente (Biembengut & Hein, 2013).

Nel lavorare con la modellizzazione il discente è guidato ad acquisire una migliore comprensione della natura del problema da modellizzare e della teoria matematica da utilizzare, promuovendo l'utilizzo e l'applicazione dei contenuti specifici in situazioni complesse. In questo modo Biembengut e Hein (2013) sostengono che la didattica della modellizzazione può essere una maniera per risvegliare l'interesse negli studenti verso argomenti matematici che ancora ignorano o in cui non vedono alcuna applicazione. Inoltre, da la possibilità agli studenti di affrontare le situazioni problematiche, di sviluppare il loro interesse e di potenziare il loro senso critico. Una volta inserito attivamente nelle differenti tappe della modellizzazione, l'individuo ha la possibilità di costruire nuove conoscenze e sviluppare quindi diverse competenze.

Non ci resta altro che concludere che la sua applicazione è di fondamentale importanza nella pratica didattica e che va inserita nella prassi della disciplina di matematica. L'insegnante è l'autore principale della promozione di questa esperienza, insieme alle Indicazioni Nazionali, il curriculum e le iniziative promosse in ambito scolastico. L'indagine è volta alla ricerca, insieme agli insegnanti di matematica, di quali sono gli ostacoli presentati nel processo di modellizzazione e quali sarebbero le vie di intervento da promuovere in classe verso lo sviluppo della modellizzazione come una competenza.

4.1.1 Strutturazione della problematica indagata

Gli studi sulla risoluzione di problemi matematici (Schoenfeld, 1985; diSessa, 1983; Smith et al. 1993/1994; Herget & Richter, 2012; Perez-Tello et al., 2005) osservano che il rendimento di alcuni studenti è influenzato da diverse incomprensioni o concezioni erronee riguardo la matematica. In relazione alla fisica, gli autori Smith, diSessa e Roschelle (1993/1994) hanno realizzato un dettagliato studio sulle concezioni erronee degli studenti e sulle implicazioni di ciò nell'apprendimento.

L'idea che gli studenti arrivano ai corsi di scienze avendo delle concezioni ingenue è diventata ampiamente accettata da coloro che seguono o partecipano alla ricerca in ambito scolastico. DiSessa e i suoi colleghi (diSessa, 1988, 1993; Smith, diSessa & Roschelle, 1993/1994) hanno messo in dubbio la validità teorica ed empirica della prospettiva dei *misconcepitons* e hanno proposto una spiegazione alternativa alla struttura cognitiva, definita come primitive fenomenologiche o p-prims, come trattato nel dettaglio nel capitolo 1.

La presente ricerca si propone quindi di identificare le concezioni errate degli studenti riguardo il processo di modellizzazione matematica. L'analisi delle attività viene fatta attraverso l'identificazione dei primitivi fenomenologici e dei ragionamenti più articolati della competenza: si identificano gli ostacoli allo sviluppo di tale competenza.

Secondo diSessa (2007) i primitivi fenomenologici sono le unità di base della competenza. Le disposizioni ad agire, ovvero l'insieme delle condizioni che consentono all'individuo di impiegare le proprie conoscenze ed abilità in funzione di un determinato compito di realtà, rappresentano la componente più indeterminata e complessa della competenza (Castoldi, 2007).

Schoenfeld (1985) sottolinea che per comprendere ed insegnare le abilità di risoluzione dei problemi matematici bisogna capire "*che cosa significa pensare in modo matematico*" e "*come si possono aiutare gli studenti a pensare in tale modo"*. Biembengut e Hein (2013) suggeriscono che per implementare la modellizzazione in classe il professore deve avere consapevolezza della conoscenza matematica degli studenti, della loro realtà socioeconomica e del tempo disponibile per la realizzazione dell'impegno extra scolastico. L'indagine va ad analizzare il pensiero degli studenti e la riflessioni degli insegnanti su come si possono aiutare gli allievi in classe.

Capire a fondo il pensiero di coloro che apprendono è fondamentale per riuscire ad identificare i punti che devono essere ripensati nel processo di apprendimento. L'acquisizione delle competenze matematiche è possibile a partire dalla creazione di un ambiente in classe in cui gli studenti abbiano l'opportunità di imparare la matematica come una disciplina dinamica e in costante evoluzione e non ridurla alla memorizzazione di procedure (De Corte, 2007).

In questa ricerca le competenze sono assunte come un uso flessibile e critico dei contenuti. Il presente studio si focalizza sostanzialmente in:

- Ricostruire le competenze di modellizzazione presentate dagli studenti, identificando i primitivi fenomenologici e gli aspetti più sviluppati della competenza;
- Conoscere come gli insegnanti adatterebbero la dinamica delle attività in classe al fine di attenuare gli ostacoli riscontrati e promuovere la competenza indagata.

Tenendo conto della dimensione della problematica indagata nella ricerca e degli specifici aspetti che si propone di studiare, si è deciso di svolgerla in due fasi:

- La **FASE 1** riguarda l'investigazione svolta con gli studenti;
- La **FASE 2** riguarda l'indagine eseguita con gli insegnanti.

Trattandosi di una ricerca esplorativa, i soggetti partecipanti sono un campionamento di convenienza, utile quando non si hanno a disposizione soggetti rappresentativi di una popolazione ma in ogni caso possono fornire un approccio esplorativo riguardo un tema importante.

Il metodo dell'intervista si caratterizza per essere uno strumento aperto, flessibile, adattabile ai diversi contesti empirici, modellabile nel corso dell'interazione (Corbetta, 1999). In questa ricerca si utilizza l'intervista semi strutturata nelle due fasi. Secondo l'autrice, l'ordine con il quale i vari temi sono affrontati e il modo di formulare domande sono tuttavia lasciati alla libera decisione e valutazione dell'intervistatore. Questo modo di condurre l'intervista concede ampia libertà all'intervistato e all'intervistatore, garantendo allo stesso tempo che tutti i temi rilevanti siano discussi e che tutte le informazioni necessarie siano raccolte.

L'intervista, rivolta ai soggetti individuati secondo un piano di rilevazione, è condotta dall'intervistatore sulla base di uno schema di interrogazione flessibile e non standardizzato. Di fatto, anche se l'intervista non è standardizzata, essa non è lasciata al caso: l'intervistato viene scelto sulla base di determinate caratteristiche che sono pertinenti al suo vissuto personale o alla sua partecipazione a un determinato gruppo sociale. Come sostiene Corbetta (1999) lo scopo non è giungere alla generalizzazione dei risultati, ma il numero degli intervistati deve essere comunque consistente; in questo modo è possibile rilevare ogni informazione possibile sul fenomeno oggetto di ricerca.

L'indagine con gli studenti, denominata quindi come **FASE 1,** giunge ad identificare i primitivi fenomenologici presentati nel processo di modellizzazione; quali sono gli ostacoli presentati nello svolgimento; come interagiscono con la conoscenza di un concetto matematico e le loro abilità di metterlo in pratica. Durante l'analisi si identificano quali sono i contenuti e le abilità funzionali all'acquisizione di tale competenza.

Gli obiettivi dell'indagine esigono l'utilizzo di strumenti specifici di ricerca. Un tempo significativo è stato dedicato alla costruzione di tali strumenti, prendendo in considerazione una serie di aspetti, dettagliati di seguito nei materiali utilizzati per il disegno di ricerca. Attraverso lo svolgimento dell'Intervista Studenti e delle tre attività di modellizzazione si pretende di rispondere alle domande oggetto della ricerca riguardo la FASE 1. Secondo Herget e Richter (2012) esercizi come questi sono indispensabili per l'introduzione di competenze pertinenti alla modellizzazione matematica, in cui l'enfasi non è su procedure algoritmiche ma piuttosto sulla capacità di ordine superiore di traduzione, di interpretazione e di valutazione del problema reale in termini del modello matematico e delle sue soluzioni.

L'*Analisi delle competenze delle modellizzazione matematica* si propone di svelare nei soggetti indagati la consapevolezza del proprio agire, l'impiego produttivo dei propri saperi e il saper fare in relazione al contesto dell'attività proposta. La video registrazione delle interazioni consente di constatare la coerenza dei comportamenti verbali utilizzati dall'intervistatore, permettendo di verificare in modo oggettivo se lo studente è riuscito effettivamente a esprimersi liberamente, e di conseguenza a raccogliere dati validi. Il metodo investigativo che è stato utilizzato per indagare i processi mentali messi in atto dagli studenti della scuola superiore di secondo grado nella risoluzione delle attività di modellizzazione è stata l'intervista clinica e quello del "pensare ad alta voce", descritti dettagliatamente di seguito nei Concetti fondamentali.

La FASE 2 consiste nell'esplorazione fatta insieme a gli insegnanti; si pretende di farli riflettere sugli ostacoli presentati dagli studenti e di conoscere quali sono, secondo loro, le iniziative che la scuola può fare per lo sviluppo della competenza e possibili adattamenti nella loro pratica didattica per favorire l'autenticità delle attività di modellizzazione.

L'analisi del contenuto eseguita nella fase 2 consiste in una scomposizione del testo trascritto che viene in seguito categorizzato, secondo dimensioni teoriche previste dal ricercatore. Tale scomposizione avviene quindi in un modo sistematico, utilizzando criteri espliciti da applicare all'intera unità in oggetto (Kvale, 2007). Successivamente gli elementi individuati sono classificati in un sistema di categorie.

Conoscere il processo di ragionamento dello studente impiegato nella risoluzioni de problemi (Schoenfeld, 1985, 1987) e nello svolgimento del processo modellistico (Maaß, 2006; Blum et al., 2002) è di fondamentale importanza per l'insegnante. Per riflettere sulla didattica eseguita e prospettare nuove pratiche il docente deve impegnarsi a conoscere e a considerare come gli allievi ragionano in modo naturale. Inizialmente gli insegnanti analizzeranno il materiale riportato dal ricercatore e dopo risponderanno alle domande.

I processi di ragionamento e i p-prims presentati dagli studenti vengono riportati agli insegnanti e discussi con l'intento di introdurre dei cambiamenti concettuali nelle pratiche di insegnamento adottate dagli insegnanti. I cambiamenti di conoscenza significano la creazione di nuove strutture concettuali volte a reinterpretare le vecchie informazioni o ad acconsentirne di nuove.

Riassumendo la struttura dell'indagine sopra citata, riteniamo importante sintetizzare il percorso investigativo della ricerca:

Oggetto di analisi**: competenze di modellizzazione**	
Percorsi investigativi	
FASE 1	***FASE 2***
Ricostruzione delle competenze di modellizzazione matematica Riguardo agli studenti	**Interviste aperte a informatori privilegiati** Riguardo agli insegnanti

Tabella 2 - Le due diverse procedure di ricerca

4.1.2 La ricerca qualitativa

Le recenti prospettive che concernono la ricerca educativa si avvalgono della teoria della complessità quando riferita alle scienze naturali, attualmente trasferita al complesso di fenomeni sociali, all'interno dei quali gli autori collocano i fenomeni educativi (Semeraro, 2014). Come ritiene l'autrice, le ricerche di tipo qualitativo sono connesse ai paradigmi di *complessità*, come la multidimensionalità delle esperienze, di *contestualità*, nel senso di come i fenomeni vengono considerati tenendo conto delle realtà situazionali e di *processualità*, in cui i dati di indagine sono dipendenti dalla dimensione temporale che caratterizza il processo di ricerca.

L'indagine della FASE 1 e della FASE 2 è di tipo qualitativo. La ricerca qualitativa si sviluppa in assenza di procedure definite a priori e senza il controllo delle situazioni di indagine. In una ricerca qualitativa due ricercatori indipendenti osservano e selezionano dati divergenti e producono rappresentazioni alternative di uno stesso fenomeno (Sorzio, 2005).

Trattandosi di una ricerca di tipo qualitativo, l'analisi dei dati si poggia prevalentemente su principi interpretativi che considerano la multidimensionalità degli oggetti di indagine e fanno emergere da questi stessi oggetti l'analisi dei risultati della ricerca. Come ritiene Semeraro (2014) siamo di fronte allo sviluppo di un'interpretazione dei dati emergenti dalla realtà indagata; nelle ricerche qualitative, l'obiettivo è quello di descrivere realtà complesse.

I campioni per l'analisi qualitativa del contenuto, specifico per la FASE 2 di questa ricerca, sono costituiti da soggetti selezionati intenzionalmente, che possono dare informazioni sulle domande di ricerca oggetto dell'indagine. L'analisi qualitativa del contenuto si realizza effettuando procedure di codifica che trasformano i dati grezzi attraverso operazioni di selezione e focalizzazione (Miles & Huberman, 1994): schema di codifica o sviluppo delle categorie.

La ricerca qualitativa offre la possibilità di effettuare una continua rivisitazione e evoluzione dell'indagine, non essendo generalizzabile. La consapevolezza dei limiti dei processi razionali e l'accettazione costante dell'incertezza nella costruzione della ricerca scientifica ci inducono a riflettere continuamente sullo studio compiuto, sulle proprie congetture, apportando modifiche migliorative attraverso anche quanto emerge alla luce di nuovi approfondimenti e indizi empirici raccolti in contesto (Sorzio, 2005).

4.1.2.1 Limite del campionamento

Nella realizzazione di una ricerca esplorativa è importante evidenziare che i risultati non sono generalizzabili. Trattandosi di un campionamento di convenienza, non sono rappresentativi della popolazione ma in ogni caso possono fornire un approccio esplorativo riguardo un tema importante.

Se i dati non si standardizzano è più difficile confrontare e trasferire le conoscenza dal campione studiato ad una popolazione più ampia. Nonostante questi svantaggi, tale indagini sono ampiamente compensate dal fatto che l'intervista qualitativa permette di "andare in profondità", di scoprire il nascosto e l'imprevisto. (Corbetta, 1999 p.429). Come scrive Michael Patton (1990, in Corbetta, 1999):

> "lo scopo dell'intervista qualitativa è quello di capire come i soggetti studiati vedono il mondo, di apprendere la loro terminologia e il loro modo di giudicare, di catturare la complessità delle loro individuali percezioni ed esperienze [..]L'obiettivo prioritario dell'intervista qualitativa è quello di fornire una cornice entro la quale gli intervistati possano esprimere il loro proprio modo di sentire con le loro stesse parole" (p. 403).

L'analisi del contenuto di ogni tipo è, comunque, uno strumento riduttivo poiché limita il rango dei fenomeni osservati o da osservare e, soprattutto, trascura l'ambito nel quale essi compaiono ; la propensione alla quantificazione porta inoltre a organizzare la rilevazione in termini di conteggi frequenziali di tipi di atti o contenuti , ignorando l'indicalità che può dare ad atti o contenuti anche uguali significato diverso (De Grada, Bonaiuto, 2002, p.115).

4.2 Concetti fondamentali

4.2.1 Gli schemi di ragionamento e i primitivi fenomenologici

Nell'approccio costruttivista ogni individuo struttura la sua conoscenza a partire dalle proprie esperienze, interpretate mediante i propri **schemi mentali**. Il concetto di schema nasce dalle ricerche condotte da Piaget in biologia e viene definito come le strutture cognitive che permettono di categorizzare molteplici elementi informativi come un singolo elemento. Come ritiene l'autore, per un organismo autonomo che organizza in modo autonomo il mondo della propria esperienza, si possono descrivere le tre parti dello schema nel modo seguente: 1- l'organismo riconosce una situazione; 2 - esegue l'azione che ha associato con quella situazione e 3 - si aspetta il risultato al quale questa azione ha condotto nelle esperienze passate (Glasersfeld, 1994). Nell'interpretazione dell'autore, questo modello è indispensabile per la comprensione dei due concetti che sono fondamentali nell'edificio piagetiano: il concetto di assimilazione e quello di accomodamento[52].

Un studio più approfondito sul concetto di schema è stato realizzato nel capitolo 3 della tesi. Secondo Perrenound (2003) sono gli schemi che ci permettono di mobilizzare le conoscenze, i metodi, le informazioni e le regole per affrontare una situazione, poiché questa mobilizzazione esige una serie di operazioni mentali di alto livello.

L'esperienza attiva del bambino, come dell'adolescente, lo porta a **sviluppare schemi di interazione** con le cose e le persone, via via più elaborati e astratti. Il concetto di schema operativo viene oggi reinterpretato, attribuendo una particolare rilevanza alla complessità dell'azione e dell'interazione, implicando lo sviluppo non solo di strutture cognitive, ma anche di componenti sociali, affettive, linguistiche e volitive (Pellerey, 2004). Dal punto di vista costruttivista, il primo comandamento dell'insegnamento deve essere che ogni conoscenza inizia con l'esperienza, inizia con degli schemi di azione. Questi schemi costituiscono il fondamento per la costruzione dei concetti e tutto quello che se ne può astrarre riflettendo sulle azioni e sulle operazioni mentali che si eseguono.

[52] La discussione sull'assimilazione e l'accomodamento è fatta nel capitolo 3 della tesi.

Pellerey (2004) afferma che **una competenza può essere considerata un insieme di schemi** di natura cognitiva e affettiva. Una competenza complessa metterà in azione diversi schemi che implicano inferenze, generalizzazioni ecc. Da queste azioni si sviluppa progressivamente uno schema complesso interiorizzato che viene messo in pratica anche in situazioni poco familiari. Perrenound (2003) nel indagare se "una competenza è dunque un semplice schema" ritiene che essa orchestri un insieme di schemi. Uno schema è un insieme costituito, che è alla base di un'azione o di un'operazione unitaria. Una competenza di una certa complessità mette in atto degli schemi di percezione, di pensiero, di valutazione e di azione, che sottendono inferenze, anticipazioni, trasposizioni analogiche, generalizzazioni, la stima delle probabilità, l'avvio di una ricerca diagnostica a partire da un insieme di indizi, la ricerca di informazioni di diversa natura, il formarsi di una decisione, ecc.

Lo schema operatorio fa emergere il valore cognitivo dell'azione e il prezioso ruolo dell'esperienza per rendere competenti. Secondo Xodo (2010), l'identificazione di competenza con schema operatorio diviene quasi inevitabile perché sembra garantire alcuni requisiti della competenza, sciogliendo grovigli epistemologici come: la compresenza nella competenza di aspetti variabili e invariabili, la natura complessa della competenza, la possibilità di mobilitare risorse attraverso la competenza, il trasferimento delle competenze da un contesto ad un altro e la possibilità di aggregare nuove conoscenze.

I **modelli mentali**, basati sulle credenze provenienti dall'osservazione oppure sulle informazioni ricevute dal contesto culturale, vengono generati dal soggetto per risolvere problemi, per spiegare fenomeni e per formulare previsioni in un determinato dominio di conoscenza. DiSessa (1993) propone la teoria della "conoscenza in pezzi" (knowledge in pieces) per descrivere lo sviluppo della conoscenza intuitiva degli allievi nella materia della fisica, affermando che la fisica intuitiva è costituita da piccole strutture più frammentari. Tale teoria introduce ipotetiche strutture di conoscenza, i primitivi fenomenologici che sono create e rinforzate dall'esperienza e non attraverso il ragionamento astratto.

DiSessa definisce i ***primitivi fenomenologici*** come gli elementi di base della competenza. Secondo l'autore (1987, 2007) i primitivi fenomelogici (p-prims) descrivono lo sviluppo della conoscenza intuitiva degli allievi, identificano degli aspetti di significato che non sono implicati necessariamente nel ragionamento corretto su concetti formali. Un p-prim è una semplice idea esplicativa o descrittiva che viene accettata da una persona di modo acritico; si tratta di una collezione di astrazioni ingenue di semplici fenomeni quotidiani osservati dalle persone. Un p-prim differisce anche dal ricordo di una legge scientifica: perché imparare una legge implica l'utilizzo di un ragionamento intenzionale da parte dello studente ad un livello molto alto, una "spiegazione esperta," se si vuole. Le idee più intuitive possono anche essere realizzate inconsciamente, in modo meno formale, e costituiscono una spiegazione meno precisa (diSessa, 1987; Hammer, 1996). È attraverso la costruzione degli elementi di base che l'individuo costruisce la competenza matematica più avanzata.

Ci sembra doveroso sottolineare come l'intervista clinica, presentata inizialmente da Piaget, si proponga di conoscere gli schemi di ragionamento elaborati dai soggetti riguardo a un argomento specifico.

4.2.2 L'intervista clinica

La metodologia anche denominata di *metodo clinico* o *metodo di esplorazione critica*, è una procedura per indagare come i soggetti pensano, percepiscono, agiscono e sentono; cerca di scoprire ciò che non è evidente in quello che i soggetti fanno o dicono, cosa c'è dietro l'apparenza della loro condotta, sia attraverso azioni che a parole (Delval, 2001, p.67, trad. nostra). Nella tradizione Piagetiana, nel quadro complessivo, l'obiettivo dell'intervista clinica è quello di permettere all'intervistato di esporre il suo "naturale" modo di pensare sulla situazione presentata (Delval, 2001; diSessa, 2007).

Il Metodo Clinico parte da una sintesi originale e sorprendente dell'interrogazione del bambino. L'originalità del pensiero infantile che Piaget ha realizzato ha come base il principio metodologico secondo il quale la flessibilità e la precisione dell'intervista "in profondità", che caratterizzano il metodo clinico, devono modulare attraverso la ricerca sistematica dei processi logici-matematici sottostanti ai ragionamenti espressi (Munari, 2010). Secondo Delval (2001) il metodo è flessibile per tenere conto delle innumerevoli possibilità che possono emergere durante un esperimento o intervista, allo stesso tempo richiede un'organizzazione molto veloce delle ipotesi e del pensiero del ricercatore per essere applicato in modo appropriato.

Il ritmo dell'intervista clinica è in genere lento e riflessivo. L'intervistatore quasi sempre trattiene il giudizio sulle risposte dei soggetti; sfide personali o autorevoli in relazione alle loro opinioni sono rare. L’istruzione è anche relativamente rara, principalmente perché tende ad indurre la visione dell’intervistatore come un'autorità, possibilmente con l'intento normativo e valutativo (diSessa, 2007). In tali situazioni di inchiesta congiunta, il flusso di dare e prendere suggestioni e contro-proposte diventa un tipo di conoscenza intorno al quale si organizza un importo significativo di competenza.

Il processo di investigazione può essere realizzato utilizzando una varietà di strategie. A volte può fornire interpretazioni alternative al soggetto, in modo da farlo rispondere a domande come “Qualcuno mi ha detto che….”, “Cosa ne pensi”, cercando di capire il corso del suo pensiero. Secondo diSessa (2007) bisogna capire la natura dell’intervista clinica come un evento sociale di interazione. Egli afferma che se le affermazioni fatte dall’intervistato non sono supportate da strategie dell'intervistatore, coerenti con gli obiettivi dell’indagine, i commenti espliciti da parte dell'intervistatore saranno probabilmente ignorati. L'obiettivo primario dell'intervistatore in un’intervista clinica è scoprire il modo in cui l'intervistato da senso alla situazione proposta. L’obiettivo secondario è aiutare l’intervistato a dare senso alle sue idee. Il successo dell'intervistatore dipende dal fatto di autorizzare l'intervistato ad avere il suo proprio modo di pensare davanti alla situazioni o problemi presentati (diSessa, 2007). L'esperienza e l'abilità preliminare dell’intervistatore nel capire ciò che può sembrare sensato o meno tra quello che viene detto dall’intervistato svolgeranno un ruolo fondamentale nella creazione di una struttura di attività ragionevole. Il compito dell’intervistato nell’intervista clinica è dare un senso alla situazione problematica presentata, facendo del suo meglio. L’intervistato può approssimare la problematica al suo contesto, come una situazione del quotidiano, attraverso la mobilitazione di strategie proprie.

Attraverso l’intervista clinica quello che si desidera identificare, sono dei p-prims elaborati dai soggetti indagati attraverso lo svolgimento della *Sequenza di attività con problemi di modellizzazione.*

4.2.3 I thinking aloud protocol “Il pensare ad alta voce”

Il termine protocollo "think aloud" comprende uno specifico tipo di protocollo verbale nel quale l'intervistato dice cosa sta pensando, cosa sta cercando di fare, mentre sta eseguendo un particolare compito o risolvendo un problema. Come sostenuto da Ericsson e Simon (1993) il metodo investigativo consiste nel fare esprimere nel modo più spontaneo possibile ogni singolo studente coinvolto, evitando di direzionarlo verso una specifica risposta e di ostacolare quello che trascorre nella sua mente.

Lo scopo di questo metodo è quello di rendere esplicito ciò che è implicitamente presente nei soggetti che svolgono un compito specifico. Il pensare a voce alta mentre si risolve un problema fornisce delle preziose indicazioni all'intervistatore su come il soggetto lo interpreta; la spiegazione di come ha ragionato dopo aver risolto il compito riguarda il fatto che il soggetto può dimenticare i suoi pensieri originari, può non saper dare spiegazioni del suo comportamento o fornire i commenti che si aspettano di dover dare.

L'uso di questa procedura è giustificato dal fatto che per identificare i primitivi fenomenologici degli studenti e come gli hanno organizzati, è fondamentale ascoltarli nella descrizione del loro pensiero (Ericsson & Simon, 1993).

Anche denominato "metodo della riflessione parlata" è stato utilizzato negli anni venti dallo psicologo e pedagogista svizzero Édouard Claparède; egli riteneva che chiedere di verbalizzare i propri pensieri mentre essi si svolgono permettesse di evitare errori relazionati al conservare i pensieri nella propria memoria per poi doverli successivamente ricordare. In Italia si è cominciato a manifestare interesse verso la "riflessione parlata" negli anni sessanta con Luigi Calonghi, utilizzando tale metodologia per comprendere le difficoltà che gli alunni della scuola elementare incontravano nel risolvere i vari problemi di aritmetica e geometria che venivano loro proposti (Pellerey, 2006).

L'utilizzo di una tecnica di comunicazione verbale pertinente consente anche al docente di analizzare le informazioni relative al processo che l'allievo mette in atto per raggiungere determinati risultati.

4.2.4 Il cambiamento concettuale

Il cambiamento concettuale considera le strutture mentali degli individui come reticoli di concetti e delle convinzione interconnesse, ponendo l'accento sui contenuti di pensiero anziché sulla sua forma (diSessa, 2007). Le strutture cognitive e i loro cambiamenti sono *specifici per dominio* e riguardano argomenti distinti.

Una delle origini dell'approccio del cambiamento concettuale è la teoria di Piaget e il tentativo di superarne alcuni limiti. Riguardo alcune implicazioni didattiche, l'approccio sottolinea la necessità di prendere come punto di partenza le strutture mentali dei discenti. Secondo la teoria piagetiana, tali strutture sono costituite da operazioni logiche in cui lo sviluppo viene promosso dall'attività di sperimentazione sugli oggetti fisici e da rapporti sociali di cooperazione. A tale sviluppo si dovrebbe ispirare anche l'azione educativa. L'approccio del cambiamento concettuale considera invece le strutture cognitive come reticoli di concetti e credenze interrelati, ponendo l'accento sui contenuti di pensiero anziché sulla sua forma (Berti, 2002).

I processi di svolgimento delle attività e dei p-prims presenti al loro interno presentati dagli studenti, sono stati riportati dagli insegnanti e discussi, al fine di introdurre dei possibili cambiamenti concettuali.

4.3 DISEGNO DI RICERCA

Dopo aver analizzato da un punto di vista teorico le varie problematiche relative allo sviluppo della competenza di modellizzazione, alle difficoltà che possono sorgere durante lo svolgimento del processo e come viene spesso trattato in classe, nel presente capitolo si descriverà il disegno della ricerca. Considerando la divisione dell'indagine presentata precedentemente nella tabella 2, il disegno di ricerca segue tale divisione e descrive rispettivamente: i soggetti coinvolti, gli strumenti e le procedure utilizzate per rispondere agli interrogativi che sono stati sollevati in questa ricerca; relativi rispettivamente alle difficoltà che gli studenti incontrano durante la realizzazione del processo di modellizzazione e cosa potrebbe fare la scuola per attenuare gli ostacoli riscontrati.

4.3.1 Gli obiettivi e le domande di ricerca

All'interno del contesto di ricerca che è stato individuato all'inizio di questo capitolo è emerso il seguente quesito: **Quali sono le competenze di modellizzazione sviluppate dagli studenti e quali sono gli interventi da realizzare in classe per promuovere lo sviluppo di tale competenza?**

Seguendo lo schema mostrato nella tabella 2, gli obiettivi e le domande della ricerca sono presentati rispettivamente per la fase 1 e la fase 2.

4.3.1.1 Obiettivi e domande della FASE 1

Per affrontare la domanda iniziale è necessario innanzitutto comprendere il processo di apprendimento degli studenti in relazione alla problematica affrontata. In questa dimensione sono emersi altri obiettivi più specifici e delle domande puntuali:

Obiettivo 1: Identificare i processi di ragionamento degli studenti e ricostruire le loro competenze di modellizzazione sviluppate. Nello specifico:

- Identificare i primitivi fenomenologici presentati nel processo di modellizzazione;
- Individuare quali sono gli ostacoli presentati nel processo di modellizzazione;
- Come interagiscono con la conoscenza di un concetto matematico e le loro abilità di metterlo in pratica;
- Quali sono i contenuti e le abilità funzionali all'acquisizione di tale competenza.

Domanda 1: **Quali sono i primitivi fenomenologici della competenza modellistica presentati dagli studenti e come si presentano le articolazioni svolte verso la "formalizzazione" della competenza?**

Obiettivo 2: Conoscere degli aspetti motivazionali degli studenti e la loro autoefficacia. Nello specifico, si prevede di comprendere dei soggetti indagati:

- L'atteggiamento che hanno in riferimento a quanto si sentono competenti nell'affrontare un determinato compito, quali sono le competenze che ritengono di avere e come le percepiscono;
- Quali sono le loro motivazioni e il quanto si sentono motivati ad apprendere in generale e nella matematica;
- Dove "immaginano" di utilizzare la matematica che hanno appreso fuori del contesto scolastico;
- Come concepiscono l'avvenimento delle conoscenze matematiche.

Domanda 2: **Quali sono le competenze che gli studenti ritengono di avere e qual è la loro motivazione ad apprendere?**

4.3.1.2 Obiettivi e domande della FASE 2

Nell'interesse di riflettere sulle iniziative che la scuola può fare per lo sviluppo della competenza, si indaga insieme agli insegnanti, come si potrebbe svolgere la modellizzazione in classe in modo da promuovere delle competenze. Tale esplorazione apporta il seguente obiettivo e la seguente domanda:

Obiettivo 3: Esaminare con gli insegnanti le competenze di modellizzazione sviluppate dai ragazzi e promuovere una riflessione sui possibili adattamenti nella loro pratica didattica. Nello specifico:

- Quali sono gli ostacoli allo sviluppo delle competenze di modellizzazione;
- Come le Indicazioni Nazionali per il Curriculo affrontano questo aspetto;
- Cosa può fare la scuola per lo sviluppo della competenza.

Domanda 3: **In base all'analisi del processo di ragionamento dei ragazzi e della loro esperienza docente, come gli insegnanti adatterebbero le attività da promuovere in classe per attenuare gli ostacoli riscontrati?**

4.3.2 Metodo Investigativo

Come individuato all'inizio della metodologia, per raggiungere agli obiettivi e rispondere alle domande emerse, l'indagine esplorativa è stata costruita attraverso due percorsi empirici di ricerca.

FASE 1

I metodi utilizzati nel primo percorso di questo lavoro di ricerca per conoscere i ragionamenti degli studenti, cercare di identificare i primitivi fenomenologici e gli ostacoli della modellizzazione sono stati l'**Intervista clinica** (Delval, 2001; diSessa, 2007) e il **Think aloud protocol** "pensare ad alta voce" (Ericsson & Simon, 1993).

L'intervista clinica, definita precedentemente in questo capitolo, ha come obiettivo principale di permettere all'intervistato di esporre il suo "naturale" modo di pensare sulla situazione presentata (Delval, 2001; diSessa, 2007). È costituito da un'intervista semi strutturata: in base alle risposte fornite dagli intervistati, l'intervistatore gli sottopone altre domande complementari, con l'obiettivo di conoscere nei dettagli il corso del pensiero di colui che parla. Le domande complementari si riferiscono a ulteriori chiarimenti riguardo l'idea esibita dal soggetto oppure trattano di argomenti generati di idee contrarie a quelle presentate dall'intervistato. In quest'ultimo caso, l'idea contraria è una contro-proposta (Delval, 2001):

viene presentata al soggetto con l'intuito di metterlo in confronto con un'altra situazione o punto di vista, dovendo sostenere se stesso nel ragionamento assunto; lo scopo è sempre quello di comprendere nei dettagli il suo modo di pensare. È importante sottolineare che le contro-proposte non costituiscono dei suggerimenti o dei giudizi da parte del ricercatore.

Simultaneamente, i soggetti sono stati invitati a pensare ad alta voce mentre svolgevano le attività di modellizzazione. Il principio della tecnica del Think aloud è fare in modo che l'intervistato possa rendere immediatamente esplicito ciò che pensa ad alta voce quando è concentrato nella risoluzione di un problema. La tecnica considera che esiste una contemporaneità tra il processo mentale e la verbalizzazione; Ericsson e Simon (1993) attribuiscono che pensare ad alta voce non cambierà il corso dei processi cognitivi. L'utilizzo di tale tecnica consente all'intervistatore di ottenere dati validi, in quanto fedeli al pensiero dello studente e in grado di sostenere il processo che ha dato origine a determinati ragionamenti. È importante evidenziare che durante l'indagine, l'intervistato si esprime nel modo più spontaneo possibile e si evita in ogni modo di direzionarlo verso una risposta specifica o di censurare ciò che passa per la sua mente.

FASE 2

Il secondo percorso della ricerca investiga attraverso **l'intervista qualitativa del contenuto** (Corbetta,1999; Kvale, 2007) la prospettiva degli insegnanti sui processi di apprendimenti presentati dagli studenti nella fase 1 e la loro riflessione sulle possibili modifiche da realizzare nel percorso didattico per far maturare la competenza indagata.

L'intervista qualitativa del contenuto tratta di un'intervista *semistrutturata* in cui viene studiata attraverso l'analisi qualitativa del contenuto. L'intervista qualitativa tratta di una conversazione provocata dall'intervistatore, rivolta a soggetti scelti sul principio del piano di rilevazione, avente finalità di tipo conoscitivo, guidata dall'intervistatore, sulla base di uno schema flessibile e non standardizzato di interrogazione (Corbetta, 1999).

L'intervista semistrutturata prevede una traccia che riporta gli argomenti che necessariamente devono essere affrontati durante l'intervista; essa può essere costituita da un elenco di argomenti o da una serie di domande a carattere generale. L'intervista semistrutturata si caratterizza per essere uno strumento aperto, flessibile e adattabile ai diversi contesti empirici.

Tale tipo di intervista è modellabile nel corso dell'interazione: l'intervistatore valuta e decide l'ordine con il quale i vari temi sono affrontati e il modo di formulare domande (Corbetta, 1999; Kvale, 2007).

Nell'intervista qualitativa del contenuto, l'intervistatore lascia parlare molto l'intervistato, ma nello stesso tempo deve essere abile nello stimolarlo nella sua funzione di testimone, chiedendogli spiegazioni quando non è sufficientemente chiaro, dettagli e approfondimenti quando dà per scontato quello che di fatto non lo è, in modo da riuscire a fargli raccontare tutto quello che sa.

4.3.3 I soggetti partecipanti

FASE 1 - Studenti

Per il primo percorso investigativo della ricerca sono stati indagati nove studenti della scuola superiore di secondo grado appartenenti al II e III anno, con età compresa tra 15 e 17 anni.

Con l'intuito di conoscere degli aspetti cognitivi e metacognitivi della competenza indagata, sono stati invitati soggetti di differenti provenienze scolastiche, con l'obiettivo di non restringere il campo di conoscenza o preferenza verso la matematica.

Trattandosi di un campionamento di convenienza, gli studenti hanno partecipato alla ricerca in modo volontario. I soggetti coinvolti sono stati individuati in base alla loro disponibilità a partecipare e mantenendo il criterio della varietà di provenienze scolastiche, comprendendo:

- Istituti Tecnici, rispettivamente del settore economico e tecnologico: Amministrazione, Finanza e Marketing; Turismo; Informatica e Telecomunicazioni; Grafica e comunicazione.
- Licei negli indirizzi: Linguistico; delle scienze umane; scientifico; classico.

Trattandosi di una ricerca qualitativa e del approfondimento di una relazione con un numero limitato di persone che hanno storie di vita differenziate in situazioni molto specifiche, esiste un alto rischio di riconoscibilità dei soggetti coinvolti durante la raccolta dati (Sorzio, 2005). Il reale nome dei soggetti coinvolti è quindi stato sostituiti da pseudonimi.

Il foglio del Modulo di richiesta di autorizzazione alla registrazione dell'intervista si trova nelle appendici; tutti i genitori lo hanno firmato.

FASE 2 - Insegnanti

Per il secondo percorso investigativo sono stati coinvolti insegnanti di matematica della scuola superiore di secondo grado. Si tratta di un campionamento di convenienza; gli insegnanti invitati hanno partecipato all'indagine in modo volontario.

Per contemplare l'obiettivo della seconda fase di ricerca sono stati invitati degli informatori privilegiati: i soggetti scelti sono di tipo strategico. Si tratta di insegnanti di matematica che lavorano nella scuola superiore di secondo grado in differenti indirizzi, ma particolarmente competenti per affrontare l'oggetto dell'indagine (Schwandt, 2007).

Insegnanti come informatori privilegiati

Gli intervistati possono essere delle persone non in quanto parte del fenomeno studiato, ma in quanto profonda per essere collocati in una posizione privilegiata di osservazione. L'informatore privilegiato fa parte della popolazione oggetto di studio, ma ricopre in essa una posizione particolare: si pensi a un leader d'opinione o un leader di comunità, che viene intervistato in quanto rispecchia le opinioni del gruppo al quale appartiene. Oppure, per sue vicende personali, possiede una conoscenza particolarmente approfondita dell'oggetto di studio (Corbetta, 1999).

L'individualizzazione dei soggetti invitati[53] ha preso in considerazione gli anni di esperienza del docente, la diversità delle istituzioni e degli indirizzi che gli appartengono e le probabili competenze necessarie per rispondere all'indagine: Informatori privilegiati che riflettono sulla competenza di modellizzazione.

[53] Nel momento di determinare gli insegnanti invitati si è preso in considerazione anche i suggerimenti fatti dal professore Giorgio Bolondi, allertando al fatto di prendere un campionamento che sia rappresentativo.

L'intervista qualitativa, proprio per le sue esigenze di approfondimento non può essere condotta su campioni troppo ampi. Le interviste agli informatori privilegiati sono fra loro assolutamente eterogenee e non confrontabili: ognuna è un caso a sé, ha un suo andamento e una sua focalizzazione. Questo perché i personaggi intervistati sono molto diversi fra loro, e ognuno ha una storia diversa da raccontare (Corbetta, 1999). Pertanto, per l'indagine hanno partecipato quattro docenti di matematica con esperienze nella scuola superiore di secondo grado da 3 a 30 anni. Si tratta di tre professoresse e un professore.

4.3.4 Materiale e le procedure utilizzate:

I materiali e le relative procedure utilizzate nella ricerca vengono presentati e descrivono rispettivamente la Fase 1 e la Fase 2 dell'indagine. Gli strumenti sono stati accuratamente costruiti dal ricercatore per raggiungere gli obiettivi dell'indagine; durante la descrizione dei materiali o degli esperimenti di ricerca si presenta come è stata articolata la loro costruzione.

4.3.4.1 Descrizione degli esperimenti FASE 1

L'indagine svolta con gli allievi è denominata *Analisi delle competenze di modellizzazione matematica* e viene eseguita attraverso lo svolgimento di due strumenti:

- **A** *"Sequenza di attività con problemi di modellizzazione":* Consistono in 3 problemi di modellizzazione: Attività del Taxi, Attività della Statua, Attività del Viaggio (per l'obiettivo **1** di ricerca).
- **B** *"Intervista Studenti":* Questionario con 11 domande (per l'obiettivo **2** di ricerca).

Allo scopo di ricostruire le competenze di modellizzazione presentate dagli studenti e conoscere come le hanno articolate è stata progettata la ***Sequenza di attività con problemi di modellizzazione****,* che consistono nei tre compiti. Per conoscere quali sono le competenze che gli studenti ritengono di avere e qual è la loro motivazione ad apprendere è stata creata **l'*Intervista Studenti*.**

A) Sequenza di attività con problemi di modellizzazione

Per rispondere alla prima domanda di ricerca sono stati costruiti degli strumenti didattici, che consistono in attività con problemi di modellizzazione. Lo svolgimento delle attività attraverso la modellizzazione ci permette di identificare delle competenze di modellizzazione sviluppate dagli studenti. Le attività sono problemi che gli studenti possono trovare anche fuori dell'ambito strettamente scolastico.

La costruzione delle attività: Durante la creazione delle attività è stata posta attenzione sull'organizzazione del problema da proporre, in modo da renderlo comprensibile e interessante, affinché lo studente si senta motivato a risolverlo. Secondo diSessa (2007), l'obiettivo principale degli intervistati è quello di dare un senso alle situazioni o ai problemi proposti dall'intervistatore. Il vincolo primario della relazione tra l'intervistatore e l'intervistato è che il primo deve proporre delle sfide viste dal secondo come indagine ragionevole. Mentre si costruivano i problemi di modellizzazione si è preso in considerazione anche "quale tipo" di sfida gli studenti dovranno affrontare. Secondo le *Indicazioni Nazionali per il Curriculo*, i contenuti matematici presenti nei problemi sono già stati sviluppati in percorsi scolastici precedenti dello studente. Quando si organizzano delle sfide da affrontare in un determinato compito, secondo Pellerey (2004) si può parlare di una tipologia o classe di situazioni sfidanti, che sia sufficientemente impegnativa, ma che non oltrepassi un livello di difficoltà che renda praticamente troppo arduo se non impossibile, l'affrontarle positivamente da chi ne è coinvolto (p. 23).

Le attività proposte agli studenti consistono in tre problemi di modellizzazione: *Il Taxi, La statua*[54] *e Il Viaggio.* Gli scopi principali di ogni attività sono:

- *Attività del Taxi:* Scoprire la tariffa chilometrica e creare la funzione che rappresenta la corsa presentata.
- *Attività della Statua*: Supporre l'altezza di una statua dalla testa ai piedi in base all'immagine della testa.
- *Attività del Viaggio*: Determinare la distanza e sostenere una pianificazione di un viaggio in base a un tragitto presentato nella mappa.

[54] L'attività della Statua è stata adattata dal sito http://did.cermat.org/

La descrizione completa delle attività si trova nelle appendici.

Durante lo svolgimento delle attività lo studente deve identificare e decidere quali conoscenze sono pertinenti e come si possono applicare di modo efficace. Questo significa mettere in gioco le conoscenze di base della matematica: i concetti, le definizioni, la capacità di ragionare verso l'astratto, la capacità di analizzare, la capacità di comunicare idee in modo efficace e la capacità di argomentazione.

Le attività richiedono allo studente di mettere in atto delle abilità come: identificare rappresentazioni algebriche che esprimono una relazione fra grandezze; interpretare mappe che rappresentano delle relazioni fra grandezze; utilizzare conoscenze algebriche e geometriche come risorse per la costruzione dell'argomentazione; risolvere problemi e valutare proposte di intervenzioni nella realtà utilizzando delle conoscenze algebriche; descrivere e interpretare un fenomeno in termini quantitativi.

PISA (OECD, 2006) considera un aspetto importante della competenza il confrontarsi con la matematica, prendendo in considerazione: *le situazioni*[55], *i contesti*[56] e *i contenuti matematici*[57] abbordati. Facendo riferimento agli aspetti evidenziati da PISA, le attività proposte affrontano:

- *Situazione:* problemi di tipo personale e sociale.
- *Contesto:* problemi di tipo personale e sociale.
- *Contenuti matematici*: spazio e forma, cambiamento e relazioni, quantità e incertezza.

---

[55] **La situazione** è quella porzione del mondo dello studente all'interno della quale i compiti sono presentati e si trova a una certa distanza dallo studente stesso. PISA considera la vita personale la situazione più prossima allo studente, seguita dalla vita scolastica, dal lavoro e dal tempo libero e, infine, dalla comunità locale e dalla società come la si incontra nella vita quotidiana. Le più lontane di tutte sono le situazioni scientifiche. Quattro situazioni-tipo sono definite e utilizzate per ambientare i problemi da risolvere: personale, scolastica/occupazionale, pubblica e scientifica. (idem).

[56] Il **contesto** di un quesito è rappresentato dalla sua ambientazione specifica all'interno di una situazione e comprende tutti i singoli elementi utilizzati per formulare il problema.

[57] **Il contenuto matematico** rappresenta concetti centrali ed essenziali in qualsiasi descrizione della matematica e che sono il nucleo di tutti i curricoli a prescindere da ordine e grado. Le quattro idee chiave sono: i modelli di *spazio e forma*, di c*ambiamento e relazioni*, *di quantità*; permettono di articolare il contenuto matematico in un numero di aree sufficiente a garantire che i quesiti coprano l'intero curricolo e che, allo stesso tempo, il loro numero sia sufficientemente ridotto da evitare distinzioni troppo minuziose che impedirebbero di prendere in considerazione problemi fondati su situazioni reali.

Il progetto PISA (OECD, 2006) ha scelto di dividere le competenze e i processi cognitivi in tre diversi raggruppamenti: il raggruppamento della *riproduzione*, quello delle *connessioni* e quello della *riflessione*. Le attività proposte come strumenti appartengono ai raggruppamenti[58] delle competenze di connessioni e delle riflessioni. Il raggruppamento delle competenze di riproduzione non viene identificato nelle attività perché nessuna presenta il modello matematico già costruito.

Per la comprensione della costruzione dei modelli matematici presenti nelle attività gli allievi devono (OECD, 2006)**:** a) Costruire semplici rappresentazioni di fenomeni, come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico; b) Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni e di equazioni, anche per via grafica, collegati con situazioni di vita ordinaria. Questo implica saper risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica come: individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento, ecc.

B) Intervista Studenti

Per rispondere alla seconda domanda di ricerca è stata creata *l'Intervista Studenti*, che consiste in un'intervista semistrutturata con risposte aperte, trattandosi nello specifico di un'intervista clinica. I dati emersi da quest'indagine permettono di conoscere il profilo degli studenti coinvolti, individuando importanti aspetti implicati nel processo di apprendimento. Nel quadro sotto elencato si trovano delle domande strutturate.

L'intervista indaga le motivazioni degli studenti nel contesto della matematica e nella scuola in generale. Nel processo scolastico la motivazione gioca un ruolo fondamentale. Nell'ambito dell'apprendimento matematico, la motivazione può essere descritta come un insieme di spinte interne e di pressioni esterne che promuovono il desiderio di impegnarsi in matematica,

[58] **Connessione**: pur non essendo eccessivamente complessi, sono comunque diversi da quelli ai quali gli studenti sono abituati; nell'interpretare modelli e risultati matematici in termini di "realtà" e viceversa, nonché aspetti di comunicazione del modello e dei suoi risultati. **Riflessione:** potrebbero essere complessi o molto diversi da quelli ai quali gli studenti sono abituati; nell'interpretare modelli e risultati matematici in termini di "realtà" e viceversa, nonché aspetti di comunicazione dei risultati del modello. Tale competenza comprende inoltre il riflettere, analizzando, il criticare e l'impegnarsi in comunicazioni più complesse riguardanti i modelli e la modellizzazione. (OECD, 2006, p. 116 e 118).

contrapposte ad altre che determinano un disinteresse verso la materia e la tendenza ad evitarla o comunque ad affrontarla il meno possibile (Moè & Lucangeli, 2010).

Con l'intervista si pretende di conoscere anche l'atteggiamento che lo studente ha in riferimento a quanto si sente competente nell'affrontare un determinato compito. Bandura (2000) sostiene che per gli studenti l'autoefficacia sia un fattore cruciale per ottenere o meno dei risultati. Alunni con bassa autoefficacia possono evitare molti compiti, specialmente quelli più impegnativi. Al contrario, gli studenti con un'alta autoefficacia, hanno una tendenza a perseverare maggiormente e a scegliere attività più sfidanti.

La capacità di impegnarsi in modo continuativo con l'obiettivo di portare a termine un compito assegnato è di estrema importanza per il processo di modellizzazione: essendo un processo circolare richiede lo svolgimento di ogni tappa per arrivare alla soluzione; esige una riflessione da parte dello studente sull'intero processo per riuscire a risolvere il problema. Secondo Pellerey (2010) la percezione della propria competenza nel portare a termine gli impegni scolastici, è considerata dagli esperti uno dei fattori principali nello sviluppo di motivazioni e disposizioni positive nel percorso di apprendimento.

Secondo Lucangeli (2011), i differenti modi di percepire le proprie competenze vanno a riflettersi direttamente sulla motivazione ad apprendere e sulle energie che vengono investite nell'affrontare compiti nuovi.

L'intervista pone delle domande agli studenti sull'uso dei contenuti imparati nella pratica quotidiana e sulle loro credenze del processo di apprendimento.

L'intervista semi-strutturata proposta agli studenti:

Intervista Studenti

1) La matematica si trova spesso nella vita quotidiana. Potresti farmi degli esempi dove si trova la matematica fuori della scuola?

2) Parlando di matematica, bravo si nasce o si diventa?

3) Quando impari qualcosa di nuovo in matematica, cerchi di immaginare una situazione o una attività alla quale si possa applicare nella vita reale? Potresti darmi un esempio?

4) Davanti ad un compito difficile in matematica, come ti vedi? Di solito decidi di evitarlo o lo affronti? Raccontami un'esperienza.

5) Facendo riferimento a ciò che hai vissuto fino adesso nel tuo percorso scolastico, come ti definisci in relazione ai:

- **5.1)** Contenuti e le definizioni di base della matematica?
- **5.2)** Analisi e soluzione di problemi standard (convenzionali)?
- **5.3)** Uso di metodi e contenuti già imparati precedentemente?
- **5.4)** Analisi e soluzione di problemi complessi?
- **5.5)** Riflessione e intuizione?
- **5.6)** Astrazione, generalizzazione e costruzione delle ipotesi?

6) In quali dei punti elencati in precedenza ti senti più debole? In quali ti senti più forte?

7) Quale dei tuoi aspetti personali/ caratteristiche della tua persona **ti disturbano** durante la realizzazione di un compito matematico? Aspetti che ti impediscono di realizzare un'attività o creano delle difficoltà.

8) Una studentessa della tua età mi ha detto di credere che "Certi studenti sono nati con un certo bagaglio di competenze e abilità matematiche". Cosa ne pensi?

9) Quando pensi alle tue caratteristiche personali, riconosci di essere capace di portare a termine con successo i tuoi impegni?

10) Ti consideri uno studente **motivato ad apprendere** in generale?

- **10.1)** E nella disciplina della matematica?
- **10.2)** Quali sono le tue motivazioni ad apprendere? Motivi sociali e individuali per sviluppare il tuo percorso formativo.

11) Hai avuto qualche insegnante che ti ha incentivato ad imparare? (le attività didattiche che propone, lo stile di valutazione che adotta) Come?

4.3.4.2 Procedura utilizzata FASE 1

Entrambi gli strumenti **A** e **B** sono stati realizzati singolarmente con tutti gli studenti coinvolti in un unico incontro. L'incontro, condotto alla presenza del solo ricercatore, ha avuto la durata di circa 75 minuti ciascuno, è stato videoregistrato e posteriormente trascritto. Il foglio del Modulo di richiesta di autorizzazione per la registrazione è stato firmato dai genitori.

L'intervista Studenti è stata eseguita all'inizio dell'incontro. L'intervista è di stampo piagetiano, poiché si pretende di conoscere il pensiero dello studente, gli interventi occorrono di forma sistematica attraverso un dialogo con l'intervistato (diSessa, 2007). In base alle risposte dei soggetti si realizzeranno delle domande complementari; secondo Delval (2001) è proprioe nelle domande complementari che proviene la ricchezza del metodo clinico, altrimenti sarebbe ridotta ad una intervista standardizzata. Il ricercatore deve stare molto attento a non fare delle domande che rischiano di essere suggestive.

Ogni attività da modellizzare è stata consegnata in un foglio[59]; gli studenti hanno dovuto scrivere l'intera risoluzione dei problemi presentati. Le domande delle attività sono di tipo risposta aperta univoca e a risposta aperta articolata. La maggior parte delle domande richiede all'allievo di produrre una risposta di due o tre righe e di esporre le proprie riflessioni e i propri ragionamenti.

Come precedentemente descritto, per la maggior parte del tempo lo studente svolgeva l'attività a voce alta: spiegava il suo ragionamento, esponeva i suoi dubbi, riflessioni e a volte faceva delle domande. Durante la realizzazione del compito sono state realizzate anche delle domande complementari ai soggetti: la finalità degli interventi è di conoscere nel dettaglio sia i ragionamenti svolti dai ragazzi che l'intero percorso del loro pensiero. L'intenzione è quella di raccogliere delle informazioni significative e precise per la ricostruzione delle loro competenze di modellizzazione.

Trattandosi di un campionamento di convenienza, gli studenti hanno partecipato alla ricerca in modo volontario e la realizzazione dell'intervento è svolta a casa loro, in base al giorno e l'orario scelto dal intervistatore. Abbiamo avuto l'opportunità di trovarli in un momento nel quale si sentivano al loro agio e staccati dall'idea valutativa.

Nel settembre del 2013 è stato realizzato uno studio-pilota con due soggetti come una riflessione dell'esperimento. Le tre attività di modellizzazione e l'intervista allo studente sono state riformulate con lo scopo di riuscire a mettere in luce le diverse strategie di ragionamento, i modi con cui giungono ai risultati e di creare delle relazioni con il concetto di competenza come già delineato. La raccolta dati per il primo percorso della ricerca è stata effettuata realizzato da settembre a novembre del 2013.

[59] Come riportato negli appendici.

4.3.4.3 Materiale utilizzato FASE 2

Come individuato nella metodologia, nella seconda fase della ricerca *Riflessioni con gli informatori privilegiati* si fa una riflessione con gli insegnanti sui dati rilevati nella prima fase e sui possibili adattamenti da realizzare nella pratica didattica. Nello specifico vengono utilizzati come strumenti:

- **C** *"Frammenti delle attività di modellizzazione" :* parti delle trascrizioni selezionate delle attività realizzate nella prima fase.
- **D** *"Intervista aperta a informatori privilegiati":* intervista semistrutturata che indaga le possibili modifiche che si potrebbero fare nella loro pratica didattica per far maturare la competenza indagata.

C) Frammenti delle attività di modellizzazione

Conoscere il processo di ragionamento dello studente (Maaß, 2006; Schoenfeld, 1985, 1987) è un forte punto di partenza dell'insegnante per riflettere sulla sua pratica didattica e prospettare altre metodologie.

I frammenti delle trascrizioni presentati per quest'analisi sono stati accuratamente selezionati dalle attività di modellizzazione realizzate con gli studenti durante il primo percorso di ricerca. Le attività prese in considerazione per tale analisi sono le attività del Taxi e della Statua, eseguite da tre diversi soggetti.

Per i frammenti sono stati selezionati delle risoluzioni in cui gli studenti presentavano dei primitivi fenomenologici e altri ostacoli nel processo di modellizzazione. Si presentano pezzi della trascrizione dell'intervista e della risoluzione eseguita dal soggetto nel foglio di carta dell'attività consegnata. I frammenti presi in considerazione si trovano nelle appendici della tesi.

D) Intervista aperta a informatori privilegiati

L'intervista agli informatori privilegiati prevede il coinvolgimento di esperti di un certo fenomeno o in un determinato ambito; in questa ricerca sono gli inseganti di matematica della scuola superiore di secondo grado. In base quindi al ruolo che ricoprono nei particolari ambiti di istruzione e dell'esperienza maturata nel settore, si trovano in una posizione di osservazione privilegiata (Schwandt, 2007). La finalità dell'utilizzo di tale tecnica è quella di riflettere sui risultati ottenuti e definire delle linee di interventi didattici.

Le domande proposte nell'intervista aperta riguardano gli obiettivi di ricerca e si trovano sotto elencate nel quadro *Intervista realizzata con gli insegnanti.* Le competenze che gli studenti hanno quando arrivano nelle loro classi sono state l'oggetto della prima domanda effettuata. Come si può vedere nell'analisi dei dati, sono state fatte delle domande complementari ai docenti. Inoltre, gli è stato chiesto in quali momenti della pratica didattica riescono ad identificare tali competenze.

L'intervento con gli insegnanti si propone di promuovere la loro consapevolezza in relazione alle difficoltà e agli ostacoli che incontrano i ragazzi nello sviluppo delle loro competenze di modellizzazione. Lo scopo principale da affrontare insieme agli insegnanti è: In base all'analisi del processo di ragionamento del ragazzo, come adatterebbero le attività per migliorare gli ostacoli presentati? Quale iniziative si possono promuovere in classe?

La questione delle Indicazioni Curriculari viene affrontata: tali indicazioni elencano gli argomenti da affrontare in classe; tuttavia gli orientamenti di come affrontarli non sono chiaramente definiti.

L'intervista realizzata con gli insegnanti:

Intervista aperta agli informatori privilegiati

1) Quali sono le competenze di modellizzazione che gli studenti hanno quando arrivano nelle sue classi?
Come fa a diagnosticarle?

2) Quali sono secondo lei i maggiori ostacoli che gli studenti affrontano nel processo di modellizzazione matematica? (nella vita quotidiana? nei problemi in classe?)

3) Come le Indicazioni Curriculari possono aiutare gli insegnanti a venire incontro allo sviluppo di tale competenza?

4) Cosa si potrebbe fare in classe per promuovere la modellizzazione come una competenza?

4.3.4.4 Procedura utilizzata FASE 2

L'intervista agli informatori privilegiati ha riguardato gli insegnanti che appartengono al contesto di studio indagato e ricoprono in esso la posizione privilegiata di "formatori" di quella particolare comunità di cui possiedono una visione diretta e profonda.

I docenti individuati preventivamente come possibili informatori privilegiati sono stati invitati tramite e-mail a partecipare alla ricerca; quelli che hanno dato la disponibilità volontaria sono stati contatati per scegliere il giorno e l'orario dell'intervento. L'indagine è stata svolta presso le aule studio del Dipartimento di Scienze dell'Educazione e del Dipartimento di Psicologia dell'università di Bologna. Uno insegnante è stato intervistato presso la scuola in cui lavora.

Gli insegnanti sono stati intervistati singolarmente in un unico incontro. Le interviste, condotte alla presenza del solo ricercatore, sono state videoregistrate e posteriormente trascritte; l'incontro è durato circa 45 minuti per ogni docente.

Al inizio dell'incontro sono stati consegnati i tre frammenti delle attività di modellizzazione realizzate nella fase 1. L'insegnante fa la lettura e posteriormente espone le sue considerazioni sui ragionamenti presentati dagli studenti. Successivamente l'intervistatore gli pone le quattro domande *dell'intervista aperta agli informatori privilegiati*; questioni complementari sono state realizzate per conoscere ulteriori dettagli del pensiero dell'insegnante.

Nell'intervista qualitativa del contenuto (Kvale, 2007) l'intervistatore lascia che l'intervistato parli molto; allo stesso tempo deve essere abile nello stimolarlo nella sua funzione di testimone, chiedendogli spiegazioni quando non è sufficientemente chiaro, dettagli e approfondimenti quando dà per scontato quello che di fatto non lo è, in modo da riuscire fargli raccontare quello che osserva, quello che pensa e quello che realmente fa o ha intensione di fare in classe (Corbetta, 1999). Questo modo di condurre l'intervista concede ampia libertà a intervistato e all'intervistatore, assicurando nello stesso tempo che tutti i temi rilevanti siano discussi e che tutte le informazioni necessarie siano raccolte.

4.3.5 Procedura analisi dei dati:

Come già evidenziato, le due fasi della ricerca richiedono delle analisi diverse per rispondere alle domande di ricerca.

FASE 1

I dati raccolti sono stati trascritti e posteriormente analizzati attraverso l'analisi del contenuto: si utilizza il metodo clinico (diSessa, 2007) e il thinking-aloud protocol (Ericsson & Simon, 1993). L'analisi dei processi cognitivi degli studenti emersi durante lo svolgimento delle attività di modellizzazione viene fatta attraverso:

- L'identificazione dei primitivi fenomenologici (diSessa, 1988, 2007; Smith, diSessa & Roschelle, 1993/1994) in ogni attività.
- L'individualizzazione dei ragionamenti più articolati della competenza (Maaß, 2006, 2007; Herget & Richter, 2012; Blomhøj & Jensen, 2003, 2007).

Gli ostacoli allo sviluppo della competenza modellistica sono stati osservati in tutte le attività, essendo più frequenti quando sono identificati i primitivi fenomenologici. L'analisi sulle attività di modellizzazione viene accuratamente approfondita nel capitolo 6.

Dall'intervista agli studenti sono emerse importanti considerazioni che fanno riflettere sui processi di apprendimento degli studenti, i quali vengono trattati nel capitolo 5. Gli aspetti esaminati in tale riflessione sono degli indizi che devono essere considerati, ma non si esauriscono. L'indagine eseguita attraverso l'intervista non ha lo scopo di categorizzare i pensieri degli intervistati o di fornire delle risposte e conclusioni precise, ma di problematizzare attraverso le risposte emerse degli importanti aspetti da tener presente quando si progetta un ambiente di apprendimento verso le competenze.

Durante le interviste con gli studenti si è cercato di avere un atteggiamento non valutativo e di non bloccare lo studente mentre parla per accompagnare il più fedelmente possibile il suo pensiero. La videoregistrazione delle interazioni consente di contrastare la coerenza dei comportamenti verbali utilizzati dal intervistatore, permettendo di verificare in modo oggettivo se lo studente sia riuscito effettivamente a farsi esprimere liberamente, e di conseguenza a raccogliere dati validi.

FASE 2

I dati dell'intervista qualitativa svolta con gli insegnanti *Intervista aperta agli informatori privilegiati* vengono approfonditi attraverso l'analisi del contenuto del discorso (Sorzio, 2005;

Kvale, 2007): sono organizzati secondo le problematiche simili e rappresentati in categorie aperte definite implicitamente dalle domande della ricerca (De Grada & Eraldo, 2002; Mortari, 2002; Tarozzi, 2008).

Le interviste sono state analizzate secondo le indicazioni di Kvale (2007), cercando di condensare in frasi sintetiche i principali argomenti trattati *“meaning condensation*”, i quali sono stati interpretati *“meaning interpretation*” alla luce di tutto il percorso di ricerca. L’analisi delle interviste ha seguito una procedura di codifica orientata dai temi che sono stati oggetto di indagine. L’identificazione degli elementi significativi delle interviste sono stati individuati e successivamente categorizzati nel capitolo 6; sono emerse nove categorie che rappresentano gli aspetti significativi e comuni presentati nelle indagi eseguite. Come afferma Saldana (2009), l’intenzione era di costruire categorie che rappresentassero le convinzioni e le condotte degli insegnanti.

4.3.6 Fasi e tempi della ricerca

La presente ricerca si è svolta in diverse fasi che vengono qui di seguito riportate in ordine cronologico:

1) Ricerca bibliografica per la parte teorica della tesi (aprile 2012 – febbraio 2013).

2) Maturazione degli obiettivi del piano della ricerca (ottobre 2012 – marzo 2013).

3) Costruzione degli strumenti di ricerca prima fase (maggio – agosto 2013).

4) Studio pilota per la prima fase (settembre 2013).

5) Raccolta dati prima fase (settembre 2013 – novembre 2013).

6) Trascrizione dati prima fase (novembre - dicembre 2013).

7) Analisi dei dati prima fase (febbraio 2014 – giugno 2014) e (novembre 2014 – gennaio 2015).

8) Costruzione degli strumenti di ricerca seconda fase (maggio – luglio 2014).

9) Raccolta dati seconda fase (settembre – ottobre 2014).

10) Trascrizione dati seconda fase (settembre – ottobre 2014)

11) Analisi dei dati seconda fase (ottobre 2014 – gennaio 2015).

CAPITOLO 5- IMPORTANTI CONSIDERAZIONI NEL PROCESSO DI APPRENDIMENTO: LE CONCEZIONI DEGLI STUDENTI

Nel riflettere sulla didattica di una materia è inevitabile non relazionarla con l'apprendimento. Se l'intenzione è quella di migliorare il rendimento scolastico, trasformando gli apprendimenti in esperienze concrete e utili nel quotidiano, è fondamentale conoscere e riflettere su alcuni importanti aspetti dell'apprendista.

Il tipo di pratica didattica sviluppata in classe e gli obiettivi che ci si propone di raggiungere hanno una influenza sugli orientamenti motivazionali e sull'intensità e continuità con la quale si cerca di raggiungerli. La motivazione è una condizione preliminare di ogni apprendimento (cf. Mariani, 2006), conoscere quanto gli studenti si sentono motivati ad imparare può essere un interessante punto di riferimento nel pianificare la pratica didattica. L'autore sostiene che i diffusi determinismi di carattere psicologico e socioculturale ci costringono troppo spesso dentro delle formule un po' ambigue del tipo "si ha successo perché si è motivati, ma si è motivati perché si ha successo". Dall'altra parte non è facile esplorare i tanti fattori che costituiscono il costrutto "motivazione" senza influenzarsi nell'inganno di chi "non studia perché non è motivato". Mariani (2006) e Boscolo (2012) suggeriscono cambiare prospettiva e iniziare a considerare questo importante aspetto dell'apprendimento come un costrutto dinamico e come una vera e propria competenza multidimensionale da costruire e coltivare.

Nella didattica delle competenze si promuovono degli sviluppi cognitivi che sono utili nella vita quotidiana degli studenti. Questa concezione nell'educazione ha cambiato il modo di agire di chi insegna e anche di chi impara. Ma quanto gli studenti si sentono competenti? Come percepiscono le loro conoscenze matematiche? Quali sono i loro aspetti personali che li "aiutano" o "rendono più difficile" l'arte di imparare? Secondo Lucangeli (2011), i differenti modi di percepire le proprie competenze vanno a riflettersi direttamente sulla motivazione ad apprendere e sulle energie che vengono investite nell'affrontare compiti nuovi.

L'auto percezione della competenza rientra nell'ambito degli studi sul concetto di sé, che rappresentano un importante tema di ricerca e di teorizzazione. Sul piano psicopedagogico interessano in particolare i rapporti fra tale percezione, nei suoi aspetti cognitivi ma anche affettivi, e la motivazione e il rendimento scolastico dell'allievo (Boscolo, 1997). In questa ricerca viene considerata la competenza cognitiva che riguarda l'attività e il rendimento scolastico.

Le pratiche vissute nelle classi di matematica dovrebbero essere in qualche modo prolungate nella vita quotidiana degli studenti. L'insegno verso le competenze si propone giustamente di creare delle condizioni per far mettere in pratica allo studente i saperi e le abilità matematiche. Secondo l'OCSE, la competenza matematica non si riduce alla sola conoscenza della terminologia matematica, dei fatti e dei procedimenti, neanche alle abilità necessarie per svolgere certe operazioni e applicare certi metodi, sebbene presupponga tutto ciò. La competenza matematica comporta l'uso creativo dell'insieme di tali elementi per rispondere a quanto richiesto dalle situazioni esterne (OECD, 2006). In questo senso, sviluppare delle competenze matematiche significa utilizzare la matematica in contesti di vita reale: viaggiando, facendo degli acquisti, preparando da mangiare, tenendo la propria contabilità o valutando questioni politiche. Un cittadino si trova spesso a confrontarsi con situazioni nelle quali l'uso di ragionamenti di tipo quantitativo o spaziale o di altre competenze matematiche può aiutare a chiarire, formulare o risolvere un problema. La proposta è favolosa, ma gli studenti come stanno utilizzando attualmente la matematica imparata nel loro quotidiano? In questa ricerca ci poniamo una domanda un po' più realista: Gli studenti riescono ad immaginare qualche applicazione quando imparano un contenuto nuovo in matematica?

Le concezioni dell'apprendimento che gli studenti sviluppano spontaneamente sono un importante aspetto da considerare. Come ritiene Perez-Tello (et al., 2005) le concezioni sono relazionate con il comportamento dell'alunno: come rappresentazioni che egli si costruisce riflettendo su come impara e come credenze che inducono a studiare in una certa maniera. Sempre secondo gli autori, le concezioni dell'apprendimento possono venire influenzate da comportamenti che fanno parte della matrice culturale in cui si sviluppano e allo stesso tempo modificano i comportamenti di studio.

5.1 L’intervista Studenti

L’intervista realizzata con gli studenti si propone di conoscere quali sono le loro motivazioni ad imparare; le indagini vengono condotte in relazione alla matematica e alle altre discipline. Inoltre, è stato richiesto a loro di presentare un esempio di esperienza vissuta in classe in cui si sono sentiti motivati ad apprendere.

La percezione delle proprie competenze è stata un altro punto indagato: sono stati chiesti quali dei loro aspetti personali li aiutano o li disturbano durante il processo di apprendimento e quanto si sentono competenti in relazione a certi contenuti matematici. Ulteriormente, è stato chiesto loro il quanto si sentono capaci di portare a termini gli impegni scolastici e nella vita in generale.

Il prolungamento delle pratiche vissute alla scuola significa riuscire ad applicare delle conoscenze e delle abilità costruite in classe nel risolvere o nel pianificare delle situazioni della vita reale. Agli studenti è stato domandato se riescono ad immaginare qualche applicazione dei contenuti di matematica imparati nella scuola nella loro pratica quotidiana.

Le concezioni degli studenti su come avviene la conoscenza matematica sono un importante aspetto sul quale riflettere; l’intervista ha esplorato le loro credenze sulla costruzione della conoscenza matematica.

Da come dettagliato nel disegno di ricerca, *l’Intervista Studenti* fa parte della FASE 1 dell’indagine ed è stata realizzata con tutti i soggetti che hanno svolto le attività di modellizzazione.

5.1.1 Aspetti considerati per l’analisi dell’intervista

Per conoscere quali sono le competenze che gli studenti ritengono di avere e qual è la loro motivazione ad apprendere è stata creata **l’*Intervista Studenti***; un’intervista semi strutturata con risposte aperte. L’intervista è di stampo piagetiano, e cerca di conoscere il pensiero dello studente attraverso un dialogo con l’intervistato ed interventi di forma sistematica (diSessa, 2007).

L'analisi dell'intervista si propone di ricavare delle riflessioni sugli aspetti emersi dalle domande realizzate con i soggetti partecipanti. In questo studio lo scopo principale è quindi riflettere su tali aspetti; le risposte non saranno analizzate in profondità con l'intento di inserirle in categorie specifiche. In base agli obiettivi proposti e alle discussioni eseguite con gli studenti, si individuano gli aspetti considerati per tale riflessione:

- *Motivazione ad imparare* – quali sono le loro motivazioni e quanto si sentono motivati ad apprendere in generale e nella matematica.
- *Percezione della propria competenza e l'autoefficacia* – quale sono le competenze che ritengono di avere e come le percepiscono; quanto si sentono capaci di portare a termine un compito e la fiducia che hanno nelle loro capacità di affrontare un compito.
- *Relazionare la matematica imparata ai loro contesti reali* – dove "immaginano" di utilizzare i contenuti appresi in classe fuori del contesto scolastico.
- *Consapevolezza sull'apprendimento matematico* - come concepiscono l'avvenimento delle conoscenze matematiche.

I dati emersi dall'intervista permettono di conoscere il profilo degli studenti coinvolti, individuando importanti aspetti del processo di apprendimento. Le discussioni hanno messo in luce dei modelli divergenti fra gli studenti sugli aspetti cognitivi e metacognitivi.

Le interviste sono metodi per indagare la strutturazione della soggettività, raccogliendo informazioni dal soggetto su una sfera di realtà che riguarda le sue convinzioni, le intenzioni, le emozioni e le esperienze (Sorzio, 2005). Quest'analisi ha l'obiettivo principale di descrivere cosa pensano gli studenti riguardo gli argomenti indagati, provvedendo delle preziose informazioni.

Gli aspetti considerati in quest'analisi sono degli indizi che vanno considerati, ma non sono esaurienti. L'indagine eseguita attraverso *l'Intervista Studenti* non ha l'intenzione di fornire delle risposte e conclusioni precise, ma di problematizzare attraverso le risposte fornite dagli studenti, degli importanti aspetti da prendere in considerazione quando si progetta un ambiente di apprendimento verso le competenze.

5.1.2 Motivazione

La motivazione viene definita come uno stato interno dell'essere umano; sorge dall'impatto del proprio sistema di valori e di convinzioni che li esplicitano e della situazione come essa è percepita (Nuttin, 1996). È la motivazione che attiva, dirige e sostiene l'azione di apprendimento. I valori e le convinzioni personali agiscono quindi come mediatori nella formazione di un'intenzione di azione e nel persistere fino alla sua realizzazione.

La motivazione è una condizione preliminare di ogni apprendimento ed è spesso affrontata più come oggetto di commenti e citazioni che come trattazioni sistematiche e approfondite. È un tema strisciante nelle discussioni pedagogiche e non è una variabile indipendente nel processo di insegnamento ed apprendimento (Mariani, 2006). L'autore sostiene che la motivazione è una variabile di processi complessi e può essere considerata come un oggetto di intervento pedagogico e didattico, dovrebbe essere un obiettivo educativo ed andrebbe proposta allo studente come una competenza da costruire e nutrire.

Nel processo scolastico la motivazione gioca un ruolo fondamentale. Nell'ambito dell'apprendimento matematico, la motivazione può essere descritta come un insieme di spinte interne e di pressioni esterne che promuovono il desiderio di impegnarsi in matematica, contrapposte ad altre che determinano un disinteresse verso la materia e la tendenza ad evitarla o comunque ad affrontarla il meno possibile (Moè & Lucangeli, 2010).

La maggior parte degli studenti si impegnano per il voto, facendo piacere ai genitori o ai docenti. Gli studenti motivati da un impulso interiore cercano di raggiungere delle competenze attraverso l'impegno, la pianificazione e la sfida con se stessi nel desiderio di rendersi migliori (Boscolo, 1997).

L'intervista ha indagato quanto gli studenti si sentono motivati ad imparare, sia in matematica che nelle altre materie. I frammenti che riportano con più chiarezza l'atteggiamento degli allievi in relazione alla loro motivazione vengono riportati nel quadro 1 sotto elencato "Frammenti dell'Intervista Studenti sull'aspetto motivazionale"[60].

60 Per una comprensione complessiva, si consiglia di leggere il quadro contemporaneamente all'analisi che segue.

Gli aspetti motivazionali presentati dai soggetti riguardano:

- Fiducia positiva nella scuola
- Comprensione di un argomento
- Motivazione in funzione della materia
- Motivazione in funzione dell'indirizzo scelto
- L'aspetto della novità

I fattori non stimolanti riguardo l'apprendimento si riferiscono a:

- Incomprensione degli argomenti in matematica
- Scuola come un obbligo di frequenza
- Atteggiamento dell'insegnante.

5.1.2.1 Le motivazioni degli studenti ad imparare

Nel consultarli sulle loro motivazioni ad apprendere, gli studenti hanno esposto anche le ragioni che li fanno sentire più o meno motivati.

Il soggetto ANN si sente motivato ad apprendere e relaziona la sua motivazione alla comprensione degli argomenti "*mi sento realizzata quando capisco una cosa che mi sento bene e quindi mi piace*" e alla sua credenza nella scuola come istituzione: "*Io ci credo molto nella scuola e quindi sono molto motivata ad andarci".*

I soggetti LUC e MAN hanno relazionato la loro motivazione ad imparare all'aspetto della novità:

> LUC: "*Prima perché mi piace. Poi perché diciamo servono nel futuro. Poi perché è interessante, mi piace sapere delle cose nuove".*

> MAN "*Si, mi sento motivato perché quando si affronta si tratta di un argomento nuovo non si sa mai cos'è quindi magari può essere qualcosa di bello".*

La scelta dell'indirizzo della scuola superiore si è rivelato un elemento motivazionale. LUC si sente motivato con la scuola superiore e afferma che alle medie non si sentiva cosi. MAN, interrogato sul tema afferma: "*[…] Poi adesso che ho preso l'indirizzo che a me piace veramente tanto mi sento molto coinvolto ad imparare per poi nel futuro riuscire ad utilizzare queste informazioni date".*

Si osserva che MON e LUC relazionano la loro motivazione alla materia: entrambi i soggetti si sentono motivati nelle discipline specifiche dei loro indirizzi scolastici:

> LUC: "*Se ad esempio è storia o inglese non è che mi piace tanto, poi però se invece parliamo di materie scientifiche allora mi interessa".*
>
> MON: *"In alcune discipline di più rispetto ad altre… Ovviamente a me piace di più l'inglese e le altre lingue riesco di più anche a studiare".*

I soggetti che non si sentono molto motivati ad imparare intendono il frequentare la scuola come un obbligo: è interessante osservare che tali soggetti riescono ad elaborare delle giustificazioni "proprie" per continuare a frequentarla.

> ALI: "*Un po' non del tutto, ciò, mi motivo per il fatto che alla fine alla scuola ci devo andare, meglio passarlo in modo positivo che in negativo e alla fine è sempre migliore che andare a lavorare e quindi …basta".*
>
> MON: "*Per avere una cultura* **[ride]***, me l'ha detto mia madre una volta. Anche per non essere una ignorante!"*

Le demotivazioni verso la materia di matematica riguardano anche l'azione docente. Il soggetto MON distacca l'importanza dell'insegnante nel fattore motivazionale: "*Io penso che anche la motivazione dipende anche dall'insegnante, per me! Perché alle medie mi sentivo molto più motivata, adesso io un po' meno".* Il soggetto segue la sua giustificazione riguardo la matematica: "*anche se cerco di fare tempo ad un esercizio di matematica a casa, anche se molti non li fanno… però considero la matematica non la materia principale della mia vita".*

Si nota come MAN ha lasciato chiaro il suo atteggiamento verso la materia di matematica: "*No, la matematica è diversa per me, quando si inizia un argomento nuovo dico vado di male a peggio … non è il mio campo la matematica*".

Frammenti dell'Intervista Studenti sull'aspetto motivazionale:

La domanda posta è stata: **Ti consideri una studentessa motivata ad apprendere in generale? In tutte le discipline?**

ANN: *Sì, secondo me sì.*

I: E per andare alla scuola?

ANN: *Io ci credo molto nella scuola e quindi sono molto motivata ad andarci, anche se mi viene delle verifiche cosi però secondo me ci tengo molto!*

I: Se le dovessi elencare, quali sono le tue motivazioni ad imparare una cosa nuova?

ANN: *Secondo me tipo, quando guardo avanti cosi a me non piace tanto perché io vorrei fare una cosa bene, capirla molto bene e poi andare avanti però sapere cosi…. Mi piace questa cosa mi sento realizzata quando capisco una cosa che mi sento bene e quindi mi piace.*

I: E nella matematica, come ti senti?

ANN: *Diciamo dipende perché se è tutto una cosa difficile bisogna fare una cosa ancora più difficile* [ride] *lì non tanto però dopo li capisco e quindi mi trovo bene.*

MON: *In alcune discipline di più rispetto ad altre… Ovviamente a me piace di più l'inglese e le altre lingue riesco di più anche a studiare e comunque penso che mi serviranno nel futuro… Magari in altre discipline un po' meno.*

I: E qual è la tua maggiore motivazione per frequentare la scuola?

Silenzio.

I: Cosa ti motiva di più? Quando ti svegli tutti i giorni e vai alla scuola …

MON: *Per avere una cultura* [ride], *me l'ha detto mia madre una volta. Anche per non essere una ignorante!*

I: E nella materia di matematica? Come ti senti?

MON: *Io penso che anche la motivazione dipende anche dall'insegnante, per me! Perché alle medie mi sentivo molto più motivata, adesso io un po' meno… anche se cerco di fare tempo ad un esercizio di matematica a casa, anche se molti non li fanno … però considero la matematica non la materia principale della mia vita.*

LUC: *Se ad esempio è storia o inglese non è che mi piace tanto, poi però se invece parliamo di materie scientifiche allora mi interessa. Anche fare scienza proprio, quando iniziamo a parlare di un argomento nuovo è interessante sapere anche nei dettagli certe cose. Piuttosto invece quando la prof di storia comincia a dilungarsi sugli argomenti, in quel caso allora non mi interessa tanto.*

I: E quali sono le tue motivazioni ad apprendere? Cosa ti spinge ad imparare qualcosa di nuovo?

LUC: *Prima perché mi piace. Poi perché diciamo servono nel futuro. Poi perché è interessante, mi piace sapere delle cose nuove.*

I: Ti piace la scuola?

LUC: *Alle medie non tanto. Adesso sì.*

Quando ti svegli, hai proprio la voglia di andare alla scuola?

LUC*:* [ride] *Non direi ....*

ALI: *Un po' non del tutto, ciò, mi motivo per il fatto che alla fine alla scuola ci devo andare, meglio passarlo in modo positivo che in negativo e alla fine è sempre migliore che andare a lavorare e quindi …basta.*

I: E prendendo in considerazione la matematica, ti senti motivata ad apprenderla?

ALI: *No.*

MAN: Sì*, mi sento motivato perché quando si affronta si tratta di un argomento nuovo non si sa mai cos'è quindi magari può essere qualcosa di bello però magari si svolge e rivela un nuovo metodo.*

I: Ma questo senti anche nella materia di matematica? O la vedi un po' particolare?

MAN: *No, la matematica è diversa per me, quando si inizia un argomento nuovo dico vado di male a peggio …non è il mio campo la matematica.*

I: In generale quali sono le tue motivazioni ad apprendere? Motivi sociali o individuali per sviluppare il tuo percorso formativo…. Quello che hai dentro di te che ti tira avanti.

MAN: *Più che altro perché dico a me stesso: cavolo se ci riescono gli altri devo riuscirci anch'io e penso anche se ce la devo fare non ho nulla da perdere poi… quindi mi impegno per svolgere gli esercizi di matematica…. Prima finisco prima mi tolgo la matematica dalla mia vita.*

I: Ok, se non parliamo della matematica, ma in generale tutto quello che stai imparando alla scuola ti impegni?

MAN: *Sì, sì molto! Poi adesso che ho preso l'indirizzo che a me piace veramente tanto mi sento molto coinvolto ad imparare per poi nel futuro riuscire ad utilizzare queste informazioni date.*

È notevole nella risposta degli studenti che la gran motivazione per studiare e andare alla scuola è il loro futuro: percorso formativo all'università e mondo del lavoro.

La motivazione è quindi il punto strategico che conduce lo studente al successo. Ma l'argomento non riguarda solo gli studenti ma anche gli insegnanti. GUS è uno studente brasiliano, intervistato durante l'Erasmus in Italia, e riporta un aspetto motivazionale molto importante: il rapporto con l'insegnante. Il soggetto viene da un contesto in cui discente e docente interagiscono di più alla scuola, affermando che non esiste tanta formalità nel relazionarsi in classe. GUS è consapevole del quanto questo avvicinamento da parte dell'insegnante può cambiare l'atteggiamento dello studente e paragona la sua realtà in Brasile con l'attuale esperienza in Italia:

> I: E quali sono le tue motivazioni ad apprendere?
>
> GUS: *Più di arrivare all'università, poi io non ho un corso fisso, non so quale devo scegliere. Ma per arrivare all'università e avere un buono lavoro, questo.*
>
> I: E ti piace la scuola in generale?
>
> GUS: *In Brasile sì, qua non tanto.*
>
> I: Perché?
>
> GUS: *Perché non mi piace il modo come ci trattano i professori. In Brasile noi abbiamo una relazione più semplice… non è che non si può parlare una cosa o conoscerlo* [l'insegnante]… *E qui c'è una distanza molto grande, non mi piace. Sembra che sei troppo lontano dal professore quindi sembra che sei troppo lontano della materia.*
>
> GUS: *In Brasile era bellissimo questo, alla fine della scuola potevo parlare qualcosa tranquillo, non era una relazione noiosa, era una cosa più normale, più semplice. Qui il professore arriva e ti devi alzare, Perché????*

L'insegnante ha un compito fondamentale nella motivazione dell'alunno. Un bravo insegnante deve saper creare situazioni in classe in cui lo studente possa sperimentare la propria competenza; li stimola a studiare non per il voto, ma per conseguire una soddisfazione interiore, una sensazione di competenza. Secondo Boscolo (1997) la sensazione di competenza si avverte quando il soggetto si sente padrone della propria vita e quando questo percorso lo conduce verso l'autorealizzazione. Il potere di attrazione di un insegnante e il suo carisma non proviene soltanto dalla sua capacità di insegnare, ma soprattutto dalla sua capacità di far sentire gli studenti dei veri autori del loro processo di apprendimento.

5.1.1.2 L'importanza dell'insegnante della scuola media

Quando sono stati interrogati su qualche esperienza in classe che li ha motivati ad imparare, l'insegnante delle medie è stato citato da quasi tutti i soggetti. L'importanza della motivazione è collegata ad uno scambio reciproco tra insegnante e alunno. La motivazione non deve essere solo un esito del processo d'insegnamento ma anche una componente fondamentale nella professionalità del docente.

Ai soggetti è stato chiesto: **Hai avuto qualche insegnante che ti ha incentivato ad imparare?**

Osserviamo come ROT, SIM e MON hanno risposto:

ROT: *Sicuramente la mia insegnante delle medie, di matematica. Lei era una grande e brava professoressa. Ha stimolato un po' certa gente brava a studiare la matematica.*

I: Come?

ROT: *Cioè… oltre a saper spiegare in maniera, cioè spiegava molto bene, riusciva anche a… non so come dire... […] insomma in qualche maniera riusciva a fare che gli altri la ascoltassero senza dover minacciare.*

I: E ti viene in mente una lezione di matematica o di un'altra materia che ti è proprio piaciuta?

ROT: *Una lezione che mi è piaciuta è stata quando abbiamo avuto il progetto* (su Pitagora), *che non è proprio di matematica, però è stato un progetto che abbiamo fatto che appunto ti dicevo prima con filosofia. […] quello è bello perché, anche c'era un po' di storia.* [ride]

I: Ma perché era bello?

ROT*: Perché parlava come questa idea qui, la matematica per loro era la base di una stessa ideologia che influenzava* determinati avvenimenti.

SIM: *Uhm... si alle medie avevo una prof che era abbastanza severa però dal suo metodo di insegnamento ho imparato davvero tanto.*

I: In quale materia?

SIM: *Matematica... infatti la mia capacità di apprenderla è dovuta in gran parte a lei.*

I: E cosa faceva lei che ti piaceva cosi tanto?

SIM: *Niente, niente di che... era davvero brava a spiegare e a comprenderla bene anche se era abbastanza severa. […] Sono molto contento di averla avuta come maestra perché… per fortuna che non sono mai stato bocciato alle elementari o alle medie perché l'anno successivo è andata in pensione quindi non ce l'avrei avuta per la preparazione all'esame di terza.*

MON: Sì *quella alle medie.*

I: Ma cosa faceva lei che ti incentivava?

MON: *Ma… lei* [l'insegnante di matematica] *spiegava bene e poi comunque questo ci aiutava, oppure lei ci teneva molto ad insegnare e per me quando uno ha proprio la passione dentro può anche fare la bella insegnante.*

I: E che attività didattica faceva lei in classe che ti piaceva?

MON: N*o, facevamo comunque quello che c'era sul libro però lei ci dava spesso proprio degli appunti che gli aveva lei.*

I: E quello ti aiutava?

MON: Sì*.*

MON mette in luce il quanto significativo è per lo studente aver un insegnante cui piace fare il suo mestiere, evidenziando l'importante funzione del docente nel motivare gli studenti ad imparare. È stato interessante che gli studenti hanno indicato il docente di matematica negli esempi citati, nonostante la domanda sia stata fatta "in qualche materia". Non si esclude che la possibilità di tale avvenimento possa essere una conseguenza dell'indagine matematica cui partecipavano al momento.

L'insegnante deve saper creare un clima di fiducia in classe, ma soprattutto deve saper ascoltare lo studente e stabilire un tipo di relazione empatica: il docente che è convinto dell'importanza del aspetto motivazionale riesce a concentrare la propria attenzione sugli studenti e non su se stesso. In tal modo può diventare un facilitatore dell'apprendimento stimolando la motivazione allo studio dell'allievo.

Secondo Boscolo (2002) in Italia i risultati dell'importante patrimonio di ricerca e teorizzazione sulla motivazione scolastica sembrano aver poco inciso sulla pratica didattica. Questa scarsa importanza è più evidente se si contrasta con altre applicazioni all'istruzione di altri settori della ricerca come le abilità di studio, la meta cognizione e le difficoltà di apprendimento. Sempre secondo l'autore, sembra che ci siano due essenziali ragioni per tale scarsa influenza: la prima è che l'aggiornamento degli insegnanti, sia a livello di scelte ministeriali che locali, ha privilegiato in questi anni l'apprendimento degli aspetti cognitivi, soprattutto in risposta a problemi di grande urgenza quali le disabilità, mentre la tematica della motivazione, non di minore interesse per gli insegnanti, è stata nel complesso meno trattata (p. 82). La seconda riguarda le convinzioni che gli insegnanti hanno sulla motivazione. Nonostante comprendano l'importanza di questa tematica, tendono spesso a considerare la motivazione degli allievi essenzialmente in termini di demotivazione e ad attribuirne le manifestazioni alla cattiva volontà, o alla poca attenzione delle famiglie, o a se stessi in quanto incapaci di stimolare l'interesse degli studenti per la loro materia (p. 83).

Nell'approccio costruttivista è possibile concepire che la motivazione non si avvia solo in funzione dell'ambiente di apprendimento in sé, ma in funzione delle condizioni che provocano una situazione di squilibrio (Piaget, 1977), avviando al coinvolgimento della problematica in questione. Di fatto, l'interesse del soggetto ha la sua origine non nelle risorse utilizzate dalla pratica ma nelle strutture di conoscenza. Per esistere la motivazione è necessario lavorare quindi sulle strutture di conoscenza poiché sono queste le strutture che propiziano al soggetto la voglia e la necessità di imparare. Tale necessità è di origine endogena ed è per questo motivo che l'azione pedagogica deve oltrepassare le risorse che utilizza e puntare i suoi impegni ai meccanismi di pensiero degli studenti (Piaget & Gréco, 1974).

È attraverso l'accompagnamento e la comprensione dei pensieri degli studenti che l'insegnante potrà provocare degli squilibri cognitivi, raggiungendo il loro interessi e motivazione.

5.1.3 Percezione della propria competenza e l'autoefficacia

Da come evidenziato precedentemente, i differenti modi di percepire le proprie competenze vanno a riflettersi direttamente sulla motivazione ad apprendere. Questo importante aspetto è stato indagato nell'*Intervista Studenti* con il tentativo di conoscere dagli studenti:

- Quali sono le competenze che ritengono di avere e come le percepiscono;
- La loro capacità di impegnarsi in modo continuativo;
- Che tipo di atteggiamento hanno in riferimento a quanto si sentono competenti nell'affrontare un determinato compito - autoefficacia.

Gli studenti sono stati interrogati su quali competenze matematiche credono di possedere. Per aiutarli in tale indagine sono state poste delle domande come: quali sono i loro punti più forti e più deboli nel confronto con la matematica e che rispettivamente li aiutano o li disturbano nelle pratiche quotidiane alla scuola; come si sentono in relazione a certi argomenti specifici della materia.

Inoltre è stato domandato ai soggetti quanto si sentono capaci di portare a termini gli impegni della scuola e della vita in generale; la fiducia che hanno nelle loro capacita di affrontare un compito non tradizionale.

Nonostante le domande che riguardano la percezione delle loro competenze e la loro autoefficacia siano diverse, gli studenti ogni tanto nel rispondere hanno unificato questi due aspetti. Lo scopo dell'indagine non è individuare delle specifiche caratteristiche riguardo a tali aspetti, ma conoscere come lo studente si vede, si sente e si percepisce.

5.1.3.1 Percezione delle competenze che gli studenti ritengono di avere

Nel processo di formazione è necessario considerare gli effetti sull'apprendimento della "percezione di sé rispetto ai compiti" e del giudizio di autoefficacia. La percezione della propria competenza nella realizzazione di un compito influisce di modo significativo sulla disponibilità all'impegno e sulla continuità dello sforzo messo in atto (Pellerey, 2004).

Interrogati su quali sono i loro aspetti personali identificati come un sostegno positivo alla matematica, gli studenti hanno risposto:

> I: Quali dei tuoi aspetti personali ti aiutano in matematica, sia nel contesto scolastico come nel contesto extra scolastico?
>
> *MAN: Direi che magari non ho capito una cosa e certe volte ci provo da solo ad arrivare alla soluzione e mi sembra un metodo giusto.*

> ANN: *Ah quelle sì* [operazioni elementari] *mi trovo abbastanza bene, me la cavo. Anche tipo adesso che ci sono queste rette cosi mi servono delle cose anche dell'anno scorso cosi… riesco a farne… Quindi direi…*
>
> I: Come ti senti nel confronto con quelli problemi tradizionali? Ad esempio i problemi con le percentuali, le proporzioni.
>
> *ANN: Con quelli mi trovo abbastanza bene… Quelle* [definizione teorica] *faccio un po' fatica invece… alle volte mi scordo delle cose però dovrei riguardarne indietro però se riguardo in po' lo so. Però me lo ricordo…*
>
> I: Ma dove li guardi?
>
> *ANN: Negli appunti.*
>
> I: Ma se è un contenuto che hai visto due anni fa?

ANN: Ah, quello li dovrei cercarlo… mi è capitato l'anno scorso che avevamo fatto alle medie che non mi ricordavo e sono dovuta a tornare al computer a cercare questa cosa perché non mi la ricordavo.

ANN non sente di avere delle lacune in matematica, quando ha dei dubbi va a cercare nei suoi appunti o sul computer; identifica le definizioni teoriche come un punto a volte faticoso. MAN presenta come un suo aspetto positivo la perseveranza nella realizzazione di un compito.

Nell'individuare gli aspetti della matematica in cui si sentono più forti, alcuni studenti presentano proprio dei contenuti specifici in cui si sentono competenti:

MON: Nelle ***espressioni****.*

I: Perché?

MON: Boh, non lo so magari perché riesco a fare […] Ne ho fatto molte alle medie, e anche… aspetta non mi ricordo più niente. Comunque nella parte della geometria il piano cartesiano, quello li abbiamo fatto un sacco, anche prima dell'esame, in terza media.

LUC: Forse ***nell'analisi del problema****, perché quando leggo un problema riesco subito a capire come si svolge, poi se non mi viene non so perché, non riesco a capire perché non mi è venuto.*

I: E secondo te quali sono i motivi, perché hai queste abilità?

LUC: Sempre perché quando ci hanno spiegato… se le prof. riescono a spiegarti bene le cose e tu riesci a capirle in quel modo… più avanti ci va più sei avvantaggiato. Se ti spiegano una cosa che poi non riesci a capirla e più avanti ti spiegano una cosa di cui fanno riferimento a quelle che non hai capito allora è più difficile perché devi imparare pure le cose che non hai capito.

I: Hai fatto una buona scuola elementare e medie? O queste abilità che hai costruito sono delle esperienze vissute fuori della scuola? Tipo con dei giochi...

LUC: Intanto diciamo che alle elementari avevamo una maestra che quando non capivi lei si arrabbiava. Io riuscivo sempre a capirla quindi non avevo molti problemi. Poi mio papa... gli piace molto la matematica quindi anche lui ogni volta che porto un argomento nuovo lui inizia a spiegarmi pure cose che non c'entrano direttamente. Quindi quando mi trovo davanti a cose nuove posso pure usare le cose che mi ha spiegato.

ROT: ***Problemi pratici*** *appunto quelli dalle prove Invalsi. Mi sono sempre andato bene fino adesso.*

I: Ma perché secondo te?

ROT: *Non lo so.*

I: È una cosa che hai sempre fatto, diciamo hai avuto l'esperienza alla scuola o è una cosa che ti piace?

ROT: *Francamente alle scuole elementari e medie facevo piuttosto, non ero un gran che nelle prove Invalsi, anzi mi ricordo una delle prime prove Invalsi che feci alle medie presi, va be non la valuto ma sarà perché in generale non era neanche … me se l'avessi valutata avrei preso tipo 5 una cosa dal genere… E dire che tipo andavo alla media del 10, 10 e 10 in matematica.*

Il soggetto MON associa i suoi punti forti alle espressioni matematiche e relaziona al fatto di averne realizzato tante alle medie. LUC e ROT hanno fatto riferimento ai problemi matematici, riuscendo a spiegare parzialmente i loro motivi. Quello che racconta LUC fa risaltare l'importanza delle esperienze vissute fuori del contesto scolastico; nel suo caso ha l'opportunità di interagire con suo padre.

Invitati a riflettere su come si definiscono o come si sentono in relazione ai contenuti già imparati nella matematica:

LUC: *Praticamente cerco di applicare tutto quello che mi ricordo poi però se non mi viene vuol dire che è una cosa nuova che non ho fatto perché diciamo che riesco a utilizzarli tutti quando mi hanno già spiegato.*

I: E davanti a quelli problemi più complessi, tipo come vengono presentati nelle prove Invalsi o nei problemi dove ci sono pochi dati numerici o quando la domanda non è molto chiara, come ti trovi?

LUC: *Se ci sono numeri difficili è un po' più complicato perché se non hai la calcolatrice perdi un sacco di tempo a fare i conti a mente.[…] ….se devo… in questo momento mi vengono in mente solo le cose che abbiamo fatto oggi… Adesso in questo momento stiamo facendo quelle cose tipo gli errori relativi, tipo se hai un numero medio più o meno l'errore, in quel caso non riesco a ricordarmi le formule per calcolare l'errore ordinario o del volume allora provo in tanti modi, ma non mi viene mai e non riesco a farlo.*

ROT: Alle medie abbiamo avuto dei buoni insegnanti, diciamo che quello che c'era da fare c'era da fare, ci hanno fatto imparare abbastanza bene quindi problemi grandi non ne ho avuti. Se ne ho avuto non me lo ricordo.

ROT: Quando mio fratello ha bisogno di me per chiedermi qualcosa riesco a rispondergli. Tipo "mi controlli questa espressione qui se è venuta o meno", o non riesce a capirla allora gliela controllo.

I: E davanti a quei problemi un po' più complessi come ti senti? Anche facendo riferimento a quelli più difficili delle prove Invalsi o quelli dove non ci sono tutte le variabili, o quando la domanda non è cosi chiara…

ROT: Quelli delle prove Invalsi riesco anche a farli. Un conto invece magari sono quelli che ti danno a casa sulla circonferenza che invece spesso me lo dico: Cosa faccio adesso? Quindi se riesco ad riguardare un po' gli esercizi che abbiamo fatto in classe è difficile che vengano di getto insomma.

È notevole l'autoefficacia dei due soggetti sopra citati; LUC tende a scegliere dei compiti impegnativi e soprattutto sfidanti. Le persone con un alto senso di autoefficacia affrontano i compiti difficili come sfide da vincere piuttosto che come pericoli da evitare; attribuiscono l'insuccesso a un impegno insufficiente o a una mancanza di conoscenze o di abilità che possono comunque essere sviluppate (Bandura, 2000).

L'abilità di applicare un contenuto specifico in una situazione pratica è notoriamente uno dei maggiori obiettivi della proposta delle competenze. Jonnaert (2012) sottolinea che il contenuto disciplinare non è un fine di per se ma è diventato "un mezzo di servizio" per "gestire" le situazioni. Si tratta prima di analizzare delle situazioni e verificare con lo studente come può costruire conoscenze per gestire efficacemente le situazioni: purtroppo quello che si vede nella prassi è ancora distante.

I: E come ti trovi nella risoluzioni dei problemi classici? Non quelli molti sfidanti, ma per scoprire ad esempio quanto viene lo sconto o quelli problemi per fare i percentuali…

MAR: Cioè quelli di percentuali sì però quelli con gli sconti no!

MAR presenta delle risposte contradditorie: sa lavorare con le percentuali ma non con gli sconti? Ma se sa calcolare le percentuali, fare dei calcoli, allora sembra che la difficoltà sia proprio con i problemi; il tema degli sconti viene presentato spesso nella forma di un problema. Tale ipotesi viene confermata quando gli è stato chiesto dove incontra le maggiori difficoltà in matematica, relazionandole quindi ai problemi:

I: Dove trovi più difficoltà?

MAR: Nel ragionare, ***come capire il problema*** *cioè magari rileggo ma dopo mi blocco e non riesco a trovare quello che mi permette di riuscire nelle cose più difficili. […] Queste* *cose della matematica sempre quando riguarda ai problemi molto complessi, di arrivare alla soluzione faccio fatica e magari a volte in alcuni calcoli.*

L'aspetto della meta cognizione più studiato in matematica è quello relativo ai processi di controllo applicati alla risoluzione dei problemi. Chiedendo su quali argomenti o situazioni in matematica si sentono più deboli o hanno più difficoltà, praticamente tutti gli studenti hanno fatto riferimento ai problemi:

> ALI: *No! Per me almeno i problemi è una cosa che non riesco a fare come, ci sono vari problemi in geometria dove tu devi praticamente rispondere delle domande non facendo calcoli ma spiegandolo e quello è proprio una cosa che non riesco a fare! Mi trovo meglio a calcolare piuttosto che a spiegare come ho fatto.*
>
> I: Fate anche delle dimostrazioni matematiche in classe?
>
> ALI: *Tipo ipotesi e cosi via? Abbiamo fatti l'anno scorso e spero di non farli mai più.*

> *MON: Allora, nei problemi sicuramente…* [ride] *sì nei problemi in generale, sia quelli di algebra, che quelli di geometria.*
>
> I: Ma se ti presentano già l'algoritmo pronto, riesci a risolverlo?
>
> *MON: Sì, se c'è quello pronto sì.*
>
> I: E quelli che ci sono nelle prove Invalsi, o quei problemi dove non ci sono tutti i dati numerici?
>
> *MON: Ecco, i problemi sono quelli che mi mettono un po' di più in difficoltà perché non… cioè mi demoralizzo dopo un po' …*
>
> I: Ma perché succede questo, secondo te?
>
> *MON: Perché vado nel panico, non riesco più ad andare avanti.*
>
> I: Ma secondo te è perché non li hai imparati bene o perché hai avuto degli insegnanti che non ti hanno aiutato in un momento precedente?
>
> *MON: No, magari non li ho imparati bene io… O non ho avuto la voglia di imparare.*

> *LUC: Forse quando trovo un problema più difficile, magari dopo un po' che ci provo e non viene, allora lascio perdere.*
>
> I: Ma perché lo lasci stare?
>
> *LUC: Perché ho provato in tutti i modi possibile e non mi è venuto, allora o ho sbagliato i calcoli o c'è un altro modo che io non lo so.*

Da come afferma Schoenfeld (1992), la meta cognizione ha il potenziale per aumentare la significatività dell'apprendimento in classe degli studenti, ben come la creazione di una "cultura della matematica" in classe favorisce lo sviluppo della meta cognizione. L'autore ritiene che un "microcosmo di cultura matematica" dovrebbe incoraggiare gli studenti a pensare la matematica come parte integrante della loro vita quotidiana e promuovere la possibilità di fare collegamenti tra concetti matematici in contesti diversi.

In relazione agli aspetti personali che possano "disturbare" nell'apprendimento della matematica, l'attenzione, l'organizzazione e l'ansia sono stati spesso citati. Quando vengono interrogati su quali dei loro aspetti personali li disturbano durante l'apprendimento:

> LUC: *Quando vedo che c'è poco tempo in quel momento inizio ad andare in crisi, io ho bisogno di tanto tempo per fare i problemi... Anche se in realtà ci riuscirei in quel tempo, comincio a dire che non ce la faccio e quindi non riesco a finirli.*
>
> ALI: *Sono disordinatissima, non riesco ad organizzare niente… L'anno scorso il primo mese non avevo un quaderno, avevo una busta con dei fogli dentro, sono disordinata e non riesco a tenere in ordine niente.*
> ALI: *Allora, il fatto che non riesco a stare attenta e quindi vado molto in modo automatico e faccio tutti i calcoli automaticamente sbagliando molte cose… e poi un'altra cosa, va be il disordine perché tante volte magari scrivendo delle equazioni perdo del più* [segnale] *del meno* [segnale] *o li trasformo perché sono disordinatissima.*
>
> MAN: *è che può darsi che quando non mi vieni l'esercizio ci provo un'altra volta e non mi viene un'altra volta allora dopo li … diciamo mi demoralizzo più o meno e dopo lascio perdere perché ho detto se non ci riesco allora lascio cosi…*
>
> MON: *Oh, Dio. Non lo so. Aspetta… che vado nel panico... oppure anche che… Sì, specialmente quello. Oppure qualche volta credo di avere ragione invece ho sbagliato tutto.*
>
> MAR: *L'ansia e pure il tempo oppure non riuscire a finire in tempo un compito in una verifica, oppure vedo una cosa che non so fare. […] Altre cose che mi disturbano non lo so… In una verifica delle cose che non abbiamo fatto perché già mi è capitato che lì chiedessi degli esercizi che noi non avevamo mai fatto anche ultimamente e quindi quando vedo una cosa cosi difficile..*
> I: Ma questo succede in matematica o anche in altre discipline?
> MAR: *Anche in altre discipline... se vedo una cosa cosi vado un attimo nel panico… dopo…*

Spesso nella matematica, gli insuccessi degli allievi portano non solo a frustrazioni, ma anche allo sviluppo di atteggiamenti negativi e alla rinuncia ad impegnarsi in maniera adeguata. Di conseguenza può favorire ad una percezione di sé negativa quanto a capacità e competenze nella materia. Comune a praticamente tutti gli studenti è la facilità di identificare più spesso i loro aspetti negativi che positivi riguardo le loro competenze.

Gli studenti danno degli indizi sulla loro consapevolezza di quanto si sentono competenti, comprendendo dai livelli "scarsi" a quelli più "raffinati". I ragionamenti astratti, di fondamentale importanza per la matematica, sono stati spesso considerati come un aspetto assente negli studenti; si osserva come hanno risposto alla domanda: "Secondo te, quali competenze ti mancano? Nel senso che, magari se avessi certe caratteristiche riusciresti a portare con più facilità determinate situazioni?"

> ALI: *Non lo so secondo me se riuscisse … perché non ho molta* ***intuizione,*** *non ci arrivo non ho molta intuizione nel senso che se ci ragiono vado a pensare la cosa più complicata e complessa e non riesco a trovare il nesso.*

> *MAN:* ***La voglia****… Principalmente la voglia.*
>
> I: Se osservi tutto il tuo percorso scolastico fino ad oggi come ti senti nei confronti della materia di matematica? Nel senso di come ti vedi?
>
> *MAN: Peggiorato sinceramente perché comunque nelle cose che si fa alle elementari diciamo erano più facili …*
>
> I: Come ti trovavi alle elementari?
>
> *MAN: Alle elementari va be… mi trovavo bene perché… però adesso nella scuola superiore che è molto più difficile cioè molto più dura con argomenti difficili…*
>
> I: Ma ti impegni di più adesso?
>
> *MAN: Sì, certo che mi impegno di più perché gli argomenti sono più difficili, hanno bisogno di più tempo per svolgerli quindi…*
>
> I: Ma la matematica di base… come la hai sviluppata? Nel senso di quando ti mancano quelle cose di base oppure sbagli… o non ti succede?
>
> *MAN: No, certe volte sbaglio perché errare è umano! […] direi che nella matematica basica non ho lacune e mi sento pieno in questo senso.*

La matematica alla scuola superiore è molto più astratta e complessa. I contenuti di base come le operazione fondamentali, le proporzioni, le applicazioni dell'algebra e della geometria sono dei requisiti fondamentali per capire gli argomenti più complessi. Si osserva nell'intervista di MAN la sua constatazione che alle superiori bisogna impegnarsi di più.

Secondo la definizione di Dubinsky (2000) per astrazione si intende qualsiasi pensiero che cerca di trattare con fenomeni a cui non abbiamo "accesso" solo attraverso i nostri cinque sensi, ma piuttosto esistono solo nelle nostre menti o nelle nostre interazioni con gli altri. D'accordo con quello che l'autore intende, è la costruzione mentale, la manipolazione e l'applicazione di uno o più aspetti dei fenomeni.

L'intuire in matematica e il dimostrare sono due azioni realizzabili dalle costruzioni mentali. I frammenti sotto citati si riferiscono sempre alle competenze mancanti identificate dai soggetti:

> ROT: *[…] allora* ***intuire*** *nei compiti a casa mi è sempre difficile, in generale i compiti che ti danno. Un'altra cosa è magari quando hai un problema pratico tipo per l'Invalsi in cui riesci magari a beh qui… magari è cosi va bene… Però nei compiti a casa non è quasi mai cosi, le intuizioni sono sbagliate nei compiti a casa.*
>
> I: Ma questo anche per altre discipline?
>
> ROT: *No, c'è matematica, fisica e mettiamoci anche magari chimica. Di solito con latino e greco me la cavo anche abbastanza bene, infatti sono materie in cui ho 9, 9 in greco e 8 in latino.*

> MON: *Le* ***dimostrazioni****…* [sembra di non ricordarsi cosa sia].
>
> I: Forse avete visto qualcosa in geometria…
>
> MON: *Ah, sì! In geometria ne abbiamo fatto un po'!! Alla fine dell'anno.*
>
> I: Si doveva scrivere l'ipotesi…
>
> MON: *Sì, sì, l'ipotesi, la tesi… È l'unica cosa che ho sbagliato nella verifica* [ride]
>
> I: Perché?
>
> MON: *Perché io non …* [ride]. *La nostra insegnante non ce li spiegava molto bene e io non ho capito neanche la differenza tra tesi e ipotesi.*

5.1.3.2 Capacità di impegnarsi in modo continuativo

La capacità di impegnarsi in modo continuativo con l'obiettivo di portare a termine un lavoro o un compito assegnato è di estrema importanza per il processo di modellizzazione. La modellizzazione matematica è un processo circolare, richiede lo svolgimento di ogni tappa per arrivare alla soluzione. Inoltre, esige una riflessione da parte dello studente sull'intero processo per riuscire a risolvere il problema. Secondo Pellerey (2010) la percezione della propria competenza nel portare a termine gli impegni scolastici, è considerata dagli esperti uno dei fattori principali nello sviluppo di motivazioni e disposizioni positive nel percorso di apprendimento.

La capacità di portare fino alla fine gli impegni della scuola va a riflettersi nella pratica quotidiana. Durante l'intervista è stato chiesto agli studenti sulle loro consapevolezze nel portare a termini un compito.

> I: Quando pensi alle tue caratteristiche personali riconosci di essere capaci di portare a termine con successo i tuoi impegni?
>
> LUC: *Sì, penso di sì. Se è una cosa che mi piace riesco a finirla se no magari dopo un po' lascio.*
>
> I: Ti chiedo: non solo a scuola ma anche nella tua vita in generale, porti le cose fino alla fine o magari se ti accorgi che non era esattamente quella la strada giusta le abbandoni?
>
> LUC: *Sì una volta ho lasciato uno sport perché mi sono reso conto che non mi piaceva.*
>
> I: E com'è stata la tua decisione? È stato facile prenderla?
>
> LUC: *Ci sono stati degli avvenimenti che mi hanno fatto un po' capire che quello non era il mio sport, e invece ci sono state delle cose che mi hanno portato ad un altro sport...*
>
> I: E adesso cosa fai?
>
> LUC: *Pallavolo e prima facevo basket.*
>
> I: E perché la pallavolo ti piace di più?
>
> LUC: *Ho cambiato sport perché quando corro troppo poi non riesco a respirare e non mi piace tanto correre. Già la pallavolo è più uno sport che poi ti fermi. Poi alla scuola abbiamo fatto delle esperienze di pallavolo e sono andato con uno mio amico alle partitine e mi sono piaciute e allora sono lì a provare con una squadra.*

LUC riconosce che porta fino alla fine un'attività quando gli piace, altrimenti non sempre la finisce.

> I: Di solito porti a termine con successo i tuoi impegni o li abbandoni a metà strada?
>
> MAR: *I compiti sì, gli impegni dipende* [ride]*. Dipende…*
>
> I: Tipo se non lo sai fare, cosa fai?
>
> MAR: *Io prima ci provo in matematica e dopo vedo...*
>
> I: Quale sarebbe un motivo per lasciare un compito a metà strada?
>
> MAR: *Dopo un po' mi fa venire il nervoso quando ho capito che non mi viene e diciamo sto un po' male…*
>
> I: Non parlando solo di compiti e attività scolastiche, in generale nella tua vita porti fino alla fine i tuoi impegni o se vedi che non ti piace li lasci?

MAR: *Di solito cerco sempre di portarli... cioè per esempio, l'anno scorso ero indecisa per fare danza poi ho avuto un attimo un momento di decisione di continuare a farla oppure no poi quello era un impegno che avevo preso che dovevo portare a termine e alla fine ho deciso di continuare..*

Si osserva il racconto di SIM e MAR nelle loro decisioni prese in situazioni fuori del contesto scolastico, dimostrandosi persistenti. Riguardo ad un compito scolastico entrambi i soggetti affermano che non sempre hanno voglia di portare fino alla fine un determinato compito, individuando il piacere e la difficoltà come dei fattori decisivi.

Nessuno studente indagato si sente del tutto competente nel portare fino alla fine un impegno, soprattutto trattandosi di un compito scolastico. È stato interessante osservare che l'atteggiamento verso la scuola è diverso delle attività extra scolastiche; hanno spesso relazionato la capacità di impegnarsi alla competenza fisica che riguarda l'attività sportiva: lo sport che fanno o che hanno già praticato come un esempio della loro persistenza.

5.1.3.3 Gli aspetti specifici dell'autoefficacia

L'atteggiamento che lo studente ha in riferimento a quanto si sente competente nell'affrontare un determinato compito è stato osservato con più chiarezza approfondendo l'indagine:

L'intervista ci ha permesso di conoscere anche l'atteggiamento che lo studente ha in riferimento a quanto si sente competente nell'affrontare un determinato compito. Bandura (2000) sostiene che per gli studenti l'autoefficacia sia un fattore cruciale per ottenere o meno dei risultati. Alunni con bassa autoefficacia possono evitare molti compiti, specialmente quelli più impegnativi. Al contrario, gli studenti con un'alta autoefficacia, hanno una tendenza a perseverare maggiormente e a scegliere attività più sfidanti.

Per conoscere qualche credenza che lo studente ha in ciò che è in grado di fare in diverse situazioni con le capacità che possiede, gli è stato chiesto: E davanti ad un compito difficile di matematica, come ti vedi? Di solito decidi di evitarlo o lo affronti?

ROT: *Si affronta e si sbaglia però si affronta. Certamente si sbaglia però si affronta.*
I: Di solito fai tutti i compiti che hai da fare a casa?

ROT: *Sì, se non li facessi non riuscirei ad essere dietro ad una verifica. Perché se anche perdi, non fai un compito una volta, la volta dopo non capisci niente poi comincia sempre ad aumentare e la verifica… ci segano.*

SIM: *Lo affronto, cerco di affrontarlo poi se vedo che è troppo difficile lascio stare… Però di solito provo sempre a farlo.*

I: Ma questo succede sia a scuola che a casa?

SIM: *Sì, in una verifica oppure negli esercizi o con i compiti che ci danno da dare.*

I: E ti ricordi qualche esperienza da raccontarmi, una situazione matematica che hai portata alla fine o che hai lasciata a metà strada?

SIM: *Per esempio un giorno quando stavo facendo un esercizio di matematica a casa era abbastanza difficile, ho provato a farlo e so che mi veniva un risultato diverso da quello del libro, un risultato diverso e quindi ho lasciato stare, non ho controllato gli errori perché era troppo lungo e non mi andava di controllarli.*

Le risposte mostrano che gli studenti in generale affrontano i compiti difficili segnalati. Loro sono consapevoli del perché si sottopongono a tali sfide: gli obblighi che gli impone la scuola non lasciano loro altre scelte.

A volte l'affrontare il compito impegnativo viene relazionato con la situazione dell'imposizione: in una verifica ad esempio, gli studenti si sentono "obbligati" ad affrontare, altrimenti li eviterebbero:

ALI: *Tipo… in una verifica lo devo affrontare in qualsiasi caso quindi… cerco sempre di ragionare… magari non mi interessa.*

I: E che non sia in una verifica ma in una situazioni qualsiasi, magari fuori della scuola?

ALI: *lo evito* [il compito difficile].

I: Potresti raccontare un'esperienza di una situazione che ti ricordi?

ALI: *In cui avevo un problemino molto difficile?*

I: Difficile o molto difficile, quelle situazioni un po' sfidanti.

ALI: *Una volta cioè, l'anno scorso avevo le prove Invalsi e molti problemi che non capivo li ho lasciati vuoti. Ci ho ragionato un po' su questo ma non riesco a capirlo e basta.*

MAN evita i compiti impegnativi e ci racconta un esempio, spiegando alla fine cosa fa quando si trova davanti ad un'attività sfidante:

MAN*: No, no, lo evito. Anche quando mi trovo alla lavagna direi che…*

I: Potresti raccontarmi un’esperienza?

MAN: *L’anno scorso ero diciamo… preso di mira dal prof… io ero sempre vicino a lui e alla lavagna ed ero, non mi piaceva molto questo fatto perché… mi sembra che era una ingiustizia secondo me perché direi che… Già non abbiamo un prof molto normale…*

I: Ma quando il prof ti chiamava cosa facevi?

MAN: *Ah be, comunque un po’ mi arrabbiavo perché dicevo cavolo sempre io anche l’altra volta mi ha chiamato, la volta scorsa mi ha chiamato… mi sembra che faccia apposta…*

I: Ad esempio nelle attività più difficili delle prove Invalsi, riesci a mettere l’attenzione fino al termine dell’attività o se la vedi difficile e complicata cambi domanda?

MAN: *No, se la vedo difficile e complicata prima ci passo un po’ di tempo, penso a come svolgerla poi se non mi viene faccio le altre poi ci torno su perché magari con altri esercizi mi riprende la memoria come si svolge quell’esercizio che avevo lasciato prima.*

Individui con un basso senso di autoefficacia si allontanano intimiditi dalle attività “faticose”; di fronte a compiti difficili, esitano a considerare le proprie carenze personali, gli ostacoli che incontreranno e tutte le conseguenze avverse possibili piuttosto che concentrarsi su cosa fare per riuscire. Riducono il proprio impegno e rinunciano facilmente trovandosi di fronte a difficoltà. Siccome attribuiscono le prestazioni scadenti alla mancanza di capacità e doti personali, non hanno bisogno di molti insuccessi per perdere fiducia nelle proprie capacità.

Le persone con un alto senso di autoefficacia invece, di fronte alle difficoltà intensificano il proprio impegno e lo mantengono costante. Attribuiscono l’insuccesso a un impegno insufficiente o a una mancanza di conoscenze o di abilità che possono comunque essere acquisite.

Bandura (2000) ha analizzato attraverso numerose ricerche lo sviluppo della percezione di autoefficacia nei diversi periodi della vita. Inizialmente il contesto principale in cui il bambino esercita esperienze di efficacia è la famiglia. Ogni periodo di sviluppo porta con sé nuove sfide alla propria efficacia nell’affrontare le situazioni quotidiane. Per l’adolescente che si avvia a far parte del mondo adulto diventa molto importante rinforzare il senso di autoefficacia per saper padroneggiare abilità e usanze della società adulta e anche per riuscire a godere nel suo meglio il lungo periodo vissuto alla scuola.

5.1.4 Relazionare il contenuto imparato ad un uso nella pratica quotidiana

La matematica è una scienza viva in piena espansione, connessa con il mondo reale, aperta alle relazioni con le altre discipline. La sua trasformazione si sostiene ed è sostenuta da quella di altri campi scientifici. Possiamo trovarla dappertutto nel mondo d'oggi, negli oggetti tecnologici che ci circondano o nei processi di comunicazione, normalmente in maniera invisibile. Un'attività matematica sostenuta da una intenzionalità pedagogica può dinamizzare l'insegno e fornire un sentimento favorevole per l'apprendimento della matematica (UNESCO, 2011).

Pensando ad un'educazione matematica adeguata alle ampie necessità della nostra società, oggi le competenze matematiche devono permettere agli allievi di analizzare e comprendere innumerevoli dati che vengono presentati in sistemi di rappresentazione diversi e complessi, numerici, simbolici e grafici, spesso in interazione (UNESCO, 2011). È particolarmente essenziale che ogni individuo durante la sua scolarità in matematica, sia progressivamente messo a contatto con la complessità del mondo numerico attuale, apprenda ad orientarsi ed agire, familiarizzi con la diversità dei modi di rappresentazione che sono utilizzati.

Secondo Artigue (UNESCO, 2011) la costruzione di un curriculum per la scolarità di base ha il dovere di coniugare, in modo equilibrato, i due approcci complementari che sono l'approccio in termini di contenuti e l'approccio in termini di competenze trasversali, e si tratta di una sfida reale, avendo mostrato l'esperienza, la difficolta di trovare degli equilibri soddisfacenti. Come precedentemente evidenziato, l'OCSE fa risaltare che la matematica insegnata in classe deve essere utile per le applicazioni degli studenti nella loro vita quotidiana. Aggiungendo il fato che la matematica è spesso considerata lontana della realtà, *l'Intervista Studenti* si propone di comprendere se gli studenti riescono ad immaginare o dare degli esempi di come si potrebbe applicare la matematica imparata in classe.

Nel domandare se riescono ad immaginare un'applicazione nella vita quotidiana degli argomenti matematici che imparano, la maggior parte degli studenti dicono di no: non riescono ad immaginarlo e spesso non si sono mai posti questa domanda; imparano e basta. Si osservano le risposte dei soggetti quando sono stati interrogati: ***Quando impari qualcosa di***

nuovo in matematica, cerchi di immaginare una situazione o un'attività alla quale si possa applicare nella vita reale?

> SIM: *No, per dire il vero no! Imparo per riuscire poi… Cioè sono felice per aver imparato una cosa nuova però di solito non applico mai nella vita quotidiana.*
>
> I: Quando la prof arriva e vi dice: "Oggi cominciamo con un nuovo contenuto…" di solito ti poni qualche domanda?
>
> SIM: *No di solito no, in realtà non me le sono mai poste.*

> ALI: *No. Assolutamente no. Mi pongo soltanto quando imparo qualcosa mi pongo il problema, cioè mi pongo sempre l'interrogativo perché si fa quella cosa, si calcola cosi, perché si usa quello, perché si divide e per il resto basta.*
>
> I: Ad esempio quando hai imparato le proporzioni alle medie pensavi "ma dov'è che utilizzerei queste cose"?
>
> ALI: *No. Sinceramente non mi facevo questo problema, io mi faccio delle domande perché si fa cosi e cosi via ma adesso basta… Matematica…*

> LUC: *Beh in questo momento no perché stiamo facendo le cose con le lettere e quindi non so se si può applicare poi.*
>
> I: Ma prendendo in considerazione quelle cose che avete visto alle scuole medie, ad esempio quando hai imparato le proporzioni?
>
> LUC: *Beh sì quelle cose la si possono applicare a saper lavorare dei dati che prendi dalle cose e un dato che riesce a prendere da un fenomeno, poi può sviluppare con le formule.*
>
> I: Però di solito, quando cominci un argomento nuovo ti fai la domanda: "ma perché? A cosa serve questo"?
>
> LUC*: Diciamo che gli argomenti che facciamo sono sempre collegati all'argomento di prima, e quindi li capisci solo facendo quello argomento di prima poi, non so se riesco a pensare a un collegamento alle cose naturali.*

Le risposte degli studenti chiariscono ancora di più l'importanza di relazionare quello che viene "imparato" con la realtà. Se le competenze matematiche vengono definite come la capacità di un individuo di individuare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino impegnato, che riflette e che esercita un ruolo costruttivo (OCDE, 2006, p. 86) è evidente che promuovere lo sviluppo di tale competenze in classe aumenterebbe la consapevolezza di come applicare la matematica insegnata nella vita reale.

Lo studente Erasmus GUS ci racconta una esperienza diversa, mettendo in luce l'importanza dell'intervento dell'insegnante nel mostrare delle applicazioni pratiche a quello che si impara:

> I: Quando impari qualcosa di nuovo in matematica, cerchi di immaginare una situazione o una attività alla quale si possa applicare nella vita reale?
>
> GUS: *Sì, sì e normalmente in Brasile i professori fanno questo… Tipo dimostrano ogni attività, problema, cosa si fa, dove si usa…*
>
> I: Quando vedete un argomento si vede già la sua applicazione?
>
> GUS*: Sì.*
>
> I: E questo ti sembra utile?
>
> GUS: *Si tantissimo perché ti fa vedere che è una cosa importante, non è una cosa astratta che non userai mai.*
>
> I: E questo succede anche in altre discipline tipo in chimica o in fisica?
>
> GUS: *Dipende dal professore, ma sì!*
>
> I: Adesso nella scuola qui in Italia hai visto qualche argomento nuovo o più o meno nuovo? Hai cercato di immaginare una situazione dove si può applicare?
>
> GUS: *Questo professore attuale è bravissimo ma non ha fatto questo… ha insegnato soltanto… Anche perché stiamo un po' in ritardo in relazione a dove dovevamo essere. Perché ha detto lui* **[il professore]** *"Questo dovreste averlo già imparato"… io che posso fare?* **[ride]**

È indiscutibile il compito dell'insegnante nel avvicinare i contenuti matematici alla realtà che i ragazzi vivono a casa o in altri ambienti.

5.1.5 La consapevolezza degli studenti riguardo il loro avvenuto apprendimento matematico

La scienza propone diverse teorie di apprendimento e non esiste un consenso su come l'individuo impara. Tra le principali teorie dell'apprendimento, descritte precedentemente nel capitolo tre, si includono le teorie comportamentiste, le cognitiviste e le costruttiviste.

La matematica è ancora considerata per molti individui come una materia che ha dei risultati precisi e procedure infallibili, che ha come elementi fondamentali le operazioni aritmetiche, le procedure algebriche, le definizioni e i teoremi. Si percepisce che le tradizionali metodologie impiegate con frequenza ancora oggi nell'insegnamento della matematica non seguono lo sviluppo tecnologico della società, richiedendo agli studenti un eccesso di tecniche e procedure operatorie senza giustificazioni.

Numerose ricerche hanno investigato le concezioni matematiche degli studenti e il loro sviluppo. Questi studi riportano dei risultati in cui si dimostra che l'apprendimento della matematica non è semplice e richiede tempo (Schoenfeld, 1992). La matematica è ancora spesso associata alla memorizzazione di formule, ad una disciplina di ragionamento logico, difficile da imparare ma necessaria per la vita quotidiana. Queste concezioni sono anche influenzate dalle pratiche didattiche utilizzate in classe. Le ricerche sull'educazione matematica hanno evidenziato le concezioni che gli studenti e gli insegnanti hanno su quest'area di conoscenza: tale idee possono avere molta influenza nell'insegnamento e apprendimento della materia (Ponte, 1992).

Le concezioni sull'apprendimento matematico possono essere dei fattori determinanti nel processo di costruzione della conoscenza matematica e dunque nell'insegnamento e apprendimento della disciplina. Tale ipotesi orientano una serie di ricerche che cercano una risposta attraverso lo studio delle concezioni della matematica e del suo insegnamento e la ripercussione di esso nella pratica docente (Thompson, 1992); cercano delle risposte anche insieme agli studenti, analizzando l'esistenza di correlazioni fra le concezioni di matematica e apprendimento della matematica degli studenti e le loro prestazioni (Schoenfeld, 1992).

Le concezioni sull'apprendimento della matematica sono attive anche in occasione della storia vissuta di ogni soggetto e portano in modo implicito o esplicito delle credenze, che possono essere consapevoli o no. Queste idee possono essere proprie o condivise con altri, sono dei valori internamente sviluppate oppure apparentemente ripetute.

Durante la realizzazione dell'intervista è stato chiesto agli studenti su come pensano che avvenga l'apprendimento matematico, presentando loro due domande:

- Parlando di matematica, secondo te, bravo si nasce o si diventa?

- Una studentessa della tua età mi ha detto che: “Certi studenti sono nati con un certo bagaglio di competenze e abilità matematiche”, cosa ne pensi?

Da un punto di vista metodologico, l’intervista è stata condotta attraverso il metodo clinico: in base alla risposta dell’intervistato, l’intervistatore propone altre domande cercando di intuire il modo in cui ragiona il soggetto; le domande complementari servono anche a strutturare il pensiero di chi parla (diSessa, 2007). L’intenzione è conoscere le credenze degli intervistati su come avviene l’apprendimento. Dall’indagine è risultato che le risposte si concentrano in due tipologie:

- le idee e conoscenze derivanti dai contenuti mentali sono presenti fin dalla nascita, cioè, non sono acquisite o costruite;
- le conoscenze e le abilità sono sviluppate attraverso l’esperienza.

Le idee degli studenti che credono che si nasce già con la conoscenza matematica sono state identificate come *concezione innatista*. In filosofia, l’innatismo si oppone particolarmente all’empirismo, secondo il quale invece le idee derivano dall’esperienza. Quindi la seconda modalità di elaborazione viene identificata come *concezione empirista*.

È importante evidenziare che tali termini vengono utilizzati esclusivamente per rappresentare l’idea sull’origine della conoscenza; il materiale fornito dalle interviste non ci permette di compiere ulteriori approfondimenti teorici.

5.1.5.1 Concezione innatista

In filosofia il termine innatismo si riferisce a qualsiasi teoria che sostenga che una persona possieda delle conoscenze già al momento della nascita. In questa concezione si assume che le nozioni e concetti non vengono appresi tramite l'esperienza (Lima, 2000). Nella rappresentazione innatista la conoscenza è preformata e le strutture mentali si attualizzano con la maturazione dell’essere umano.

In questa categoria si incontrano le idee dei soggetti che ritengono che una persona nasca già portata alla matematica e che sia dotata o no di conoscenze matematiche sempre dalla nascita. Nel confrontare l’idea presentata dal ricercatore: “*per la matematica si nasce o si diventa* *bravo*”; sono emerse risposte interessanti, sia per la congettura che per la giustificazione presentata:

> I: Parlando di matematica, secondo te, bravo si nasce o si diventa?
>
> SIM: *Per essere... per me per la matematica uno è bravo se nasce bravo perché è un po' difficile impararla dopo e deve anche piacere… È molto difficile impararla.*
>
> I: E tu sei nato bravo o sei diventato bravo?
>
> SIM*: A me la matematica è sempre piaciuta quindi direi che sono nato bravo.*
>
> I: E per caso conosci qualcuno o qualche compagno che non è nato con questa…
>
> SIM: *La maggior parte dei miei compagni non sono bravi con la matematica quindi prendono voti molto bassi… anche se si mettono a studiare perché o la sai fare o è molto difficile impararla … Da quello che ho potuto osservare.*
>
> I: E c'è qualche materia in cui non ti senti cosi bravo?
>
> SIM: *A scuola o in generale?*
>
> I: Possiamo fare le due domande: prima a scuola e poi in generale.
>
> SIM*: Allora a scuola un po' nelle materie scientifiche quelle non mi sono mai piaciute tranne la matematica, poi nella vita… boh non ho mai fatto caso.*

Lo studente ha raccontato che gioca a basket da un certo tempo, quindi è stato messo a confronto con la questione dello sport:

> I: Me l'hai detto che giochi a basket, anche per il basket bisogna essere nato bravo o si diventa bravo?
>
> SIM: *No, anche a basket devi essere nato bravo... appunto fatto per il basket oppure puoi diventare bravo allenandoti duramente durante tutta la settimana.*
>
> I: Da quanto tempo giochi a basket?
>
> SIM: *Da 10 anni! Ma c'è molta gente che gioca da molto tempo meno di me che è molto più brava… Quindi… Nella vita per riuscire nelle cose bisogna sempre allenarsi e dare il meglio…*

SIM sembra essere sicuro di quello che pensa; crede che per essere bravo in matematica bisogna nascerci, considerando la sua “facilità” nella materia come una caratteristica che possiede già dalla nascita. È interessante osservare che lo stesso soggetto ha un'idea un po' diversa rispetto allo sport, affermando che “*puoi diventare bravo allenandoti duramente durante tutta la settimana”.*

Quando è stato presentato ai soggetti il ragionamento di una studentessa della loro stessa età "*Certi studenti sono nati con un certo bagaglio di competenze e abilità matematiche",* essi sono stati coinvolti a sostenere le loro convinzioni:

I: Una studentessa della tua età mi ha detto di credere che "Certi studenti sono nati con un certo bagaglio di competenze e abilità matematiche". Cosa ne pensi?

ALI: Ah, giusto! Perché c'è molta gente che è molto più portata in matematica, invece chi no!

I: Sei una persona nata con questo bagaglio o no?

ALI: No… Avevo una buona prof di matematica alle medie che comunque mi ha aiutato molto, cioè, le cose che ho fatto le ho imparate e riesco a farle tranquillamente.

I: E potresti farmi un esempio? Conosci qualche persona che, secondo te, è nata con il bagaglio?

ALI: In matematica… personalmente no! [ride!]

5.1.5.2 Concezione empirista

Nella concezione empirista, la conoscenza proviene dall'esterno e la sua origine è l'esperienza; le conoscenze si evolvono man mano che il soggetto acquisisce nuove esperienze (Lima, 2000).

Da com'è stata organizzata l'intervista e secondo gli obiettivi della ricerca, in questa fasi si pretende soltanto di identificare se, secondo gli studenti, esiste o no la possibilità di imparare la matematica. È probabile che se l'investigazione fosse stata più approfondita su questo argomento, si sarebbero potute individuare altre categorie, fino a cogliere delle idee vicine alla concezione costruttivista. In tale caso, non si esclude che i seguenti soggetti possono avere delle concezioni costruttiviste riguardo la costruzione della conoscenza.

Prendendo sempre in considerazione le due domande sopra citata, si osserva:

I: Parlando di matematica, secondo te, bravo si nasce o si diventa?

ANN: *Si diventa secondo me.*

I: Sì, perché?

ANN: *Perché secondo me, cioè, in matematica con il passare del tempo quando nasci sei uguale agli altri però tocca te studiare e mettere in pratica le cose che sono insegnate e quindi sperimentare te stesso e vedere se sei in grado di andare avanti.*

I: Se un collega o un insegnante dice: Ah, ma per la matematica deve già nascere bravo o nascere brava…

> ANN: *Secondo me non è vero.* […] *però cioè, alcune persone sono portate ma secondo me è da bambini, tipo i giochi di logica cosi… è portato più alla logica quindi sei più portato alla matematica secondo me…*

ANN è convinta che la matematica si impara affermando che alla nascita tutti sono uguali, citando l'esperienza come un fattore dell'apprendimento. La maggior parte degli studenti intervistati credono che la matematica va sviluppata, studiata e si può migliorare con la pratica. Si osservano le risposte di LUC e MON quando interrogati: una studentessa della tua età mi ha detto che: "Certi studenti sono nati con un certo bagaglio di competenze e abilità matematiche". Cosa ne pensi?

> LUC: *Diciamo che nascono tutti uguali, poi dipende pure dai primi mesi di vita, se hanno un ambiente dove vengono messi e in quel caso… se i genitori ad esempio riescono a formarlo in un certo modo diciamo che lui sarà portato a qualsiasi materia. Se invece sono solo su un aspetto, allora lui sarà portato solo ad un aspetto, se invece non sono proprio attenti allora in quel caso non sarà portato a niente. Quindi dipende dall'ambito famigliare.*

> MON: *No, io penso che una persona non nasce già imparata, io penso che, cioè, uno deve cominciare a studiare già dalle elementari un po' piano piano e poi studiare sempre di più anche alle medie e alla superiore, ovvio che se inizi a studiare a metà dell'anno dopo magari non è il tuo metodo di studio. Però non penso che comunque uno nasce già che è bravo in matematica o in un'altra materia.*

Certamente sia l'empirismo che l'innatismo hanno dei processi di insegnamento, apprendimento e valutazione distinte; ma non ci dilunghiamo su di questo visto che l'obbiettivo è conoscere le concezioni degli studenti riguardo a come avviene la conoscenza.

Le ricerche sulle concezioni dell'apprendimento della matematica vengono realizzate da tempo nell'ambito educativo e mostrano che le concezioni sulla matematica possono avere molta influenza nell'apprendimento della disciplina. Ponte (1992) sostiene che le concezioni degli studenti hanno un'origine essenzialmente cognitiva; tale autore ritiene che le concezioni sono indispensabili perché strutturano il senso che è dato alle cose ma agiscono come un ostacolo ad apprendere nuove realtà o determinati problemi, limitando le possibilità di attuazione e comprensione.

Le concezioni sull'apprendimento matematico possono influenzare le motivazioni e le attitudini metacognitive dei soggetti. In particolare, la concezione secondo la quale si nasce bravo o no per la matematica è un intralcio nell'apprendimento: lo studente spesso si autogiustifica perché non riesce ad imparare e di conseguenza si demotiva. Queste sono solo alcune delle conseguenze, ma che evidenziano già l'importanza di conoscere e demistificare tale idee.

Dalle due concezioni presentate si ricava la necessità di una riflessione: Se le ricerche evidenziano il fatto che le concezioni degli studenti possono condizionare il loro atteggiamento verso la disciplina, allora è un compito dell'insegnante proporre delle situazioni e discussioni per demistificare tale intendimento. Il problema è che ci sono tanti insegnanti che hanno la stessa concezione….

5.1.6 Considerazioni conclusive del capitolo 5

Nel pensare e progettare un insegnamento verso le competenze è importante che si prendano in considerazione degli importanti aspetti che riguardano gli allievi. In questo studio è stato di grande interesse conoscere dagli studenti: la loro motivazione ad imparare e la percezione delle proprie competenze, quali sono le competenze che ritengono di avere, come credono che avvenga la conoscenza matematica e se immaginano delle applicazioni pratiche ai contenuti imparati nelle classi di matematica.

Gli studenti sono stati indagati sulle loro **motivazioni ad imparare** in generale e nello specifico nella materia di matematica. Gli aspetti motivazionali presentati dai soggetti riguardavano: fiducia positiva nella scuola; comprensione di un argomento; motivazione in funzione della materia; motivazione in funzione dell'indirizzo scelto; l'aspetto della "novità" di un argomento. I fattori non stimolanti riguardo l'apprendimento si riferiscono a: incomprensione degli argomenti in matematica; scuola come un obbligo di frequenza; atteggiamento dell'insegnante.

Complessivamente i soggetti sono riusciti a esprimere le loro motivazioni o meno, accompagnate delle rispettive giustificazioni. È interessante notare come alla scuola superiore di secondo grado gli studenti si sentano più motivati nelle materie che si riferiscono ai loro indirizzi. Le motivazioni per frequentare la scuola sono divergenti: dall'obbligo al piacere. Come sostiene Boscolo (2012), il comportamento motivato è attivato nel momento in cui lo studente si pone un obiettivo di competenza: per esempio, lo studio di una materia, la realizzazione di un problema, una ricerca, e così via. Egli può eseguire il compito per obbedire a un ordine degli insegnanti oppure perché trova il compito interessante e quindi agisce spontaneamente.

Durante l'intervista è stato chiesto agli studenti se hanno già avuto qualche insegnante che li ha motivati ad imparare e qualche esempio di un'esperienza avvenuta in classe che giudicano significativa. Praticamente tutti gli studenti hanno fatto riferimento ad un insegnante della scuola media, nello specifico, hanno citato l'insegnante di matematica. Alla domanda su com'era la pratica didattica eseguita da questo docente, i soggetti in generale hanno citato delle pratiche tradizionali e classiche, evidenziando che era il suo modo di fare che li incentivava: *"abbastanza severa, […] brava a spiegare* (SIM); *lei ci teneva molto ad insegnare e per me quando uno ha proprio la passione dentro può anche fare la brava insegnante* (MON).

È sorprendente il fatto di riferirsi all'insegnante di matematica come un esempio di educatore che motiva positivamente gli alunni. Come già affermato, non si scarta la possibilità che tale avvenimento sia una conseguenza dell'indagine matematica alla quale stavano partecipando.

Le risposte degli studenti mettono in luce che la motivazione è un costrutto di carattere psicologico, in quanto centrato sulle dinamiche della personalità individuale, ma anche di carattere socioculturale: le interazioni che il soggetto realizza con l'ambiente in cui appartiene, comprendendo la classe, gli insegnanti, la famiglia e anche tutta la società (Mariani, 2006).

Alcuni studi[61] confermano che la motivazione, la **convinzione circa la propria abilità** e gli atteggiamenti positivi diminuiscono soprattutto nella transizione nel passaggio dalla scuola elementare alla scuola media, portando fino a una avversione verso la matematica che risulta un rifiuto quasi totale, nonostante la sua importanza per gli studi superiori. Uno degli obiettivi raggiunti con l'intervista è stato dunque conoscere quali sono le competenze che lo studente della scuola superiore ritiene di avere. I soggetti sono riusciti ad identificare delle competenze di studio, motivazionali e specifiche matematiche; le domande complementari sono state di

---

[61] XVIII Convegno Nazionale UMI – CIIM Sull'insegnamento della matematica (1997) Dalla Scuola Media alle Superiori: continuità nell'insegnamento della matematica. Disponibile in
http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/campobasso1996.pdf

fondamentale importanza per chiarire le loro convinzioni. Hanno identificato dei contenuti su cui hanno lavorato molto, come le espressioni, i problemi matematici in generale… Inoltre hanno identificato l'ansia, la paura e la mancanza di voglia come degli ostacoli personali che influiscono suo loro processo di apprendimento. Nelle interviste si possono osservare dei soggetti che hanno dimostrato di aver una buona autoefficacia, come ad esempio ROT e LUC, e altri invece hanno presentato una scarsa autoefficacia, come ad esempio ALI e MAR. Le *convinzioni* di senso di efficacia o autoefficacia sono fortemente influenzate dalle esperienze precedenti di successo e insuccesso: più precisamente, non dalle esperienze in quanto tali, quanto dal modo in cui l'individuo se le rappresenta e delle cause che gli vengono attribuite (Boscolo, 2012).

Le convinzioni personali relative alla propria efficacia nell'eseguire un compito, il concetto di sé, l'utilità percepita e l'ansietà sono considerati come meccanismi universali coinvolti nell'agire, nel senso che essi influenzano i risultati ottenuti. La convinzione della propria efficacia "attiva" sostiene l'impegno delle attività cognitive necessarie per sviluppare le abilità. In direzione opposta, il fatto di giudicarsi inefficaci ritarda proprio lo sviluppo di quelle sotto abilità dalle quali dipendono le prestazioni più complesse (Bandura, 2000).

La **percezione della propria competenza** influenza considerevolmente non solo il comportamento dei soggetti, ma anche i loro pensieri e le loro emozioni. In generale l'essere umano tende a evitare compiti e situazioni che ritiene superiori alle proprie capacità, mentre cerca attività nelle quali si ritiene in grado di agire positivamente. Come già evidenziato, ma precisato ulteriormente da Pellerey (2004), i giudizi di auto-efficacia sono direttamente collegati alla motivazione: la percezione di conseguire controllare o dominare una situazione nuova e sfidante produce un'emozione positiva che può generare nuove tendenze a cimentarsi in compiti analoghi.

Agli studenti è stato chiesto come si sentono nei confronti degli argomenti matematici imparati precedentemente, come ad esempio nella scuola media e in generale: non hanno identificato molte lacune. In risposta alla domanda su quali sono gli argomenti matematici in cui si sentono più forti sono state individuati ad esempio le espressioni, l'analisi del problema e i problemi pratici.

La matematica alla scuola superiore è molto più astratta e complessa, le dimostrazioni e l'intuizione matematica sono stati citati come gli aspetti più complessi della matematica.

In relazione agli aspetti personali che possono “disturbare” nell’apprendimento della matematica, l’attenzione, l’organizzazione e l’ansia sono stati spesso citati. L’astrazione è la determinazione di una data situazione, che può essere un oggetto matematico, una procedura o la combinazione dei due, che è essenziale in una componente della situazione. L’astrazione matematica, in generale esprime questa essenza in qualche modo sistematico come il linguaggio formale o un insieme di assiomi (Dubinsky, 2000). La capacità di astrarre le idee e i concetti è un passaggio fondamentale per capire la matematica e costruire nuove idee.

In particolare, la percezione di un progresso di competenza in un ambito specifico è una potente spinta a impegnarsi sempre di più e con maggiore persistenza in compiti simili. Analoghe osservazioni si possono trarre dalle teorie piagetiane relative allo sviluppo delle conoscenze e delle abilità nell'interazione con l’ambiente. Come ritiene Pellerey (2004) il sentirsi capace è fonte di gioia e di orgoglio, il soggetto di conseguenza cerca situazioni e compiti che possano offrirgli delle stesse esperienze.

È importante riconoscere il ruolo fondamentale svolto dalla **percezione di essere capace** di affrontare e superare la difficoltà e le reazioni emozionali che possono emergere nel contesto dell’attività matematica. Avere la consapevolezza nel riconoscere i suoi punti di forza, ovvero, le competenze e le proprie difficoltà è fondamentale nel processo di autoapprendimento dell’individuo.

È di fondamentale importanza che l’insegnante favorisca delle attribuzioni causali riferite a fattori modificabili, incoraggiando una concezione dell’intelligenza matematica flessibile e migliorabile, determinando percorsi didattici che permettano un aumento della percezione della propria competenza nel **portare a termine gli impegni scolastici**.

Le risposte mostrano che i soggetti spesso provano ad affrontare i compiti difficili e impegnativi proposti. Essi sono consapevoli del perché si sottopongono a tali sfide: gli obblighi che gli impone la scuola non gli lasciano altre scelte. Gli studenti hanno fatto spesso riferimento alle attività sportive eseguite come un esempio del fatto di portare a termine un impegno.

Agli studenti è stato chiesto se si interrogano sulle **applicabilità di un contenuto nuovo** imparato in matematica: “*No, per dire il vero no! Imparo per riuscire poi…”* (SIM); “*No. Sinceramente non mi facevo questo problema”* (ALI). Le risposte degli studenti chiariscono ancora di più l’importanza di relazionare quello che viene “imparato” con la realtà. Tocca all’insegante guidare il processo e incentivare gli alunni a riflettere sui fenomeni matematici riferiti al loro quotidiano, sviluppando quindi relazioni tra i concetti teorici e il contesto sociale che appartengono.

L’impiego di attività differenziate, progetti diversi e l’uso di differenti tecnologie proporzionano all’alunno condizioni di relazionare i contenuti imparati con la propria realtà, rendendo l’apprendimento significativo. Aspetti relazionati a questo tipo di metodologia facevano già parte della proposta pedagogica di Paulo Freire (1996) quando ha discusso il compito della “problematizzazione” e applicazione nel processo pedagogico.

Durante l’intervista il racconto del soggetto GUS[62] ha riportato bene l’importanza dell’insegnante in tale processo; alla domanda: Quando impari qualcosa di nuovo in matematica, cerchi di immaginare una situazione o una attività alla quale si possa applicare nella vita reale? Il soggetto risponde: “*Sì, sì e normalmente in Brasile i professori fanno questo… Tipo dimostrano ogni attività, problema, cosa si fa, dove si usa…” […] ti fa vedere che è una cosa importante, non è una cosa astratta che non userai mai”.* Alla domanda se in Italia aveva già visto in classe qualche argomento nuovo e se quindi ha cercato di immaginare una situazione dove si possa applicare, il soggetto risponde: “*Questo professore attuale è bravissimo ma non ha fatto questo… ha insegnato soltanto… Anche perché stiamo un po’ in ritardo in relazione a dove dovevamo essere. Perché ha detto lui* [il professore] *“Questo dovreste averlo già imparato”… io che posso fare?*”

I parametri curriculari nazionali in Brasile[63] contengono molto esplicito e concentrato il fatto di relazionare il contenuto imparato al quotidiano dell’allievo. Nelle indicazioni per la scuola superiore nelle materie come biologia, fisica, chimica e matematica, riportare i contenuti al mondo reale è una condizione necessaria alla pratica didattica. È importante sottolineare che la gran parte degli insegnanti[64] riceve o ha ricevuto corsi di aggiornamento e formazione complementare per comprendere e adempiere tale esigenze.

Il loro credo **sull’apprendimento** in certo modo influenza la loro motivazione. Come riportato nelle opinioni degli studenti su come accade la conoscenza matematica, pone l’accento sul fatto

---

[62] Studente brasiliano di 17 anni intervistato durante l’Erasmus in Italia.

[63] MEC - Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.

[64] L’esistenza dei corsi di formazioni complementari sono presenti nella maggior parte delle scuole federali in Brasile; per le scuole regionali i corsi sono previsti nel programma didattico e vengono gestiti di modi diversi a secondo della regione.

che, come docenti, dobbiamo essere attenti a proporre delle pratiche didattiche che possano smitizzare le concezioni innatiste. Lo studente, attraverso l'esperienza propria deve arrivare a tale conclusione.

La pratica della matematica purtroppo è ancora frequentemente vista come un'attività puramente deduttiva che si traduce spesso nella produzione successiva di teoremi per mezzo di prove formali dal rigore perfetto. La matematica è spesso considerata come un "corpo" di conoscenza invariabile e vera, che deve essere assimilata dal soggetto. Tuttavia è una scienza viva sia nella vita quotidiana dei cittadini che nei centri di ricerca o produzione di nuove conoscenze che ha costituito uno strumento utile nella soluzione di problemi scientifici e tecnologici nelle diverse aree del sapere. Trattandosi di un processo cosi ampio, non può limitarsi alla mera memorizzazione di regole, tecniche e definizioni formali di conoscenza, perché "... insegnare non è trasferire delle conoscenze, ma creare delle possibilità per la propria produzione o costruzione" (Freire, 1996, p. 52, trad. nostra).

Boscolo (2012, p. 143) ci ricorda che persiste il problema di aiutare gli studenti, in particolare gli adolescenti, a fare connessioni tra gli interessi e la loro identità e a riflettere sui modi in cui impiegano il loro tempo libero. Si tratta di una questione di orientamento, percepita non come scelta di studio o professione, ma di obiettivi e compiti di vita. Come l'autore, riteniamo che la ricerca sull'interesse, come repertorio per potenziare e migliorare l'apprendimento scolastico, possa fornire significative opportunità per quanto riguarda lo sviluppo di interessi individuali. L'attenzione a queste opportunità, sia da parte dei genitori che degli insegnanti dovrebbe fondarsi sulla consapevolezza che lo studente della scuola superiore si pone obiettivi non limitati all'apprendimento e alla riuscita scolastica; in questa esplorazione ha bisogno di un certo grado di autonomia: questo implica una diversa e più produttiva strutturazione del tempo che lo studente impiega a scuola e per la scuola.

CAPITOLO 6

ANALISI DELLE ATTIVITÀ DI MODELLIZZAZIONE CON GLI STUDENTI

I problemi di modellizzazione proposti agli studenti consistono in tre attività descritte precedentemente nel capitolo della metodologia. Lo svolgimento delle attività è stato videoregistrato; i soggetti hanno risposto contemporaneamente in forma scritta e orale. Le analisi del materiale raccolto vengono fatte in base alle trascrizioni dei filmati e ai fogli compilati dagli studenti durante la realizzazione dei compiti. Per analizzare i dati raccolti con gli studenti si utilizza il metodo clinico (diSessa, 2007) e il thinking-aloud protocol (Ericsson & Simon, 1993); si fa l'analisi del **contenuto** presentato nelle risposte. Attraverso l'identificazione dei primitivi fenomenologici e dei ragionamenti più articolati della competenza (Smith, diSessa & Roschelle, 1993/1994) presentati dai soggetti si identificano gli ostacoli allo sviluppo della competenza di modellizzazione.

In pratica, a ciascuno studente partecipante venivano fornite tre attività di modellizzazione e gli veniva richiesto di risolverle ad alta voce in modo che fosse possibile raccogliere, con l'uso di una videocamera, tutti i vari passaggi risolutivi che lo studente metteva in atto, attività che consiste nel think aloud, proposto da Ericsson e Simon (1993). Durante lo svolgimento delle attività gli studenti sono stati stimolati dalle domande complementari fate dall'intervistatore; tali domande non hanno fornito dei dati o delle risposte, ma gli hanno dato l'opportunità di ripensare e di organizzare le loro idee e concezioni riguardo gli argomenti indagati. Come descritto nel capitolo della metodologia, il metodo clinico è una procedura volta a indagare come i soggetti pensano su una determinata cosa o situazione, cercando di comprendere il modo in cui articolano i propri ragionamenti (Delval, 2001; diSessa, 2007).

La risoluzione delle attività attraverso il "pensare ad alta voce" e le intervenzioni eseguite secondo il metodo clinico hanno permesso di capire quali sono le riflessioni e le congetture che gli studenti fanno nello svolgimento del processo di modellizzazione e quali sono i ragionamenti che li portano a pensare in quel modo. Nello specifico, l'analisi identifica i primitivi fenomenologici presentati dagli studenti, ossia, le idee costruite sulla base di osservazioni personali attraverso l’esperienza quotidiana, non trattandosi di un concetto formalmente appreso o di una teoria che spiega il funzionamento delle cose, poiché descrive un fenomeno (diSessa, 1987). I primitivi fenomenologici sono gli elementi di base della competenza, su cui si costruisce la competenza matematica più avanzata.

Riguardo la conoscenza e l'interpretazione dei concetti scientifici gli autori (Smith et al., 1993/1994) situano gli studenti in due grandi gruppi: studenti principianti[65] ed esperti[66], ritenendo che l’interpretazione dei concetti scientifici dei soggetti principianti sia diversa dalle conoscenze scientifiche degli esperti. Secondo gli autori, l’*astrazione* costituisce il principale ostacolo che divide gli esperti dai principianti, tale barriera è superata solo quando i principianti acquisiscono nuove conoscenze e fondamentalmente diverse dal mondo concreto. In questa prospettiva, Dubinsky (1991) considera che il concetto di astrazione riflessa possa offrire una base teorica per comprendere cos’è il ***pensiero matematico avanzato.***

La teoria riguardante il cambiamento concettuale e i meccanismi di sviluppo delle competenze matematiche proposta da Smith, diSessa e Roschelle (1993/1994) ha ispirato in un certo senso la struttura dell’analisi delle competenze di modellizzazione presentata dai soggetti, essendo eseguita in due parti:

- Analisi dei primitivi fenomenologici presentati dagli studenti principianti.
- Analisi dei ragionamenti più articolati della competenza presentati dagli studenti esperti.

È importante enfatizzare che l’obiettivo dello studio non è distinguere gli studenti in “principianti” o “esperti” o separarli in gruppi diversi. Lo scopo è analizzare le proprietà di conoscenza di dominio di tutti gli studenti coinvolti individuando le idee embrionali e gli sviluppi più strutturati della competenza. Oltre a ciò, durante l’analisi dello svolgimento delle attività, lo stesso studente presenta risoluzioni che si inquadrano ora nei primitivi fenomenologici, ora nei ragionamenti più articolati della competenza.

Le analisi sono state eseguite in modo analitico considerando gli studi sulle competenze di modellizzazione Katja Maaß (2006; 2007); Blomhøj & Jensen (2003; 2007); e delle sub competenze di modellizzazione matematica proposte da Blum & Kaiser (1997, in Maab, 2006).

[65] *Novices* è il termine utilizzato in lingua inglese e si riferisce agli studenti che si avvicinano ai concetti matematici, ma non hanno ancora sviluppato una sufficiente competenza.
[66] *Experts* è il termine utilizzato in lingua inglese e si riferisce ai docenti e, per estensione studenti che hanno sviluppato la competenza.

Nelle diversi fasi di svolgimento del processo di modellizzazione, gli studenti hanno bisogno di analizzare delle informazioni, usare diversi modi di rappresentazione (siano algebriche, grafiche, geometriche o numeriche), formulare dei problemi, svolgere modelli e cercare soluzioni, formulare e giustificare delle congetture, analizzare e interpretare i risultati. Durante il processo di sviluppo delle attività di modellizzazione gli studenti costruiscono nuove conoscenze e diverse competenze (Blomhøj & Jensen, 2003).

La transizione verso il pensiero matematico formale non è un processo intellettuale semplice per la maggior parte degli studenti (Schoenfeld, 1992). La ricerca in didattica della matematica indaga diverse difficoltà degli studenti in modo da comprendere le definizioni, i concetti, le proposizioni e le loro dimostrazioni, argomenti insegnati a scuola in rigorosa formulazione simbolica.

L'approccio intuitivo attraverso le situazioni matematiche o di vita reale, che sono familiari agli studenti, può costituire un passo significativo verso l'emergere di nuovi concetti. Gli studenti possono sviluppare modelli matematici per manipolare una situazione più complessa o meno familiare che gli può portare alla necessità di un argomento matematico formale. Di fatto, molti ricercatori applicano la strategia dei problem solving, che prima sviluppa nuovi concetti che possono essere utili, precedentemente alle definizioni che sono costruiti in modo da formare la base per una teoria formale (Herget, 2002; Herget & Richter, 2012).

Per realizzare un’attività con competenza non è sufficiente possedere certe abilità ma è necessario rendersi conto di quali siano le strategie migliori da attivare per ottenere un risultato sodisfacente. Un ostacolo incontrato negli studenti indagati è stato la difficoltà di individuare quali conoscenze matematiche e quali abilità utilizzare nel risolvere l’attività richiesta. Spesso gli studenti sono in grado di eseguire operazioni aritmetiche e imparare regole e definizioni ma non altrettanto spesso riescono a capire in quali situazioni problematiche possano essere usate. Esperti e principianti possedevano varie risorse a disposizione per scegliere le strategie che erano più efficaci nel risolvere una determinata tappa della modellizzazione. Questi risultati indicano una somiglianza fondamentale nelle caratteristiche sistematiche della conoscenza dei principianti e degli esperti.

6.1 Breve descrizione e obiettivi delle attività[67]:

Si ritiene importante fare una breve descrizione delle attività proposte e dei rispettivi obiettivi per orientare il lettore nella comprensione dell'analisi.

- **Attività del Taxi:** Espone una situazione della vita quotidiana e delle problematiche da rispondere. La situazione è presentata in forma di testo, fornisce una breve descrizione di come funziona il servizio taxi in funzione dei costi e in una tabella si presentano le tariffe fissate dal comune di Bologna[68]. Le questioni da risolvere sono presentate sotto forma di quattro domande, prendendo in considerazione la descrizione iniziale dell'attività. Lo studente deve capire e svolgere la problematica: **Scoprire il costo della tariffa chilometrica e creare le funzioni che rappresentano il costo della corsa presentata.**

- **Attività della Statua:** Presenta un'immagine e di seguito una domanda esplicita. L'immagine è la testa di una statua con dei bambini ad intorno, senza informazioni aggiuntive. La sfida è**: Supporre l'altezza totale della statua, in base all'immagine della sua testa.**

Presentare problemi matematici in forma di immagine non è un metodo classico presente nelle scuole, benché sia un ottimo strumento per introdurre i giovani studenti nel mondo incerto della modellizzazione matematica. Conosciuti anche come "Pictorial Problems" o "Picture Mathematics" (Herget & Richter, 2012), questi problemi possono aiutare gli studenti a sviluppare tecniche per costruire modelli matematici. Il problema della statua tratta di un *Pictorial Problems* in cui si presenta l'immagine e una domanda da rispondere, senza fornire dati numerici o indicare delle relazioni esistenti.

- **Attività del Viaggio:** Presenta un testo e una mappa seguiti da due domande esplicite. Si tratta di un viaggio che viene proposto da una ragazza, la mappa in scala presenta il tragitto da percorrere e lei deve convincere e ribadire a suo padre a farlo. La sfida è**: Determinare la**

[67] La presentazione delle attività si trova nelle appendici. Il capitolo della metodologia descrive la procedura dell'esperimento e come sono stati costruiti.
[68] Il comune di riferimento scelto è stato Bologna perché è lo stesso dove vivono i soggetti intervistati.

distanza e sostenere una pianificazione di un viaggio in base al tragitto presentato nella mappa.

La mappa presentata è una *carta generale-politica* in cui viene rappresentato il continente dell'America del Sud, le sue divisioni politiche e la scala. Il tragitto proposto è evidenziato in nero e la scala utilizzata nella mappa è pari a 1 : 35.000.000[69] . La scala di riduzione è il rapporto costante fra le dimensioni lineari della carta, cioè le lunghezze grafiche, e le distanze rispettive sulla superficie terrestre o lunghezze reali. La proposta dell'attività contiene una nota su cosa si intende per scala.

6.2 Le competenze di modellizzazione messe in atto dagli studenti

Durante lo svolgimento delle tre attività di modellizzazione sono emersi degli aspetti cognitivi e metacognitivi degli studenti, permettendo di evidenziare differenti competenze e modi di articolarle. In questo capitolo si presentano una sintesi delle diverse competenze messe in atto durante lo svolgimento dei problemi. I dettagli di come le conoscenze e le abilità sono state messe in opera, cosi come i possibili ostacoli presentati nel processo di modellizzazione vengono trattati nelle analisi che seguono nei rispettivi capitoli 6.3 e 6.4: *L'identificazione dei p-prims: gli elementi base della competenza* e *I ragionamenti più articolati della competenza.*

La comprensione del problema reale:

La comprensione del problema proposto è la prima tappa del processo. Di natura reale, la situazione deve essere decodificata in modo da identificare gli aspetti pertinenti e la problematica da affrontare. Nel corso della realizzazione delle attività, gli studenti hanno messo in atto differenti competenze per la comprensione e per la costruzione del modello basato sulla realtà, come:

- Formulazione di ipotesi per il problema e semplificazione della realtà presentata;

[69] Il rapporto 1:X indica che un centimetro misurato sulla carta equivale a X centimetri sul terreno reale.

- Riconoscimento delle grandezze che influenzano la realtà, assegnazione di un nome e identificare le variabili chiavi;
- Costruzione delle relazioni tra le variabili;
- Osservazione delle informazioni disponibili e distinzione in informazioni rilevanti ed irrilevanti.

Durante lo svolgimento delle attività si osserva l'intendimento complessivo dello studente. Nelle tre attività loro dovevano parlare a voce alta come stavano ragionando e scrivere lo svolgimento dell'attività.

La costruzione del modello matematico:

La gran parte degli studenti ha avuto difficoltà nel creare il modello matematico; nello specifico la problematica è stata trovata nella scrittura della procedura nel linguaggio algebrico per ottenere il modello matematico.

Le competenze presentate dai soggetti sono state:

- Costruzione delle relazioni tra le variabili;
- Matematizzazione delle quantità rilevanti e le loro relazioni;
- Scelta appropriata della notazione matematica e rappresentazione della situazione.

È importante sottolineare che stiamo soltanto nominando le competenze messe in atto durante la risoluzione degli studenti; il modo come le hanno articolate verrà analizzato più avanti in questo capitolo, rispettivamente in 6.3 e 6.4.

La risoluzione matematica del modello:

Pochi studenti sono riusciti a stabilire il modello matematico a partire dal modello reale. Intanto, le competenze presentate in questa tappa sono state:

- Utilizzo di strategie euristiche;
- Utilizzo delle conoscenze matematiche per risolvere il problema formulato;
- Competenze aritmetiche in generale.

L'interpretazione e la verifica delle soluzioni con la realtà:

L'interpretazione della soluzione ottenuta e la sua verifica con il problema reale è stato un processo poco realizzato durante lo svolgimento delle attività, ma si riesce ad identificare:

- Interpretazione dei risultati matematici ottenuti in contesti extra matematici;
- Visualizzazione della soluzione del problema utilizzando un linguaggio matematico appropriato;
- Verifica e riflessione critica sulla soluzione trovata;

6.3 L'identificazione dei p-prims: gli elementi base della competenza

6.3.1 P-prims: Un'idea embrionale che deve essere maturata

Ricercatori educativi alla fine degli anni 70 hanno cominciato ad ascoltare attentamente quello che gli studenti stavano dicendo e facendo durante la realizzazione di compiti in diverse materie. Quello che hanno identificato è stato posteriormente segnalato come sorprendente e inquietante: gli studenti avevano idee che competevano "contro" i concetti presentati in aula. Avevano sviluppato delle concezioni consistenti e con potere esplicativo, ma erano incompatibili con i concetti matematici e scientifici accettati e presentati dall'istruzione (Smith et al., 1993/1994).

Come precedentemente descritto nel capitolo della metodologia e all'inizio di quest'analisi, i primitivi fenomenologici sono le idee embrionali dei soggetti che devono essere maturate riguardo ad un fenomeno. Questa "idea" è una concezione anche intuitiva che rende difficile da definire un linguaggio elaborato e con una validità limitata a semplici situazioni.

La riflessione sulla valutazione dei risultati degli studenti ha implicazioni anche nell'analisi dei loro *misconceptions* (Smith et al., 1993/1994). Gli autori evidenziano ad esempio l'analisi fatta sulla valutazione nazionale dei risultati *Educational Progress* e i risultati preliminari del *Open*

Ended California Assessment Program[70] e mostrano che i *misconceptions* hanno avuto una forte influenza su come l'apprendimento degli studenti è valutato. Quello che negli anni 70’ e inizio degli anni 80’ i ricercatori speravano semplicemente in termini di risposte corrette o errate, dalla metà degli anni 80’ si cominciano a cercare attivamente le concezioni erronee per spiegare gli errori più frequenti degli studenti. Come sottolinea diSessa (2007), le correlazioni astratte eseguite dagli studenti che vengono adottate per essere causali sono una forma comune di p-prims. Il fatto che queste astrazioni possano spesso essere applicate fuori del loro tipo normale di applicabilità, significa che essi sembrano "idee sbagliate”.

I concetti appresi nei diversi contesti di interazione possono essere molto resistenti al successivo cambiamento in contesto scolastico, come appare evidente nelle ricerche descritte da Smith, diSessa e Roschelle (1993/1994) sulle concettualizzazioni scientifiche “ingenue” possedute dai bambini.

I primitivi fenomenologici identificano degli aspetti di significato che non sono implicati necessariamente nel ragionamento corretto basato su teorie formali: uno studente può imparare proceduralmente ma senza capirle. Invece, il punto è che quando gli studenti devono ricostruire un ragionamento non formalistico di tipo scolastico non hanno spesso dei significati adeguati e quindi si basano su estensioni dei primitivi fenomenologici nel loro modello mentale. Di conseguenza vengono fuori risultati scorretti.

Proprio come costrutti mentali impregnati di significato, si ritiene che le convinzioni giochino un ruolo fondamentale non solo nell’organizzazione della struttura di riferimento individuale, come anche nel modellare i modi in cui l’individuo costruisce un’interpretazione delle intenzioni e azioni altrui in un dato contesto sociale e ambientale (Olivieri, 2014, p. 126). Secondo l’autore il cervello è un giudice scarsamente attendibile in termini di correttezza a base culturale. Un errore o un’idea ingenua che sono stati rinforzati a livello neurale tenderanno a restare al loro posto, a meno che non si offra in alternativa un rinforzo molto più forte, che possa competere, in termini di valore o di salienza, con il predecessore erroneo o parziale.

L’intenzione della ricerca nell’identificare i nuclei di base del ragionamento realistico è quella di capire quali sono i punti che ostacolano lo sviluppo della competenza di modellizzazione. Tramite interviste cliniche analizzate in profondità, si identificano proprio quei primitivi fenomenologici specifici della modellizzazione matematica in fenomeni reali.

[70] Studi realizzati dal Dipartimento di Stato della Pubblica Istruzione in California nel 1989.

I concetti primitivi degli studenti sul fenomeno analizzato riguardano la:

- *Creazione del modello reale*: identificazione sbagliata ed eccessiva semplificazione nell'individuare le variabili del problema; creazione di nuove variabili non pertinenti; identificazione erronea dello strumento matematico e stime inadeguate.
- *Costruzione del modello matematico*: creazioni scorrette di relazioni fra le variabili, utilizzo di un criterio di pertinenza non matematica.
- *Interpretazione dei risultati*: interpretazione attribuita ad un fattore non pertinente o inesistente; assunzioni e generalizzazioni di risultati non attendibili nella realtà.

Riteniamo che ulteriori progressi nella comprensione dei processi di apprendimento matematico dipendano dalla concettualizzazione e dalla ricerca empirica riguardo la natura delle concezioni iniziali e il loro sviluppo in competenze (Smith et al., 1993/1994).

I primitivi fenomenologici possono essere interpretati come i "mattoncini" o gli elementi base della competenza**,** su cui costruire la competenza matematica più avanzata. Quindi se è vero che la competenza avanzata integra modellizzazione e formalizzazione, il processo parte proprio da p-prims che progressivamente si integrano e si perfezionano nel ragionamento e diventano descrivibili secondo espressioni matematiche.

Le strategie che gli studenti principianti hanno applicato vengono descritte per ogni attività realizzata.

6.3.1.1 Attività del taxi

Determinare i fattori che influiscono nel valore della corsa del taxi è di fondamentale importanza per interpretare l'attività proposta. Di conseguenza, l'individualizzazione delle variabili rilevanti è essenziale per la costruzione del modello matematico. Per evidenziare l'astrattezza della matematica intuitiva del soggetto, gli autori Smith, diSessa e Roschelle (1993/1994) suggeriscono di mettere gli studenti principianti in situazioni problematiche, ma che gli risultino ancora familiari.

L'interpretazione della situazione presentata nell'attività del taxi ha portato gli studenti a identificare solo alcuni informazioni rilevanti, non decodificando tutte le informazioni presentate. Nella spiegazione del soggetto MAN sono presenti fattori corretti, ma lo studente non li decodifica tutti e si osserva la presenza di primitivi fenomenologici:

Per la domanda 1 dell'attività: ***Quali sono i fattori che influiscono nel valore della corsa**?* Il soggetto legge attentamente per 2 minuti e poi comincia a scrivere la risposta della domanda 1. Passati 4,5 minuti gli viene chiesto: Hai già preso un taxi?

> MAN: **[Pensa un attimo]** *Si.*
>
> I: Ti chiedo di spiegarmi a voce, o se vuoi leggere…. Quali sono i valori che influiscono nella corsa secondo te?
>
> MAN: *Ho scritto che i fattori che influiscono nel valore della corsa sono quante cose si portano a bordo, magari le valigie extra più pesanti o eccessive, magari i regali per i parenti quando si viaggia, la distanza tra il luogo di origine il luogo di arrivo, il giro che il taxi fa per portare il cliente perché magari ci sono i tassisti più furbi che fanno il giro più lungo e quanti soggetti salgono a bordo della vettura. Perché se si è di più il prezzo cala perché si divide la spesa mentre se è uno magari devi pagare tutto lui e quindi spendi più soldi.*

Il soggetto fa riferimento ad una situazione particolare e assume una concezione ingenua della situazione: ipotizza dei fattori che in realtà non hanno legami con il problema affrontato e li relaziona ad una sua esperienza personale: prendere il taxi al ritorno di un viaggio. Il soggetto elenca quello che riesce ad immaginare nella situazione: *"magari i regali per i parenti quando si viaggia, […]magari ci sono i tassisti più furbi che fanno il giro più lungo e quanti soggetti salgono a bordo della vettura. Perché se si è di più il prezzo cala perché si divide la spesa".* Il primitivo fenomenologico è la semplice idea esplicativa che viene accettata da una persona di modo acritico, perché può essere tutto quello che conosce su un determinato argomento. Si tratta di una collezione di astrazioni ingenue di semplici fenomeni quotidiani osservati (diSessa, 1987).

MAN prende in considerazione la distanza tra il luogo di origine e il luogo di arrivo; MON, descritto in seguito, riesce a cogliere i fattori giorno e orario. Entrambe le risposte non identificano tutte le variabili rilevanti.

Nel caso in cui il soggetto non identifichi tutti i fattori che influiscono nell'attività, non riesce a trovare il valore indagato nella domanda successiva: ***Costo di ogni chilometro.*** Le competenze messe in atto si riferiscono all'interpretazione del problema reale e alle conoscenze matematiche. Il riconoscimento delle "quantità" che determinano la situazione è una competenza necessaria per tale interpretazione; le identificazioni parziali portano ad un risultato non corretto. Si osserva nella risoluzione che segue: MON prende il prezzo finale, divide per i numeri di chilometri e disconsidera la quota fissa di spostamento nel realizzare il calcolo.

I: A che cifra sei arrivata?

MON: *A €1,57.*

I: Spiegami un po' come sei arrivata a quel numero lì.

MON: *Allora "quanto ha pagato per ogni chilometro percorso?" Quindi ho preso il totale di quello che lei ha pagato €15,70 e ho diviso per i chilometri che ha percorso in taxi.*

I: Ok, e quando è che Anna ha preso quel taxi?

MON: *Alle 15:00.*

I: E il giorno era festivo, feriale?

[Silenzio]

I: Cambia qualcosa se il giorno è festivo o feriale?

MON: *No, in questo caso non cambia niente…. Perché ti dice già il prezzo.*

Al soggetto è stato domandato il giorno e l'orario dello spostamento perché sono fattori che influiscono nel valore della corsa: la quota fissa di spostamento viene calcolata in funzione di questi fattori. Tuttavia lo studente non considera tale informazione e effettua il calcolo considerando solo i dati dichiarati dal problema.

Un ragionamento simile è stato presentato dal soggetto MAR:

MAR: *Allora, quanto ha pagato per ogni km percorso? Quindi… posso usare anche la calcolatrice?*

I : Certo, fai quello che vuoi.[…] Puoi spiegarmi brevemente, cosa significa la quota fissa di spostamento?

MAR: *La quota fissa di spostamento… nel senso che qua per forza devi pagare €3,00 nel senso di per ogni spostamento devi pagare €3,00.*

[…]

MAR: *Quindi non ha chiamato, lunedì, quindi €3,00. Di sicuro €3,00 poi questo …€15,00.*

MAR: *Quindi quanti chilometri ha percorso … ha pagato €3,00 …*

I : Puoi fare tutti i calcoli qui, questo foglio è tutto tuo!! [**Il soggetto aveva una certa resistenza a scrivere i calcoli nello spazio giusto, scriveva qualche numero nel margine del foglio e poi li cancellava].**

MAR: *Ok, voglio provare... tipo devo fare proporzioni?*

I: Come vuoi!

MAR: *Io volevo provare a fare una proporzione, quindi aspetta…*

I: Ha pagato €15,70 giusto? Che giorno ha preso?
MAR: *Di lunedì quindi un giorno feriale.*
I: E cosa significano questi €3,00?
MAR: *È la quota fissa.*
MAR*: Ho provato a dividere questo (€15,70)*
I: E hai trovato qualcosa?
MAR: *Ho trovato tipo quasi €2,00.*
I: Ti sembra una cifra ragionevole?
MAR: *Boh!*
I: Se fai il calcolo inverso arrivi sempre alla stessa cifra?
MAR*: Si.*

Il soggetto prova ad utilizzare il concetto di proporzione come una chiave di soluzione del problema, ma non riesce a identificare tutte le variabili in gioco nella situazione, anche se è stato istigato dall'intervistatore. Durante la realizzazione di un compito matematico è comune che gli studenti prendano in considerazione soltanto i dati numerici scritti nell'attività. Nei due frammenti riportati, i soggetti non matematizzano le quantità rilevanti e le sue rispettive relazioni. MON non prende in considerazione la variabile giorno festivo o feriale; MAR in un certo momento afferma che si pagano €3,00 più €15,00, quando gli si richiede di chiarire cosa significavano i €3,00, il soggetto presenta una spiegazione che all'inizio sembra di aver capito, tuttavia non relaziona la quota fissa con il prezzo finale.

6.3.1.2 Attività della statua

Quando si discutono i "Pictorial Problems", gli studenti provano a rispondere a domande come: Qual è il problema nell'immagine proposta? Quali aspetti della situazione sono matematicamente rilevanti? Come ottenere le informazioni necessarie per risolvere il problema? Come dimostrare la risposta? (Herget & Richter, 2012). Nel tentativo di rispondere a tali domande, gli studenti utilizzano le proprie strategie nel problema che gli è stato proposto.

L'attività chiede: ***Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi?*** *Spiegare dettagliatamente tutti i tuoi ragionamenti e calcoli fati per arrivare alla tua risposta.*

La situazione reale rimane il punto centrale dell'attività fino al raggiungimento di una soluzione. Per ciò è necessario che il soggetto metta in pratica l'abilità di cogliere dei punti di riferimento concreti e li utilizzi insieme alle sue conoscenze matematiche. Questa competenza è fondamentale per dare la partenza allo svolgimento, altrimenti il problema continua ad essere un impasse. Durante lo svolgimento dell'attività il soggetto MAN legge il problema per quasi 3 minuti; dopo gli viene detto: "A quest'attività non c'è un'unica risposta, è in base al tuo ragionamento". Dalla sua risoluzione si osserva l'assenza di un riferimento concreto come parametro matematico: assume che per risolvere l'attività servono dei dati, proprio i numeri, come nei classici esercizi matematici. Il soggetto si mette a scrivere la risoluzione come si può vedere nella descrizione che segue; quando ha fatto segno di essere "pronto", gli viene chiesto:

> I: Dimmi, cos'è che hai scritto?
>
> MAN*: Bisognerebbe conoscere i dati mancanti: altezza, larghezza della testa di Adenauer e si dovrebbe fare una proporzione alla fine perché se fosse raffigurato dalla testa ai piedi ogni parte del corpo ha una propria grandezza.*
>
> I: Va bene, però prendendo in considerazione l'immagine abbiamo la testa di Adenauer e poi davanti ci sono….
>
> MAN: *Dei bambini, due bambini e forse una madre.*
>
> I: E in base a questi dati, dati che in realtà i numeri non ci sono, riusciresti più o meno a….
>
> MAN*: Sarebbe un monumento colossale perché la testa del bambino che è aggrappato al viso di Adenauer è grande quanto il suo occhio destro, ...e poi il naso, la mano della madre che mette sul naso è grande ¼ del naso del presidente.*
>
> I: E riusciresti a fare qualche calcolo anche approssimativo …. Se sarebbe alta tipo 3 metri o 300 metri?
>
> MAN: *Allora, prendiamo in considerazione il bambino, questo bambino qua che è alto dall'occhio al collo del presidente 1,20m. No! 1,30m ed è grande quanto… quasi tutta la testa e per il monumento dalla testa ai piedi bisognerebbe moltiplicare il bambino per la parte della faccia, tutto il busto, tutto l'addome e fino ad arrivare alle gambe e ai piedi quindi se il bambino è 1,30m si fa* [moltiplica] *per quattro o cinque volte e poi si scopre l'altezza molto approssimata della statua.*
>
> I: Quanto è alta più o meno?
>
> MAN: *Allora… il risultato che mi è venuto è di quasi 5 metri e mezzo togliendo la fronte e dopo la ho aggiunta più o meno alla grandezza del bambino. Ho moltiplicato il bambino per 4 immaginando tutto il corpo del presidente e alla fine per me sarebbe quasi 5 metri e mezzo.*

Il soggetto è stato stimolato dall'intervistatore a vedere "cosa" c'era davanti alla testa di Adenauer, con l'intenzione di esortarlo ad identificare qualche parametro di riferimento. Il soggetto individua le persone e afferma che "*sarebbe un monumento colossale";*

Si tratta di una attribuzione iniziale altamente intuitiva. In seguito alla domanda su quanti metri sarebbe alta la statua, dopo aver assunto il bambino come riferimento matematico, il soggetto riesce a stimare una possibile altezza. Lui costruisce il modello matematico utilizzando una relazione sbagliata e infondata riguardo le proporzioni di un corpo: non ha utilizzato un rapporto reale ma lo ha relazionato al numero di parti del corpo umano *"faccia, busto, addome, gambe, piedi*".

Dalla sua risoluzione si verifica che la competenza di "cogliere delle informazioni e utilizzarle in modo da incontrare la soluzione del problema" è ancora embrionaria a questo tipo di sfida proposta.

Un altro primitivo fenomenologico riguardo al parametro matematico è stato presentato dal soggetto MAR quando prova a giustificare la scelta del suo parametro di riferimento. Nella sua risoluzione decide che vuole mettere dei bambini "*uno sopra l'altro*" per trovare l'altezza della statua e utilizza il rapporto "testa : corpo = uno : otto[71]". Si osserva nello svolgimento la giustificazione data riguardo alla scelta del rapporto assunto per la creazione del modello matematico:

> MAR: *Me ne immaginavo 8.*
> I: Perché otto?
> MAR: *Per farlo diventare un po' alto.*
> [...]
> I: Ti chiederei anche di scrivere cosa significa quell'8.
> MAR: *Questo*. **[E scrive che rappresenta il numero di bambini uno sopra l'altro].**
> I: E se arriva un'altra persona e dice: Sono 15 bambini **[uno sopra l'altro]** e un altro ancora afferma che sono 4. Come fai a giustificare 8?
> **Il soggetto comincia a cancellare quello che aveva scritto.**
> I: No, non che è sbagliato 8, ma se c'è uno che dice "sono 4" e l'altro dice che "sono 15" [**bambini uno sopra l'altro]** e te hai detto che sono 8…

[71] L'interpretazione di tale rapporto matematico è: La relazione del rapporto della testa con il corpo è di rispettivamente uno a otto.

MAR: *Perché la testa in proporzione al corpo … quindi immagino un po' il corpo … per 4 bambini con una testa grande e il corpo piccolo…. Quindi secondo me 8 bambini la statua è più alta.*

I: Ok, ma questo 8 hai tirato cosi di un ….

MAR: *È per non farla diventare troppo alta ma neanche troppo bassa.*

Il soggetto non sa giustificare il rapporto assunto, assumendo che *"è per non farla diventare troppo alta ma neanche troppo bassa".*

Secondo diSessa (1983) un particolare individuo avrebbe una grande collezione di p-prims da cui possono essere fatte delle inferenze causali su una determinata situazione. Lo stesso individuo può generare spiegazioni contraddittorie del fenomeno in diverse circostanze. Tale insieme di p-prims non sarebbe intrinsecamente coerente, ma tutto dipenderebbe dagli aspetti del problem solving nella situazione.

Dalla risoluzione di MAR si osserva la competenza di cogliere delle informazioni e utilizzarle in modo efficace per trovare la soluzione del problema, che in questo caso, è ancora da costruire.

Nella risoluzione di GUS si osserva la stima sbagliata assunta per il rapporto testa-corpo: intanto ha modellizzato la situazione e ha trovato una soluzione ragionevolmente valida.

GUS: *Qua c'è un bambino... in verità un adulto deve essere più o meno l'altezza.*

I: Della faccia?

GUS: *Si... Quindi...* **[il soggetto comincia a risolvere l'attività].**

GUS: *Io ho 5/3 …***[e se auto misura con le mani].**

Dopo di aver scritto come si vede nella figura 9, gli viene chiesto:

I: Hai considerato…

GUS: *Non so se questo è quello che voleva…*

I: Più o meno l'altezza della statua. Quanto è che hai trovato?

GUS: *10,8, quasi 11 metri.*

I: Ok. E com'è che hai fatto?

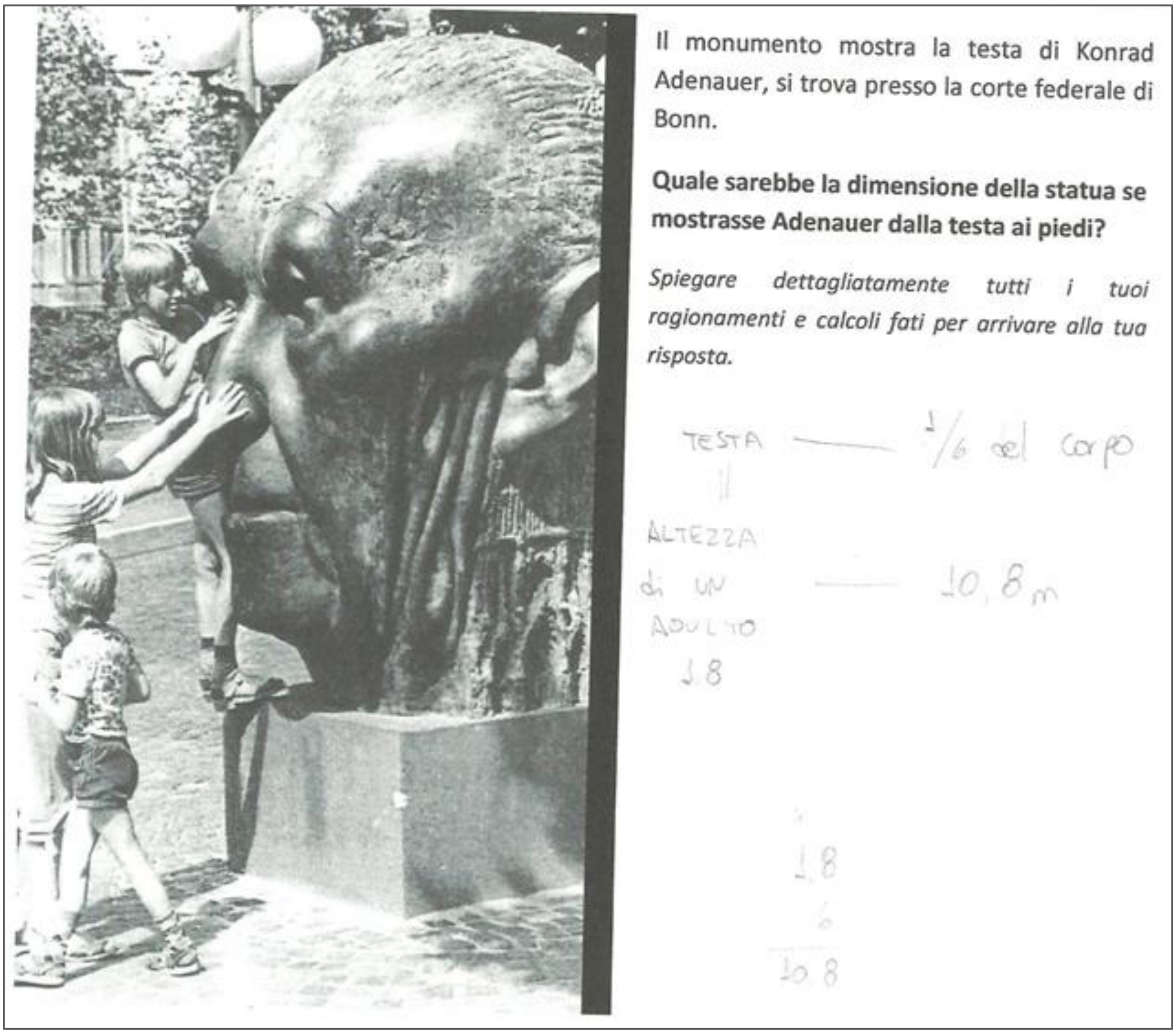
GUS: *La testa come se sarebbe 1/6 del corpo, quindi se prendi tipo…. prendi la testa e la moltiplichi per 6 ce l'hai tutto il corpo.*

I: E come sei arrivato a capire che il numero da moltiplicare sarebbe 6?

GUS: *Tipo nel senso più o meno normale dell'adulto. Nell'immagine si vede che c'è un bimbo che più o meno ce l'hai con chi paragonare.*

I: Ho capito.

GUS: *Quindi si prende un adulto sarebbe la stessa altezza, che un adulto alto 1,80 m, quindi 6 volte che sarebbe il tutto. …. 6 volte della testa sono 10,8 m.*


Il monumento mostra la testa di Konrad Adenauer, si trova presso la corte federale di Bonn.

Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi?

Spiegare dettagliatamente tutti i tuoi ragionamenti e calcoli fati per arrivare alla tua risposta.

TESTA —— 1/6 del corpo
||
ALTEZZA di UN ADULTO 1.8 —— 10,8 m

1.8
6
10.8

Figura 9 - Risoluzione GUS - Attività della Statua

I soggetti dimostrano delle abilità nel giustificare i loro ragionamenti assunti nella problematica, anche se non formalmente corretti: esaminando un passaggio della risoluzione di SIM si osserva tale abilità; segue una coerenza di ragionamento ma non approfonda la problematica matematica in questione e analizza l'aspetto storico dell'attività:

I: Cos'è che stai scrivendo? La domanda è quale sarebbe la dimensione della statua, giusto?

SIM*: Si, allora se fosse grande dalla testa ai piedi sarebbe davvero una statua grandissima perché è stata una delle persone più importante della storia della Germania … poi stavo scrivendo perché ha lottato contro il …. I propri ideali provando a cancellare l'immagine brutta come quella del nazismo nella propria nazione.*

I: Avete visto questo in storia?

SIM: *No ma da quanto ho letto qua poi avevo già sentito parlare è stata davvero una persona importante… Poi adesso scrivendo mi verrà in mente qualcosa.*

E continua a scrivere la risposta. Passati oltre 4 minuti:

SIM: *Allora direi che basta.*

I: Ok, allora vengo io sempre con la domanda della matematica: Ma tipo quanto sarebbe alta, in numeri, secondo te.

SIM: *Anche tre barra quattro metri.*

I: Come hai fatto a capire che è alta tipo 3 o 4 metri?

SIM: *No, scusa! Diciamo anche un po' di più…. Cinque o sei…. Perché sarebbe davvero importante per fare ricordare a tutta la gente che è stata una persona più importante della Germania nella storia post nazista e a punto per questo sarebbe davvero molto grande…*

I: E come hai fatto ad intuire questi 5 o 6 metri? Come faresti a spiegare ad un tuo compagno?

SIM: *Perché una costruzione da 5 o 6 metri è davvero molto alta. … abbastanza alta e questo darebbe l'immagine di quello che è stata questa persona.*

SIM presenta un problema metacognitivo: qual è il criterio di pertinenza matematica? Il suo criterio è legato alla storia e non riesce a farlo sulla modellizzazione. Alla domanda riguardante l'altezza in numeri, il soggetto organizza una risoluzione senza modellizzarla, creando delle soluzioni un po' causali, che lui li giustifica: *"Cinque o sei…. Perché sarebbe davvero importante, […] una costruzione da 5 o 6 metri è davvero molto alta".*

Le abilità metacognitive sono importanti perché permettono di controllare il processo di esecuzione, indagando sulla comprensione del problema, sulle informazioni contenute, sulla forma come lo ha rappresentato; stimolano all'uso di nuove strategie mentali; aiutano a capire quando è opportuno utilizzare una strategia basata sul recupero delle informazioni note (Maaß, 2006; Sjuts, 2003).

6.3.1.3 Attività del viaggio

L'attività del viaggio presenta una mappa con un percorso predeterminato. La situazione espone il desiderio di Angela di fare il viaggio individuato nella cartina. La ragazza deve convincere suo padre che tale viaggio si potrebbe fare, lui guarda la mappa e le dice: "*Il viaggio mi sembra molto interessante ma la lunghezza sarebbe come fare un giro attorno alla circonferenza della terra*!"

Per risolvere l'attività lo studente deve prima calcolare la distanza reale del percorso indicato sulla carta, utilizzando la scala presentata per rispondere alla prima domanda: ***Come potrebbe Angela ribattere al commento di suo padre? Spieghi chi ha ragione ed il perché.*** *(Presenta tutti i calcoli per giustificare la tua soluzione).*

Dai primi studi cognitivi realizzati principalmente nel dominio da fisica (McCloskey, 1983) fino ad oggi sono stati documentati molti studi sulle comprensioni poco precise da parte degli studenti, riguardo a concetti di vari domini di conoscenze scientifica. Gli studenti portano a scuola le concezioni che hanno costruito nel corso della loro vita con le esperienze formali ed informali. Molte volte tali concezioni risultano primitive e diverse dalla conoscenza scientifica insegnata a scuola (Perez-Tello et al., 2005). In quest'attività alcuni studenti non sono riusciti ad interpretare da soli la notazione in cui viene presentata la scala: **proporzione**. MAN non è arrivato da solo ad interpretare la scala, le sue concezioni erronee sono identificati quando fa dei tentativi a caso per trovare il rapporto giusto:

> I: Quello 1:35 milioni cosa significa?
> MAN: *Che ….aspetta significa che uno …. Non vorrei dire una cavolata però…*
> I: Quello che ti occorre... sono sempre nella stessa misura.
> MAN: *In centimetri?*
> I: Si.
> MAN: *Questi ad esempio sono 6 centimetri dal totale*.
> I: Quindi nella mappa….
> MAN: *In scala nella mappa.*
> I: In generale… 1 sta per 35 milioni, indipendentemente del percorso.
> MAN: *Dovrei fare 35 milioni diviso 19* (centimetri*) che sono il totale* (del percorso proposto*), no diviso per ogni pezzo.*

Il soggetto stabilisce un rapporto sbagliato fra i dati presentati della scala e la misura della distanza sulla mappa. Dalla sua risoluzione sembra di aver assunto: fra un numero troppo grande e un numero piccolo ci vuole la divisione per trovare un risultato.

Saper leggere e scrivere in una lingua vuol dire che una persona conosce molti aspetti della struttura di quella lingua ed è capace di farne uso per molte e diverse funzioni sociali. Analogamente, paragonare la matematica a una lingua non significa solo che gli studenti devono apprendere gli elementi della struttura propria del discorso matematico (i termini, i fatti, i segni e i simboli, le procedure e le abilità necessarie per eseguire determinate operazioni), ma anche che essi devono imparare a usare tali elementi per risolvere problemi non familiari in una molteplicità di situazioni (OECD, 2006 p.87). La proporzione è un concetto affrontato nelle scuole medie, la capacità di metterlo in pratica è direttamente relazionata alla comprensione del concetto.

Il frammento seguente riporta il dubbio di GUS nell'organizzare la sua relazione creata tra km e cm; l'intervistatore osserva l'errore e lo sollecita a scrivere la tabella di conversione (km, hm, dam, m, dm, cm). Una volta costruita la tabella di conversione, il soggetto ha trovato la relazione giusta:

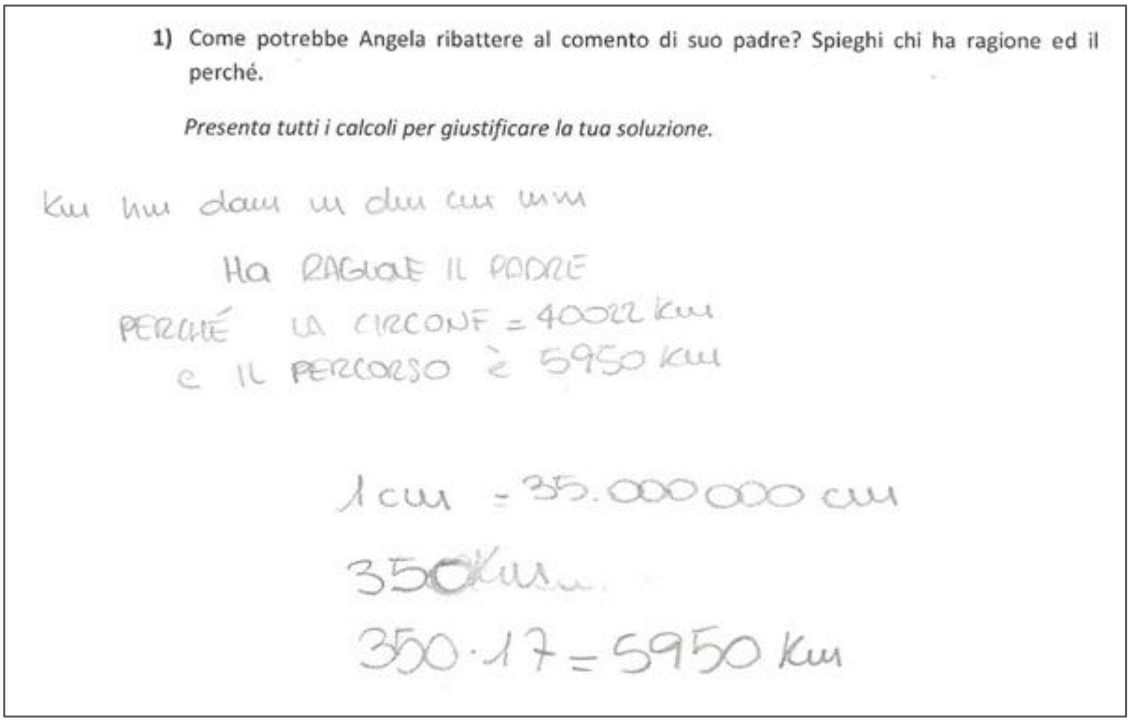
> GUS: *Dimensione del disegno per le dimensione reale* [**mentre legge la definizione del concetto di scala].**
>
> **Il soggetto misura con il righello la distanza fra le prime due città. Quando ha cominciato a scrivere la scala aveva un dubbio sull'unita di misura, glielo detto**: la scala è sempre in centimetro.
>
> GUS: *Un chilometro sono 10.000 cm?*
>
> I: Allora, quanti centimetri ci sono in un metro?
>
> GUS: *100cm. Dopo decametro, ettametro, …, chilometro. Allora 10.000 cm.*
>
> I: Scrivi la tabella di conversione e fai il conto per verificare. In un chilometro quanti metri ci sono?
>
> GUS: *No… 1.000 cm.*
>
> […]
>
> GUS: *Dimostra che ogni 350 km è un centimetro nella mappa. Quindi ho preso tutte le dimensione* **[fra le città].**

GUS presenta una concezione erronea che deriva dai suoi apprendimenti precedenti sulle conversioni delle unità di misura. Secondo Smith et al. (1993/1994) in matematica elementare, le idee sbagliate di solito provengono da istruzioni precedenti, gli studenti generalizzano in modo non corretto precedenti conoscenze prima di affrontare nuovi compiti.

Interpretare la soluzione trovata è essenziale nel processo di modellizzazione. Tale competenza è relazionata con l'analisi e l'interpretazione critica del risultato ottenuto e con la comparazione del risultato col problema del mondo reale inizialmente proposto.

MAR dopo aver affermato che la circonferenza "*Fa 40 mila*" e che "*quindi ne fa di più… quindi ha ragione suo padre*" gli viene richiesto di spiegare il perché "*ha ragione il padre*", una volta che il suo risultato trovato contradice la sua giustificazione:

> I: Quanto hai trovato per la circonferenza della Terra?
>
> MAR: *Ho trovato 40 milioni e 20 mila…..*
>
> I: Di metri, centimetri, chilometri?
>
> MAR: *Chilometri.*
>
> I: Se guardiamo un po' qui, la virgola è giusta… se non guardiamo dopo la virgola che numero fa? **(per aiutarlo a capire il numero che è venuto nella calcolatrice, il soggetto fa confusione nella distinzione tra il punto e la virgola).**
>
> MAR: *Fa 40 mila.*
>
> I: Giusto, quindi questa è la circonferenza.
>
> MAR: *Ok, quindi ne fa di più… quindi ha ragione suo padre.*
>
> I: Perché ha ragione il padre?
>
> MAR: *Perché allora... cioè nel viaggio lui fa più chilometro a rispetto alla circonferenza della Terra.*
>
> Quanti km si fa nel viaggio?
>
> MAR: *5950km.*
>
> E nella circonferenza?
>
> MAR: *4022km.*
>
> Come abbiamo visto prima [**aiuto con le dite a leggere la cifra della circonferenza della terra]**
>
> MAR: *40 mila ventidue.*
>
> Ok, prova a giustificare chi ha ragione e brevemente il perché.
>
> MAR*: Ha ragione il padre perché la circonferenza è 40022km e il loro percorso è di 5950 km*.



1) Come potrebbe Angela ribattere al comento di suo padre? Spieghi chi ha ragione ed il perché.

Presenta tutti i calcoli per giustificare la tua soluzione.

Km hm dam m dm cm mm

HA RAGIONE IL PADRE

PERCHÉ LA CIRCONF = 40022 km

e IL PERCORSO è 5950 km

1 cm = 35.000000 cm

350 km

350 · 17 = 5950 km

Figura 10 - Risoluzione MAR - attività del Viaggio

All’inizio sembra che il soggetto non abbia capito bene la domanda, confrontato, continua ad affermare che il padre ha ragione e presenta una concezione divergente. In tale situazione si potrebbero considerare due possibili interpretazioni:

- Il soggetto ha fatto confusione nell’interpretare la grandezza dei numeri (misura della circonferenza e distanza totale del viaggio);
- Il soggetto non è ha ripensato alla domanda inizialmente presentata.

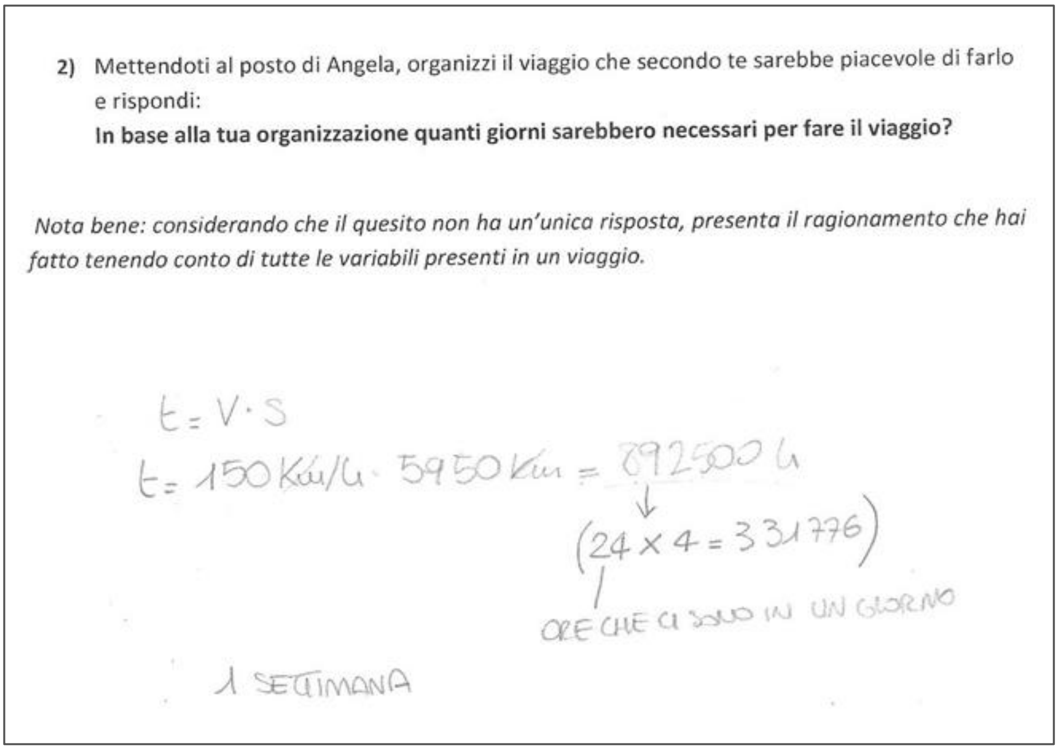
Le concezioni dei principianti sono concepite in termini di collezioni non strutturate di numerosi primitivi fenomenologici, derivati da minime astrazioni compiute dal soggetto sulla base dell'esperienza di eventi familiari. In questa prospettiva, l’apprendimento della matematica implicherebbe la collezione e la sistematizzazione di alcuni pezzi di conoscenza in un insieme più grande. I p-prims quindi, da entità isolate e ovvie giungono a diventare parti di strutture di conoscenza più complesse (Smith et al., 1993/1994).

La seconda domanda dell'attività è: ***Mettendoti al posto di Angela, organizzi il viaggio che secondo te sarebbe piacevole di fare e rispondi: In base alla tua organizzazione quanti giorni sarebbero necessari per fare tale viaggio?***

Gli studenti hanno avuto difficoltà nel stabilire un rapporto tra tempo e distanza, presentando concezioni erronee, ingenue e divergenti.

Tale difficoltà viene presentata anche dal soggetto MAR. Nella costruzione del suo modello il soggetto assume delle condizioni non compatibili con la realtà, come la velocità assunta nella risoluzione. Inoltre, il calcolo per trovare la quantità di ore è sbagliato.

> I: In realtà il percorso del viaggio è quello delimitato nella mappa, la domanda è secondo la tua organizzazione. Anche qui non c'è una risposta fissa, corretta o sbagliata.
>
> [...]
>
> MAR: *Tipo...* **[cancella delle cose scritte].** *Volevo cercare non lo so… il… calcolo di quanto tempo si potrebbe mettere … volevo provare a trovare il tempo facendo un po' la velocità che me ne invento io, se fai tipo 150km/h.*
>
> I: E si può guidare a 150km/h? Quando hai pensato alla velocità…
>
> MAR: *Pensavo all'autostrada.[...] Non lo so, pensavo a una velocità cosi…. di riferimento. Massimo per vedere…. Però….*
>
> **Fa dei calcoli nella calcolatrice.**
>
> MAR*: Quindi più o meno circa una settimana.*
>
> I: E come sei arrivata a questo "circa una settimana"?
>
> MAR: *Ho messo le ore…*
>
> E quante ne sono, secondo i calcoli?
>
> MAR: *Sono 8 milioni.*
>
> I: E come hai fatto per arrivare da questa informazione "di ore" a una settimana?
>
> MAR: *Con la calcolatrice ho fatto 24 per 24…. E dopo quello che si avvicinava di più alle ore. In realtà sarebbe 24 per quattro ma secondo me si mette di più.*
>
> I: E quanto fa 24 per 4?
>
> MAR*: Farebbe 3milioni e 31mila... però secondo me la velocità non è sempre questa e quindi si mette di più.*
>
> I: E questo 24 di dov'è che è venuto?
>
> MAR: *Sarebbe di un giorno.*
>
> I: Ok quanti giorni alla fine come risposta?
>
> MAR: *Secondo me una settimana.*



2) Mettendoti al posto di Angela, organizzi il viaggio che secondo te sarebbe piacevole di farlo e rispondi:
In base alla tua organizzazione quanti giorni sarebbero necessari per fare il viaggio?

Nota bene: considerando che il quesito non ha un'unica risposta, presenta il ragionamento che hai fatto tenendo conto di tutte le variabili presenti in un viaggio.

$t = V \cdot S$

$t = 150\ Km/h \cdot 5950\ Km = 892500\ h$

$(24 \times 4 = 331776)$

ORE CHE CI SONO IN UN GIORNO

1 SETTIMANA

Figura 11 Risoluzione MAR - seconda domanda dell'attività del Viaggio

Il soggetto assume una velocità che non è "valida" nel mondo reale perché viola la legge, presentando una sua concezione ingenua. In seguito alla domanda dell'intervistatore sulla sua stima, il soggetto non cambia la sua concezione; di conseguenza assume una relazione sbagliata per arrivare a tale risultato: "*Sono 8 milioni*". Guardando la risoluzione nella figura 11 sopra elencata, si capisce che ha moltiplicato la velocità per la distanza totale, anziché dividerla per trovare il totale delle ore. Il soggetto non arriva al livello di astrazione necessaria per riuscire a determinare la soluzione del problema, sembra che abbia risposto a caso *"Secondo me una settimana":* la sua risoluzione, sia in forma orale sia scritta, non porta a tale risultato.

Secondo Smith, diSessa e Roscelle (1983/1994), le ragioni per cui gli studenti principianti appaiono meno astratti nel modo di ragionare sono in gran parte metodologiche. La struttura più profonda che percepiscono normalmente non viene considerata in una valutazione svolta dagli esperti. In un certo senso, i principianti sono stati coinvolti a realizzare dei compiti nei quali non sono del tutto competenti e di conseguenza rispondono alle domande in modo inadeguato alle loro reali competenze. Essi sono caratterizzati come vincolati dal loro vincolo verso il concreto, concepiscono solo gli aspetti direttamente percepibili delle situazioni. La posizione alternativa degli autori è che ci sono molti elementi astratti nelle conoscenze della matematica intuitiva delle persone; anche quando le situazioni sono difficili, ma ancora vicino alla loro competenza intuitiva, i principianti possono ragionare astrattamente usando una conoscenza simile alle organizzazioni mentali degli esperti.

Il soggetto ALI anche se non riuscito a rispondere alla domanda riguardante quanto tempo ci vuole per percorrere un chilometro, è riuscita a trovare un'altra situazione per trovare la soluzione. Tipicamente, la prima congettura degli studenti è che non conoscono o non sanno costruire un rapporto tra le variabili presenti nella situazione.

Dopo aver letto la domanda:

ALI: *In media quanto ci vuole per fare un chilometro? Di tempo? Quanto ci vuole?*

I: Secondo te?

ALI: *Oh Dio...*

I: Puoi anche assumere un valore approssimativo.

ALI: *Perché in realtà non riesco a calcolare, è una cosa che non riesco a calcolare perché… non ho mai capito come si faccia a capire quanto stanno i minuti ad ogni chilometro che faccio, quindi non ho mai capito come si fa.*

I: Ok, però per fare da casa tua alla scuola, quanti chilometri sono più o meno?

ALI: *Non ho la più pallida idea….*

I: Ma sono come cinque o cinquanta?

ALI: *Oh Dio, penso…. Non lo so….*

I: Da casa tua al centro di Bologna sono quanti chilometri più o meno? **[Lei abita in un comune di Bologna che dista 15km dal centro di Bologna].**

ALI: *Penso 50km.*

I: 50km?

ALI: *Non lo so, non ho un'unità di misura per riuscire a misurarlo, non so quanto faccia in chilometro. So che 1km sono mille metri ma non lo so quanto…*

I: Si, poi c'è anche la velocità in cui si gira…. Quindi in questo momento ALI, prova a fare il tuo ragionamento.

ALI: *Hai detto che l'Italia è grande cosi?*[72] [**fa riferimento a 2cm nella mappa]**

Il soggetto comincia a misurare la mappa con le dite, facendo suddivisioni ogni 2cm.

I: Cosa hai scoperto?

ALI: *Visto che l'Italia è all'incirca grande cosi* **[fai con le dite 2cm]***, ho pensato che all'incirca* **[la distanza]** *da fare da Bologna alla Puglia, io l'ho fatta in una notte e sono arrivata! Quindi tenendo conto che da Bologna fino alla fine dell'Italia ci sono almeno 4 ore – 5 , sono all'incirca quindi allora facciamo… io ero partita alle 9:00 di sera* **[si**

[72] Prima di cominciare l'attività l'intervistatore ha spiegato al soggetto che viene dal Brasile, un paese molto grande e gli ha chiesto se sapeva più o meno quante volte l'Italia ci sta dentro dal Brasile (in superficie). Le viene detto che l'Italia ci sta 29 volte dentro dal Brasile.

ferma un attimo a fare dei calcoli con le dite] *.. nove più cinque, …, dovrebbero essere circa 14 ore per farsi tutta l'Italia.*

I: Ok.

ALI: *E quindi tenendo conto che qua ci sono 10,5 Italia,* **[ride]** *facendo tutti i calcoli per misurare, incirca sono 10,5 per 14.* **[risolve nella calcolatrice e scrive nel foglio, figure 12 e 13]** *Sono 147. Tenendo conto che ci dovrebbero mettere 147 ore…. Credo Vagamente…. Non lo so.*

I: Ok, il problema ti ha chiesto quanti giorni sarebbero necessari per fare il viaggio proposto da Angela in macchina, in modo piacevole.

ALI: *Almeno 10 giorni.*

I: Almeno 10 giorni. Ma come hai fatto ad arrivare a 10 giorni?

ALI: *Allora ho fatto 147, che sono le ore … si dovrebbe fare diviso 24 che sono le ore in una giornata. Tenendo conto che 24 ore sono in una giornata diviso 147 dovrebbe darmi cioè, quanti giorni…. No, non credo….*

ALI: *Però si, è come se io facessi 147 diviso una giornata diviso quanti giorni mi da … era almeno all'incirca 6. Tenendo conto che magari un giorno piove, non hanno voglia di andare in macchina magari un giorno ha nevicato e non riescono ad andare troppo in la o magari ci sono problemi con la macchina e non riescono ad andare avanti e, anche tenendo conto che alla notte loro dormono , all'incirca 10 – 11 giorni.*

E continua scrivendo come si vede nella figura 12.

2) Quanti giorni sarebbero necessari per fare il viaggio proposto da Angela in macchina in modo piacevole?

Nota bene: considerando che il quesito non ha un'unica risposta, presenta il ragionamento che hai fatto tenendo conto di tutte le variabili.

$$\overbrace{10{,}5}^{\text{quante Italie ci sono nel percorso}} \cdot \underbrace{14}_{\text{ore di viaggio \cancel{per} attraversare l'Italia}} = 147 \left.\right\}\text{ore di viaggio}$$

10 giorni

$$147 : \underbrace{24}_{1gg} = \underbrace{6{,}125}_{\text{approssimo a } 6}$$

$$6 + \underbrace{4}_{\text{giorni aggiunti per le notti e guasti della macchina}} = 10\ gg$$

Figura 12 Risoluzione ALI - Seconda domanda dell'attività del Viaggio

Figura 13 Risoluzione ALI- attività del Viaggio

Il ragionamento intuitivo può trarre conclusioni inizialmente plausibili, perché la conoscenza intuitiva del soggetto non è così superficiale, né debole che non può sostenere in modo flessibile nuove concettualizzazioni di situazioni quotidiane. Questa non è certo la caratteristica di un sistema di conoscenza concreta (Smith et al., 1993/1994).

La difficoltà di stabilire il rapporto tempo - distanza è affrontata spesso dagli studenti. Quando imparano tali rapporti alle scuole medie non li costruiscono con un significato, tendendo a memorizzare meccanicamente la procedura.

Per **validare la soluzione** è necessario verificare e riflettere criticamente sul risultato ottenuto. Rivedere alcune parti del modello o ancora indagare fino in fondo il processo di modellizzazione valutando se le soluzioni si adattano o no alla situazione. Gli studenti in generale non validavano le soluzioni. Intanto, dopo aver trovato la soluzione, un soggetto ha osservato che il risultato ottenuto non sarebbe fattibile nella vita reale:

MON: *Ma non ci sono i calcoli.*

I: Sarebbe come faresti a convincere tuo padre…. quanti giorni sarebbero necessari? Pensi sempre di fare un viaggio piacevole.

Passati 3 minuti:

MON: *Non mi ricordo più in quanto tempo si fa un chilometro…. 1km 1 minuto.*

I: In macchina?

MON: *Si.*

I: Ti ricordi di qualche viaggio che hai fato?

MON: *Si, a 130km/h.. tipo 1km in mezzo minuto. 0,30 …..*

Passato 1 minuto:

I: Ma tuo padre guida più o meno a questa velocità?

MON: *Si.*

Passati 4 minuti di calcoli in silenzio, gli viene chiesto: Cosa fai?

MON*: 80 per 60 …. 1 minuto è 60 secondi. Allora …. 60 per 20. No…. si! 60 per 24…. 1440.*

I: Ok, vediamo se ho capito il tuo ragionamento.

MON: *Quindi devo fare.. un giorno per i minuti.. per 1440.*

I: Cosa significa il 1440?

MON: *Sono i minuti che servono per fare tutti i chilometri.*

I: Ok. E poi? Come sei arrivata a quella cifra lì? Cosa significa il 12? (Guardare la figura 12).

MON: *Il 12 significa ….ho sbagliato, sono 24. 2 giorni*[73] *e ….* [**per il totale del viaggio]**

Il soggetto ci si chiede*: è troppo poco? 24 ore su 24 se vai sempre..*

I: E secondo te sarebbe un viaggio piacevole?

MON: *No.*

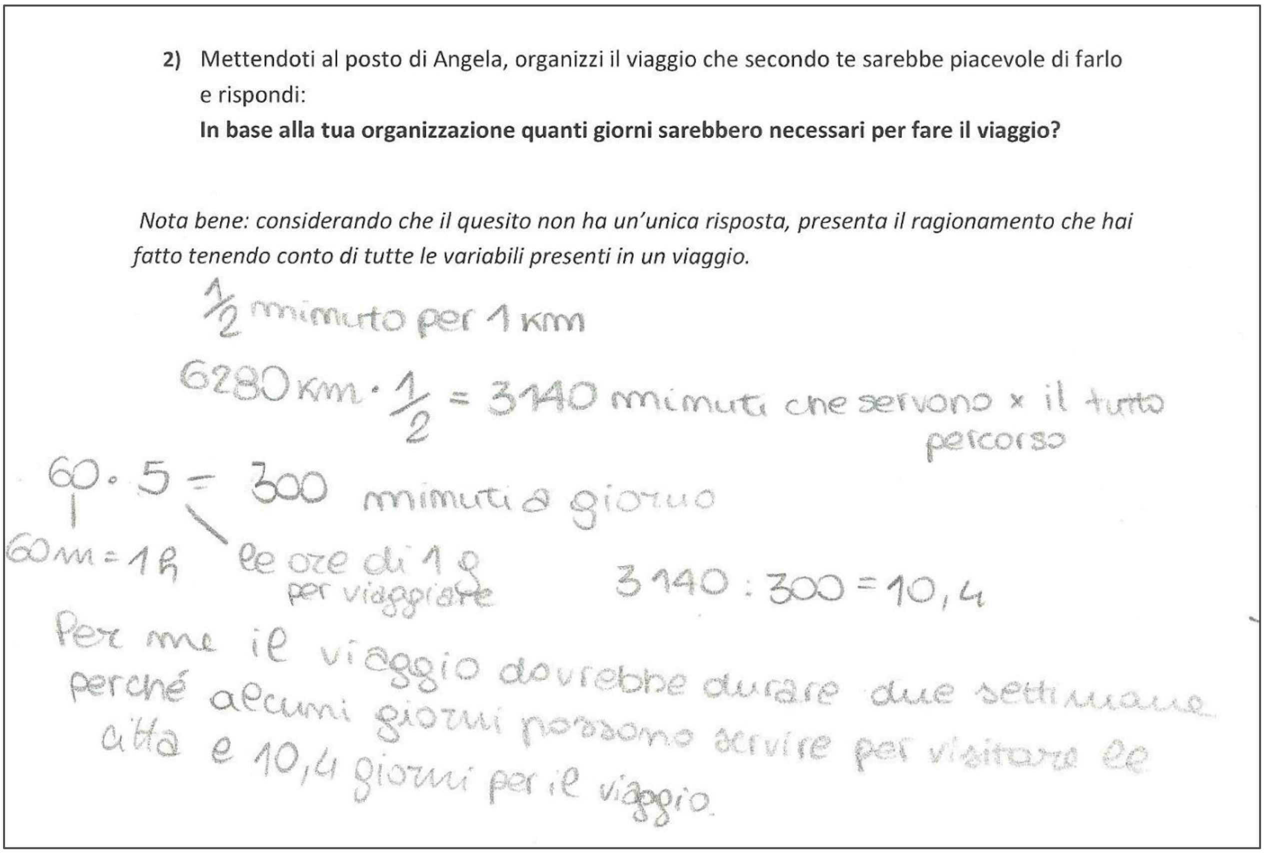
I: Allora cosa aggiungeresti, cambieresti….

MON: *Magari li facciamo per 5 ore al giorno* **[di viaggio].** *300 minuti…… i minuti che servono per tutti il viaggio… quindi 10,4 al giorno.*

I: Quindi per fare il viaggio, secondo te, quanti giorni sarebbero necessari?

MON: *Di più di 10,4 perché in una città si può anche fermare. Quindi in generale 2 settimane.*

[73] Analizzando insieme alla risoluzione scritta del soggetto, i 2 giorni per il totale del viaggio sono stati calcolati in base ai seguenti ragionamenti: 6280 (totale di km) divisi per 0,5 minuto (assume che 1 km = 30 secondi) = 3140 minuti. Prende i 3140 minuti totali per fare il viaggio e gli divide per il totale di minuti al giorno (3140/1440) arrivando al risultato di 2,18 giorni.



2) Mettendoti al posto di Angela, organizzi il viaggio che secondo te sarebbe piacevole di farlo e rispondi:
In base alla tua organizzazione quanti giorni sarebbero necessari per fare il viaggio?

Nota bene: considerando che il quesito non ha un'unica risposta, presenta il ragionamento che hai fatto tenendo conto di tutte le variabili presenti in un viaggio.

$\frac{1}{2}$ minuto per 1 km

6280 km $\cdot \frac{1}{2}$ = 3140 minuti che servono x il tutto percorso

60 · 5 = 300 minuti a giorno

60m = 1h le ore di 1 g per viaggiare

3140 : 300 = 10,4

Per me il viaggio dovrebbe durare due settimane perché alcuni giorni possono servire per visitare le città e 10,4 giorni per il viaggio.

Figura 14 Risoluzione MON - Seconda domanda dell'attività del Viaggio

MON prende in considerazione delle variabili corrette come tempo e chilometro però nel metterle in relazione non riflette sul contesto della situazione e trova come risposta 2 giorni. Nell'interpretare la soluzione trovata, il soggetto si accorge che non potrebbe essere valida nella realtà e torna al modello matematico, riorganizzando le relazioni assunte e prendendo in considerazione altri fattori come il tempo: "*24 ore su 24 se vai sempre*". Come ritiene Smith (et al., 1993/1994) i novizi sono disposti a cercare adeguati meccanismi di base, indipendente dalle rappresentazioni superficiali salienti.

Per determinare quanti giorni sarebbero necessari per fare il viaggio, il soggetto MAN assume delle stime sbagliate durante la risoluzione del problema: Il soggetto rilegge le informazioni, rimane in silenzio e sembra essere "un po' perso"…. Passati 2,5 minuti gli viene chiesto:

> I: Secondo te quanti giorni sono necessari per fare un viaggio cosi? Mettiti al posto di Angela e organizzalo.

MAN: *Una settimana. Perché sto facendo il paragone da Rio Gallegos a San Carlos è come da Bologna fino a Firenze più il tratto che va da San Carlos a Iquique, se si dice cosi… Fa in un giorno […] poi c'è da considerare che è in vacanza quindi ci va a fermare nelle città a visitare, quindi direi una settimana o poco più.*

[…]

I: Potresti leggere la tua risposta?

MAN: *Allora, da Rio Gallegos a San Carlos è circa quella Bologna – Firenze* [la distanza]. *Sommando le varie distanze tra le varie città si potrebbe concludere che Angela e il padre farebbero le vacanze tra una settimana circa. Non bisogna sottovalutare e scordarsi che viaggiando in auto si va più lento che in treno e in aereo e bisogna aggiungere le soste che fanno per la benzina e le visite nelle città che vogliono fare visto che sono in vacanze.*

I: Quindi se è circa una settimana, quanti chilometri si viaggiano al giorno?

MAN: *Al giorno….. [….] Circa…. Mille chilometri al giorno*.

I: Hai già fatto un viaggio che avete girato mille chilometri in un giorno?

MAN: *No, meno!*

I: Se si viaggia da mattina alla sera quanti chilometri si fanno più o meno?

MAN: *Va be, dipende di dove si deve arrivare perché se viaggi dalla mattina alla sera per arrivare in un posto vicino è logico che…. Oppure c'è da considerare che magari viaggi dalla mattina poi arrivi in quel posto e torni per la sera.*

I: Quindi pensi mille chilometri al giorno?

MAN: *Si possono fare*.

I: Hai fatto qualche viaggio questa state?

MAN: *Si, ho viaggiato molto.*

I: E quanti chilometri hai fatto?

MAN: *ahhhhhhh Sommando tutte?*

I: No, tipo ti sei spostato da Bologna a dove? Facciamo un esempio.

MAN: *Ho viaggiato da Bologna a Porretta che sono circa 100km, poi fino in Slovenia*.

I: Quanti chilometri ci sono più o meno?

MAN: *600km.*

I: E hai percorso questi 600km in un giorno o in due giorni?

MAN: *In tutta l'estate.*

Il soggetto riferisce che la tratta Rio Gallegos – San Carlos di Bariloche è paragonabile a quella Bologna – Firenze. Ma dai suoi calcoli si può capire che la distanza fra Rio Gallegos a San Carlos di Bariloche è circa 1200km; Bologna – Firenze distano circa 110km. MAN presenta una concezione divergente; una possibile interpretazione della relazione assunta è che la mappa presentata nell'attività "sembrava" un'altra mappa di sua conoscenza che riporta Bologna – Firenze. Il soggetto assume anche che si possono percorrere 1000km al giorno, nonostante sia consapevole che nella realtà non ha mai percorso questa distanza in giornata, utilizzando un valore di riferimento sbagliato e presentando quindi una concezione ingenua. In aggiunta non ha validato e neanche interpretato la sua soluzione.

La maggior parte delle spiegazioni dell’apprendimento come un processo di costruzione individuale forniscono un orientamento generale, ma sono inferiori ad una teoria dell'apprendimento di concetti matematici e scientifici di modesta complessità (Smith, 1990 citato in Smith et al., 1993/1994; Resnick, 1987).

I principi costruttivisti che illustrano gli autori permettono di chiarire il ruolo delle concezioni erronee, divergenti e ingenue di apprendimento e estendono il costruttivismo oltre la sua premessa epistemologica di base. Questo quadro sistema di conoscenza rende più facile capire come le concezioni inesperte possano svolgere ruoli produttivi in continua evoluzione della competenza, nonostante le imperfezioni e limiti (Smith et al., 1993/1994).

6.4 I ragionamenti più articolati della competenza

Gli studenti con un ragionamento più articolato, chiamati da *esperti* (Smith et al., 1993/1994) riguardo la competenza di modellizzazione, hanno presentato una varietà di strategie durante lo svolgimento delle attività. Si sottolinea che alcuni dei soggetti coinvolti hanno presentato ragionamenti diversi durante lo svolgimento delle attività: in certe situazioni vengono definiti come principianti e in altri come esperti, evidenziando che l'analisi considera il pensiero "esperto" o "principiante" e non il soggetto in sé.

In generale gli esperti utilizzano strumenti matematici specifici che sono adatti a particolari situazione matematiche.

6. 4.1 Attività del taxi

La prima domanda consiste nell'identificare quali sono i fattori che influenzano il valore di una corsa in taxi. Le informazioni fornite nella descrizione dell'attività devono essere interpretate per rispondere a tale questione.

Le competenze messe in gioco dagli studenti sono state: interpretare e capire il problema; decodificare la situazione; selezionare le informazioni rilevanti. Mettere in atto tali competenze favorisce la costruzione del modello reale: si tratta di riorganizzare i dati, identificando le variabili reali rilevanti nella situazione.

I fattori che influenzano il valore della corsa sono presentati in modo implicito ed esplicito nell'attività, l'interpretazione delle informazioni è una condizione fondamentale per identificarli. La decodifica del problema condiziona la comprensione della situazione, sia nell'identificazione delle variabili in gioco sia nel riconoscimento delle loro relazioni. Nell'attività proposta si osservano i diversi fattori che influenzano il valore di una corsa in taxi. L'identificazione parziale di tali fattori è stata osservata spesso nelle risoluzioni, se il problema non viene interpretato nei dettagli, la decodifica della situazione diventa confusa: Non si riescono ad identificare le grandezze e a selezionare le informazioni rilevanti.

È interessante osservare come i soggetti arrivino a tali identificazioni, SIM e MON hanno individuato una quantità diversa di variabili:

I: Cosa significa la quota fissa di spostamento?

SIM: *Che la quota fissa di spostamento è, diciamo un costo che i tassisti aggiungono alla quota dei chilometri percorsi.*

I: Bravo, quindi quando si sale sul taxi c'è già scritto la cifra, dipende anche…

SIM: *Dai giorni, dall'orario.*

I: E hai capito cosa significa la chiamata?

SIM: *La chiamata radio taxi non so cosa sia.*

I: Si può prendere il taxi alla fermata o si deve chiamarlo. Se si chiama costa un po' di più. Non lo so se sapevi?

SIM: *No, quello no, sapevo che si poteva chiamare ma non immaginavo che costasse.*

I: Questi sono gli importi massimi che in un giorno feriale possono aggiungere €5,30, in un giorno festivo massimo €7,00 e poi in un giorno festivo massimo €7,90.

Passati 2 minuti: Ok, quali sono i fattori che influiscono?

SIM: *I fattori che influiscono sono l'orario e il giorno della corsa, l'orario inteso come giorno o notte, invece il giorno della corsa se è feriale o festivo e si desidera chiamare il taxi a casa la chiamata radio taxi e … devo aggiungere la quota fissa di spostamento.*

I: E quando si fa una corsa in taxi c'è qualche altro fattore che dobbiamo prendere in considerazione che cambia il valore della corsa?

SIM: *Forse il traffico perché il tassametro conta anche il tempo, è il rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato, se c'è traffico il costo sarà maggiore.*

SIM identifica le informazioni rilevanti e riconosce le grandezze, dopo aver presentato la sua risposta gli viene chiesto se c'era ancora qualcosa da considerare in una corsa in taxi, lui presenta una variabile molto interessante: "*il rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato",* aggiungendo che "*se c'è traffico il costo sarà maggiore*".

Come sostengono Smith, diSessa e Roschelle (1993/1994) studenti esperti generalmente organizzano il proprio ragionamento considerando tutte le possibilità immaginabili,

MON riesce a cogliere i fattori giorno e orario.

Passati 2,5 minuti di lettura in silenzio gli viene chiesto: Qual è la prima domanda?

MON: **[Legge]***: "Quali sono i fattori che influiscono nel valore della corsa"?*

I: E secondo te quali sono?

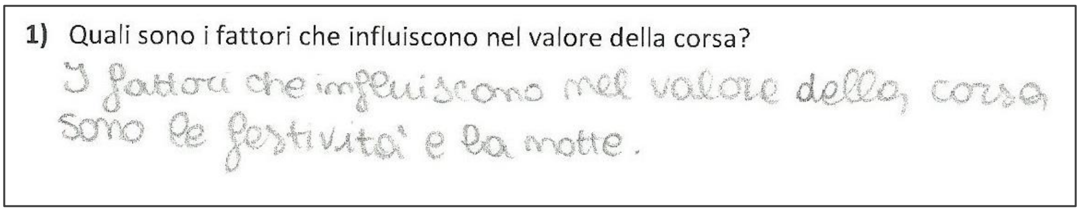
MON: *Le festività e la notte.*

I: Ok, hai capito la tabella? Non so se hai già visto questa situazione, cosa significa la quota fissa?

MON: *Di spostamento è quella .. normale.*

I: Si, quando entri nel taxi c'è già quella cifra lì. Poi se devi fare una chiamata devi aggiungere…

Il soggetto scrive come si vede nella figura 15:


1) Quali sono i fattori che influiscono nel valore della corsa?

I fattori che influiscono nel valore della corsa sono le festività e la notte.

Figura 15 Risoluzione MON - attività del TAXI

Facendo sempre riferimento alle informazioni fornite all'inizio dell'attività, la seconda domanda presenta una situazione particolare di una corsa in taxi: fornisce delle informazioni per scoprire quanto costa la tariffa chilometrica. Le competenze specifiche in gioco sono: selezionare le informazioni rilevanti; costruire relazioni tra le variabili; scegliere l'appropriata notazione matematica e rappresentare la situazione della corsa; impiegare le conoscenze matematiche richieste per risolvere il problema; interpretare i risultati matematici ottenuti nel contesto reale.

Gli studenti in generale, non hanno avuto grandi difficoltà nel risolvere tale domanda. L'identificazione corretta delle variabili del problema è un requisito per trovare il valore del chilometro. Come precedentemente osservato, SIM ha individuato tutte le variabili e di conseguenza è riuscito ad arrivare al prezzo di ogni chilometro; MON ha riconosciuto solo due variabili e non riesce a trovare il valore corretto, come si vede nella figura 15.

SIM: ... *€1,27.*

I: Che ragionamento hai fatto per arrivare a quella cifra lì?

SIM: *Allora se per il viaggio ha pagato €15,70 bisogna sottrarre la quota fissa di €3,00 e quindi diventa €12,70 che è la quota che deve pagare per percorrere i 10km, poi per trovare quanto paga al chilometro bisogna fare diviso 10.*

Le competenze messe in atto si riferiscono all'interpretazione del problema reale e alle conoscenze matematiche. SIM ha ricostruito le relazioni esistenti tra le variabili del problema, ha applicato una semplice procedura algebrica e ha trovato il valore pagato per ogni chilometro percorso.

Il secondo item della domanda due richiede la costruzione di un'equazione matematica che rappresenta il costo del servizio presentato, indipendentemente della distanza percorsa. Il prezzo del chilometro percorso, trovato nell'item a della domanda, deve essere utilizzato come un fattore conosciuto. Quando il soggetto non riconosce o non identifica le quantità che influiscono nella situazione, competenza necessaria per tale interpretazione, non riesce a trovare il valore indagato.

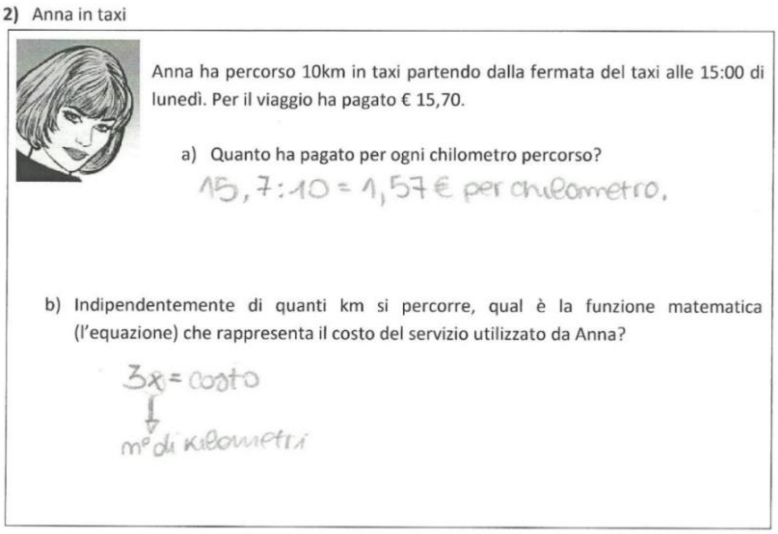
Gli studenti in generale hanno avuto delle difficoltà nel creare l'equazione matematica che rappresenta la situazione presentata. Competenze per stabilire un modello matematico a partire dal modello reale sono richieste in questa tappa: è necessario identificare le quantità rilevanti e le loro relazioni, semplificarle, scegliere le notazioni matematiche appropriate e rappresentare la situazione in forma algebrica.

Si osservano le risoluzioni di MON e MAR. MON quando legge la seconda domanda dell'attività:

> MON: *Oh Dio! I problemi……*
>
> **Il soggetto leggeva l'item b della seconda domanda. Passati 2 minuti in silenzio:** Se mi vuoi fare qualche domanda… non c'è solo un modo di scrivere l'equazione, dipende di quello che prendi in considerazione.
>
> MON: *Non lo so….*
>
> I: Ti ricordi cosa significa un'equazione in matematica?
>
> MON: *Si, si! Ma qui non lo so!*
>
> I: Leggi un'altra volta la domanda.
>
> MON: *"Indipendente di quanti chilometri si percorre qual è la funzione matematica che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna"?*
>
> I: Vuoi provare a scrivere qualcosa?
>
> MON: *Ma devo scrivere anche quello?* **[punta per l'item a del esercizio].**
>
> **Passati 2 minuti in silenzio…**
>
> MON: *No, non lo so!*
>
> I: Ok, possiamo saltare e poi se vuoi tornare non è un problema.
>
> **Alla fine dell'attività il soggetto ritorna all'item b della seconda domanda e scrive quello che si vede nella figura 2.**

I: Cosa significa la x?

MON: *È il numero di chilometri percorsi.*



2) Anna in taxi

Anna ha percorso 10km in taxi partendo dalla fermata del taxi alle 15:00 di lunedì. Per il viaggio ha pagato € 15,70.

a) Quanto ha pagato per ogni chilometro percorso?

15,7:10 = 1,57 € per chilometro.

b) Indipendentemente di quanti km si percorre, qual è la funzione matematica (l'equazione) che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna?

3x = costo

n° di kilometri

Figura 16 Risoluzione di MON - attività del Taxi

La risoluzione di MAR:

MAR: *"Indipendentemente da quanti km si percorrono qual è la funzione matematica, l'equazione che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna?"*

MAR: *Allora, c'è una x.*

I: Ok. **Passato 1 minuto**: Cosa significa la x?

MAR*: È l'incognita.*

E il soggetto si mette a cancellare la x.

I: Ok, va bene in un'equazione c'è sempre una incognita, giusto.

MAR: *Sì?*

Dopo un po' di tempo, MAR scrive l'equazione che rappresenta il costo come si vede nella figura 17.

2) Anna in taxi

Anna ha percorso 10km in taxi partendo dalla fermata del taxi alle 15:00 di lunedì. Per il viaggio ha pagato € 15,70.

a) Quanto ha pagato per ogni chilometro percorso?

15,70 : 10 = 1,57 €

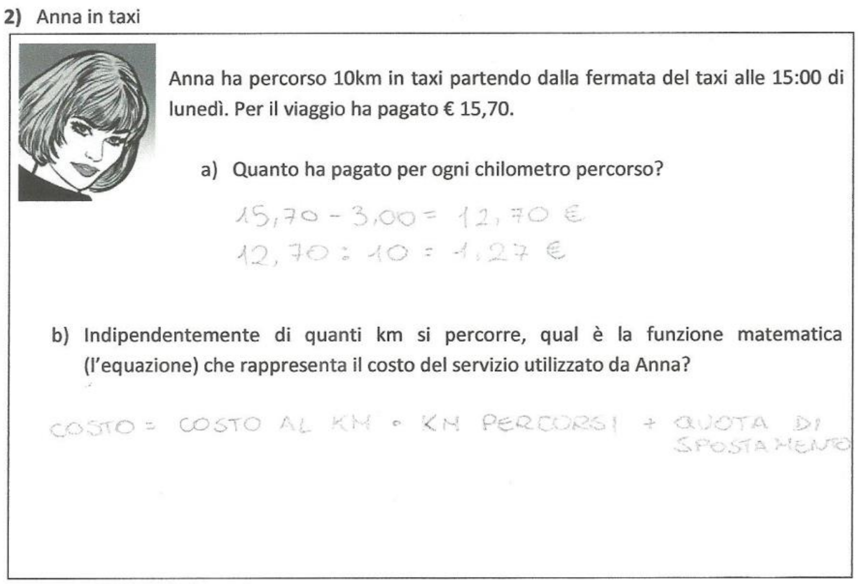
b) Indipendentemente di quanti km si percorre, qual è la funzione matematica (l'equazione) che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna?

QUOTA FISSA + KILOMETRI

Figura 17 Risoluzione di MAR - attività del taxi

La menzione della ricercatrice *"in un'equazione c'è sempre una incognita, giusto*" non ha avuto dei significati per il soggetto, portandolo a scrivere il suo ragionamento in forma letterale. Per organizzare il modello matematico MAR prende in considerazione le stesse variabili di MON (figura 16): *quota fissa* e *chilometri percorsi*. Anche se l'equazione non è corretta in entrambe le risoluzioni, si osserva come sono state rappresentate diversamente: nell'organizzare il modello matematico MON assume come variabili di ingresso la quota fissa e l'incognita x, che rappresenta il numero di chilometri, ma ha assunto la moltiplicazione come relazione fra le variabili per generare il costo.

I soggetti in generale hanno avuto delle difficoltà nello scrivere il procedimento in linguaggio algebrico per ottenere il modello matematico. I soggetti SIM e GUS hanno assunto le stesse variabili per costruire il modello, ma lo hanno rappresentato in modo diverso:



2) Anna in taxi

Anna ha percorso 10km in taxi partendo dalla fermata del taxi alle 15:00 di lunedì. Per il viaggio ha pagato € 15,70.

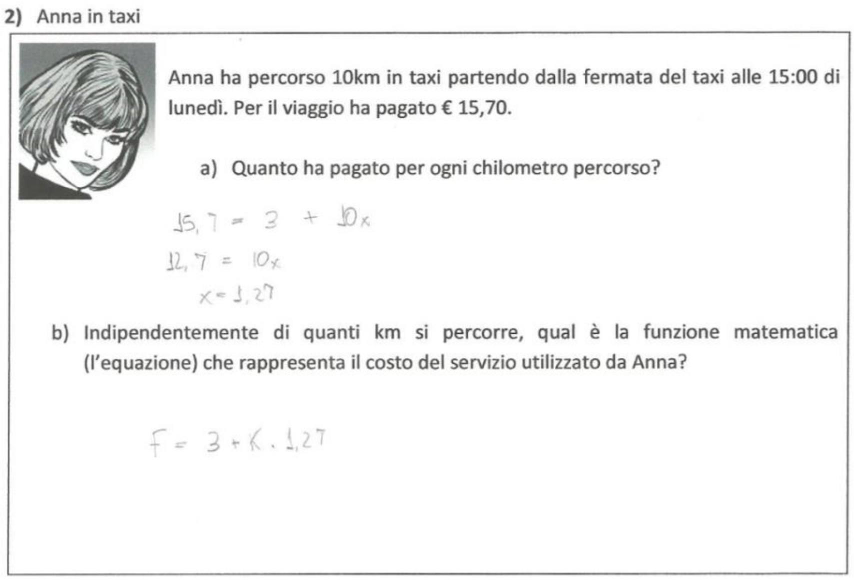
a) Quanto ha pagato per ogni chilometro percorso?

15,70 - 3,00 = 12,70 €
12,70 : 10 = 1,27 €

b) Indipendentemente di quanti km si percorre, qual è la funzione matematica (l'equazione) che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna?

COSTO = COSTO AL KM · KM PERCORSI + QUOTA DI SPOSTAMENTO

Figura 18 Risoluzione di SIM - attività del Taxi



2) Anna in taxi

Anna ha percorso 10km in taxi partendo dalla fermata del taxi alle 15:00 di lunedì. Per il viaggio ha pagato € 15,70.

a) Quanto ha pagato per ogni chilometro percorso?

$15,7 = 3 + 10x$
$12,7 = 10x$
$x = 1,27$

b) Indipendentemente di quanti km si percorre, qual è la funzione matematica (l'equazione) che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna?

$f = 3 + K \cdot 1,27$

Figura 19 - Risoluzione di GUS - attività del Taxi

Guardando la risoluzione di GUS si osserva come abbia operato le competenze necessarie per tale risoluzione, oltre ad avere una buona base di conoscenze algebriche. Il soggetto SIM scrive il suo ragionamento a parole, intanto identifica le relazioni esistenti fra le variabili e riesce ad interpretare il risultato matematico, come si vede nella figura 18.

Nel passaggio di una tappa di modellizzazione all'altra, gli studenti sviluppano diverse competenze. Nell'item b, la costruzione del modello che rappresenta il costo, gli studenti, partendo da un problema reale, devono acquisire la competenza di, formulare un problema matematico; la competenza di definire un modello per descrivere la situazione inizialmente proposta. In questa tappa gli studenti hanno l'opportunità di sviluppare competenze come: cercare ed analizzare informazioni, usare differenti forme di rappresentazioni, formulare e giustificare le loro assunzioni.

Facendo sempre riferimento alle informazioni fornite all'inizio dell'attività, la terza e ultima domanda chiede di identificare quali sono i dati costanti e i dati variabili in una corsa in taxi.

Le competenze richieste sono simili alla prima domanda dell'attività: decodificare la situazione; formulare ipotesi per il problema e semplificare la situazione; riconoscere grandezze che influenzano la situazione, assegnarle un nome e identificare le variabili chiave; identificare le relazioni tra le variabili; cercare informazioni disponibili e differenziare informazioni rilevanti ed irrilevanti.

Gli studenti hanno avuto difficoltà nell'individuare le variabili dipendenti e indipendenti e nella creazione di relazioni fra loro. Si osserva una grande divergenza nelle risposte fornite dagli studenti; nella tabella sottostante si presenta una sintesi dei dati costanti e variabili presi in considerazione dai soggetti indagati per il problema del taxi:

Tabella 3 **-** Dati costanti e variabili emersi nelle spiegazioni dei soggetti riguardo la corsa in taxi

	soggetti	**ALI**	**MAN**	**MON**	**ANN**	**MAR**	**LUC**	**SIM**	**GUS**	**ROT**
DATI COSTANTI	Prezzo al km				X	X				X
	Quota fissa di spostamento	X	X	X		X	X	X	X	X
	Partenza dalla fermata o chiamata	X	X	X		X	X		X	
	Giorno	X		X			X	X		
	Orario	X		X						

	Distanza percorsa	X	X	X		X	X	X	X	
	Tempo impiegato					X		X		X
DATI VARIABILI	Partenza dalla fermata o chiamata				X					
	Orario	X	X		X			X		
	Giorno	X	X		X					
	Prezzo al km							X		
	Prezzo totale	X		X			X	X	X	
	Supplementi							X		X
	Numero di persone		X							

Una possibile interpretazione per la varietà delle risposte può essere l'incomprensibilità dell'attività proposta. Nessuno degli intervistati è riuscito ad elencare correttamente i dati costanti e variabili considerati in una corsa in taxi. Il frammento dell'intervista con SIM riporta un esempio di come il questionario sia stato eseguito.

Il soggetto comincia a rispondere alla domanda 3, dopo la aver letto chiede:

SIM: *Dati costanti?*

I: Sono quelli che sono sempre uguali, che non cambiano.

SIM: *È si, solo che non so cosa potrei mettere.*

I: Cosa pensavi di scrivere?

SIM: *Boh, quota fissa di spostamento ma varia da giorni feriali a festivi, quindi non so se è costante.*

I: Allora fai cosi, scrivi quota fissa e se vuoi puoi aggiungere qualche informazione fra parentesi.

SIM: *Ok.*

Passati quasi 2 minuti.

SIM: *Non mi viene in mente più niente.*

I: Ok, cosa hai scritto per i dati variabili?

SIM: *I chilometri percorsi, il tempo impiegato e l'orario della costa.*

I: Ok, e per i dati costanti?

SIM: *La quota fissa per i giorni feriali e la quota fissa per i giorni festivi*.

I: Ok, poi sappiamo già il valore del chilometro. Sarebbe un dato costante o variabile secondo te?

SIM*: Il valore del chilometro è costante..... dipende…. Variabile…*

I: Il valore di ogni chilometro? Come fai a sapere?

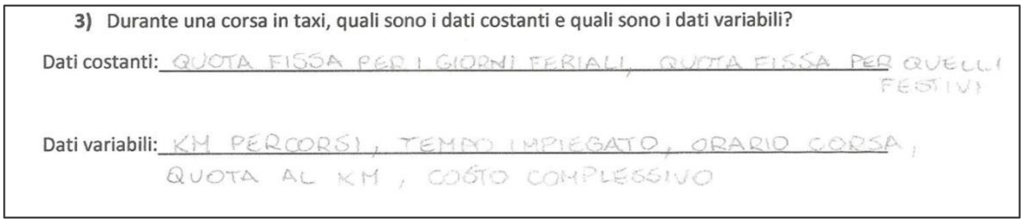
SIM: *Ah, è vero quindi è costante.*

I: E ti chiedo anche il perché?

SIM: *Od dio... allora dipende da taxi a taxi.*

I: E in questa situazione che stai risolvendo? C'è qualche informazione che ti può aiutare a giustificare?

SIM: *Poi ho anche il costo complessivo che può variare, poi qui non mi è venuto niente in mente.*



3) Durante una corsa in taxi, quali sono i dati costanti e quali sono i dati variabili?

Dati costanti: QUOTA FISSA PER I GIORNI FERIALI, QUOTA FISSA PER QUELLI FESTIVI

Dati variabili: KM PERCORSI, TEMPO IMPIEGATO, ORARIO CORSA, QUOTA AL KM, COSTO COMPLESSIVO

Figura 20 Risoluzione SIM - terza domanda dell'attività del Taxi

6.4.2 Attività della Statua

Come precedentemente descritto, l'attività della Statua si riferisce secondo Herget e Richter (2012) ai "Pictorial Problems". Quando si risolvono dei problemi matematici, è possibile elencare alcuni passaggi fondamentali inerenti al processo di ricerca di soluzioni a questo tipo di problema (Herget, 2002; Herget & Richter, 2012):

- La situazione reale rimane il punto centrale dell'attività fino al raggiungimento di una soluzione - i problemi non esistono soltanto come un disperato tentativo di sovrapporre un problema del mondo reale alle tecniche analitiche precedentemente apprese.
- I fatti presentati in forma di immagine sono analizzati; i punti che matematicamente sono rilevanti e importanti vengono filtrati; le informazioni irrilevanti sono messe da parte.

- Spesso un oggetto appropriato viene scelto come punto di riferimento o parametro delle dimensioni da scoprire e per effettuare il processo di soluzione.
- Le foto sono utilizzate per prendere le misure interessanti; raccogliere le proprie misure aiuta a diventare l'alunno consapevole dell'inevitabile elemento di incertezza fornita dalle approssimazioni.
- La conoscenza comune degli studenti è attivata: quanto è alta una persona normale, un piano medio, una finestra media, la dimensione di una palla da tennis, un pallone da calcio, una porta, un aereo, un maglione , ecc.
- Il rapporto tra il criterio scelto e le misure ottenute saranno definite e raffinate matematicamente.
- Il modello matematico e la metodologia adeguati per la soluzione del problema emergeranno durante il processo, invece di consegnare agli studenti le idee previamente concepite; loro possono ricercare e scegliere il modello che ritengono più adatto.
- L'intero processo è guidato da considerazioni matematiche fondamentali, strategie e concetti che rendono possibile una soluzione.
- Durante tutto il processo emergono altre domande o idee, matematiche o meno, che possono essere estese se il tempo lo consente.
- Alla fine, l'accento dovrebbe essere sulla buona scrittura matematica, sulla riflessione accurata e sulla presentazione convincente dei risultati.

Per l'attività della statua l'approccio più convenzionale è quello che prevede l'utilizzo di un oggetto nell'immagine come stimatore o metro, ad esempio, i bambini che sono vicini o attaccati alla statua. Per risolvere la situazione data, quale parametro matematico potrebbe essere utilizzato? Questa sarebbe un'indagine iniziale per approfondire la situazione reale. Si osserva una discrepanza nei parametri assunti dai soggetti. Di conseguenza, in base ai parametri presi in considerazione, ci sono modi diversi di rispondere alla domanda.

I bambini presenti nella foto sono un punto di partenza pertinente; alcuni soggetti se ne accorgono già all'inizio dell'attività, come è il caso di LUC:

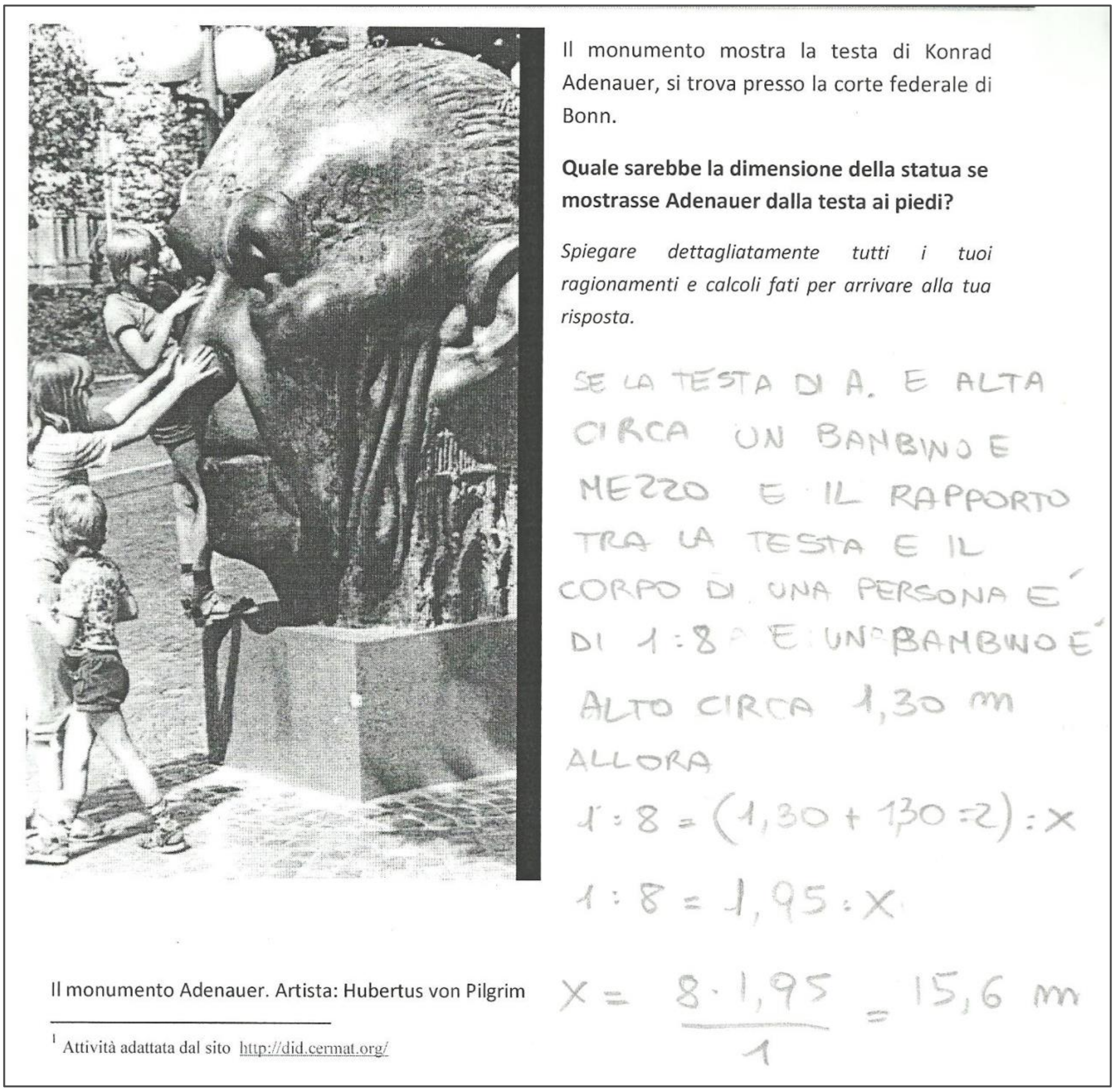
I: Per la seconda attività abbiamo questo problema e anche un altro foglio se hai bisogno di più spazio o se devi fare qualche altro calcolo.

LUC: *Noi facciamo riferimento al bambino?*

I: Se vuoi si!

LUC: *Ah!*

Avere dei risultati matematicamente diversi ma corretti è una situazione piuttosto insolita nelle lezioni di matematica (Herget, 2002). Infatti, nel confrontare la risoluzione di LUC e di ANN si osservano dei risultati numerici diversi, nonostante le procedure di risoluzioni siano giuste:



Il monumento mostra la testa di Konrad Adenauer, si trova presso la corte federale di Bonn.

Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi?

Spiegare dettagliatamente tutti i tuoi ragionamenti e calcoli fati per arrivare alla tua risposta.

SE LA TESTA DI A. E ALTA CIRCA UN BANBINO E MEZZO E IL RAPPORTO TRA LA TESTA E IL CORPO DI UNA PERSONA E' DI 1:8 E UN BANBINO E' ALTO CIRCA 1,30 m ALLORA

$1:8=(1,30+1,30:2):x$

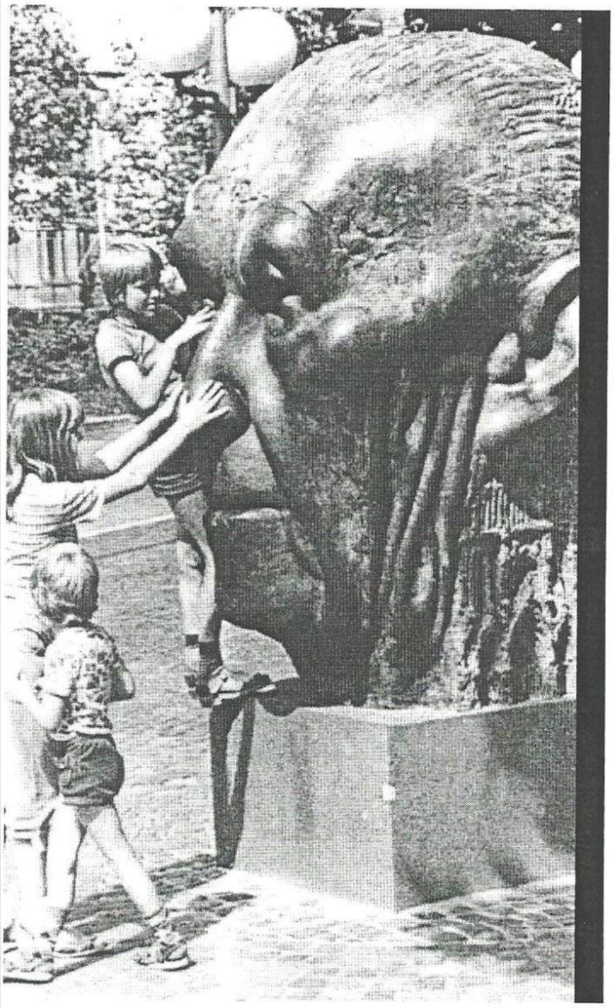
$1:8=1,95:x$

$x=\frac{8\cdot1,95}{1}=15,6\ m$

Il monumento Adenauer. Artista: Hubertus von Pilgrim

1 Attività adattata dal sito http://did.cermat.org/

Figura 21 Risoluzione del soggetto LUC – Attività della Statua



Il monumento mostra la testa di Konrad Adenauer, si trova presso la corte federale di Bonn.

Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi?

Spiegare dettagliatamente tutti i tuoi ragionamenti e calcoli fati per arrivare alla tua risposta.

Im scienze ho studiato che il corpo di una persona è 8 volte la sua testa. In norma i bambini simili a quelli vicino alla statua sono alti 1,50 m e vedo che manca un pò di spazio tra la fine della testa e il bambino. Nelle statue che ho studiato, in genere, l'altezza che si raggiunge per queste statue è 2 m. Quindi io moltiplicherei 2m, che è la testa, x 8, che sarebbe la grandezza del corpo umano. Quindi secondo me la statua sarebbe alta 16 m.

Figura 22 Risoluzione del soggetto ANN – Attività della Statua

Infatti, entrambe le risposte sono corrette in funzione di inevitabili imprecisioni. LUC ha assunto che l'altezza del bambino attaccato alla statua misuri circa 1,30 metri e ANN ha ipotizzato 1,50 metri. La proporzione fra testa e corpo di una persona è stata assunta da ambedue: la testa equivale a 1/8 del corpo.

LUC afferma che la testa della statua presentata "*è alta circa un bambino e mezzo"* e prosegue con i suoi calcoli di proporzioni, arrivando all'altezza totale di 15,6 metri. Le competenze di far emergere le conoscenze già imparate in altre discipline è di fondamentale importanza per lo svolgimento del processo di modellizzazione: ANN per scoprire quanto è alta la testa nella realtà fa delle relazioni con quello che ha imparato in scienze e arte:

ANN: I*n scienze ho studiato che il corpo di una persona è 8 volte la sua testa.*[…] *Poi mi sono accorta che mancano altri … un altro po' di spazio tra il bambino e la testa.*

[…]

ANN: *Visto che ho fatto storia dell'arte e ho studiato molte statue di solito le statue di questa dimensione, di questa importanza arrivano a 2 metri.*

Il risultato presentato da ANN è che la statua sarebbe alta 16 metri. Herget e Richter (2012) richiamano l'attenzione sul fatto che avere delle risposte diverse ma entrambe corrette è una situazione che certamente richiederà del tempo per abituarsi, sia da parte degli insegnanti che degli alunni.

Il concetto di *quantità* implica inoltre l'avere un'idea delle grandezze e delle stime. Per poter verificare la ragionevolezza di risultati numerici occorre avere un'ampia conoscenza delle quantità, ossia, delle misure nel mondo reale. Che età può avere il bambino nella foto? Quanto è alto un bambino? È molto importante saper effettuare rapidamente stime approssimative dell'ordine di grandezza. Fey (1990, tratto da OCDE, 2006) afferma che per raggiungere l'abilità di fare dei calcoli mentali, ad esempio essere capaci di dire che 33 x 613 fa circa 20.000, "non serve allenarsi a lungo a eseguire mentalmente i tradizionali algoritmi scritti, ma saper applicare in modo intelligente e flessibile il sistema posizionale delle cifre e l'aritmetica a una cifra" (p. 105).

Evidenziando delle competenze presentate senza valutare se la risposta sia corretta o sbagliata abbiamo un interessante esempio svolto da ROT:

ROT*: Ho pensato che tipo, se mettiamo… se va molto per approssimazione. Il bambino è alto circa 1,40m ed è di questa lunghezza qui. La testa è più grande…* [**misura con le ditte nell'immagine]…** *il bambino è circa un tot . Adesso non so se fare la proporzione ma ho pensato che venisse tipo …. Che se questo equivale a 1,40* **[bambino]** *questo equivale a tipo 2,50m* **[testa]** *una roba del genere.*

ROT: *Poi ho pensato, se il bambino, se la testa è alta soltanto questo qui* **[punta la misura con le ditte nell'immagine],** *questo pezzettino qui ed è circa … mettiamo caso una ragazzina normale 15 cm – 20 cm, vuol dire che è tipo 1/7 dell'altezza quindi vuol dire che una testa dovrebbe essere un settimo dell'altezza…*

ROT*: Allora vuol dire che moltiplicando per 7 i 2,50m è un'altezza che , circa, andava bene.*

I: E sei arrivato quanto sarebbe?

ROT: *Facendo questo calcolo qui per 7 sarebbe… circa 17,5 metri.*

Il risultato finale trovato da ROT è coerente con il suo ragionamento: ha stimato un rapporto testa-corpo, non esattamente corretto ma si avvicina a quello reale, e che alla fine gli ha dato supporto per la risoluzione. Una competenza non significa l'esattezza di un risultato ma come mettere in pratica le proprie conoscenze.

Come esperti, i soggetti percepiscono la necessità di principi esplicativi profondi di descrizioni superficiali della struttura considerata; una risorsa generale utilizzata da loro è stata il "punto di riferimento" assunto come parametro iniziale.

Il contenuto e le abilità necessarie per lo svolgimento dell'attività si riferiscono alle conoscenze sviluppate nelle scuole medie. Infatti, guardando Le Indicazioni nazionali per il curricolo delle competenze i contenuti matematici affrontati nei problemi sono stati svolti in anni precedenti a quelli in cui si trovano i soggetti coinvolti nella ricerca.

Secondo Herget e Richter (2012) esercizi come questi sono indispensabili per l'introduzione di competenze pertinenti alla modellizzazione matematica, in cui l'enfasi non è su procedure algoritmiche ma piuttosto sulla capacità di ordine superiore di traduzione, di interpretazione e di valutazione del problema reale in termini del modello matematico e le sue soluzioni .

In problemi come questo, la matematica dimostrerebbe di essere una materia molto diversa, non dovendo essere ristretta alla ricerca della "soluzione giusta". Ci sono diverse possibilità per ogni singolo passo compiuto nel tentativo di trovare una soluzione al problema in questione.

6.4.3 Attività del Viaggio

L'attività del viaggio presenta una mappa con un percorso predeterminato. La situazione espone il desiderio di Angela di fare il viaggio individuato nella cartina. La ragazza deve convincere suo padre che tale viaggio si potrebbe fare, lui guarda la mappa e dice: "*Il viaggio mi sembra molto interessante ma la lunghezza sarebbe come fare un giro attorno alla circonferenza della terra*!"

Lo studente deve calcolare la distanza reale del percorso indicato sulla carta utilizzando la scala presentata nella mappa per rispondere alla prima domanda: ***Come potrebbe ribattere Angela al commento di suo padre? Spieghi chi ha ragione ed il perché.*** *(Presenta tutti i calcoli per giustificare la tua soluzione).*

La seconda domanda dell'attività è: ***Mettendoti al posto di Angela, organizzi il viaggio che secondo te sarebbe piacevole di farlo e rispondi: In base alla tua organizzazione quanti giorni sarebbero necessari per fare il viaggio?***

Le competenze necessarie per lo svolgimento di quest'attività riguardano:

- identificare rappresentazioni algebriche che esprimono una relazione fra grandezze;
- interpretare mappe che rappresentano delle relazioni fra grandezze;
- utilizzare conoscenze algebriche e geometriche come risorse per la costruzione dell'argomentazione;
- risolvere problemi e valutare proposte di intervenzioni nella realtà utilizzando delle conoscenze algebriche;
- descrivere e interpretare un fenomeno in termini quantitativi.

A parte l'interpretazione iniziale del concetto di scala, le difficoltà affrontate dagli studenti durante lo svolgimento dell'attività del viaggio riguardano: lettura scorretta del numero cardinale; errato cambiamento delle unità di misura; creazione del modello matematico e collegamento del risultato al mondo reale.

Una volta creato l'algoritmo, gli studenti in generale hanno avuto facilità nel risolverlo.

<u>Lettura scorretta:</u>

Gran parte degli studenti ha fatto confusione nel leggere correttamente il numero 35.000.000 (trentacinque milioni), nonostante la pronuncia non corretta del numero, sono riusciti ad interpretare la quantità cardinale rappresentata:

> I: Ma come sei arrivato a capire che la lunghezza è quella lì?
>
> ROT: *Perché intanto ho misurato la lunghezza dei vari tratti di strada che ci sono sulla cartina.*
>
> I: Certo.

ROT*: Che fa 18,5cm. Se la scala è 1:35 mila vuol dire che lei, cioè, che 1cm corrisponde a 35 milioni di centimetri.*

ALI: *Ah, ho capito! è il rapporto tra la distanza sulla mappa e la distanza reale.*

I: Ok, distanza sulla mappa **[indicato nella mappa]** e la distanza reale... quindi vuol dire che …

ALI: *Che ogni centimetro sono 35.000 chilometri. Cioè, centimetri.*

ROT si è accorto subito della sua lettura sbagliata "*1:35 mila"* e nello stesso momento riesce a dirla correttamente, ALI ha fatto la lettura non corretta, intanto ha svolto dei calcoli correttamente. Il concetto di numero e le sue diverse rappresentazioni sono una componente essenziale del ragionamento quantitativo, aspetto importante del confrontarsi con le *quantità*[74] (OECD, 2006).

Secondo Dossey (1997, tratto da OECD, 2006) usando in modo adeguato il concetto di numero, uno studente può risolvere problemi che richiedono un ragionamento diretto, inverso e associato con la proporzionalità: è in grado di calcolare i tassi di variazione e di fornire una spiegazione logica riguardo alla selezione di dati e al livello di precisione richiesto dalle operazioni e dai modelli utilizzati; può esaminare algoritmi alternativi, dimostrando perché funzionino o in quali casi falliscano. Può inoltre sviluppare modelli che implichino operazioni e relazioni tra operazioni per risolvere problemi che riguardano dati del mondo reale e relazioni numeriche che richiedono operazioni e confronti.

<u>Misurazione della tratta e Rapporto con la scala</u>

Quando si misura una grandezza si scoprono modi di usare i numeri che sono molto importanti nella vita quotidiana: la lunghezza, l'area, il volume, l'altezza, la velocità, la massa, la pressione atmosferica, il valore del denaro sono tutte misure utilizzate per quantificare (OECD, 2006, p. 104).

[74] Modelli di *spazio e forma*, di *cambiamento e relazioni e* di *quantità* rappresentano concetti centrali ed essenziali in qualsiasi descrizione della matematica e sono il nucleo di tutti i curricoli a prescindere dall'ordine e grado.

La comprensione del concetto di *quantità* implica il fato di avere un'idea delle grandezze e delle stime. Per poter verificare la ragionevolezza di risultati numerici occorre avere un'ampia conoscenza delle quantità, cioè delle misure, nel mondo reale (OECD, 2006). È molto importante saper effettuare rapidamente stime approssimative dell'ordine di grandezza: la velocità massima di un'automobile è di 6,50 o 400 km/h? La popolazione mondiale è di 6 milioni, 600 milioni, 6 miliardi o 60 miliardi? Quanto è alta una torre? Quanto è largo un fiume? Occorre essere capaci di dire che 33 x 613 fa circa 20.000: per raggiungere tale abilità non serve allenarsi a lungo a eseguire mentalmente i tradizionali algoritmi scritti, ma saper applicare in modo intelligente e flessibile il sistema posizionale delle cifre e l'aritmetica a una cifra (Fey, 1990 in OECD, 2006, p. 105).

Il soggetto SIM risponde alla domanda iniziale prima di realizzare qualsiasi calcolo:

> SIM*: Secondo me ha ragione Angela perché vedendo dalla mappa la lunghezza del tragitto che dovrebbero fare non è neanche la metà del raggio terrestre.*

D'altronde, certi studenti non sono riusciti a interpretare da soli la notazione in cui viene presentata la scala: **proporzione**. Come precedentemente analizzato, il soggetto MAN non è arrivato da solo a interpretare la scala e ha fatto dei tentativi a caso per trovare il rapporto giusto. Saper leggere e scrivere in una lingua vuol dire che una persona conosce molti aspetti della struttura di quella lingua ed è capace di farne uso per molte e diverse funzioni sociali. Analogamente, assimilare la matematica a una lingua significa non solo che gli studenti devono apprendere gli elementi della struttura propria del discorso matematico (i termini, i fatti, i segni e i simboli, le procedure e le abilità necessarie per eseguire determinate operazioni), ma anche che essi devono imparare a usare tali elementi per risolvere problemi non familiari in una molteplicità di situazioni (OECD, 2006, p.87). La proporzione è un concetto affrontato nelle scuole medie non solo nella materia di matematica; la capacità di metterlo in pratica è relazionata alla comprensione di esse.

Gli errati cambiamenti delle unità di misura sono stati presenti in alcune risoluzioni. Come il numero non corretto porterebbe ad un errore nei passaggi successivi, l'intervistatore ha fatto notare questo errore al soggetto ANN:

I: Come hai fatto la trasformazione da centimetro a chilometro?

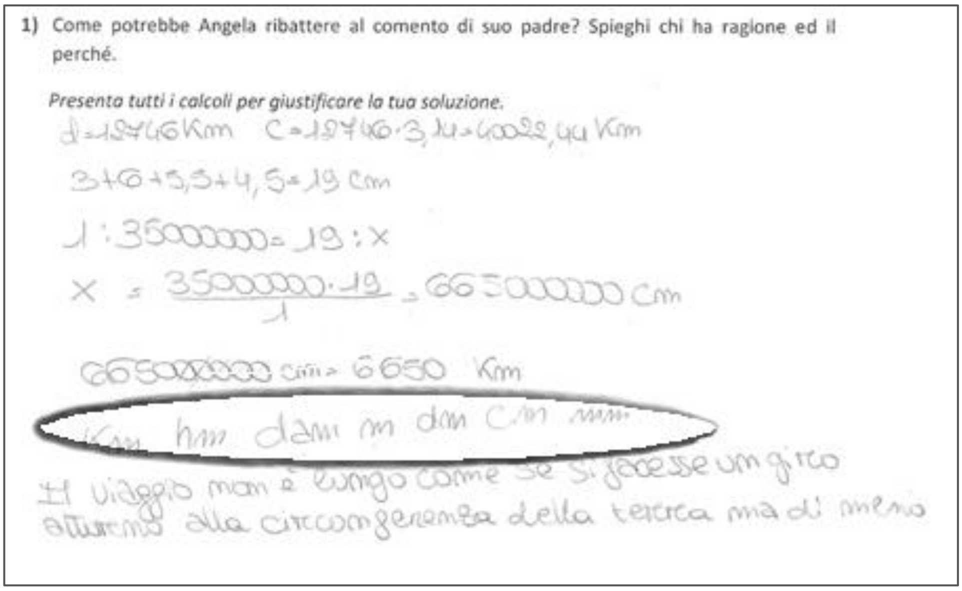
ANN: *Ho tolto gli zeri.*

I: E come hai fatto? **[Chiedevo perché c'era un errore e volevo che lui se ne accorgesse].**

ANN: *Allora, tipo c'è la tabellina km, hm, dam, m, dm, cm, mm* **[come si vede nella figura x]**. *Allora uno, due, tre, quattro*, **[per i zeri]**…. *Va bene, allora mi fermo qua. Allora, centimetri, dm, metri, dam, hm e km.*

I: E che numero vieni fuori?

ANN: *Mi sa che ho messo un zero in meno…..* **[e cancella un numero].** *Queste cose mi confondono sempre….*


1) Come potrebbe Angela ribattere al comento di suo padre? Spieghi chi ha ragione ed il perché.

Presenta tutti i calcoli per giustificare la tua soluzione.

d=12746 Km C=12746·3,14=40022,44 Km

3+6+5,5+4,5=19 Cm

1:35000000=19:x

x = 35000000·19 / 1 = 665000000 Cm

665000000 cm = 6650 Km

Km hm dam m dm Cm mm

Il viaggio non è lungo come se si facesse un giro attorno alla circongerenza della terra ma di meno

Figura 23 Risoluzione da ANN - Attività del Viaggio

<u>Creazione del modello matematico</u>

L'identificazione di un possibile modello reale è fondamentale per costruire il modello matematico. Nell'analizzare la situazione reale si mettono in atto altre conoscenze, non restringendosi soltanto alle informazioni date.

LUC ha avuto molta chiarezza nell'organizzare il modello matematico per risolvere il problema:

I: Spiegami un po' cos'è che hai fatto.

LUC: *Intanto ho trovato i chilometri, un centimetro corrisponde a 350km nella realtà, poi ho misurato la distanza tra le città e ho sommato per sapere il percorso totale 18,5cm.*

LUC: *E poi ho moltiplicato per i km e mi è venuto 6475km, e la circonferenza della terra è invece 2π 6373km quindi il raggio è poco più di … aspetta un viaggio al centro della terra …ah, un giro intorno alla circonferenza della terra. Quindi è sicuramente più breve questo tragitto.*

In relazione alla circonferenza della terra:

LUC: *I calcoli…. Poi è 40 mila chilometri circa…*

I: Ah per la circonferenza? E come fai a sapere che sono 40 mila chilometri?

LUC: *Stiamo studiando adesso, ma è perché cioè ogni tanto faccio delle cose cosi perché mi piace sapere e pensare che noi stando fermi facciamo anche al Equatore facciamo anche circa 400 metri al secondo…. È strano pensare che …*

I: Ecco, è vero. E ad esempio, la macchina di tua madre ha già fatto un giro intorno alla circonferenza della terra?

LUC*: No, no!*

I: Come lo sai?

LUC: *Perché è ancora circa 6 mila.*

Dopo aver letto la seconda domanda dell'attività:

LUC: *Dipende quanto vuoi fermarti in ogni città.*

I: Si, è vero. Intanto il percorso è sempre lo stesso, mettiti al posto di Angela e risponde alla domanda. Se vuoi fermarti di più o di meno basta che scrivi il perché.

LUC: *Cioè come vorrei organizzare il viaggio?*

I:Si.

LUC: *Dipende perché non so cosa c'è nelle città da visitare, da vedere…*

I: Questa è già una buona risposta, bravo!

LUC: *Cioè poi allora bisogna vedere quanto ci mette per andare, quanto vuoi restare e poi basta, quanto ci mette per andare da una città all'altra e quanto vuoi fermare.*

[…]

LUC: *Ok, posso fare in 2 settimane o in una settimana per visitare un posto cosi* **[ride].**

I: Come fai a sapere che si può fare in una settimana o in due settimane?

LUC: *Beh, diciamo che i viaggi di solito sono in una settimana, sono più o meno una, due, tre, quattro, cinque città che dipende sempre delle attrazioni comunque e diciamo che per visitare abbastanza bene una città si rimane tre giorni… quindi 15 perché … poi ogni una ha le sue cose.*

Certo!

LUC: *Poi se rimani di più in un posto o in un altro.*

Ok e la distanza fra due città, come si può pensare?

LUC: *Allora 350 km, qui ci sono tre* (per la distanza tra la prima e la seconda città). *Trecentocinquanta sono un po' di chilometri … quindi ci vuole almeno un giorno per fare trecentocinquanta km per fare da qua a qua* **[da una città all'altra].**

Il soggetto si mette a scrivere delle formule. Per organizzare il viaggio ricontrolla le distanze nella mappa con il righello.

LUC: *Ci vuole più di un giorno qua perché abbiamo detto che ci vuole un giorno qua, quindi un giorno e mezzo quindi bisogna fermarsi una notte, quindi due giorni.*

Dopo 4,5 minuti il soggetto fa la somma per tutto quei giorni che ha scritto.

Quanti giorni per fare il viaggio?

LUC: *16 giorni, circa perché rimanendo sempre due giorni in una città.*

Da questa risoluzione, e prendendo in considerazione anche il precedente svolgimento di LUC nella figura 21, il soggetto sembra aver sviluppato diverse strategie metacognitive: utilizza tecniche proprie per memorizzare e richiamare i contenuti, è in grado di fare analogie, di stabilire relazioni tra concetti, di ordinare e di costruire nuovi schemi che accomodano e ampliano schemi precedenti. Nel momento in cui mette a disposizione un particolare insieme di strategie per risolvere il problema, affronta gli errori e reindirizza le procedure cercando di dimostrare un controllo sul suo proprio processo di apprendimento. Il suo rapporto con la matematica ci permette di inferire che è in grado di astrarre con riflessione. Le conclusioni che elabora non derivano solo dalle indicazioni disponibili, ma anche dal coordinamento mentale delle sue azioni. La coscienza che ha del compito, gli eventuali ostacoli e i reindirizzamenti che esegue lo definiscono come uno studente con un pensiero matematico avanzato, comprendendo il senso di Dubinsky (1991).

L'abilità di mettere in pratica le conoscenze costruite precedentemente è una competenza necessaria per l'identificazione di un possibile modello reale e di conseguenza la creazione del modello matematico. Si osserva ROT che durante la creazione del modello matematico utilizza delle sue conoscenze eseguite in ambito geografico, storico e matematico, partendo dal risultato ottenuto per spiegare com'è arrivato alla soluzione:

ROT: *Poi ho dovuto tener conto di alcuni fattori come ….*

I: Come, ad esempio?

ROT: […] *un po' di geografia me la ricordo un pochino, questo pezzettino qui dell'Argentina con tutta la Terra del Fuoco non c'è gran che da vedere, quindi ho* *pensato che una persona qui c'è una velocità piuttosto alta. Ho pensato che una persona faccia 110km/h in questo pezzettino qui, sperando sempre che le strade siano messe bene.*

ROT: *110km/h in questo pezzettino qui lo affronti con 8 ore di macchina al giorno incirca 3 giorni. Poi ho contato 2 giorni di riposo perché 8 ore di macchina tutti i giorni…*

I: Certo!

ROT: *Poi incirca 5 – 6 giorni per fare questo pezzettino qui* **[dalla seconda alla terza città].** *Questo pezzettino qui che a Cile è montuoso e ci sono tutte le rovine … non lo so, farebbe più lentamente… una velocità media di 50km/h. Quindi fai circa 400km al giorno che per coprire 1.900km ci mette all'incirca 4 - 5 giorni.*

ROT: *Poi se ti fermi da qualche parte a dormire o magari a fare una gita o un'escursione nelle varie zone dove vivevano gli Incas magari fare 8 -9 giorni. Diciamo anche 9.*

ROT: *Poi questo pezzettino qui invece* **[Iquique – Manaus]***, oltre a passare per la Bolivia passa anche per il Brasile e attraversare anche il rio Amazonas* **[fiume]** *[…] devi andare in territorio in pervie e che necessitano comunque di velocità bassa e tanto tempo, quindi ho pensato tipo a 40km/h, cosi fai circa 320km al giorno… Ho calcolato sempre 8 ore di macchina.*

ROT: *Cosi veniva poi contando anche i giorni di riposo venivano fuori 10 giorni, facciamo 11 giorni per attraversare.*

ROT: *Poi del pezzettino dal Brasile alla Colombia* **[ultima tratta nella mappa]** *comunque tutta sempre foresta questa quindi è sempre una velocità bassa. Visto che c'è solo un fiume da attraversare ho calcolato una velocità media di circa 50km/h. Quindi diventano come prima, circa 400 km ogni 8 ore che fanno, compresi i giorni di riposo, 10 giorni.*

ROT: *Quindi alla fine all'incirca vengono fuori 34 giorni.*

LUC e ROT presentano dei risultati diversi per la durata del viaggio, nonostante presentino una risoluzione accettabile al problema.

La modellizzazione ha un ruolo chiaro nello sviluppo di un'attitudine sperimentale nei confronti della matematica, si mettono in gioco le proprie conoscenze e competenze per risolvere un problema del quotidiano, si assume un ruolo attivo nella costruzione del proprio sapere. Tale svolgimento richiede una riflessione da parte dello studente sui processi per risolvere il problema, legati alle loro abilità di pianificare strategie di soluzione affrontando ambiti problematici più complessi (Blum et al., 2007; Niss & Jensen, 2002).

Lo svolgimento delle tappe del processo portano ad una comprensione più completa di un fenomeno e sono sostanzialmente più profondi e formativi della semplice risoluzione di equazioni o dell'adattamento ai dati sperimentali di funzioni matematiche. Durante le diverse fasi del processo gli studenti hanno bisogno di analizzare delle informazioni, di usare diversi modi di rappresentazioni siano esse algebriche, grafiche, geometriche o numeriche, di formulare dei problemi, di svolgere modelli e di cercare soluzioni, formulare e giustificare delle congetture, analizzare e interpretare i risultati.

Validare la soluzione

Per validare la soluzione è necessario verificare e riflettere criticamente sul risultato ottenuto. Rivedere alcune parti del modello o ancora indagare fino in fondo il processo di modellizzazione è essenziale per comprendere se le soluzioni si adattano o no alla situazione. Gli studenti in generale non validavano le soluzioni. Durante lo svolgimento dell'attività del viaggio, un soggetto dopo aver trovato la soluzione ha osservato che esso non sarebbe fattibile nella vita reale. Un'interessante interpretazione è stata organizzata dal soggetto MON ed è stata già trattata nel dettaglio nell'analisi precedente.

6.5 Conclusioni del capitolo 6

La conoscenza matematica è stata analizzata nei termini delle strategie che gli studenti usano per risolvere i compiti rappresentanti di un dominio concettuale: la modellizzazione matematica.

L'analisi dello svolgimento delle attività di modellizzazione è stata divisa in due parti: la prima effettua uno studio dei primitivi fenomenologici presentati dagli studenti e la seconda studia i ragionamenti più articolati della competenza. Tale divisione è seguita dalle considerazioni conclusive. Come già precisato all'inizio dell'analisi, secondo le definizioni di Smith (et al. 1993/1994) gli studenti che hanno presentato dei primitivi fenomenologici vengono chiamati *principianti* e quelli che sono riusciti ad articolare maggiormente il concetto vengono chiamati *esperti*. È importante riaffermare che l'obiettivo dello studio non è distinguere gli studenti in "principianti" o "esperti" e di conseguenza separarli in gruppi diversi, ma di analizzare le idee embrionali e gli sviluppi più strutturati della competenza. Nell'analisi svolta si osserva che lo stesso studente presenta risoluzioni che si inquadrano ora nei primitivi fenomenologici, ora nei ragionamenti più articolati della competenza.

Affermiamo che una delle maggiori motivazioni per risolvere le attività proposte è dovuta alla cornice di realtà entro cui si inserisce la situazione problematica presentata, agganciata a referenti reali, come la corsa in taxi, una statua in piazza, la pianificazione di un viaggio e quindi riconoscibile globalmente e in modo in parte intuitivo. L'ambientazione della realtà risulta spesso assente nelle attività matematiche. Nell'ambito dell'apprendimento matematico secondo Moè e Lucangeli (2010) la motivazione può essere descritta come un insieme di spinte interne e di pressioni esterne che promuovono il desiderio di impegnarsi in matematica, contrapposte ad altre che determinano un disinteresse verso la materia e la tendenza ad evitarla o comunque ad affrontarla il meno possibile.

In didattica della matematica conoscenze e competenze sono dei prerequisiti necessari per guidare le varie fasi del processo di modellizzazione, ma per realizzare l'intera attività sono necessarie alcune idee e concetti centrali come i concetti di misura, approssimazione e linearizzazione, identificazione di uno strumento matematico, cc.

I diversi processi che gli studenti attraversano nel cercare una soluzione a questi problemi sono molto interessanti e entusiasmanti. Abbiamo osservato come gli studenti facciano il loro percorso coraggiosamente verso la soluzione, a volte rendendosi conto delle loro scarse abilità e conoscenze per tale.

Smith, di Sessa e Roschelle (1993/1994) attestano che tuttavia non è possibile relazionare il ragionamento degli studenti principianti al concreto e degli esperti all'astratto[75]. Gli esperti sembrano molto concreti quando compulsivamente trasformano anche le idee più astruse in un insieme più concreto di entità visibili e manipolabili o simboli algebrici; il pensiero concreto mediato di questo tipo è caratteristico dei più alti livelli dell'attività umana. Allo stesso modo, i principianti sono anche astratti, quando applicano i concetti matematici appresi ad una situazione senza esaminare tutti i dettagli particolari oppure in considerazione del fatto che quei concetti potrebbero non essere rilevanti.

[75] Secondo gli autori, *astratto* e *concreto* sono termini problematici: credono che essi siano lontani dall'essere sufficientemente precise per classificare adeguatamente la conoscenza, per non parlare di classificare le persone che utilizzano tale conoscenza

Considerazioni conclusive ai primitivi fenomenologici

La maggior parte delle ricerche sui *misconceptions* si concentrano sulla descrizione delle idee degli studenti prima, durante e dopo l'insegnamento e poco sullo sviluppo di quadri teorici che riguardano il processo di apprendimento. Tuttavia, è possibile individuare aspetti comuni sull'apprendimento in relazione alle concezioni erronee, ingenue e divergenti degli allievi (Smith et al., 1993/1994); i dati emersi nella ricerca riportano un gruppo di aspetti particolari del processo di apprendimento.

Gli studenti possiedono concezioni in grado di spiegare alcuni dei fenomeni matematici presenti nelle attività di modellizzazione, ma questi concetti possono essere diversi dai concetti disciplinari attualmente accettati e presentati all'istruzione. Secondo Smith (et al., 1993/1994) tali concezioni erronee e divergenti derivano sia dagli apprendimenti precedenti in aula sia da altre esperienze vissute nel mondo quotidiano e di conseguenza ostacolano l'apprendimento dei concetti più complessi.

Nell'analizzare i processi di ragionamento e le condizioni che ostacolano la modellizzazione, si identificano dei primitivi fenomenologici degli studenti riguardo le tappe del processo di modellizzazione. I primitivi fenomenologici presentati dai discenti evidenziano le loro conoscenze dei concetti matematici in questione e le loro abilità a metterli in pratica, specificando quali sono gli ostacoli affrontati e come si presentano nel processo. Se la competenza avanzata integra modellizzazione e formalizzazione, il processo parte proprio dai concetti primitivi che integrano e si perfezionano nel ragionamento e diventano descrivibili secondo espressioni matematiche.

Di seguito si presentano i primitivi fenomenologici identificati in ognuna delle attività svolte dai soggetti:

Attività del Taxi: Le concezioni erronee attribuite durante la risoluzione dell'attività riguardano nello specifico l'identificazione dei fattori che influiscono nel valore della corsa e la costruzione del modello matematico.

Certi soggetti hanno ipotizzato erroneamente dei fattori che in realtà non hanno legami con il problema affrontato, come ad esempio la soluzione presentata da MAN: "*i regali per i parenti quando si viaggia*", "*i tassisti più furbi che fanno il giro più lungo*", "*quanti soggetti salgono a* *bordo per dividere la spesa"*. Il soggetto crea dei fattori che in realtà non hanno nessuna relazione con il problema proposto, ritiene che sia necessario considerarli.

L'identificazione parziale delle variabili indipendenti presenti nella situazione rappresenta una comprensione incompleta del problema che di conseguenza porta lo studente ad effettuare degli errori nello stabilire il valore di una variabile dipendente. MON ad esempio non prende in considerazione il fattore della quota fissa di spostamento; come si può vedere nel dettaglio nella precedente analisi; l'intervistatore gli fa una domanda che potrebbe essere in relazione all'idea della quota fissa, ma il soggetto non ne coglie il senso, trovando un valore sbagliato per il costo di ogni chilometro.

La mancata individualizzazione di tutte le variabili indipendenti porta a errori nella costruzione del modello matematico. Anche MAR presenta una concezione erronea riguardo il calcolo del costo del chilometro: nonostante consideri la quota fissa di spostamento non la relaziona nel calcolo eseguito. Il soggetto presenta un'altra concezione equivoca quando deve stabilire il suo modello matematico, facendo una supposizione a caso: assume il concetto di proporzione come una chiave di soluzione "*voglio provare... tipo devo fare proporzioni?"*

Attività della Statua: Le concezioni erronee attribuite per la risoluzione dell'attività riguardano l'identificazione di un possibile modello reale, le relazioni assunte per determinare le misure, le stime non corrette con risposte contraddittorie e criteri di risoluzione non legati alla modellizzazione.

Il riconoscimento di un possibile modello reale è stato un ostacolo per certi studenti. La non identificazione dei dati impliciti del problema ad esempio ha portato MAN a concludere che non si potrebbe realizzare l'attività, assumendo che "*Bisognerebbe conoscere i dati mancanti: altezza e larghezza della testa di Adenauer*. L'assenza di un riferimento concreto come parametro matematico porta il soggetto a sostenere che per risolvere l'attività servano dei dati, proprio i numeri, come nei classici esercizi matematici.

Le stime erronee presentate dai soggetti hanno portato a risultati sbagliati. MAN prima di risolvere l'attività assume che la statua rappresentata intera "*sarebbe un monumento colossale"*; trattandosi di un'attribuzione altamente intuitiva. Dopo la realizzazione dei calcoli arriva ad un risultato sbagliato di 5 metri e mezzo, che è in contraddizione con il *monumento colossale* previamente annunciato. Il risultato ottenuto non ha causato disturbo al soggetto.

Il parametro matematico assunto da MAR l'ha portata a una soluzione corretta, ma non è riuscita a sostenere la sua idea. Confrontata sul perché aveva assunto il numero otto come rappresentazione del totale di bambini (uno sopra l'atro) per riprodurre la statua, risponde: "*È per non farla diventare troppo alta ma neanche troppo bassa*". Secondo diSessa (1983) lo stesso individuo può produrre chiarimenti contradditori del fenomeno analizzato in diverse circostanze.

SIM ad esempio presenta un criterio di risoluzione legato alla storia, senza pertinenza matematica e afferma che "*se fosse grande dalla testa ai piedi sarebbe davvero una statua grandissima perché è stata una delle persone più importante della storia della Germania".* Dopo essere confrontato con l'intervistatore, che gli chiedeva quanto sarebbe alta in metri, il soggetto risponde a caso: *"tre o quattro metri*" e dopo riorganizza la sua risposta presentando una nuova risposta: 5 o 6 metri. In risposta alla domanda su come abbia fatto ad intuire quell'altezza il soggetto risponde: "*Perché una costruzione da 5 o 6 metri è davvero molto alta. … abbastanza alta e questo darebbe l'immagine di quello che è stata questa persona".*

Attività del viaggio: Le concezioni erronee assunte nell'attività riguardano l'interpretazione della scala della mappa, la comprensione equivoca del problema reale, le concezioni ingenue assunte nel fare una stima.

L'interpretazione della scala presentata nella mappa ha generato varie concezioni erronee da parte degli studenti, nonostante l'attività contenga l'informazione "*La SCALA di una mappa è il RAPPORTO tra la distanza sulla mappa e la distanza reale sulla superficie terrestre, espresse nella stessa unità di misura*". Le interpretazioni erronee nel rapporto assunto, i tentativi a caso di utilizzare operazioni matematiche per stabilire la distanza reale rappresentata nella mappa sono stati i principali primitivi fenomenologici presentati.

Le concezioni ingenue e erronee degli studenti hanno generato equivoci nella comprensione del problema iniziale: si veda ad esempio MAR che ha calcolato correttamente le distanze (viaggio proposto e circonferenza) e attribuisce la ragione al padre di Angela.

La stima sbagliata o poco precisa è stata l’errore più frequente nella costruzione del modello matematico: MAR assume una velocità media di viaggio di 150km/h; ALI non ha idea della distanza da casa sua alla scuola; MAN paragona la distanza di 1200km alla distanza esistente fra Bologna e Firenze e assume che in una giornata si percorrano in media 1000km.

Si richiama l’attenzione sul fatto che, durante lo svolgimento delle attività (come si può vedere nella precedente analisi) tutti i soggetti sono stati interrogati sulle proprie stime e nonostante ciò non hanno cambiato idea: si tratta di concezione ingenue assunte dagli studenti, sono riusciti anche a giustificare le loro stima: MAR ad esempio dice “*Pensavo all’autostrada*”; MAN è consapevole di non aver mai percorso 1000km in una giornata.

In generale gli studenti principianti descrivono i propri processi mentali utilizzati nella risoluzione delle attività mescolando i processi essenziali e importanti da altri secondari e marginali, dimostrando di non essere molto consapevoli della sequenza di tali processi. Di conseguenza non sono riusciti a indicare i motivi che gli hanno portati a fare determinate scelte nella risoluzione dell’attività.

Molti studenti eventualmente lavorano con le loro concettualizzazioni erronee, la padronanza di questi domini matematici "elementari" non è facile, né veloce, e neanche uniformemente raggiunta.

I p-prims non sono da eliminare, ma da integrare con la conoscenza dell’allievo. Si osserva come ALI abbia costruito il suo rapporto distanza – tempo in funzione di un precedente racconto dell’intervistatore.

Per neutralizzare l'interferenza degli equivoci, l'istruzione dovrebbe confrontarsi con gli studenti sulla disparità tra le loro idee sbagliate e i concetti più specializzati. Quando il divario diventa esplicito, gli studenti potranno apprezzare i vantaggi dei concetti specializzati e rinunciare alle loro idee sbagliate.

L’educazione matematica deve prendere sul serio i p-prims degli studenti, sono delle concezioni che si differenziano regolarmente dai concetti istruiti e che guidano il loro ragionamento.

Il modello utilizzato ritiene lo sviluppo della competenza come il passaggio di semplici elementi di ragionamento intuitivi di limitata applicabilità (p-prims), verso la loro integrazione in schemi di ragionamento strutturati secondo teorie. Tale modello è in contrasto con le concezioni più diffuse, riguardanti la ristrutturazione di schemi esistenti.

Oltre alle questioni della quantità e della dimensione della conoscenza, la "conoscenza in pezzi" (diSessa, 1988) porta con sé alcune dimensioni diverse all'analisi della conoscenza che sono in genere presunte nei modelli disciplinari. Entrambi i primitivi fenomenologici ed i modelli disciplinari suggeriscono che la conoscenza è unitaria, stabile e statica, mentre la ricchezza e la generatività sono proprietà centrali dei ragionamenti, sia di esperti che di principianti. La ricchezza può essere assunta in diversi modi di vedere e descrivere il mondo e la generatività nella creatività delle spiegazioni dei principianti. Allo stesso modo, gli esperti non sono solo esecutori qualificati e automatici, sono sempre attenti a ricostruire la logica e l'ampiezza del loro campo, adattandosi in modo flessibile alle circostanze che non hanno incontrato prima. A volte commettono errori, ma possono correggere questi errori in modo fluido. Lo spostamento verso la visione della conoscenza come qualcosa che coinvolge numerosi elementi di tipi diversi sembra cruciale per catturare queste caratteristiche.

Considerazioni conclusive dei ragionamenti più articolati della competenza

In generale gli studenti esperti hanno avuto la capacità di descrivere i propri processi mentali utilizzati per svolgere le attività, riferendoli all'obiettivo da raggiungere. Durante la maggior parte delle risoluzioni sono riusciti a spiegare le scelte strategiche assunte ma non sempre considerando i limiti imposti della situazione. Possibili alternative che potrebbero essere più efficaci nella risoluzione dell'attività sono state evidenziate da un numero limitato di soggetti.

Con molta creatività, i soggetti passo dopo passo, sono stati alla ricerca di una soluzione, a volte discutendo sull'efficacia del loro metodo, presentandosi sempre molto disponibili.

Si presentano particolari articolazioni presentate nelle attività:

Attività del taxi

Lo svolgimento dell'attività ha richiesto agli studenti l'interpretazione del problema, la decodifica della situazione e l'identificazione delle variabili reali per la costruzione di un possibile modello reale. La decodifica del problema condiziona la comprensione della situazione, sia nell'identificazione delle variabili in gioco sia nel riconoscimento delle loro relazioni. Come si è visto nell'analisi presentata, gli studenti hanno decodificato il problema in modi diversi. SIM ad esempio riesce a esporre i fattori che influiscono in una corsa in taxi e di conseguenza ha trovato il valore corretto per il costo del chilometro; MON invece ha identificato solo due fattori che incidono nella situazione, portandolo a trovare un valore sbagliato per il costo di ogni chilometro percorso in taxi.

L'attività presenta una corsa particolare eseguita dalla ragazza Anna e chiede di rappresentare il costo di tale percorso in forma di equazione, sottolineando "indipendentemente da quanti km si percorrono". Nell'analisi è stata riportata la risoluzione di quattro soggetti, rispettivamente nelle figure 16, 17, 18 e 19. Il modo di ragionare dei soggetti è stato molto diverso e non lineare. MON e MAR ad esempio non sono stati in grado di costruire il modello matematico che rappresentasse la situazione presentata. La risoluzione di MAR non si avvicina neanche a un'equazione, ha scritto soltanto due parole che ritiene importante: "*quota fissa + chilometri*". MON si è accorta che in un'equazione ci vuole una variabile e scrive una relazione "*3x = costo*", identificando la variabile x come il numero di chilometri percorsi.

SIM e GUS ad esempio presentano un ragionamento più articolato; riconoscono tutte le variabili da considerare e identificano correttamente quali sono le variabili dipendenti e quali sono indipendenti. È interessante confrontare le due soluzioni perché il primo soggetto non scrive in forma di equazione matematica ma in modo letterale *"Costo = costo al km * km percorsi + quota di spostamento".* GUS invece scrive in forma di simboli matematici "*F = 3 + k*1,27*". Queste due forme di rappresentazione devono essere messe a confronto in classe, è importante che l'allievo non abbia timore di rappresentare quello che ritiene corretto, anche se le solite equazioni matematiche vengono rappresentate attraverso simboli. È compito dell'insegnante istigarlo a rappresentare nel modo più formale. Riteniamo che questo sia un passaggio molto tranquillo da eseguire, il soggetto presenta già un modo di ragionare corretto.

In base ai dati impliciti e espliciti dell'attività, gli studenti nella domanda tre dovevano identificare quali dei dati erano costanti e quali erano variabili. La tabella 3 presentata precedentemente nell'analisi riporta un importante fatto occorso: nessuno degli studenti ha identificato gli stessi dati come variabili o costanti. Non è da scartare l'ipotesi che tale avvenimento possa essere una conseguenza della difficoltà imposta nell'attività; in ogni caso ci allerta del fatto che un confronto del genere sarebbe un momento ricchissimo da svolgere in classe, mettendo gli studenti a confronto delle proprie concezioni.

Attività della statua

L'attività, come precedentemente descritta, viene definita come un "Pictorial Problem" e presenta i dati in modo implicito. Quest'attività è stata adattata dal sito http://did.cermat.org/ e utilizzata in altre ricerche di modellizzazione svolte soprattutto in Germania da Maab (2006) e Herget & Richter (2012). I risultati presentati da questi ricercatori sono molto simili a quelli che abbiamo identificato nella nostra raccolta dati. Il parametro matematico di riferimento è stato un punto cruciale per lo svolgimento dell'attività.

L'analisi presenta lo svolgimento eseguito da LUC e ANN; nonostante vengano risolti in modi diversi come si vede nelle figure 21 e 22, entrambi i soggetti presentano delle soluzioni valide. Tale fatto avviene sia dalle differenti stime assunte per l'altezza del bambino aggrappato alla testa di Adenauer che dal loro modello matematico. Herget e Richter (2012) riprendono l'attenzione sul fatto che avere delle risposte diverse ma entrambe corrette è una situazione non comune nelle classi di matematica. La modellizzazione è una pratica che valorizza questo tipo di situazione, come evidenzia Gravemejier (in Blum et al., 2007) **la modellizzazione porta l'introduzione** della complessità in classe, offre spazio al passaggio dalla ricerca della verità matematica pura ad una continua valutazione: permette una visione più profonda e significativa anche della matematica stessa. Certamente una considerazione del genere richiede del tempo per abituarsi, sia da parte degli insegnanti che degli alunni.

Per raggiungere l'obiettivo dell'attività con successo, gli studenti devono avere una "libertà di azione" per essere creativi. Se un problema del genere viene affrontato in classe, l'insegnante deve adottare un approccio "amichevole" con gli errori e consentire agli alunni di trovare una soluzione ai problemi da soli. In questo modo si sviluppano anche delle capacità di fare delle critiche costruttive in funzione della fiducia che acquisiscano in se stessi (Herget & Richter, 2012).

È evidente che gli "esperti" utilizzino diversi tipi di conoscenza per trovare e applicare adeguatamente i principi e le definizioni matematiche; ciò è stato evidenziato dallo svolgimento dell'attività della Statua. La novità agisce come un elemento di sfida, inducendo lo studente a scegliere tra l'arsenale di strategie metacognitive che ha sviluppato, la più adatta per realizzare il compito.

Attività del viaggio

L'attività è stata sfidante per la gran parte dei soggetti coinvolti. L'interpretazione del concetto di scala ha generato degli errori iniziali nello svolgimento dell'attività. Tale fatto è stato sempre evidenziato dall'intervistatore durante la pratica; in modo non suggestivo gli studenti sono stati invitati a ripensare e riorganizzare le relazioni assunte. La lettura scorretta del numero che viene rappresentato dalla scala è stata ricorrente, nonostante i calcoli venissero eseguiti correttamente, come si vede ad esempio nelle risoluzioni di ROT e ALI.

Nell'attività la ragazza Angela propone il viaggio che viene evidenziato nella mappa. La domanda uno chiedeva di ribadire il commento del padre di Angela "*Il viaggio mi sembra molto interessante ma la lunghezza sarebbe come fare un giro attorno alla circonferenza della terra*".

Determinare la lunghezza reale della tratta del viaggio proposto da Angela è stata una sfida per i soggetti. La risoluzione poteva essere eseguita in differenti modi, ma l'interpretazione scorretta del rapporto della scala porterebbe necessariamente all'errore totale dell'attività; è per questo motivo che gli studenti sono stati invitati a interpretare bene cosa rappresentava il 1:35 000 000. Gli studenti hanno presentato strategie diverse per determinare la lunghezza del viaggio e hanno avuto la necessità di utilizzare la tabella di conversione delle unità per intendere la relazione esistente fra chilometro e centimetro ad esempio.

Inoltre, i soggetti hanno dovuto calcolare la circonferenza della terra per poter costruire la loro argomentazione. C'è stata confusione nelle azioni effettuate in questa tappa, come per quanto riguarda il rapporto assunto fra diametro e raggio e la formula per calcolare la lunghezza della circonferenza. Tutti i soggetti sono riusciti a trovare una misura "accettabile" per la circonferenza. Nell'analisi si presenta una risoluzione "esperta" presentata dal soggetto LUC.

Il secondo item dell'attività chiedeva al soggetto di mettersi al posto di Angela e organizzare il viaggio in modo piacevole e indicare il numero di giorni necessari per svolgere tale viaggio. In questo momento ogni studente ha presentato la sua particolare risoluzione, cosi prendendo in considerazione i fattori che secondo loro erano rilevanti nella situazione come ad esempio: la velocità media tenuta; i punti turistici da vedere in ogni città, le soste per fare la benzina, la stanchezza, le condizioni climatiche, ecc.

ROT ha presentato un'interessante organizzazione del viaggio, riunendo le sue conoscenze in ambiti diversi della matematica come la geografia e la storia. Questa competenza oltre a permettere di modellizzare la situazione consente al soggetto la costruzione di significati delle conoscenze elaborate nei diversi ambiti scolastici e del quotidiano.

La discussione dei punti presentati precedentemente sulle attività di modellizzazione sottolinea ciò che è veramente indispensabile per la creazione di modelli matematici: la traduzione di una situazione problema in forma di testo al linguaggio della matematica.

Lo studente competente in matematica è quello che comprende le nozioni e le procedure matematiche e che le utilizza in modo flessibile, adeguandole alle nuove situazioni e permettendo anche di stabilire delle nuove relazioni fra di loro per imparare nuovi concetti matematici.

Ci sono alcuni studenti che sono in grado di applicare meccanicamente alcune procedure che hanno imparato correttamente, ma in ambiti dove la loro comprensione è molto scarsa. In altri casi, gran parte della conoscenza matematica che l'allievo ha a sua disposizione e che dovrebbero essere in grado di usarne, non è stata molto utilizzata durante la risoluzione delle attività. Secondo Schoenfeld (1985) questo accade perché lo studente non percepisce la sua conoscenza matematica come utile per sé e conseguentemente non la usa.

Molti cosiddetti concetti e strategie ingenue per la soluzione di problemi sono molto utili in quasi tutte le situazioni della vita quotidiana. Il ragionamento scientifico non è in grado di sostituire il pensiero di senso comune. Lo studente deve imparare a distinguere quali concetti e quali strategie per la soluzione di problemi sono adeguati alle varie situazioni (Spada, 1994 citato in Berti, 2002, p.24).

Gli autori Smith, diSessa e Roschelle (1993/1994) considerano che la documentazione delle concezione erronee e divergenti degli studenti sia un importante compito della ricerca in matematica e in scienze, nei più diversi argomenti.

CAPITOLO 7 ANALISI DELL'INTERVENTO CON GLI INSEGNANTI

L'intervento realizzato con gli informatori privilegiati è iniziato con il chiarimento dei propositi della ricerca; gli è stata consegnata la lettera di invito all'intervista che si trova nelle appendici.

Come descritto nella metodologia, all'inizio dell'incontro è stata fatta una breve delucidazione agli informatori privilegiati sulla prima fase della ricerca: l'indagine eseguita con gli studenti. Ad ogni insegnante sono state presentate le attività di modellizzazione proposte agli studenti e dei frammenti dell'intervista e della risoluzione scritta dai soggetti.

La seconda parte dell'intervento consiste nella realizzazione dell'*Intervista Insegnante*; in cui si concentrano gli obiettivi effettivi della seconda fase della ricerca. L'analisi dell'intervista è svolta nei capitoli 7.2 e 7.3.

7.1 Considerazioni degli informatori privilegiati riguardo le attività di modellizzazione proposte agli studenti

In questo capitolo si presentano le osservazioni fatte dagli insegnanti riguardo le attività di modellizzazione proposte agli studenti nella prima fase della ricerca. Mentre facevano una lettura analitica delle attività proposte e delle rispettive risoluzioni presentate nei frammenti, gli informatori privilegiati hanno manifestato delle importanti considerazioni riguardo la struttura dell'attività, i risultati presentati e le alternative di risoluzione assunte dagli studenti.

Le considerazioni fatte dagli insegnanti riguardo gli ostacoli degli studenti nello svolgere la modellizzazione così come i loro racconti personali relazionati a tali esperienze vengono presentati e analizzati nel capitolo 7.3.

In generale gli insegnanti hanno trovato molto interessanti le attività di modellizzazione, riportando nello specifico aspetti come:

Relazione ad una situazione reale:

Ins 3: *Molto interessante questo problema, è tratto da una situazione reale […] mi sembrano un po' i quesiti del test Invalsi, a grosso modo, che valutano le competenze.*

Aggiunta di curiosità al problema:

Ins 1: *Ho visto che hai messo due parti di curiosità* [nelle attività]. *I ragazzi come l'hanno presa? È strano perché questo è un dato in più, sarei curiosa di capire se tutti questi minuti di lettura sono anche dovuti al fatto che si chiedessero: "ma questo cosa c'entra". Perché non sono neanche abituati ad avere una cosa così..*

Risposta aperta e assenza di dati numerici:

Ins 1*: Anche questa è bella. Perché la risposta è aperta, senza i dati, incredibili! Bella quest'attività, sai che la provo alle medie perché sarei curiosa di vedere i più piccolini, alla fine questo è un ragionamento che si può fare tranquillamente. Sarei curiosa di vedere cosa mi dicono. […] Bello, hai trovato dei bei ragazzi.*

Non ha soltanto una risposta corretta:

Ins 2: *L'attività è molto carina, molto ricca […]. Una cosa molto importante che ho letto da qualche parte che dici "non c'è una risposta che è corretta e le altre sbagliate", questo è veramente importante secondo me, nel senso che c'è tutto il timore, le indicazioni nazionali, la stima e spesso gli insegnanti non sanno neanche come fanno a proseguire con gli scopi….*

Gli insegnanti hanno anche indicato degli aspetti delle attività che considerano un po' difficili, rendendole complesse come problema. Di seguito si presentano tali difficoltà e la giustificazione data dagli informatori privilegiati:

Lessico dell'attività del taxi:

Ins 2: […] *ma trovo il lessico un po' complesso quindi penso che nonostante sono già alle superiori potrebbero trovare un po' di fatica onestamente ad orientarsi, non che cambi moltissimo l'attività, ma qualcuno potrebbe un po' perdersi. […] è come se l'aspetto di modellizzazione fosse secondo, rispetto all'interpretazione del testo, mi sembra, come posso dire …. complesso. L'adulto lo capisce bene, lo studente forse ancora no.*

Presentazione dell'attività della statua:

> Ins 4: *Vedi, il soggetto cerca un dato esplicito… Curioso che nessuno dei due ha pensato di andare a misurare la testa del bambino. E la propria anche per dire, in realtà sarebbero tre: la testa della statua, la testa della fotografia del bimbo e poi la testa di un bambino vero, quindi in realtà si, può essere molto complesso come problema … non in se, perché…*

L'applicazione della modellizzazione è ancora poco presente nella prassi scolastica e gli informatori sostengono che gli studenti non siano abituati a risolvere attività del genere:

Compito non standard:

> Ins 1:… *dalla mia esperienza quello che vedo qui è … intanto loro non sono per niente abituati a fare una roba del genere, è una cosa bruttissima però è vero. Questo non è un compito standard di matematica e quando tu gli dai una cosa del genere e loro sanno che stanno facendo matematica è un disastro.*

Attività non presente nei libri didattici:

> Ins 4: *Questo lo vedo quando lo faccio io, se no, non si vede spesso. Diciamo i problemi, infatti c'è la ragazzina che "oh Dio", ho visto che era un po' …è rimasta stupita perché non fa parte della normalità. Non sono usuali attività di questo tipo, una cosa del genere si fa spesso quando si fanno equazioni di primo grado, sistemi di primo grado e poi si fa un po' di piano cartesiano in seconda […], però si fa poco, è sentito come matematica applicata e quindi si, sono problemi poco usuali, io appunto li faccio sempre ma sono uno dei pochi che li fa, e si, nei libri di testo non ci ne sono tanti ad esempio. Ci sono problemi più formali, i classici, che c'è il passeggino e i dati. Però questa….*

Trattandosi di un'intervista clinica, definita nel disegno di ricerca, sono state fate delle domande complementari ai soggetti. Come sostiene diSessa (2007) in un'intervista del genere l'intervistatore esplora diversi modi di inquadrare la situazione problematica; a volte può fornire interpretazioni alternative al soggetto, in modo da farlo rispondere delle domande come "Qualcuno mi ha detto che…., Cosa ne pensi", cercando di capire suo percorso cognitivo.

Gli insegnanti hanno fatto notare il cambiamento dell'atteggiamento dei soggetti dopo certi interventi realizzati dall'intervistatore:

Focos sulla matematica:

> Ins 2: *Allora, una cosa che ho notato è che effettivamente quando si ha avuto l'intervento comunque il soggetto scrive.*
>
> […] *È più conveniente lui* [frammento 2]*, nonostante il tuo intervento sia assolutamente fondamentale perché ha preso tutto un'altra strada. Non ha assolutamente, fino a che non gli viene chiesto esplicitamente di focalizzarsi sulla matematica non* **….** *Ha tutto un altro punto di vista sul problema e persone cosi ci ne sono e ci sono anche via di mezzo. Tra i due però è interessante, la cosa che mi salta più agli occhi è che davvero con un occhio un pochino aperto si vede che tutti gli studenti a loro modo hanno approcci diversi alla matematica e questo lascia spazio per far venire fuori far capire anche perché l'approccio è diverso sulla risoluzione di problemi.*

Riguardo ai frammenti[76] presentati, gli insegnanti si dicono sorpresi dai risultati:

Eccessivo grado di difficoltà presentato:

> Ins 1: *Quindi le variabili sono distanza e prezzo, direi che ci siamo! Caspita, questo in terza superiore… non credevo. Alla fine tutto il mondo è paese […] Sai che un po' me l'immaginavo, adesso è un periodo che sto analizzando un po' i testi e quindi sto leggendo delle cose… parlo di scuola primaria, in cui i bambini rispondono collegato al contesto che gli viene dato, quindi lui all'inizio ha risposto proprio "la persona è importante quindi è alta" senza minimamente fare riferimento a quest'immagine. È carina questa cosa. Strano cosi grande, sarei aspettata in primaria non alle superiori, questo mi stupisci.*

> Ins 2: *Allora francamente me l'aspettavo molto di più, dipende dal livello.[…] Terza superiore! Sono molto diversi nel senso che c'è uno molto addestrato e l'altro molto meno in matematica.*

Gli informatori privilegiati hanno relazionato le difficoltà presentate nello svolgimento delle attività con quello che trovano in classe. Gli ostacoli individuati vengono trattati nella categoria presentata di seguito "*Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione*". Per adesso riportiamo degli aspetti che secondo gli insegnanti sono molto importanti da tenere in considerazione:

[76] Il criterio utilizzato per individuare i frammenti presentati agli insegnanti si trova dettagliatamente nel disegno di ricerca.

La modellizzazione dovrebbe essere una costante di tutto l'insegnamento:

Ins 4*: Questa è ancora più critica come cosa, perché uno deve cercare, con il righello si misura la testa di tutti e due. I ragazzi più svegli fanno cosi e gli altri no…. Ma pochi ce la fanno. Ci vuole un addestramento specifico […] Dovrebbe essere una costante di tutto l'insegnamento, cioè, secondo me c'è un problema di intellettualismo nella scuola italiana per cui si insegnano molto delle procedure, cose molte astratte e poi c'è poco legame con la realtà. Senz'altro la scuola media che in parte c'è, ma la scuola media bisogna essere rinnovata un po' di più. La superiore c'è poco di questo, poi si fa un modello di una cosa che è più complessa.*

Lo studente diventa insicuro davanti ai problemi:

Ins 2: *Ho notato che come il solito lo studente crolla davanti ai problemi, ha paura di problemi e l'atteggiamento cambia molto, diventa insicuro. Entra in una dinamica molto più emotiva che risolutiva. Oh Dio, i problemi, cosa devo fare. "Non lo so". Tra l'altro una cosa che mi ha stupito è che non cambia molto tra sopra e sotto se non il modo in cui è scritto, tra l'altra domanda* (si riferisce alla domanda 1 e 3 dell'attività 1). *Anna ha percorso 10km … è più una questione di struttura del testo "oh Dio, i problemi". Penso che anche sopra era una domanda che poteva essere vista come un problema e solo quando arriva qui* (domanda 2), *questo mi sembra molto evidente che c'è una cosa che lo condiziona.*

Gli studenti hanno bisogno di certezze:

Ins 4: *Qui ci sono dei dati un po' nel testo* (attività del taxi) *ma questo non è cosi usuale diciamo di complessità più … questi se ne trovano alla scuola media, proprio perché l'interessante è andare a cercare, a decodificare un testo, da una situazione a trovare i dati. Alle superiori si fa molto poco, quindi capisco che il soggetto qui sia trovato un po' spaesato…*

7.2 L'intervista aperta a osservatori privilegiati: insegnanti di matematica della scuola superiore di secondo grado

La ricerca qualitativa comprende un insieme di pratiche interpretative interconnesse per cogliere una migliore comprensione della realtà. Trattandosi dell'analisi, il ricercatore è un soggetto che costruisce insieme agli intervistati, o ai gruppi che partecipano alle indagini, le conoscenze e le riflessioni sui dati di ricerca, per cui i processi interpretativi che tutti i partecipanti attribuiscono alle esperienze risultano essenziali, non accidentali o secondari (Sorzio, 2005, pp. 35- 49).

7.2.1 Aspetti da considerare per l'analisi

L'analisi si basa sulla traccia riguardante lo sviluppo e gli ostacoli della competenza modellistica e le possibili vie di intervento da promuovere in classe verso la costruzione di ambienti di apprendimento efficaci.

L'analisi si propone di identificare le condizioni scolastiche in cui i primitivi fenomenologici, presentati nell'analisi sulle attività di modellizzazione, possono essere sviluppati in competenza, anziché essere vincolati ad un apprendimento formalistico.

All'interno delle domande aperte, presentate nel disegno di ricerca, è stata concessa la possibilità agli intervistati di esprimersi a lungo su alcuni problemi. Rimane la questione di categorizzazione e codifica delle interviste con una forte base di argomentazione e con un uso di lessico e schemi cognitivi molto divergenti da parte dei soggetti.

La codifica e la classifica sono metodi per l'analisi di testo molto utilizzati nelle scienze sociali. La pratica di codifica comporta l'attribuzione di parole chiavi a segmenti di testo in modo da permettere la futura identificazione di un'affermazione, mentre la pratica di classifica implica una concettualizzazione sistematica di una affermazione, aperta alla quantificazione; i due termini sono, comunque, spesso intercambiabili. In varie forme, la codifica è un aspetto chiave per l'analisi del contenuto, grounded theory e l'analisi testuale di interviste assistita da computer (Kvale, 2007, p. 105).

Nella ricerca qualitativa è sempre più frequente il riferimento alla Grounded Theory[77] (Charmaz, 2006); secondo questa teoria i dati per analizzare i fenomeni derivano direttamente dalle situazioni contestuali, che diventano oggetto di attenzione del ricercatore per ottenere importanti dati analitici. La codifica è anche un aspetto chiave della "ground theory", in cui i codici non vanno quantificati, ma fanno parte dell'analisi qualitativa della relazione tra codici e contesti. Nella Grounded Theory (Glaser & Strauss, 1967; Tarozzi, 2008) si sottolinea il fatto della continua rivedibilità delle categorie costruite.

Nella presente ricerca, l'analisi delle interviste più che grounded, è analisi qualitativa del contenuto, considerando il significato attribuito dall'intervistatore per spiegare il fenomeno in questione, che comunque genera categorie e schemi concettuali con cui interpretare la competenza modellistica da un altro punto di vista (De Grada & Bonaiuto, 2002*);* mantenendo della grounded soltanto l'atteggiamento sempre rivedibile e aperto della categorizzazione.

L'analisi del contenuto di ogni tipo è, comunque, strumento riduttivo poiché limita il rango dei fenomeni osservati o da osservare e, soprattutto, trascura l'ambito nel quale essi compaiono; la propensione alla quantificazione porta inoltre a organizzare la rilevazione in termini di conteggi frequenziali di tipi di atti o contenuti , ignorando l'indicalità che può dare ad atti o contenuti anche uguali significato diverso (De Grada & Bonaiuto, 2002, p. 115).

La ricerca è basata su interviste qualitative di cui si fa l'analisi del contenuto[78] (Kvale, 2007; Sorzio, 2005). Trattandosi di un'intervista semi-strutturata il significato attribuito e il linguaggio utilizzato dall'intervistatore per spiegare la problematica considerata sono intrecciati (Kvale, 2007). Secondo l'autrice, nella pratica dell'analisi di intervista il focus sul significato rispetto la

[77] La Grounded Theory è originaria dall'interazionismo simbolico di Glaser e Strauss (si veda ad esempio Glaser, B. G., & Strauss, A. L., 1967); è un metodo di indagine che porta alla scoperta di una teoria a partire da dati empirici che sono stati sistematicamente raccolti attraverso la ricerca. Si tratta di un approccio alla ricerca qualitativa di tipo interpretativo che è stato proposto in ambito sociologico a partire dagli anni '60 (Glaser e Strauss, 1967) La Grounded theory o, più correttamente, la *grounded theory methodology* (Tarozzi, 2008) privilegia la scoperta di una teoria emergente dai dati piuttosto che la ricerca in essi di costrutti preesistenti alla rilevazione stessa: viene dunque proposta come la soluzione metodologicamente più idonea a "mettere ordine" in grandi quantità di informazioni, identificando temi ricorrenti e relazioni fra essi.

[78] L'analisi del contenuto fu sviluppata per studiare la propaganda nemica durante la Seconda Guerra Mondiale e da allora viene utilizzata ampiamente nell'analisi dei media. La codifica dei significati di un testo in categorie ha fatto possibile quantificare la frequenza in cui un determinato argomento viene espresso in un testo, cosi da poterlo comparare e correlare ad altre misurazioni.

forma parlata implica tecniche piuttosto diverse. L'analisi con focus su significato coinvolge la codifica, la condensazione e l'interpretazione di significato (p.104). La presente ricerca segue tale delineamento e si concentra sull'analisi qualitativa del contenuto presentata dagli informatori privilegiati.

L'identificazione del cambiamento concettuale consente la comprensione delle strutture di rappresentazione della conoscenza e dei modi in cui l'istruzione può collaborare efficacemente a produrre la loro ricostruzione di significato. L'applicazione della modellizzazione in classe è un tipo di intervento che favorisce il cambiamento concettuale.

I dati raccolti con gli insegnanti pongono pertanto la questione, coerente con quanto evidenziato su quale sarebbero gli efficaci interventi dell'istruzione per modificare le concezioni preesistenti e svilupparne nuove.

7.2.2 L'identificazione degli elementi significativi e la categorizzazione delle interviste

L'analisi che segue avviene attraverso l'analisi del contenuto. In pratica è stato utilizzato un processo di 'categorizzazione aperta' (Kvale, 2007), che consiste nell'identificare gli elementi significativi delle interviste e successivamente, nell'unificarli in categorie emergenti. Le categorie in quest'analisi sono formate da codici che riguardano il punto di vista degli intervistati sulle particolari tematiche.

L'identificazione degli elementi significativi delle interviste è stata realizzata attraverso un processo ricorrente:

- Nella prima fase sono stati individuati gli elementi più significativi del discorso di ogni insegnante: L'obiettivo è quello di identificare in ogni passaggio del discorso le diverse unità di analisi che possono essere parole, frasi o paragrafi dai quali derivano nuclei di significato. Questi nuclei o elementi sono definiti in letteratura come codici (Lincoln & Guba, 1985).
- Nella seconda fase i discorsi sono stati ridotti, cercando di condensare in frasi sintetiche i principali argomenti trattati "meaning condensation" (Kvale, 2007)

- Nella terza fase i discorsi sono stati organizzati secondo le problematiche simili: occorre trovare possibili tipologie di relazione tra i codici creati.
- Nella quarta fase i codici sono stati categorizzati: sono emerse nove categorie.

Tenendo conto del carattere ricorsivo e ciclico del processo, le rispettive fasi di codifica appena proposte possono subire delle modifiche. Secondo Lincoln e Guba (1985) la costruzione di codici può essere ridefinita finché non vengano colti i diversi nuclei di significato emergenti dai testi esaminati.

Le categorie aperte sono state costruite secondo le problematiche simili e rappresentano il modo in cui gli informatori privilegiati considerano gli argomenti ricercati. Le categorie emergenti sono state definite implicitamente dalle domande dell'intervista.

A partire dalle interviste realizzate con gli insegnanti si osserva che: la modellizzazione matematica è ancora poco affrontata in classe; gli insegnanti hanno difficoltà nell'identificare le competenze di modellizzazione dei loro studenti, gli ostacoli nel processo di modellizzazione riguardano maggiormente la scarsa conoscenza ed esperienza dei ragazzi e aggiungono degli aspetti riguardo il sistema d'istruzione. I suggerimenti sulle possibili vie di intervento nella pratica didattica per promuovere la modellizzazione come una competenza sono stati prevalentemente generici.

Le domande dell'intervista semi strutturata hanno generato nove categorie; di seguito si presenta una sintesi di ognuna di loro attraverso frammenti significativi riportati dagli informatori privilegiati:

Difficoltà nell'identificare competenze degli studenti: scarsa competenza

"Mi verrebbe da dire nessuna, purtroppo [...] sono addestrati a fare dei conti e basta" Ins 1 *"Io noto che in qualsiasi livello capacità di modellizzazione non ce l'hanno in matematica"* Ins 1.

Riconoscimento e individualizzazione di competenze negli studenti

"Sono addestrati a risolvere equazioni letterali in generale" Ins 1. *"Gli studenti più abituati ad andare in laboratorio per le esperienze di fisica o di altro tipo [...], hanno più l'abitudine di*

andare a cercare dei dati e quindi costruire da una situazione reale una struttura matematica" Ins 4. *"… occhio per tornare alla realtà poi i risultati devi riconfrontarlo con la realtà e non tutti hanno questa"* Ins 4.

Diagnosi delle competenze degli studenti: momenti "non formali" della lezione

"Si vede in tanti momenti, più di tutto si vede nelle discussioni in classe indirette […]Nei lavori a gruppi lo studente mette in ruolo tante cose" Ins 2. "*La diagnosi gli vedi quando tenti di fare a punto delle cose in classe* […] *posso fare giochi matematici, in realtà si vede molto la differenza tra quelli che ci provano e quelli che lasciano perdere subito"* Ins 4. *"quando loro devono venire alla lavagna a correggere gli esercizi senza voto […]"* Ins 3.

Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione

"Nel leggere fanno molta fatica a concepire la situazione[…] Sono nei momenti in cui devono passare da un linguaggio informale ad un linguaggio formale matematico, quindi simbolico." Ins 1. *"Fanno veramente fatica a ricavare da un testo delle informazioni […] Non hanno l'abitudine da fare, poi selezionare gli aspetti significativi […] Isolare i dati significativi e cercare, quello è un grosso problema".* Ins 3. *"[…] conoscimento in quel problema di una struttura che potrebbe essere una delle strutture matematiche di riferimento […] la capacità di lavorare con i modelli e la capacità di confrontare, cosa che lo studente non fa*". Ins 2. *"Quali sono gli argomenti che possono servire a loro nell'applicazione […] sembra ogni tanto che il loro bagaglio matematico si svanisca improvvisamente, quindi non si ricordano delle cose"* Ins 3.

Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione: il problema del contesto dell'istruzione

"*lo strumento dell'insegnante è decisivo nello stimolare quindi non mi sembra una caratteristica dello studente quanto più una caratteristica della situazione che si crea in aula"* Ins 2. *"in Italia prevale molto una didattica per esercizio e non problemi"* Ins 3. *"nella esperienza che ho fatto c'era questo tentativo di collegare la matematica alla certezza, al rigore, all'esattezza"* Ins 2.

Le Indicazioni nazionali per il curriculo come supporto didattico all'insegnante

"una cosa importante delle indicazioni è che ti stacca un po' dal libro". Ins 1 *"avere le Indicazioni nazionali che parlano di competenze mi aiuta si […] sono ricche di accenni e sono un po' vaghe, ma ci sono spesso la didattica laboratoriale, l'introduzione della realtà …"* Ins 4.

Aspetti che dovrebbero essere contenuti nelle Indicazioni nazionali per il curriculo

"Sono molto nebulose, sono molto vaghe" Ins 4. *"Il* (libri didattici) *ti davano anche uno strumento con delle attività e delle cose e è quello che manca all'insegnante qui, non ci sono molte attività precotte"* Ins 1. *"Prima […] di credere che sia possibile fare quelle cose deve avere una esperienza che ti fa vedere che è vero. […] Secondo me la ricerca ha un potere di creare dei documenti, dei video, dei protocolli, degli esempi con attività di studenti"* Ins 2.

Promuovere la modellizzazione in classe: cosa potrebbe fare l'insegnante

"Io vedo molto grande il ruolo dell'insegnante. […] (la modellizzazione) *va inserita intanto nella didattica quotidiana"* (Ins 2); *"Fare belle attività interdisciplinari, con docenti di altre materie"* (Ins 4); *"Insegnante deve evidenziare cosa si fa in classe: può sicuramente far notare la differenza che stai usando un modello matematico o che stai facendo un'astrazione o qui stai facendo un'assunzione" (*Ins 2); *"dare tanto spazio a loro nello spiegare la loro soluzione […] si potrebbero dare queste famose attività in gruppo, più che a casa da soli"* (Ins 2). *"stuzzicarli in continuazione […], se si comincia ad abituarli a costruire la formula…[…] magari in modo laboratoriale"* Ins 1;

Le possibili azioni del sistema dell'istruzione nella promozione della modellizzazione in classe

"È difficile anche di progettarla (la modellizzazione) *perché ci sono pochi materiali e per l'insegnante è più complesso"* Ins 4. "*Più ore alla settimana se non veramente si continua a voler fare le cose non avendo tempo"* Ins 3.

Le categorie sopra citate sono state costruite a partire dall'identificazione di codici. Di seguito si presentano i codici presenti in quest'analisi che rappresentano gli elementi più significativi riportati dagli informatori privilegiati. Insieme ai codici si presentano le domande che gli hanno originati e le categorie nelle quali sono stati inseriti.

Domanda 1) Quali sono le competenze di modellizzazione che gli studenti hanno quando arrivano nelle sue classi?

Difficoltà nell'identificare competenze degli studenti: scarsa competenza	
Praticamente nessuna competenza	Prevalenza dell'addestramento a realizzare dei calcoli

Riconoscimento e individualizzazione di competenze negli studenti	
Risolvere equazioni letterali in generale	Riportare esperienze personali e di vita
Cercare i dati del problema	Fare astrazione matematica e confrontare i dati con la realtà
Costruire da situazione reale una struttura matematica	

Diagnosi delle competenze degli studenti: momenti "non formali" della lezione	
Nella pratica di una didattica di sfida	Nei giochi matematici
Discussioni indirette in classe e nei lavori a gruppi	Quando non vengono valutati
Quando esprimono opinioni su un nuovo argomento	Quando vanno alla lavagna a correggere esercizi
Pratiche informali in classe	Nei giochi matematici

Domanda 2) Quali sono secondo lei i maggiori ostacoli che gli studenti affrontano nel processo di modellizzazione matematica?

Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione	
Capire la situazione – decodifica del testo	Passare dal linguaggio informale ad un linguaggio formale matematico
Riconoscere strutture matematiche di riferimento	Organizzazione dei dati per costruire l'equazione
Mettere in relazione i dati del problema affrontato	Lavorare con i modelli e confrontarli
Ricavare da un testo delle informazioni e isolare i dati significativi	Confrontarsi con la credibilità dei procedimenti
Flessibilità di pensiero nella costruzione del modello	Fare una stima
Scelta del contenuto matematico appropriato alla situazione	Lavorare con il concetto proporzionale

Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione: il problema del contesto dell'istruzione	
Didattica standard: libro didattico; lavagna; verifica	Il programma da compiere
Ci vuole l'azione stimolante del docente	Didattica basata su esercizi e non su problemi
Paura dell'errore	

Domanda 3) Come le Indicazioni Curriculari possono aiutare gli insegnanti a venire incontro allo sviluppo di tale competenza?

Le Indicazioni nazionali per il curriculo come supporto didattico all'insegnante	
Distacco da una matematica basata solo sul libro di testo	Incentivo all'introduzione della realtà
Sostenere la decisione dell'insegnante nella scelta dei contenuti da affrontare	Incentivo alla didattica laboratoriale

Aspetti che dovrebbero essere contenuti nelle Indicazioni nazionali per il curriculo	
Scrittura in modo diverso: organizzare e sintetizzare il testo	Includere dei protocolli di “racconto di esperienza”
Far prevalere maggiormente lo stimolo della didattica laboratoriale	Creare proposte didattiche più credibili
Contenere degli esempi di attività didattiche	Sostenere il docente nella didattica assunta

Domanda 4) Cosa si potrebbe fare in classe per promuovere la modellizzazione come una competenza?

Promuovere la modellizzazione in classe: cosa potrebbe fare l’insegnante	
Inserire la modellizzazione nella didattica quotidiana	Dare più spazio allo studente per esporre il suo ragionamento
Cominciare la lezione o introdurre un argomento con le attività	Ridurre la correzione punto a punto
Fare didattica in modo laboratoriale	Mettere in luce le ipotesi implicite create dagli studenti
Fare attività interdisciplinari	Abituare gli studenti a costruire le formule
Evidenziare cosa si fa in classe: Uso di un modello, astrazione, assunzione	Appassionare gli studenti da piccoli alla matematica
Esplicitare cosa sarebbe il modello, le sue dimensioni e distanza con la realtà	Lavorare a gruppi in classe
Promuovere il ragionamento matematico congetturale	Iniziare la modellizzazione prima delle secondarie
Competenza nell’uso di strumenti matematici	

Le possibili azioni del sistema dell’istruzione nella promozione della modellizzazione in classe

Avere più materiale didattico di riferimento	Aumentare le ore di matematica in classe
Avere dei bravi maestri	La valutazione formativa del docente

7.3 Riflessioni sugli elementi significativi emersi dagli informatori privilegiati

7.3.1 Difficoltà nell'identificare competenze degli studenti: scarsa competenza

In questa categoria si presenta la concezione dell'insegnante che, interrogato sulle competenze di modellizzazione dei suoi studenti all'inizio del corso, praticamente non riesce ad identificarle, originando i codici:

- Praticamente nessuna competenza
- Prevalenza dell'addestramento a realizzare dei calcoli

L'insegnante 1 risponde che i suoi studenti praticamente non hanno delle competenze di modellizzazione quando arrivano nella sua classe. Leggendo il frammento dell'intervista si osserva che l'insegnante mostra qualche indizio sulla propria competenza del significato di tali competenze indagate:

1) Quali sono le competenze di modellizzazione che gli studenti hanno quando arrivano nelle sue classi?

Ins 1: Che domandaccia**, mi verrebbe da dire nessuna, purtroppo**! Loro **sono addestrati a fare dei conti e basta**, ad essere sincera. È brutto da dire ma è cosi. Io noto **che in qualsiasi livello la capacità di modellizzazione non ce l'hanno in matematica**. Se gliela propone in un'altra disciplina vedo che in fisica fanno molto meno fatica rispetto che in matematica. Quando devono trasformare un testo in una formula, in un'equazione, in un'espressione fanno tantissima fatica.

Tale convinzione è proposta soltanto da un insegnante. Si osserva intanto che la **competenza modellistica non è del tutto chiara** a tutti gli intervistati; l'espressione: *"Sono addestrati a fare dei conti e basta"* carica ancora un significato di una pedagogia direttiva. Trattandosi di un'analisi qualitativa del contenuto, l'interpretazione delle risposte non si limita ad identificare delle parole, ma il significato delle affermazioni. L'intervista con risposte aperte (Kvale, 2007) è un'ottima tecnica per cogliere la rappresentazione assegnata dal soggetto. Riferendosi alla precedente citazione dell'insegnante 1, la sua comprensione riguardo il concetto di competenza viene esplicitata anche nell'affermazione: *"Io noto che in qualsiasi livello la capacità di modellizzazione non ce l'hanno in matematica"*. L'interpretazione quindi potrebbe essere la sua scarsa comprensione riguardo il concetto; non si esclude il fatto che tale insegnante possa considerare che i suoi studenti siano proprio incompetenti nel modellizzare. La seconda possibilità ci sembra più improbabile, visto che si tratta di studenti della scuola superiore di secondo grado; se hanno raggiunto tale livello probabilmente sono dotati di certe conoscenze e abilità, anche se ad un livello elementare.

7.3.2 riconoscimento e individualizzazione di competenze negli studenti

In questa categoria si incontrano gli elementi significativi prodotti dagli insegnanti nel riconoscere ed identificare le competenze di modellizzazione degli studenti quando arrivano nelle loro classi. I codici generati si riferiscono alle competenze presentate:

- Risolvere equazioni letterali in generale

> Ins 1: Quello si, **sono addestrati a risolvere equazioni letterali in generale,** per quello sono addestrati veramente.

L'insegnante 1 identifica la competenza di risolvere equazioni letterali in generale, ma prosegue utilizzando il termine "addestrati". Non abbiamo abbastanza informazioni sul contesto per affermare che lui abbia un modello comportamentista di apprendimento; può essere più una parola scelta in contesto. Intanto, come riportato nella categoria A, l'insegnante dà un altro indizio della sua limitata consapevolezza rispetto alla competenza indagata.

L'insegnante 2 invece sembra di intendere per competenze di modellizzazione le abilità e le conoscenze che vengono messe in atto durante l'intero processo, riconoscendo anche le sue proprie difficoltà nel identificarle:

- Riportare esperienze personali e di vita

> Ins 2: Gli studenti sono diversi, io faccio fatica a pensare […] ci sono tanti fattori che influenzano e **anche esperienze di vita, esperienze personali,** anche lì un pochino anche sociale e familiare, nel senso che può darsi che vivano in contesti un pochino più**, che sono più abituati a capire qual è il ruolo della scienza**.

- Cercare i dati del problema
- Costruire da situazione reale una struttura matematica
- Fare astrazione matematica e confrontare i dati con la realtà

> Ins 4: Allora […] io lavoro un po' dappertutto, e **quelle che hanno, questa è una domanda molto difficile,** in effetti. Perché sono tanti casi diversi e diciamo che **gli studenti più abituati ad andare in laboratorio** per le esperienze di fisica o di altro tipo, fanno anche alla scuola media laboratorio, **hanno più l'abitudine di andare a cercare dei dati e quindi costruire da una situazione reale una struttura matematica** diciamo quello li. […] Nella scuola media fanno delle attività laboratoriali, non dappertutto, ma in tanti casi lo fanno e quello secondo me aiuta molto. […]Allora, ci sono per la realtà magari quelli che hanno un **po' l'occhio a tornare alla realtà.** Perché, appunto, dai dati reali o dalle situazioni reali, fai una astrazione matematica poi i risultati devi riconfrontarlo con la realtà e non tutti hanno questa … non tanti.

È importante sottolineare che le competenze riportate dall'insegnante 4 si riferiscono in particolare agli studenti che erano abituati ad andare in laboratorio per le esperienze nella materia di fisica oppure alla scuola media. L'insegnante evidenzia anche che "*fare astrazione matematica e confrontare i dati con la realtà"* è una competenza non posseduta da tutti gli studenti.

Gli insegnanti espongono in modo poco articolato le competenze di modellizzazione dei loro studenti; è probabile che non tutti le abbiano chiare o che riescano ad identificarle in un'intervista, nonostante la possibilità di parlare a lungo su di esso e le domande complementari sottoposte dal intervistatore. L'insegnante 1 riporta la competenza di "*risolvere equazioni letterale in generale*", segnalando come si sia sviluppata attraverso "*l'addestramento*". Ma è giusto questo che la competenza va a combattere: In una fase estremamente dinamica di cambiamenti delle conoscenze e dell'organizzazione dell'istruzione, i tradizionali modelli basati sui processi di trasmissione della conoscenza e sull'autoriproduzione di schemi educativi sempre identici a se stessi non sono più adeguati (Perrenoud, 2002).

Altre competenze sono state riportate durante l'intervista; spesso l'identificazione è assunta dagli informatori come "scarsa" e si incontrano nella categoria *Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione*: scarsa conoscenza degli studenti – problema legato alle conoscenze discenti.

7.3.3 diagnosi delle competenze degli studenti: momenti "non formali" della lezione

In questa categoria vengono presentate le situazioni in classe che gli informatori privilegiati hanno identificato come momenti per conoscere le competenze di modellizzazione degli allievi. I codici si riferiscono ai rispettivi momenti individuati:

- Nella pratica di una didattica di sfida

I: E come fa a diagnosticarle?

Ins 1: Ma perché io **ho sempre fatto una didattica sempre abbastanza di sfida con loro.** Adesso in quarta superiore ho dovuto introdurre le serie, cioè successioni. Successioni molto banali, l'aritmetica e la geometrica: ho proposto ad alcune, qual è la regola quale non è la regola, cerchiamo di scrivere qual è la formula che permette …. **Hanno fatto una fatica esagerata** […] Quando poi mi sono ritrovata a dire, bene cerchiamo di lavorare con le variabili e cerchiamo di capire qual è la somma, se è finita, se non è finita… gli avevo quasi persi […] Però banalmente hanno fatto fatica a scrivere quello $n+1$ uguale a n + *una certa costante*. […] Per quanto riguarda ad altre esperienze di modellizzazione […] Abbiamo fatto le probabilità: In generale cercavo sempre di dargli qualche stimolo**, un problema una cosa del genere poi dovevamo cercare di formalizzarlo**. Ogni volta **ho incontrato degli**

ostacoli, perché loro **fanno proprio fatica**, magari te la azzeccano anche la regola poi nel momento che devono esplicitare nel linguaggio [matematico][79] fanno fatica.

L'insegnante 1 afferma che quando propone la pratica di una "didattica sfidante" in classe, riesce a conoscere un po' di più sulle competenze dei suoi studenti. Riporta una situazione particolare avvenuta in una quarta superiore: ha introdotto le serie aritmetiche e geometriche e ha istigato gli studenti a costruire il rapporto esistente fra i termini di una serie aritmetica *"a scrivere quello n+1 uguale a n + una certa costante"* ; purtroppo quello che è riuscita ad identificare è la fatica esagerata riscontrata dagli studenti nel provare a costruire il modello matematico che rappresentasse tale serie.

L'insegnante 2 riporta delle situazioni in generale in cui si possono conoscere le competenze degli studenti; la sua riflessione ha generato i seguenti due codici:

- Discussioni indirette in classe e nei lavori a gruppi
- Quando esprimono opinioni su un nuovo argomento

Ins 2: Si vede in tanti momenti, più di tutto **si vede nelle discussioni in classe indirette** o ancora di più **nei lavori a gruppi** come si fa più spesso. Nei lavori a gruppi lo studente **mette in ruolo tante cose** però fa fatica magari, anche quello che ha delle idee giuste nel parlare con gli altri cosi. […] secondo me **l'insegnante è molto importante per farlo venire fuori,** quindi magari le discussioni di classe sono un momento in cui si apprende un po' di più il problema […] nel momento in cui **si comincia a parlare di un argomento nuovo e si presenta una situazione allora quando gli studenti danno opinioni,** ecc… ecc… lì si sente un po' il suono diverso in chi cerca di trovare una distanza rispetto alla realtà con il modello, rendendo più credibile quello che dice o di **confrontare la soluzione del modello con quello che dice**, in realtà si sente nelle parole di quelli che usano qualcosina di più ….

Il lavoro in gruppo è una dinamica che fornisce la possibilità al partecipante ad esprimersi insieme ad altri compagni. In effetti Macedo (2005) sottolinea che attualmente viene molto valorizzato il modo di lavorare in squadra nel quale tutti sono coinvolti, in maniera interdipendente, tanto più quanto siano diversi il livello di partecipazione e la complessità dei compiti di ognuno. L'insegnante 2 riporta il fatto che è in questi momenti che "*lo studente mette in ruolo tante cose*". Lo stesso insegnante sottolinea l'importanza del compito del

[79] La parentesi quadra è utilizzata per le espressioni aggiunte dall'intervistatore durante la trascrizione dei dati per rendere la risposta più chiara.

docente: "*l'insegnante è molto importante per farlo venire fuori*". Perrenoud (2002) affronta giustamente il trattamento del mestiere dell'insegnante in modo concreto, e propone un elenco delle competenze che contribuiscono a ridisegnare la professionalità insegnante. L'accento è posto sulle competenze emergenti: la rappresentazione della professione dell'insegnante e della sua evoluzione ha come scopo di "orientare la formazione continua per renderla coerente con i rinnovamenti in corso nel sistema educativo".

- Pratiche informali in classe
- Nei giochi matematici
- Quando non vengono valutati

Ins 4: […] per **la diagnosi gli vedi quando tenti di fare appunto delle cose in classe.** Io ho la fortuna che ho questo ruolo strano che ogni tanto manca un docente curricolare e vado io, ma non sono un docente curricolare. Nonostante **possa fare giochi matematici**, **in realtà si vede molto la differenza tra quelli che ci provano e quelli che lasciano perdere subito**, dopo che vedono la difficoltà prevista; lì si vede molto in queste attività un po' **più informali** […].

Ins 2: Secondo me più in classe […], quando si sa che l'insegnante gli sta ascoltando **ti permette di parlare e non ti valuta** […] Secondo me in quei momenti lì l'insegnante ha l'occasione di diagnosticare.

Gli insegnanti riportano importanti momenti per diagnosticare le competenze, riferendosi a situazioni in cui lo studente ha proprio l'opportunità di articolare le sue abilità e le sue conoscenze riguardo la situazione in questione. L'insegnante 4 afferma che non essendo un docente curricolare a volte sostituisce dei colleghi e quindi ha l'opportunità di realizzare giochi matematici con i discenti, riuscendo perciò a identificare delle competenze. La pratica dei giochi matematici è anche un'eccellente metodologia per sviluppare un insieme di competenze più ampio di quelle matematiche, mettendo in pratica la riflessione e la progettazione delle strategie da utilizzare, la collaborazione con il gruppo, l'utilizzo delle proprie conoscenze in ambiti disciplinari diversi, ecc. Secondo Van Lint (2007) a queste operazioni si aggiunge la conoscenza dei propri processi mentali e la capacità di operarli strategicamente sulla base delle necessità. Il gioco complesso favorisce poi la costruzione di vere e proprie competenze, poiché promuove la mobilitazione di conoscenze e abilità in una situazione problematica nuova.

Anche l'insegnante 3 riporta i momenti in cui gli studenti non vengono valutati come un'importante occasione per conoscere le loro competenze; sottolinea anche l'occasione in cui gli studenti vanno alla lavagna a correggere degli esercizi:

- Quando vanno alla lavagna a correggere esercizi

Ins 3: **A conoscere** [lo studente] ci vuole tanto tempo, […] nella mia prima ad esempio comincio a capirli un po' adesso [metà ottobre]. […]una cosa per esempio su cui insisto molto è che **loro devono venire alla lavagna a correggere gli esercizi senza voto […]** questo mi fa piacere**, devono essere loro che vengono e mi dicono** "non mi è venuto l'esercizio, posso venire a correggerlo alla lavagna" e secondo me è solo **con la correzione non fatta da me che**, **posso intuire quali siano i passaggi** ma loro hanno una creatività da questo punto di vista incredibile […]. E per questo ci vogliono un paio di mesi prima di arrivare ad avere da parte di tutti, questa consapevolezza.

L'insegnante 3 racconta come di solito gestisce la correzione degli esercizi in classe, in cui gli studenti vanno alla lavagna a risolverli. La correzione fatta dagli studenti è un momento interessante sia per conoscerli meglio che per sviluppare competenze matematiche specifiche. Nonostante l'insegnante abbia un'intenzione che dal suo punto di vista sembra positiva, continua a lavorare un po' sulla didattica standard: esercizi, compiti, correzioni, lavagna.

7.3.4 Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione

In questa categoria gli informatori privilegiati elencano i maggiori ostacoli affrontati dagli studenti riguardo lo svolgimento del processo di modellizzazione matematica; tale difficoltà viene vincolata alla loro "limitata" conoscenza e mancanza di abitudine.

- Capire la situazione – decodifica del testo

I: Quali sono secondo lei i maggiori ostacoli che gli studenti affrontano nel processo di modellizzazione matematica?

Ins 1: […] per quanto vedi qua [frammenti dei protocolli] e anche **nel leggere fanno molta fatica a concepire la situazione** però volendo, ti ripeto, **fuori delle ore di matematica sono convinta che loro il problema lo risolverebbero**. Però non riuscirebbero a risolvere con il formalismo della matematica e tu puoi anche guidarli ad arrivare alla risoluzione diciamo blanda, senza formalismo … è proprio il momento formalismo – non formalismo che diventa un pasticcio. Invece nelle ore di matematica non hanno nessuno dei due.

Ins 3: **Fanno estremamente fatica tutti**. È un lavoro secondo me che **bisogna cominciare dalla prima con dei problemi molto semplici**. Perché insistere fino in quinta proprio con la **decodifica** di un testo, ma non un testo completamente matematico o scientifico,[…] chiedere alla fine, spieghi in due righe, tre righe cosa hai capito o rispondere banalmente a delle domande. Trovo che sia molto complesso. […]Noi facciamo un test d'ingresso che non è assolutamente matematico, [si tratta di] un articolo o un saggio breve e loro devono desumere delle informazioni, e ci sono dei risultati talvolta terribili […] In prima arrivano e **fanno veramente fatica a ricavare da un testo delle informazioni**. Ribadisco, **un testo assolutamente neutro.**

L'insegnante 1 assicura che la consapevolezza di essere a una lezione di matematica è un ostacolo in più per lo studente, affermando che se la stessa situazione fosse proposta fuori della disciplina di matematica lo studente probabilmente la risolverebbe, ma comunque senza il formalismo della matematica. Quello che ci domandiamo è: il fatto che "*fuori delle ore di matematica sono convinta che loro il problema lo risolverebbero"* significa quindi che riuscirebbero a trovare una soluzione accettabile? Se è cosi, a cosa serve il formalismo matematico?

L'insegnante 3 sostiene che la decodifica di un testo, anche se non si tratta di un problema matematico, sia un complesso compito per la maggior parte degli studenti, e offre un suggerimento: "*bisogna cominciare dalla prima con dei problemi molto semplici".* Il fatto è che tale proposta è presente nelle linee guide delle scuole superiore di secondo grado, includendo i Licei[80], gli Istituti Tecnici[81] e Professionali[82]. Nonostante sia riconosciuta l'importanza della modellizzazione nello sviluppo delle competenze matematiche e la presenza di tale argomento nel curriculum della scuola superiore, esiste ancora un notevole divario tra gli ideali dell'innovazione del curriculum scolastico e l'insegnamento praticato tutti i giorni. In particolare, le autentiche attività di modellizzazione sono ancora piuttosto rare nelle lezioni di matematica (Blum et al., 2002).

[80] LICEI - Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione, Decreto 22 Agosto 2007 , n. 139 ai sensi dell'articolo 1, comma 622, della legge 27 dicembre 2006, n. 296 e articolo 2 comma 4 del Regolamento dei licei.
[81] ISTITUTI TECNICI - Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento (d.P.R. 15 marzo 2010, articolo 8, comma 3)
[82] ISTITUTI PROFESSIONALI- Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento (d.P.R. 15 marzo 2010, n. 87, articolo 8, comma 6)

- Riconoscere strutture matematiche di riferimento

> Ins 2: Sicuramente pensando un po' di casi, **la fase difficile è quella iniziale**. **La formulazione del problema**, iniziale intendo **la lettura del problema e riconoscimento** in quel problema di **una struttura che potrebbe essere una delle strutture matematiche di riferimento**. Sto parlando di strutture matematiche ma può essere l'equazione, il sistema. Quella fase è difficile da un punto di vista, dipende un po' dal setting, nel senso che se diventa un gioco o se diventa un tentare più o meno consapevole può darsi che riescano a trasformare il problema, a cercare variabili, a cercare costanti… anche in un modo un po' per tentativi o un po' anche poco consapevole senz'altro […].

L'insegnante 2 evidenzia il fatto di cercare lo strumento matematico anche nell'analizzare i frammenti di modellizzazione:

> Ins 2: Che c'è uno molto addestrato e l'altro molto meno in matematica, fa più ragionamenti immediatamente, ragionamenti matematici che **cerca subito lo strumento:** *devo fare la proporzione, devo fare* … però non vede ad esempio che può fare un confronto con i dati perché non ci sono numeri come dici tu*, mi mancano dati sostanzialmente*. Da un certo punto di vista **pensa matematico,** capisce di **trovare lo strumento però troppo legato ai dati** e sei tu che gli devi dire**, *guarda che ci sono dei riferimenti reali che tu puoi utilizzare*,** quindi …. La cosa che mi stupisci un po', ma non troppo è che alla fine convince molto di più il ragionamento del primo che quello del secondo. Da un lato ripeto, questo atteggiamento un po' ingabbiato, non si accorge bene di quello che dice…

Il riconoscimento di una struttura matematica di riferimento è una competenza fondamentale nello stabilire le variabili di un problema. Herget e Richter (2012) si riferiscono all'"*object in the picture as an estimator*" come struttura di riferimento per stabilire le relazioni appartenenti ai problemi riportati come immagini[83].

- Mettere in relazione i dati del problema affrontato

L'insegnante 1 sottolinea la difficoltà nel relazionare i dati presenti nel problema affrontato e l'esemplifica attraverso la sua analisi del frammento dell'attività del taxi:

> Ins 1: La seconda impressione che ho avuto leggendo questo è che loro, poi io ti parlo della mia esperienza, **loro rispondono alla domanda e chiudono il cassetto**, leggono l'atra domanda e chiudono il cassetto e non pensano mai che una domanda possa aiutare a rispondere all'altra. Quindi qui secondo me lui non ha pensato a quota fissa di spostamento, che era un'altra

[83] Si veda ad esempio l'attività della Statua proposta in questa ricerca.

domanda, quindi … non ha più ripensato a questa tabella qua. Ha pensato "io ho i soldi, ho i chilometri e dovrebbero darmi 10" e fine. **Tutto quello che ha fatto prima lo ha cancellato**. Questo è un problema che ho sempre avuto io**.**

Nelle interviste realizzate con gli insegnanti è ricorrente che **la creazione del modello matematico** sia il passaggio più complesso del processo, punto in cui si trovano i maggiori ostacoli affrontati dagli studenti. La difficoltà nel costruire il modello matematico ha originato cinque codici:

- Ricavare da un testo le informazioni e isolare i dati significativi
- Flessibilità di pensiero nella costruzione del modello

Ins 4: Loro **non hanno l'abitudine di fare** [modellizzazione], **poi selezionare gli aspetti significativi** […], anche qui si vedeva nell'attività sul testone di Adenauer che c'era "*ma io dovrei misurare cosa?"* **Isolare i dati significativi e cercare,** quello è un grosso problema. Poi se parliamo di modello matematico in senso generale è che uno **il modello matematico lo deve fare in modo versatile**, in modo diverso secondo la situazione e questa flessibilità non è cosi consueta negli studenti. Secondo me in generale è questo il nostro problema.

Ins 1: Quindi, forse da un certo punto di vista loro ce l'hanno la capacità di modellizzazione ma **quando gli viene richiesto di passare dal modello nella testa al modello subito simbolico matematico fanno fatica perché sono due cose per loro che non sono collegate**. Perché il modello simbolico matematico è legato ai calcoli, alle espressioni, alle equazioni alle disequazioni e tutto il resto. Quando devono legare un pensiero un pochino più elaborato con questa simbologia crollano completamente.

Il fatto degli studenti non siano abituati a fare attività di modellizzazione, come afferma l'insegnante 4, è un fenomeno spesso verificato. L'impostazione di tale compito e la risoluzione di un problema di questa natura è atipico in una lezione di matematica e è molto insolito , sia per gli alunni che per gli insegnanti (Herget, 2002).

- Scelta del contenuto matematico appropriato alla situazione

Ins 3: La comprensione del testo**, quali sono gli argomenti che possono servire a loro** nell'applicazione della…. Perché **sembra ogni tanto che il loro bagaglio matematico svanisca improvvisamente**, quindi non si ricordano delle cose che poi **dovrebbero essere**

per tutte le cose, le proporzioni sono un discorso trasversale, si usa sempre in tante discipline, loro fanno chimica, fanno scienza insomma e pure una cosa che per loro è una cosa che abbiamo fate prima o non me lo ricordo più.

Distinguere quale contenuto matematico sarebbe il più adatto a risolvere una situazione è stato un altro punto di intralcio presente nella pratica della modellizzazione. L'insegnante 3 aggiunge che a volte pare che "*il loro bagaglio matematico svanisca".* Da un certo punto di vista se il sapere è costruito non scompare ma si integra a altre conoscenze.

- Passare dal linguaggio informale al un linguaggio formale matematico

Ins 1: Secondo me sono nei momenti in cui devono **passare da un linguaggio informale ad un linguaggio formale matematico, quindi simbolico**. Poi ci sono vari ostacoli al fatto che si tratti di un problema non standard come in questo caso, per cui c'è la possibilità che loro non sappiano che cosa fare. Se una classe è abituata a lavorare con stimoli diversi potrebbe arrivare ad una soluzione informale fare pratica per arrivare alla soluzione formale**.**

L'insegnante 1 mentre analizzava i frammenti[84] riportati, identifica un altro problema collegato alla creazione del modello:

- Organizzazione dei dati per costruire l'equazione

Ins 1: Quando viene fuori il discorso dell'equazione.. lì lo perde completamente. […] E quindi il discorso è lo stesso, qui addirittura ha mischiato le due cose, ha pensato: c'è un costo a seconda dei chilometri però mi devo ricordare della quota fissa quindi ha immaginato che la quota fissa fosse il costo del chilometro e quindi ha moltiplicato per 3 e buona notte! E poi ovviamente **ha utilizzato la x perché ovviamente la x è quella che si usa nell'equazione**.

Se esiste l'abitudine di lavorare con stimoli diversi in classe, si potrebbe arrivare dal linguaggio informale al formale: è una deduzione valida e ampiamente comprovata nelle ricerche matematiche (Blum & Niss, 1991; Maaß, 2007). Nella tappa verso la formulazione del problema, gli studenti hanno l'opportunità di svolgere differenti competenze come: cercare e analizzare informazioni e dati, utilizzare differenti rappresentazioni, formulare e giustificare congetture.

- Lavorare con i modelli e confrontarli
- Confrontarsi con la credibilità dei procedimenti

[84] Consultare i frammenti presenti nelle appendici per una maggiore comprensione del fenomeno.

Ins 2: Una volta individuato un modello matematico, uno strumento matematico per risolvere il problema poi dopo diciamo entrano in gioco altri fattori, **la capacità di lavorare con i modelli e la capacità di confrontare, cosa che lo studente non fa.** Il risultato ottenuto nella fase interna al modello e poi usare il dato ottenuto per rispondere una domanda o per uscire dal modello per tornare al mondo reale. Però questa **fase reale secondo me è meno difficile** della prima perché **è più appassionante per lo studente**. Facciamo eccezioni agli studenti che hanno paura di tutto e quindi se sono fuori dall'ambito di valutazione all'inizio credo che sia la fase che gli coinvolge un po' di più […] **se non sono molto sul contratto didattico**, se non sono molto rigidi e non hanno molta paura questa **fase qui è più naturale**, la curiosità di vedersi dopo tutta questa magia che ho fatto **e vedere se quello che ho trovato è realistico,** quindi secondo me è **la fase più difficile in assoluto** per molti studenti **è la prima.**

Alla domanda se alle superiori gli studenti sono più abituati a confrontare le loro soluzioni, l'insegnante risponde:

Ins 2: […] è un po' sotto banco nella classe, è un po' come dirti, **più un confrontarsi per vedere se il procedimento era corretto e convinceva ecc…** se non c'è un'attività specifica proposta dall'insegnante su una discussione magari rischiano più di diventare "ti è venuto, non ti è venuto" , più scolastico che…. C'è un confronto continuo in classe ma non di quel tipo che dici tu. **Non sulla credibilità dei procedimenti** o una **discussione scientifica ma più uno scambio se tutti hanno trovato o non hanno trovato.**

L'insegnante 2 evidenzia che la tappa dopo la creazione del modello matematico è più appassionante per lo studente, nonostante evidenzia che *"la fase più difficile in assoluto per molti studenti è la prima"*, ossia la costruzione del modello.

Nel dettagliato studio sulle competenze di modellizzazione degli studenti realizzato da Maaß (2006; 2007) viene evidenziato che la validazione dei risultati non è praticamente mai fatta da loro, generando degli errori riguardo l'intera soluzione.

L'insegnante 2 sottolinea che "*se* [gli studenti] *non sono molto sul contratto didattico"* riescono a coinvolgersi molto di più nella parte reale del problema. L'azione dell'alluno è frequentemente influenzata dal contratto didattico; definita da Brousseau (1986) come "l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante" è un fattore che condiziona direttamente lo studente nella realizzazione di un compito. L'autore sottolinea che non si tratta di accordi imposti dalla scuola o dagli insegnanti stabiliti con gli alunni, ma è una concezione della scuola e della matematica.

Anche l'insegnante 1 sottolinea la barriera imposta dal contratto didattico:

> Ins 1: **Loro si lasciano troppo influenzare.** Ma sai perché secondo me? **Perché è il contratto didattico,** se tu gliel'hai dato a qualcosa servirà se no, non glielo avresti dato. E quindi l'hanno usato per rispondere, almeno questa è la mia ipotesi.

- Fare una stima

La difficoltà nel fare una stima è stata evidenziata quando gli insegnanti hanno analizzato i frammenti riguardo l'attività della Statua[85]:

> Ins 1: E poi stavo pensando anche che **loro non sanno stimare**… Va beh, non centra con la modellizzazione però in questo caso centra… Lui cos'hai detto*: Due metri ci può anche stare*. Poi ha detto *che sarebbe 15 metri*, *che sarebbero tre volte la testa*, ma la testa non è un terzo del corpo. **E penso che sia abbastanza scontato**… chissà perché ha detto che è un terzo del corpo moltiplicato per tre. Mi incuriosisce per questo. È carino questa cosa!

> Ins 2: L'idea era giusta però il fatto che dica, quando è che **fa una certa stima sbagliata ad un certo punto…** *c'è la testa è alta come il bambino* ma invece manca quasi meta, è molto più realistico a questo punto. […] Un'altra cosa che mi sembra è che entrambi abbiano ad un certo punto è una proporzione tra la testa e il corpo cambiano che è fuori della matematica. […] questo molto più inventato, ¼ o 1/7 più o meno… circa 7 volte.

- Lavorare con il concetto proporzionale

Le difficoltà nel lavorare con il concetto proporzionale sono state citate dall'analisi dei frammenti dell'insegnante 4. Lui evidenzia che la difficoltà di lavorare con tale concetto è stato rilevato nelle prove Invalsi.

> Ins 4: Tieni conto che, ora che abbiamo l'Invalsi è venuto fuori che una delle criticità dell'insegnamento è il concetto proporzionale, tutto quello che si deve fare con le proporzioni è una critica. Che è importantissima… è un'area molto molto….. Quindi ci mettiamo **due problemi** in questo: Uno **recuperare dati** da una situazione reale o abbastanza … i dati che non

[85] L'informatore si riferisce all'analisi dell'attività della Statua utilizzata nella ricerca.

sono scritti esplicitamente e l'altra è in **relazione proporzionale**, questo era molto difficile, anche se di una semplicità, questo proprio dimostra che è probabilmente anche un piccolo **buco nella scuola italiana** perché … vedrai che tantissime statistiche delle Invalsi dimostrano questo.

7.3.5 ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione: il problema del contesto dell'istruzione

In questa categoria si elencano gli ostacoli che, secondo gli informatori privilegiati, riguardano il sistema didattico dell'istruzione, comprendendo il curriculum, l'organizzazione della scuola e l'azione del docente.

La pratica di una didattica standard viene individuata come un ostacolo alla modellizzazione; tale riferimento è stato fatto anche nella precisazione di altri fattori relazionati direttamente a tale pratica: l'uso retorico del libro didattico, l'esposizione del contenuto alla lavagna, la verifica che attende la riproduzione dei contenuti e la meccanicità degli esercizi. Nonostante sia inserita nella categoria del sistema dell'istruzione, l'utilizzo di tale didattica viene segnalato anche come una decisione dell'insegnante:

- Didattica standard : libro didattico; lavagna; verifica
- Ci vuole l'azione stimolante del docente

Ins 2: […]Secondo me **lo strumento dell'insegnante è decisivo nello stimolare quindi non mi sembra una caratteristica dello studente quanto più una caratteristica della situazione che si crea in aula**. […] è anche una conquista secondo me, non la vedo come una caratteristica dello studente ma una caratteristica del setting didattico, nel setting standard il confronto una volta che c'è lo stesso numero quello che è fatto è fatto.

- Paura dell'errore
- Il programma da compiere

Ins 2: […] **grosso ostacolo è che quando lo studente deve provare, deve tentare,** non solo lui ma tutto il **sistema si blocca. Perché c'è l'errore, non c'è la verifica, c'è il programma, ma poi c'è un'apertura**. C'è un'interpretazione, non c'è il giusto e lo sbagliato, non c'è l'otto e il nove, è difficile da ottenere perché allora: *lei ha sbagliato e ha fatto bene perché ha un voto oppure perché non c'è un voto*, perché non valuti abbastanza, perché…. C'è l'incubo di tutti…. Almeno nell'esperienza che ho fatto c'era questo tentativo di collegare la matematica alla certezza, al rigore, all'esattezza.

La didattica standard può rappresentare un importante ostacolo allo svolgimento della modellizzazione in classe. A parte la proposta dello sviluppo delle competenze, che non trova un terreno particolarmente favorevole nella pratica della didattica standard, il mondo di oggi offre svariati stimoli decisamente più interessanti di tale pratica. La domanda che ci poniamo è la seguente: quale dovrebbe essere l'interesse dello studente di fronte alla dinamica del docente di insistere a presentare formule su formule e esercizi meccanici?

La realizzazione delle tradizionali pratiche in classe: esporre la teoria, dare degli esercizi e correggerli alla lavagna è certamente un ostacolo alla modellizzazione. Nel modellizzare si mettono in gioco le proprie conoscenze e competenze per risolvere un problema del quotidiano, si assume un ruolo attivo nella costruzione del proprio sapere. Tale svolgimento richiede una riflessione da parte dello studente sui processi per risolvere il problema, legati alle proprie abilità di pianificare strategie risolutive affrontando ambiti problematici più complessi. Come ritiene Biembengut e Hein (2000), l'insegnamento della matematica attraverso la modellizzazione non è centrato soltanto nel dirigere gli studenti alla costruzione di modelli matematici, ma nel dare loro la possibilità di interpretare la matematica.

- Didattica basata su esercizi e non su problemi

Ins 4: Poi anche dice **costruire il modello è molto diverso se parliamo da una situazione reale o da un problema concreto oppure da un modello matematico su una situazione matematica già impostata.** Quello si, quelli che lo sanno fare, lo sanno fare insomma. Il fatto è che **in Italia prevale molto una didattica per esercizio e non problemi**, quindi una didattica basata sull'esecuzione di alcune … i modelli sono molto importanti per connettere molte cose che sono memorizzate, per quello che non andarsi a cercare le cose che ha studiato non ti dicono dove sono…. C'è poca trasferibilità su questo aspetto.

I libri di testo di matematica sono pieni di esercizi, più di quanto lo siano quelli relativi ad altre discipline. Saper fare degli esercizi non significa ancora saper risolvere problemi in svariati contesti, come fuori della scuola o quelli inediti, spesso caratterizzati dalla necessità di combinare varie conoscenze disciplinari. L'idea che l'esercizio sia solo una fase iniziale e limitata in cui si apprende a manipolare un concetto, mentre la fase importante sia quella della risoluzione dei problemi è un'idea già consolidata della matematica e del suo insegnamento, purtroppo quello che succede ancora nella prassi non riporta a tale fatto.

Blum e Niss (1991) richiamano l'attenzione sul fatto che, oltre ai processi complessi di problem solving che sono rari nell'istruzione matematica, ci sono dei ristretti collegamenti tra la matematica e la realtà: da un lato esiste un'*applicazione diretta* già sviluppata "standard" dei modelli matematici a situazioni reali con un contenuto matematico, dall'altro lato i problemi puramente matematici "*travestiti in parole*" in altre discipline o della vita quotidiana. Come trattato nel capitolo della modellizzazione matematica, i *problemi a parole* spesso producono un'immagine deformata della realtà, essendo a volte utilizzati intenzionalmente in modo da servire solo a fini didattici.

7.3.6 le indicazioni nazionali per il curriculo come supporto didattico all'insegnante

In questa categoria si presentano aspetti rappresentativi delle Indicazioni Nazionale per il Curriculo che, secondo gli informatori privilegiati, sostengono l'insegnante nella pratica didattica. In risposta alla domanda su come le Indicazioni Curriculari possano aiutare il docente a venire incontro allo sviluppo della competenza indagata è stato elencato:

- Distacco da una matematica basata solo sul libro di testo

Ins 1: Allora, c'è da dire che una cosa importante delle **indicazioni è che ti staccano un po' dal libro** perché la maggior parte degli insegnanti usa il libro di testo e crede che quello sia lo standard da seguire, per cui cosa succede: nel libro di testo c'è veramente tantissima roba, anche roba che non c'entra niente con le indicazioni nazionali.

Ins 4: Si, **mi aiutano perché c'è anche un altro elemento che porta avanti: la didattica del libro di testo.** Allora, molti docenti seguono l'indice del libro di testo e quindi sono spesso liste di oggetti disciplinari, oggi faccio il cerchio, domani faccio… Allora, **avere le Indicazioni nazionali che parlano di competenze mi aiuta si.**

Seguire strettamente il libro didattico è stato già elencato come un ostacolo alla modellizzazione. Gli informatori privilegiati sostengono che le Indicazioni curriculari siano un altro punto di riferimento su cui basare la pratica didattica. Ma cambiare soltanto punto di riferimento non ci sembra un contributo molto costruttivo: cambiare il documento di riferimento non vuol dire innovare la prassi.

L'insegnante 4 accenna che *"avere le Indicazioni nazionali che parlano di competenze mi aiuta si".* Nonostante ogni insegnante abbia la sua interpretazione, il fatto di riferirsi al documento riferirsi in termini di competenze è una proposta radicale di cambiamento nel processo di insegnamento ed apprendimento, coinvolgendo a sua volta ogni docente.

Il far riflettere ci sembra un primo passo verso la trasformazione. Come sotto elencato, l'insegnante 1 accenna alla sua riflessione riguardo i contenuti da affrontare:

- Sostenere la decisione dell'insegnante nella scelta dei contenuti da affrontare

Ins 1: Quindi in un certo senso **le indicazioni nazionali ti aiutano a dire:** aspetta un attimo, se si focalizzano tanto su questi contenuti e molto meno su questi, forse non devo passare tutta la mia vita a fargli fare delle espressioni incredibili, **piuttosto magari mi metto un attimo a proporli dei problemi in cui le espressioni possano essere un qualcosa che gli permettono di trovare una soluzione.** Quindi in questo senso magari aiuta, ma non è che….

La prospettiva di utilizzare compiti e materiali che implicano l'uso delle conoscenze in situazioni molto vicine a quelle di vita reale è riportato nelle Indicazioni curriculari. Infatti, agganciare la teoria matematica al mondo reale è uno degli obiettivi più importanti da raggiungere dall'istruzione (Niss & Højgaard, 2011; UNESCO, 2012); l'insegnante 4 ci porta questo riferimento:

- Incentivo all'introduzione della realtà
- Incentivo alla didattica laboratoriale

Ins 4: **Questa è più difficile**… bisognerebbe andare a vedere le Indicazioni Nazionali che **sono ricche di accenni e sono un po' vaghe, ma ci sono spesso la didattica laboratoriale**, **l'introduzione della realtà** … tipicamente è questo insomma. Se gli studenti avessero più abitudine nel fare gli esercizi presi dai giornali, per esempio guardando la finestra piuttosto che il libro ci sarebbe un po' di questo discorso della realtà.

Un supporto significativo è stato riportato dall'insegnante 4: lo stimolo alla didattica laboratoriale e l'introduzione della realtà. La didattica laboratoriale non si riferisce solo a quello che si fa in laboratorio, ma quando si parte da un problema che risulti interessante agli studenti e si lo affronta insieme, in un'ottica di ricerca e di cooperazione tra studenti ed insegnanti.

Come sostenuto nelle Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli Istituti Tecnici[86], una comprovazione dell'efficacia dell'approccio laboratoriale è il relativo controllo che gli allievi hanno sui vari aspetti dell'esperienza di apprendimento: il fenomeno come esterno e come interno a ognuno di essi, il pensiero critico e la riflessione metacognitiva su quanto pensato, si fondono fino a portare ad un apprendimento significativo. Ciò implica una riflessione sulla scienza, sulle sue conquiste e sui suoi limiti, sulla sua strategia di ricerca e sulle ricadute sociali delle sue acquisizioni.

7.3.7 Aspetti che dovrebbero essere contenuti nelle indicazioni nazionali per il curriculo

Questa categoria presenta degli aspetti che potrebbero essere contenuti nelle Indicazioni curriculari come supporto all'insegnante. In risposta alla domanda su come le Indicazioni Nazionali per il curriculo possano favorire l'insegnante nella pratica didattica, gli informatori privilegiati hanno accennato a dei possibili cambiamenti o item da aggiungere al documento per renderlo più efficace.

- Scrittura in modo diverso: organizzare e sintetizzare il testo
- Far prevalere maggiormente lo stimolo della didattica laboratoriale

Ins 1: E una pecca delle indicazioni nazionali è secondo me …. È vero che cercano di stimolare un pochino di più la **didattica laboratoriale ma dovrebbero prevalere un po' di**

[86] Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento (DPR 15.03.2010, art.8, comma 3) Istituti tecnici.

più per tirare il segno perché **non è scritto nei punti, è scritto in mezzo al discorso**. Chi se lo legge il discorso? magari io perché sono una ricercatrice …ma **di base uno si guarda i punti e si guarda…,** perché è dura anche quella e nulla di più.[…] Io ti ripeto, non faccio molto testo, **come ricercatrice avevo già letto che non aiutava in classe.** Io sono entrata in classe conoscendole per dire […]Però in generale non so quanto possono essere utile.

Ins 4: **Sono molto nebulose, sono molto vaghe** tanto è che la CIIM[87] ha pubblicato un Syllabus, nato nel contesto Anglosassone perché lì c'è una autonomia molto forte come scuola. Però nel contesto italiano è inutile perché "*ma io cosa faccio in terza, in seconda?"* Allora è una lista di suggerimenti di oggetti disciplinari e di competenze.

Come ricercatrice, l'insegnante 1 afferma la sua consapevolezza di quanto le Indicazioni Curriculari possano aiutare veramente in classe, essendo più una specie di sollievo da parte dell'insegnante.

Le Indicazioni Nazionali per il Curriculo (DM n. 254 del 16 novembre 2012) ha riportato l'attenzione sul tema della progettazione curricolare e sul ruolo che essa può avere ai fini della promozione delle competenze. Tali indicazioni sono rivolte ai professionisti che lavorano con la formazione e, di conseguenza, sono spesso concepite dai docenti come hanno riportato precedentemente gli insegnanti 1 e 4.

- Contenere degli esempi di attività didattiche
- Includere dei protocolli di "racconto di esperienza"

Ins 1: I libri [didattico matematico] ti davano anche uno strumento con delle attività e delle cose e **è quello che manca all'insegnante qu**i. **Non ci sono molte attività precotte,** è brutto però ti può aiutare, per darti una idea. […] nelle indicazioni nazionali oltre a dare quello si dà **anche un pacchetto di attività che tu puoi anche utilizzare, puoi manipolare e decidere,** però almeno hai qualche possibilità in più. Perché se non questa [attività della statua], non stai seguendo il programma. Questo cos'è? Non c'è un contenuto. […] noi che siamo matematiche lo vediamo, un docente che la maggior parte magari sono biologi, fisici, non lo vedono e quindi è una perdita di tempo. Perché tu non stai guardando il libro, perché tu non fai fare gli esercizi, come lo giustifichi?

Ins 2: Le indicazioni nazionali cosi come sono scritte contengono tutto quello che tu stai dicendo però non hanno nessun effetto perché secondo me **prima di interpretare una**

[87] Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica

scrittura correttamente e di credere che sia possibile fare quelle cose devi avere una esperienza che ti fa vedere che è vero.

L'insegnante 1 cita un determinato libro di matematica che gli era molto utile perché conteneva in forma scritta delle attività e la dinamica da applicare, riferendo che questo manca nelle indicazioni curriculari: un pacchetto di attività che si possano utilizzare. Il fatto di non riportare delle esperienze didattiche come suggerimento da utilizzare in classe rende il documento non molto adeguato alla reale necessità del docente.

- Creare proposte didattiche più credibili

Ins 2: Secondo me **fare proposte credibili** in termini di **attività testate da altri precedentemente**. C'è una grossa paura del fatto che gli studenti non siano all'altezza di farlo o una grossa esperienza che magari dipendeva da loro ma l'insegnante non hanno ricondotto**,** non si sono sentiti variabili nel problema e quindi pensano che gli studenti non ce la facciano a fare certe cose, non riflettendo sul modo di che magari cambiando qualcosa la cosa cambia […] Secondo me **potrebbe vedere protocolli come questi** e far riflettere ad un insegnante un po' di più.

Ins 2: Non credo che nessuna frase abbia il potere di cambiare, comunque siano scritte le indicazioni **l'insegnante deve sentirsi sicuro che qualcuno già**, che sia sostenuto dal ministero sicuramente e dal dirigente davvero nello sperimentare questa attività e che forse perdono più tempo e vanno **fuori dalle valutazioni solite**, **quindi non soltanto schemi, questo sicuramente è il ruolo delle indicazioni.**

L'insegnante 2 espone con molta chiarezza il suo punto di vista in relazione alle Indicazioni Curriculari, enfatizzando la necessità di contenere degli esempi concreti per guidare e sostenere l'insegnante nella sua didattica; aggiunge inoltre la possibilità di avere dei protocolli di racconto di esperienza.

- Sostenere il docente nella didattica assunta

Ins 2: Che le indicazioni contengono queste frasi che **l'insegnante può impugnare** quando ti vengono a dire che stai facendo una cosa che non è nel programma e "guarda qui, io sto facendo". Quindi come sostegno però come motivazione a fare, secondo me alcuni

> insegnanti non hanno, **non credono che davvero lo studente possa arrivare a raggiungere queste competenze** quindi lo continuano a stringere e diventare sicuri che si arrivi a valutare presto, che si facciano il numero di verifiche che si devono fare, che la media sia giustificabile poi in consigli di classi**.** […] **Secondo me la ricerca ha il potere di creare dei documenti, dei video, dei protocolli, degli esempi con attività di studenti**, secondo me può fare in modo che l'insegnante pensi "aspetta che forse provo alcuna…." Credo che le indicazioni possano **dare l'aiuto e il supporto per dire** "guarda quello che faccio io è ufficiale".

Conoscere come una proposta didattica è stata affrontata, gli aspetti positivi e negativi della pratica, come gli studenti hanno reagito, come il docente potrebbe adattare tale dinamica sono sicuramente dei materiali preziosi per il corpo docente. La ricerca in ambito educativo matematico negli ultimi quarant'anni ha prodotto interessanti e curiose indagini riguardo le diverse metodologie da utilizzare in classe, ma purtroppo esiste ancora un significativo divario tra la ricerca e la pratica.

7.3.8 Promuovere la modellizzazione in classe: cosa potrebbe fare l'insegnante

Nel domandare cosa si potrebbe fare in classe per promuovere la modellizzazione come una competenza, gli informatori privilegiati hanno messo in luce delle pratiche che competono all'azione del docente. In questa categoria si incontrano dunque le possibili vie di intervento che l'insegnante potrebbe proporre in classe.

- Inserire la modellizzazione nella didattica quotidiana

Cominciare ad utilizzare la modellizzazione nella didattica quotidiana sembra una delle azioni più prevedibili tra le iniziative da proporre. Quello che sorprende è proprio il fatto che tale metodo sia ancora poco presente nella prassi.

> Ins 2: Concretamente credo che vada **inserita intanto nella didattica quotidiana**, sulle [attività] estemporanee non credo che possano sviluppare competenze. Ogni tanto facciamo un problema reale, arrivate dove arrivate, e poi tanto vi rendete conto che il

problema è più grande di voi perché a volte i problemi reali devono essere semplificati per essere modellizzati e più interessanti, e **quelli interessanti sono più difficili da modellizzare**.

Ins 4: Io credo che fare problemi, che ne so: Dimmi quanto è alta casa tua? **Proviamo a vedere in classe**…. è chiaro che si faccia bene tutto quanto è geometrico, si faccia bene quanto riguarda l'aritmetica, si faccia bene quanto riguarda l'algebra fino al primo grado, di secondo grado bisogna spingere un po' o forzare un po', dopo i problemi si fanno forse più lontani in rispetto alla vita degli studenti.

- Cominciare la lezione o introdurre un argomento con le attività
- Fare didattica in modo laboratoriale

Ins 1: Secondo me cose del genere, bisognerebbe cominciare la lezione con questi stimoli qua**,** rispetto a dire "oggi facciamo le espressioni, oggi facciamo le equazioni**". Partire da qui** [attività] **e arrivare magari insieme con la classe, magari in modo laboratoriale.** […]lavorare insieme, si aiutano, magari c'è quello che è un pochino più capace nella simbologia, quello che è un pochino più capace nell'avere fantasia nel capire come fare messi insieme riescono a costruirti un qualcosa di più simbolico.

Ins 3: Secondo me **l'unica è esercitarsi sui modelli di questo tipo** (attività di modellizzazione analizzate). […] Un discorso potrebbe essere glieli vendiamo attraverso questi problemi, ma ribadisco: **Glieli introduciamo attraverso questi problemi,** ma una certa formalizzazione, perché la matematica è anche forma, ci vuole una formalizzazione.

L'idea di iniziare un argomento attraverso la modellizzazione è stato riferita dagli informatori privilegiati; una probabile ragione sarebbe quella volta ad istigare lo studente alla necessità di sviluppare un nuovo concetto e vederlo direttamente in un'applicazione. Oltre a ciò, si riesce a distaccarsi della didattica standard, permettendo allo studente una pratica più attiva e coinvolgente dall'inizio della lezione o del nuovo argomento matematico.

È importante praticare una didattica in modo laboratoriale: lo studente è stimolato a lavorare in modo più autonomo e a discutere con i compagni, rendendo una consapevolezza di cosa si fa e perché si fa. L'impostazione teorico-metodologica del curriculum di matematica dell'UMI[88] assegna il ruolo fondamentale al laboratorio didattico nell''attività di insegnamento ed

[88] UMI: Unione Matematica Italiana. Tale riferimento è stato riportato dei materiali *Secondo ciclo* "*Matematica 2003*" della Commissione Italiana per l'insegnamento della Matematica in http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

apprendimento. Il laboratorio non viene stabilito né come il nucleo di contenuto, né come processo, ma come una serie di indicazioni metodologiche trasversali basate sull'uso di strumenti tecnologici e non , ma principalmente finalizzati alla costruzione di significati matematici. Diventa così un luogo, anche se non in senso strettamente fisico, in cui si fondono le funzioni strutturale, strumentale e culturale della matematica.

- Fare attività interdisciplinari

L'insegnante 4 propone delle attività interdisciplinari, ma evidenzia il fatto che il problema rappresentato della mancanza di tempo costituisce un forte ostacolo a tale pratica.

> Ins 4: **Bisognerebbe avere il tempo, poi ci sono troppi problemi per non avere il tempo e l'occasione per fare** attività concrete. Per dire fai l'esercizio 5 alla pagina 9, no, vai a casa e cerca di capire quanta acqua consuma in una giornata. Allora visto che si potrebbero **fare belle attività interdisciplinari**, con docenti di altre materie…

La mancanza di tempo alla scuola viene spesso messa in luce: il problema di non avere tempo per adempiere al programma scolastico mette in difficoltà l'applicazione della modellizzazione matematica. Questo aspetto viene riconosciuto, secondo Bazzanesi (2002), come il maggiore ostacolo allo svolgimento della modellizzazione.

- Evidenziare cosa si fa in classe: Uso di un modello, astrazione, assunzione
- Esplicitare cosa sarebbe il modello, le sue dimensioni e distanza con la realtà
- Promuovere il ragionamento matematico congetturale

> Ins 2: Nel senso che poi sicuramente **far notare la differenza** che stai **usando un modello matematico** o che stai **facendo un'astrazione** o qui, **stai facendo un'assunzione.** Nel momento in cui spieghi o che risolvi un problema alla lavagna o presenti il problema agli studenti potrebbe di più [evidenziare cosa si sta facendo] perché l'insegnante il modello ce l'ha in mente però **difficilmente lo esplicita, da quasi per scontato**. […]in quel momento lì **fai capire che il modello matematico è più ampio di quella situazione lì.**

Ins 2: L'altra grossa competenza che centra molto con la modellizzazione è quella dell'**approssimazione**, cioè **capire la differenza tra misura del numero esatto e l'approssimazione** […]è approfittare continuamente dei momenti in cui si può **far capire che distanza c'è tra modello e realtà,** che è più complesso che il modello risponde ad una domanda.

Nelle lezioni proposte da Herget (2002) e del suo gruppo, uno dei compiti è quello di fare il ponte tra il divario delle diverse parole: la tipica precisione della matematica e la mancanza di precisione nel resto del mondo. Questo è indispensabile perché entrambi i mondi sono importanti e i due mondi sono indispensabili. Come possiamo imparare il vero valore della precisione e certezza della matematica se non abbiamo ancora imparato che, nel resto del mondo, questa precisione e affidabilità è qualcosa molto difficile da raggiungere?

Comprendere in cosa consiste una dimostrazione, un'assunzione o un modello in matematica non è proprio semplice; l'insegnante 2 ritiene importante che siano evidenziate queste procedure quando si realizzano in classe. Chiaramente che esplicitare un'operazione o un concetto matematico è di fondamentale importanza, ma per una significativa comprensione non basta: se bastasse, le lezioni espositive avrebbero dei risultati molto efficaci nell'apprendimento, essendo sufficiente una buona spiegazione da parte dell'insegnante. Riteniamo di fondamentale importanza che lo studente sia messo in costante esperienza concreta con tali concetti, partendo da lui la necessità di utilizzarli; non meno importante è il compito dell'insegante nel guidarlo durante la pratica e proporre situazioni che mirino alla formalizzazione.

- Competenza nell'uso di strumenti matematici

L'insegnante 2 racconta una sua esperienza didattica e mette in luce l'importanza del richiamo agli strumenti matematici di un problema:

Ins 2: A me è capitato l'anno scorso di fare un lavoro simile, un'attività […] a stimare quante persone ci sono in Piazza del Popolo. Ci sono categorie analoghe, ci sono quelli che hanno utilizzato il geogebra, hanno deciso di lavorare sulla mappa però era uno strumento un po' complesso da utilizzare e hanno sbagliato la proporzione. Altri mi hanno chiamato ad un certo punto: "*prof. Può venire perché dobbiamo misurare le spalle, perché adesso siamo misurati noi però ci potrebbero essere degli adulti più numerosi dei bambini*". Quindi dei discorsi molto più legati **alla esperienza concreta e alla fine la stima è stata più efficace** in questa esperienza che mi è capitata. [...] **il ruolo dell'insegnante è riportare agli strumenti matematici che non vengono cosi molto naturale o spontaneo.**

- Dare più spazio allo studente per esporre il suo ragionamento
- Ridurre la correzione punto a punto
- Mettere in luce le ipotesi implicite create dagli studenti

La correzione punto a punto è una classica usanza nelle lezioni di matematica: si danno tanti esercizi come compito e dopo viene eseguita una precisa correzione. Tale pratica non lascia spazio allo studente per esporre il suo proprio ragionamento di risoluzione come riportato dall'insegnante 2:

> Ins 2: Ridurrei drasticamente la correzione punto a punto, "giusto o sbagliato" ma **cercherei di mettere in luce proprio l'ipotesi implicita** che hanno fatto e … **dare tanto spazio a loro nello spiegare la loro soluzione** e in quel momento **verbalizzare un po' e dire che cosa hanno fatto,** tipo "qui hai dato per scontato che si può fare questo".

Se nel processo di modellizzare lo studente assume un ruolo attivo, allora il suggerimento di dargli più spazio per esporre il suo ragionamento è di fondamentale importanza; si costituisce un momento di riflessione e riorganizzazione delle sue idee. Oltre a questo si crea l'opportunità per l'insegnante di conoscere il pensiero del soggetto e dunque orientarlo verso lo sviluppo di conoscenze e abilità pertinenti riguardo alla situazione problema.

Mettere in luce le ipotesi create dagli studenti che non sono evidenti nel problema analizzato è assai produttivo; è un momento in cui l'allievo stabilisce delle relazioni fra le variabili del problema e realizza le proprie congetture. Tali azioni sono propizie per acquisire la competenza della formulazione del problema, partendo da una situazione della vita ordinaria e riformulandola in un problema matematico. Come già trattato in quest'analisi, in generale è una fase considerata difficile del processo.

- Abituare gli studenti a costruire le formule
- Appassionare gli studenti da piccoli alla matematica

Un’altra classica pratica nelle lezioni di matematica è dare agli studenti le formule pronte e proporgli di cogliere i dati del problema per sostituire nelle incognite. Come discusso nel capitolo della modellizzazione, si trattano di applicazioni standard: esempi illustrativi presentati all’esposizione di una regola o di un procedimento matematico, in cui il modello da utilizzare è già definito.

Con l’abitudine di avere le formule già pronte, lo studente in una situazione in cui deve crearle, tenendo conto della specifica problematica, non si sente competente nel crearne di nuove.

> Ins 1: Dovresti **stuzzicarli in continuazione**, non si può dare mai niente per scontato, perché se tu gli abitui a dargli la formula, **se si comincia ad abituarsi a costruire la formula**, anche se magari è l’area del triangolo, è già una forma di modellizzazione magari **all’inizio guidata per poi portarli ad arrivarci da soli.**

> Ins 3: La cosa fondamentale secondo me è **appassionare il bambino alla matematica**, quindi **avere dei maestri che amino la materia** e che **la facciano vivere soprattutto nei primi anni come un gioco**. […] un ragazzino, un bimbo che ama la matematica dopo potrà aver un professore non eccezionalmente accattivante ma continuerà ad amarla, un ragazzino che è stato un po’ disinnamorato della matematica all’inizio fa moltissima fatica. […] **Se non gli appassioni da piccoli** e la vivono come una costrizione, ma come un calcolo terribile, come un problema da risolvere più o meno lungo… **fa una fatica enorme poi a riprenderli**…

Un fatto importante è stato riportato dall’insegnante 3: avendo una esperienza didattica di oltre trent’anni, considera fondamentale l’appassionare il bambino alla matematica. Una volta coinvolto alla matematica, lo studente saprà approfittare significativamente delle future esperienze, indipendentemente di come gli vengono proposte.

- Lavorare a gruppi in classe

L’utilizzo di attività svolte in gruppo è un altro suggerimento allo sviluppo della competenza, rendendo una esperienza molto più significativa rispetto all’esecuzione dei compiti a casa.

> Ins 2: E poi nel momento in cui si potrebbero dare queste **famose attività a gruppo**, più che a casa da soli.

> Ins 1: Però **attività del genere le puoi fare se i ragazzi sono abituati a lavorare in gruppo perché se non diventa una perdita di tempo e non lo fanno**. […] **All'inizio fa più confusione sicuramente**. È per quello che **ti dico che è una perdita del tempo, ma non è una perdita di tempo ma è cosi perché ci vuole tantissimo tempo**… devi almeno lavorarci quattro ore…. […] **Da lavorarci almeno quattro ore di didattica standard avresti fatto più cose però sono sicura che sarebbe un investimento, è un investimento.**

L'insegnante 1 conclude che lavorare con la modellizzazione è un investimento, nonostante lo metta in relazione alla questione del tempo: *"Da lavorarci almeno quattro ore di didattica standard avresti fatto più cose".* Le cose fatte in più nella didattica standard sarebbero probabilmente le "trasmissioni" di contenuti da parte del docente e certamente l'esecuzione meccanica di esercizi da parte degli studenti. L'assunzione di tale relazione rappresenta tutt'altro che sviluppare competenze! L'approccio per competenze non rifiuta i contenuti e neanche le discipline, ma mete in evidenzia la loro messa in opera. Il problema è che, come afferma Perrenoud (2003), la scuola continua a concepire gli apprendimenti in termini di conoscenze. È più facile valutare le conoscenze di un studente piuttosto che le sue competenze. Determinare le competenze richiede più tempo oltre che la possibilità di esporsi alla contestazione, è necessario osservare ogni allievo mentre svolge dei compiti complessi.

- Iniziare la modellizzazione prima delle secondarie

I docenti intervistati suggeriscono che si inizi a lavorare con la modellizzazione matematica prima delle secondarie, sostenendo che i giovani studenti hanno più fantasia, voglia di giocare e sono curiosi. Intanto la modellizzazione è un argomento presente nel curriculum della scuola elementare e media.

> Ins 1: Lì [alla scuola superiore] ho capito che c'era qualcosa che non andava, **c'è qualcosa alla radice.** Adesso che sono alle medie mi rendo conto che **hanno una fantasia, hanno voglia di giocare, ti fanno delle domande, che tiro fuori tutto con loro, discutono, fanno,** gli piace! Gli piace e arrivano a delle soluzioni molto interessanti, molto intelligenti, poi è ovvio che gli devi guidare molto di più. Però **è lì che devi cominciare a fare delle domande** […] Sono loro per primi ad essere felici di fare le cose cosi. Perché se tu ti metti a dire, bene oggi facciamo "definizione" ti guardano… ohhh . Invece se si comincia a dire, allora secondo voi cos'è un insieme? Secondo voi come si fa a descrivere un insieme? A rappresentare un insieme? Poi sono loro che ti dicono, elencano, poi c'è il disegno… […]

quindi cosi forse potrebbe essere un modo per fargli fare verso queste cose [attività di modellizzazione].

L'insegnante 1 espone il fatto che è un compito del docente guidare gli studenti in classe. Perrenoud (2002) sostiene che nella prospettiva delle competenze gli insegnanti debbano padroneggiare le conoscenze da insegnanti, essere capaci di fare lezione, coordinare una classe, gestire la progressione degli apprendimenti e coinvolgere gli alunni nei loro apprendimenti e nel loro lavoro.

7.3.9 Le possibili azioni del sistema dell'istruzione nella promozione della modellizzazione in classe

In questa categoria sono state individuate le iniziative riportate dagli insegnanti che non competono direttamente al docente, ma al sistema dell'istruzione.

- Avere più materiale didattico di riferimento

Ins 4: **È difficile anche di progettarla [**la modellizzazione] **perché ci sono pochi materiali e per l'insegnante è più complesso,** però secondo me può arrivare a più soddisfazione a punto questo tipo di approccio con problemi reali. Non è l'unico approccio che ci dovrebbe essere perché sistematizzare teoricamente è importantissimo. […] Tu devi valutare una cosa importante: **le case editrici**. **In Italia molto della didattica la decidevano le case editrici**, cosa che **sta cambiando** grazie alla facilità che adesso si possono produrre materiali o trovarli in rete, ma per molto tempo una grossa parte della didattica proveniva dagli insegnanti che lavoravano nelle case editrici….

L'insegnante 4 riporta il fatto che in Italia alla fine le case editrici decidevano molto sulla didattica e che attualmente si avvia ad un cambiando grazie alla disponibilità di materiali didattici on line. Infatti, Villani[89] nel 2002 fa notare che le pubblicazioni dei libri delle case editrici spesso non sono d'accordo con l'impostazione ideale della matematica prevista dai

[89] Vinicio Villani (2002) in intervista *"Cosa possiamo imparare da un confronto internazionale sull'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie"* al Centro PRISTEM - "Progetto Ricerche Storiche E Metodologiche" - dell'Università "Bocconi" di Milano: Disponibile in http://matematica.unibocconi.it/articoli/colloquio-con-vinicio-villani. Accesso il 20/12/2014.

programmi. Quindi molti libri, pur essendo formalmente adattati ai nuovi programmi, presentano solo attività tradizionali come gli esercizi con carta e penna, di tipo algoritmico, con uso limitato delle nuove tecnologie.

L'avere più materiale didattico di riferimento è un pertinente suggerimento, nonostante, come ha sostenuto Villani, molti libri presentino solo attività tradizionali. Chiaramente un ricco acervo di materiale didattico non è averne tanti: questi devono essere utili nel sostegno di una pratica didattica verso l'autonomia e l'azione dello studente, servendo da modelli con cui lavorare in classe. I materiali di orientamento alla pratica didattica fanno riferimento anche alle *Indicazioni Nazionale* per il curriculum, descritto precedentemente nella categoria *Aspetti che dovrebbero essere contenuti nelle Indicazioni nazionali per il curriculo.*

- Avere dei bravi maestri

L'insegnante 3 osserva l'importanza di aver un bravo maestro nella formazione iniziale:

> Ins 3: Quindi secondo me **ci vorrebbero dei maestri non bravi, ma di più**. E bisognerebbe pagare questi maestri benissimo […] non è proprio corretto che un maestro abbia uno stipendio inferiore a quello di un professore di scuola media, inferiore a quello di un professore della scuola superiore […] **Il momento più importante è quello dell'elementare.**

È ampiamente riconosciuto l'importante ruolo della scuola elementare nel processo di costruzione della conoscenza dell'allievo. L'azione docente ha un compito fondamentale nel condurre la pratica educativa dello studente, indirizzandolo ad un apprendimento autonomo e significativo (Freire, 1996).

- Aumentare le ore di matematica in classe

La quantità di ore di matematica in classe è un argomento oggetto di grande dibattito. Non solo in Italia, la disciplina ha sempre avuto un numero superiore di ore di pratica nel curriculum scolastico riguardo altre discipline, comprendendo una stessa quantità di argomenti da trattare durante l'anno.

La quantità di ore delle discipline sono state ripensate nella proposta dei curriculum per competenze e nelle Indicazioni nazionali per il curriculo; di conseguenza sono state ridotte le ore di matematica in classe, di modo a poter dare uguale importanza alle altre discipline.

> Ins 3: Però poi questo porta sempre a quel **discorso delle ore di matematica** quando si fanno i contenuti essenziali, quelli dei famosi assi delle competenze. Quando gliela fai **il tempo è un po' tirano** da questo punto di vista**.** Ci vorrebbe, io farei **più ore concentrate in un anno scolastico** poi magari in quinta la matematica si potrebbe anche non fare. Più ore alla settimana se non veramente si continua a voler fare le cose non avendo tempo, oppure io posso dire di aver fatto tutte, ma come? […] A me sembra che con 2 ore di matematica a settimana **far capire l'argomento dal punto di vista, far capirlo profondamente di modo che non rimanga una cosa buttata via e basta**…. stiamo parlando veramente di niente. […] **Non siamo contenti dei tagli che abbiamo preso….** Nel senso che comunque ti ritrovi a dover scegliere tra argomenti fondanti voglio dire … però devi fare delle scelte perché con 28 -30 alunni non riesci in due ore alla settimana.

- Valutazione formativa del docente

La necessità di affrontare una valutazione formativa è ritenuta come un'azione che il sistema di istruzione potrebbe proporre:

> Ins 2: Insomma io vedo molto grande il **ruolo dell'insegnante** anche nella **didattica per affrontare dei momenti di valutazione formativa** e questa mi sembra l'unica; **da soli non si sviluppa e se rimane estemporanea, non diventa competenza**.

7.4 Considerazioni conclusive del capitolo 7

Lo scopo principale dell'intervento con gli insegnanti è l'identificazione e la riflessione sullo sviluppo e sugli ostacoli della competenza modellistica cosi come le possibili vie di intervento riguardo la costruzione di ambienti di apprendimento efficaci.

In generale l'aspetto della modellizzazione è stato riportato dagli informatori privilegiati insieme a altre pratiche didattiche. In risposta alla domanda sui punti specifici della modellizzazione e le competenze necessarie per svolgerla, gli insegnanti hanno citato aspetti un po' generici che non riguardavano direttamente la competenza indagata, ma che si riferivano spesso a pratiche matematiche in generale.

L'analisi dei frammenti delle attività di modellizzazione presentati agli insegnanti intervistati in aggiunta alla loro esperienza come docente, ha messo in luce significativi ostacoli presenti nella pratica della modellizzazione. I contributi sui possibili adattamenti nella pratica didattica per la progettazione di ambienti di apprendimenti efficaci al fine di promuovere la modellizzazione come una competenza non sono stati molto significativi.

Trattandosi di un'analisi qualitativa del contenuto, l'interpretazione delle risposte non si limita ad identificare delle parole, ma il significato delle affermazioni. L'intervista con risposte aperte (Kvale, 2007) è un'ottima tecnica per cogliere la rappresentazione attribuita dal soggetto intervistato.

Difficoltà nell'identificare le competenze degli studenti: scarsa competenza

Si osserva intanto che la competenza modellistica non è del tutto chiara a tutti gli intervistati; formulazioni come: *"Sono addestrati a risolvere equazioni letterali in generale"* Ins 1 e *"Io noto che in qualsiasi livello capacità di modellizzazione non ce l'hanno in matematica"* Ins 1 suppongono ancora un significato un po' distante da quello che si intende per competenze. L'interpretazione quindi potrebbe essere la sua scarsa comprensione del concetto, nonostante non sia da escludere il fatto che tale insegnante può considerare i suoi studenti incompetenti nel modellizzare. La seconda possibilità ci sembra più improbabile visto che si tratta di studenti della scuola superiore di secondo grado; se hanno raggiunto tale livello scolastico probabilmente sono dotati di specifiche conoscenze e abilità, anche se a un livello elementare.

Il fatto di considerare che gli studenti non hanno la capacità di modellizzare è spiacevole e in certo senso preoccupante. Tale affermazione ha delle considerazioni nella pratica didattica: se gli studenti non hanno la capacità di modellizzare allora meglio evitare tale argomento.

L'aggiornamento della concezione dell'insegnante deve cambiare. Questo è il primo passo della pratica educativa verso le competenze.

Riconoscimento e individualizzazione di competenze negli studenti

L'identificazione delle competenze di modellizzazione è stata unita a altre competenze matematiche. Una giustificazione di ciò potrebbe essere che, non essendo un tema molto discusso nel quotidiano degli informatori privilegiati, essi di conseguenza non sempre riescono ad articolare bene il discorso su cosa pensano. In altre domande dell'intervista sono emerse altre competenze di modellizzazione.

Nell'ottica didattica sviluppare competenze significa mettere gli allievi di fronte a sfide, a situazioni li esortino a dare il meglio di sé, non è qualcosa di superficiale o performativo. La trasmissione della conoscenza cessa di essere il primo obiettivo dell'istruzione (Perrenoud, 2002). Un'educazione ben bilanciata tende alla formazione di individui completi, non di specialisti; il suo obiettivo evidente è quello di insegnare a pensare e ad apprendere.

L'insegnante 3 riporta il fatto che gli studenti che sono o erano abituati ad andare in laboratorio hanno l'abitudine di cercare i dati del problema, costruire una struttura matematica da situazione reale e fare un'astrazione matematica e un confronto dei dati con la realtà; l'ultima abitudine citata è la più rara fra gli studenti.

Come insegnanti di matematica della scuola superiore di secondo grado ci si aspettava più chiarezza da parte loro in relazione alla competenza modellistica. Questo ci porta a concludere che sia il concetto di competenza sia quello modellistico non sono molto affrontati nella riflessione degli insegnanti.

Diagnosi delle competenze degli studenti: momenti "non formali" della lezione

Gli insegnanti hanno citato significativi momenti in cui riescono a conoscere le competenze dei loro studenti. Tutti hanno fatto riferimento ai momenti non formali della lezione, come nelle discussioni indirette in classe e nei lavori a gruppi, quando esprimono opinioni su un nuovo argomento, durante la pratica dei giochi matematici. Tutti gli intervistati hanno riportato spontaneamente esempi specifici di momenti della pratica didattica in cui riescono a diagnosticarle.

Prendendo l'esempio del gioco, richiamato dall'insegnante 4, ci sono tante abilità coinvolte nella sua soluzione: restare nel percorso, creare strategie in base all'andamento della situazione, leggere e interpretare dati, muoversi in funzione della situazione, ecc. Secondo Macedo (2005) la presa di coscienza del soggetto si riferisce ad una competenza relazionale, cioè, le abilità sono necessarie, ma non sufficienti nella prospettiva relazionale.

Un altro fatto molto importante emerso dagli informatori privilegiati è che le competenze degli allievi sono più facile da diagnosticare quando non vengono valutate: "quando si sa che l'insegnante gli sta ascoltando *ti permette di parlare e non ti valuta"* Ins 2. I momenti volti a conoscere le competenze dello studente sono anche un'occasione per svilupparne altre. Questo ci da degli indizi sul fatto che sarebbe molto produttivo promuovere più spesso dei momenti "non formali" in classe, creando un autentico ambiente verso la promozione delle competenze.

Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione:

Gli informatori privilegiati hanno avuto molta destrezza nell'identificare gli ostacoli affrontati dagli studenti nel processo di modellizzazione; riportando tale avvenimento specialmente alle inadeguate conoscenze degli allievi.

Aspetti come la difficoltà nel capire la situazione e la decodifica del testo, il riconoscimento di strutture matematiche di riferimento e l'attività di relazionare i dati del problema affrontato sono stati riconosciuti come gli ostacoli inziali del processo. L'insegnante 3 spiega: "*Una cosa che per loro è molto difficile in generale di cui mi sono accorta, e questo non solo per i ragazzi di prima ma anche andando avanti, è decodificare un testo nel senso di capire un testo. Perché vogliono sempre delle certezze e quindi "che cosa ha chiesto? Ma vuole proprio questo? Cos'è* *che devo fare? " E noi invece dobbiamo tendere al fatto che bisogna che, molto bello questo problema, bisogna che loro arrivino ad essere autonomi o al meno il più autonomi possibili.*

La problematica di identificazione delle strutture matematiche di riferimento è stata osservata anche nella prima fase della ricerca: per iniziare la risoluzione dell'attività della Statua era necessario riconoscere un strumento di riferimento reale, secondo l'immagine presentata. Gli studenti in generale non sono abituati a cercare una struttura di riferimento; spesso i problemi, anzi, gli esercizi proposti dagli insegnanti non richiedono tale riflessione.

Chiaramente, il punto in cui identificano i maggiori ostacoli riguarda la creazione del modello matematico, identificando le specifiche difficoltà: ricavare da un testo le informazioni e isolare i dati significativi; flessibilità di pensiero nella costruzione del modello; scelta del contenuto matematico appropriato alla situazione; passare dal linguaggio informale al linguaggio formale matematico; organizzazione dei dati per costruire l'equazione.

Le difficoltà nella creazione di un possibile modello reale è di conseguenza prolungata alla fase di costruzione del modello matematico (Maaß, 2006). Se le variabili del problema, sia quelle dipendenti che quelle indipendenti, non sono identificate dal soggetto, è difficile che egli riesca a isolare i dati significativi del problema. Riteniamo che avere una flessibilità di pensiero per la creazione del modello matematico sia un aspetto fondamentale; purtroppo le solite esperienze vissute in matematica non conducono gli studenti ad avere tale competenza. È ben conosciuto che il contratto didattico e il modo in cui avvengono le esperienze con i problemi di matematica in classe portano il pensiero dello studente a tutt'altro che flessibilità.

La scelta del contenuto matematico più adeguato alla risoluzione della situazione è un punto problematico per la gran parte degli allievi. "*Invece per me quello che è interessante è di* ***fargli capire che non devono decidere aprioristicamente.*** *Quindi dei problemi che si riescono a risolvere per esempio secondo loro, intanto tanti che* ***cominciano per tentativi****, paragonando proprio, facendo proprio le due tabelle e per un minuto, due minuti, tre minuti, o le assicurazioni, insomma problemi di questo tipo. Poi si cerca di, o cerchiamo, poi ci sono anche i ragazzini che ci arrivano,* ***cerchiamo di capire che matematizzando quel problema si può fare anche un po' prima a risolverlo*** *secondo delle, applicando a punto quello che si sta o hanno fatto durante l'anno scolastico. Quello è interessante* (Ins 3).

Quindi non ci resta altro che concludere che la modellizzazione aiuta lo studente a decidere quale argomento utilizzare nel risolvere un problema.

Altre problematiche identificate riguardano il lavoro con i modelli e il loro confronto; il confrontarsi con la validità dei procedimenti; l'esecuzione della stima e del lavoro con il concetto proporzionale. L'insegnante 2 aggiunge che gli studenti sono più legati a risolvere il problema in sé che a riferirsi alle esperienze personali: "*però in generale* ***gli studenti sono in principio più legati a risolvere il problema che a riferirsi alle esperienze personali*** *o a cercare di* ***fare almeno un collegamento fra quello che è reale, quello che è formula, quello che è modello.***

Il confronto sulla credibilità dei procedimenti realizzati è una condotta praticamente mai realizzabile dagli studenti. Ma se il libro didattico spesso fornisce la risposta a cui si deve arrivare, l'insegnante nella verifica valuta il risultato dell'esercizio, in quale momento l'allievo è stimolato a indagarsi sulla credibilità della procedura applicata? Tutto il sistema intorno allo studente valuta la correttezza del risultato, e lui di conseguenza non fa altro che "accontentare" tutto ciò.

Anche la difficoltà nel fare una stima può essere associata alla mancanza di abitudine da parte dello studente, ma questo è un compito dell'insegnante di matematica. Promuovendo tale pensiero si sviluppa il ragionamento astratto del soggetto; sono queste le pratiche che devono essere stimolate in classe. Gli insegnanti sono i primi a lamentarsi di queste difficoltà, ma cosa fanno di diverso nella loro pratica didattica per promuovere l'opportunità allo studente di eseguire tali ragionamenti? Sono gli insegnanti a valorizzare la precisione, a considerare la non esattezza come un errore. In questo senso la modellizzazione è un ottimo strumento per favorire la destrezza nello stimare; Herget e Richter (2012) richiamano l'attenzione sul fatto che avere delle risposte diverse ma entrambe corrette è una situazione che certamente richiederà del tempo prima di diventare un'abitudine, sia da parte degli insegnanti che degli alunni.

Riportate dall'insegnante 4, le difficoltà nel lavorare con il concetto proporzionale sono infatti un ostacolo per la gran parte degli studenti della scuola media e superiore. Tale difficoltà è stata rilevata anche nelle prove Invalsi. Speriamo che la questione sia portata avanti dalla commissione Invalsi e che appuntino delle riflessioni su modi diversi di affrontare la proporzione in classe e in più, che tali indicazioni arrivino alla mano degli insegnanti.

Ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione: il problema del contesto dell'istruzione

La pratica di una didattica standard viene identificata dagli informatori privilegiati come un ostacolo all'apprendimento significativo della matematica, e di conseguenza, allo svolgimento della modellizzazione. L'utilizzo del libro didattico, lavagna, esercizi, verifica, paura dell'errore, il programma da compiere condizionano lo studente nel suo agire come apprendista. Consideriamo anche che i procedimenti meccanici e la necessità di soddisfare l'insegnante sono dei grossi ostacoli non solo allo svolgimento della modellizzazione, ma un intralcio verso l'autonomia e lo sviluppo dello studente.

Fortunatamente certi insegnanti sono consapevoli che ci vuole l'azione del docente perché si possa parlare di pratica didattica, come citato dall'insegnante 2: "*lo strumento dell'insegnante è decisivo nello stimolare quindi non mi sembra una caratteristica dello studente quanto più una caratteristica della situazione che si crea in aula".*

La didattica basata su esercizi e non su problemi matematici è un argomento notevolmente discusso (ad esempio Blum & Niss, 1991). Siamo assolutamente d'accordo con quello che ci ha riportato l'insegnante 4: *"in Italia prevale molto una didattica per esercizio e non problemi".* Sono queste le abitudini da cambiare; se la problematica non viene affrontata alla radice, come si possono progettare ambienti didattici più dinamici e mirati allo sviluppo di competenze se la situazione proposta in classe rimane ancora talmente scollegata con gli obiettivi?

Le indicazioni nazionali per il curriculo come supporto didattico all'insegnante

Il sistema scolastico italiano, cosi come tanti altri Paesi europei, sta vivendo un processo di riforma nel quale la revisione dei curricoli è fortemente orientata allo sviluppo delle competenze. Questo è testimoniato dalle Indicazioni per il curriculo (DM n. 254 del 16 novembre 2012) che hanno riacceso l'attenzione sul tema della progettazione curricolare e sul ruolo che essa può avere ai fini della promozione delle competenze. Tali indicazioni sono rivolte ai professionisti in ambito educativo e formativo. Durante l'intervista gli informatori privilegiati sono stati confrontati sull'effettivo utilizzo delle Indicazioni curriculari in classe: hanno identificato degli aspetti positivi e che li rendono **utili** nel progettare la pratica didattica come:

staccamento del libro didattico; sostenere la decisione dell'insegnante nella scelta dei contenuti da affrontare; incentivo all'introduzione della realtà in classe e alla didattica laboratoriale.

L'inserimento degli aspetti del quotidiano in classe nella disciplina di matematica è infatti uno degli obiettivi più importanti da raggiungere dall'istruzione (Niss & Højgaard, 2011; UNESCO, 2012); l'identificazione di tale aspetto ci sembra molto positivo, ma di conseguenza emerge la questione di come gli insegnanti stiano effettivamente realizzando in classe.

È stato molto interessante ascoltare dagli informatori privilegiati il fatto che le Indicazioni nazionali gli stacchino dal libro didattico; questo è proprio uno degli scopi del documento. Tale fatto ci riporta a altro quesito: il cambiamento di riferimento implica l'innovazione della pratica didattica? L'interpretazione e l'effettiva applicazione da parte dell'insegnante di quello che contiene nelle Indicazioni curriculari è che fa la differenza, altrimenti resta come un semplice documento.

Aspetti che dovrebbero essere contenuti nelle Indicazioni nazionale per il curriculo

Trattandosi di un documento complesso e articolato, gli informatori privilegiati hanno fatto notare la questione organizzativa del testo: "*perché non è scritto nei punti, è scritto in mezzo al discorso. Chi se lo legge il discorso?*" (Ins 1); "*Sono molto nebulose, sono molto vaghe…*" (Ins 4). Loro suggeriscono che la scrittura delle Indicazioni curriculari dovrebbe essere riorganizzata. Sono stati accennati dei giudizi sul fatto che le Indicazioni non sono particolarmente utili: "*Io ti ripeto, non faccio molto testo, come ricercatrice avevo già letto che non aiutava in classe. Io sono entrata in classe conoscendole per dire […] Però in generale non so quanto possono essere utile*" (Ins 1).

Oltre la questione della scrittura, gli intervistati elencano degli elementi che le Indicazioni potrebbero contenere come: far prevalere maggiormente lo stimolo della didattica laboratoriale; contenere degli esempi di attività didattiche; includere dei protocolli di "racconto di esperienza"; creare proposte didattiche più credibili; sostenere il docente nella didattica assunta.

Siamo d'accordo sul fatto che la scrittura dovrebbe essere ripensata, sia nell'organizzazione del testo che dei contenuti e significati impostati. Riportiamo l'esempio dei Parametri Curriculari

Nazionali[90] del Brasile (Brasil, 2006), che seguono una logica organizzativa simile alle Indicazioni italiane, ma che sono formati da una scrittura più semplice e comprensibile, avvicinandosi ai diversi livelli di conoscenza e intendimento dei docenti. Le critiche riportate dagli insegnanti brasiliani nell'analizzare i loro documenti ministeriali si riferiscono: alla loro insicurezza nell'applicazione di quello che contiene il testo; all'imposizione governativa della proposta verso un'educazione neo-liberale; alla scarsa considerazione delle diversità socio economiche regionali e culturali della comunità assistita.

Se la proposta delle Indicazioni curriculari è una gran novità per la maggior parte degli insegnanti ci sembra giusto e appropriato contenere degli esempi di "cosa" si può proporre in classe. Concordiamo sul fatto che la presenza di attività didattiche "modelli" possano rendere dei riferimenti molto fruttuosi, orientando l'insegnante nella sua pratica. Tuttavia, evidenziamo l'enorme diversità presente in una classe, che la rende unica; di conseguenza è compito del docente adattare l'attività per renderla significativa.

Promuovere la modellizzazione in classe: cosa potrebbe fare l'insegnante

I suggerimenti per la pratica didattica

L'iniziare la modellizzazione **prima delle secondarie** è una considerazione molto pertinente, citta dall'insegnante 1 durante l'intervista. Il fatto è che l'inserimento dei problemi del quotidiano all'interno della matematica e la loro risoluzione è, appunto, presente nel curriculum della scuola di primo grado, come evidenziato nel capitolo della modellizzazione matematica e riportato nelle Indicazioni per il curriculo (2007); riguardo le competenze matematiche da raggiungere entro il termine della scuola secondaria di primo grado: *"Riconosce e risolve problemi di vario genere analizzando la situazione e traducendola in termini matematici, spiegando anche in forma scritta il procedimento seguito, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati*" (p. 97).

L'insegnante 2 riporta una sua esperienza con l'applicazione della modellizzazione nelle secondarie: "S*ono riuscita a lavorare su questo anche in seconda media con una buona classe e*

[90] L'elaborazione dei Parametri Curriculari Nazionali brasiliani "*Parâmetros Curriculares Nacionais"* è stata basata sugli studi e proposte curriculari delle regioni e delle città brasiliane; sono stati analizzati i dati statistici delle prestazioni degli studenti e realizzati diversi incontri per discutere la proposta iniziale. Il documento è già passato per rielaborazioni e segnala la necessità di una politica di implementazione della proposta educativa.

quindi, diciamo può darsi che ***lavorando in un certo modo, in certi contesti già prima della scuola secondaria si possano sviluppare delle competenze di modellizzazione tale da poter affrontare questo problema.*** L'informatore si riferiva all*'attività della Statua.*

Il quanto l'insegnante considera la modellizzazione come una proposta didattica costruttiva e che la sua flessibilità adattativa nella pratica vada a influenzare direttamente la sua applicabilità in classe: [...] *perché* ***dipende da come l'insegnante si pone nel confronto*** *e quanta importanza da allo aspetto della modellizzazione di problemi, quanto lasciali sbagliare e motivare lo studente e non tutti riescono a quella età lì, ma un esercizio di questo tipo verso la fine della seconda media si può dare* (Ins 2).

Un'importante riflessione sulle competenze dei ragazzi della scuola media è stata riportata da Maaß (2007): gli studenti a livello secondario di primo grado sono capaci di sviluppare competenze di modellizzazione. La ricercatrice ha condotto uno studio con l'obiettivo di mostrare gli effetti dell'integrazione della modellizzazione nelle lezioni quotidiane di matematica. Verso la fine del suo studio Maaß sostiene che quasi tutti gli studenti erano qualificati a modellizzare problemi familiari o problemi sconosciuti e evidenzia che le differenze si manifestano nella complessità dei compiti.

L'insegnante 1 ci racconta la sua decisione di cambiare il livello scolastico di insegnamento: "*Studenti più piccoli si possono abituare ad un ragionamento verso la modellizzazione"*. E aggiunge la sua percezione nel lavorare in una prima superiore: "[...] *Tutto quello che ha fatto prima ha cancellato. Questo è un* ***problema che ho sempre avuto io.*** *[...] è per quello che io adesso sto lavorando con i più piccolini, però realmente soprattutto questo. Perché noto che i grandi lavorano per camere stagne e allora****, ho pensato che i piccoli magari si cominciano ad abituare ad un ragionamento del genere per poi*** *si arrivano da grandi* [gli studenti] *e sono meno fossilizzati su queste cose".*

La promozione della didattica in modo laboratoriale e di attività interdisciplinari sono stati riportati dagli informatori privilegiati come una significativa pratica verso lo sviluppo della modellizzazione. Alcuni sono stati enfatici nel sottolineare il compito dell'insegante durante la lezione, come l'importanza di evidenziare cosa si fa in classe: uso di un modello, astrazione, assunzione; cosi come esplicitare cosa sarebbe il modello, le sue dimensioni e distanza con la realtà e istigare l'approssimazione matematica.

Quando si lavora con la modellizzazione, l’insegnante ha l’importante incombenza di incentivare la discussione e la riflessione degli studenti. L’OCDE (2006) segnala degli importanti e fondamentali compiti dell’insegnante come la ricerca delle situazioni che possono trasformarsi in problemi, ben come l’istigazione degli studenti a cogliere delle situazione problematiche che vorrebbero risolvere. Una situazione del loro quotidiano che può essere trasformata in un interessante problema, evocando delle discussioni matematiche pertinenti come la propria applicabilità della matematica.

Riguardo ai discenti è stato riportato dagli informatori privilegiati l’importanza di mettere in luce le ipotesi implicite create da loro e di dargli più spazio per esporre il loro ragionamento. È in questi momenti che si crea la possibilità allo studente di costruire conoscenza, di demistificare le sue concezioni erronee, di capire gli aspetti che devono essere ripensati nel suo svolgimento. Il confrontarsi con le proprie idee, lo scambio, l’interazione con gli altri sono pratiche che costituiscono il vero e autentico apprendimento. L’approccio costruttivista offre all’insegnante una struttura teorica dalla quale ricavare alcune importanti indicazioni sul significato dell’apprendere, sul cosa insegnare e come farlo. L’interpretazione del significato viene ricostruita a partire dalle conoscenze pregresse e dagli scopi personali: “l’insegnante e i materiali d’istruzione diventano risorse per l’apprendimento in molti modi complessi, attraverso le loro intenzioni pedagogiche” (Varisco, 2002, p. 176). In questa perspettiva l’insegnante assume l’insegnamento come una delle tante risorse possibili e l’apprendimento come un processo continuo e pervasivo allo studente.

Durante l’intervista è stato riportato il fatto di abituare gli studenti a costruire le formule. Purtroppo quello che si fa molto nella pratica matematica è presentare la situazione problema già previamente strutturata; Blum (et al., 2002) ritiene che in queste situazioni non sia niente più che un 'vestirsi' di un problema puramente matematico in parole di un segmento del mondo reale. Questo è spesso il caso dei classici problemi scolastici. In questo caso matematizzare significa semplicemente 'spogliarsi' del problema, e il processo di modellizzazione consiste solo in quest’azione, riducendo l'uso della matematica e una semplice interpretazione.

La modellizzazione permette che i problemi affrontati siano anche riportati dagli studenti. Tale importante considerazione non è stata riportata dagli informatori privilegiati. L’insegnamento e l’apprendimento della matematica saranno più gratificanti una volta che lo studente comincia ad imparare quello che gli suscita interesse, diventando co-responsabile del suo apprendimento.

Le possibili azioni del sistema dell'istruzione nella promozione della modellizzazione in classe:

Avere più materiale didattico di riferimento è stato elencato da tutti gli insegnanti quando discutono della promozione della competenza in classe. Questo riferimento è un'azione che aspettano dal sistema dell'istruzione; la possibilità di cercare nuove metodologie e pratiche didattiche come un'azione del docente non viene considerata. Tale problematica accennata dagli informatori privilegiati ci porta ad una riflessione ancora più profonda: l'adeguatezza e la creatività dell'applicazione da parte del docente. Non basta avere il materiale, ma bisogna creare delle efficaci opportunità per essere del tutto "utile".

Siamo d'accordo sul fatto che la creazione di materiali didattici sia una metodologia da applicare nelle classi, proponendo quindi la costruzione di documenti con pratiche che si avvicinano di più alle necessità apportate dagli insegnanti.

L'aumento delle ore di matematica in classe potrebbe in parte colmare i problemi. Certamente sarebbe molto comodo avere a disposizione più tempo insieme agli studenti, ma anche l'insegnante di biologia, di chimica, di fisica o di italiano ad esempio potrebbero auspicare tale proposta. Il fatto è che le ore sono quelle e bisogna ripensare e riorganizzare in modo autentico e dinamico i momenti insieme agli allievi, far prevalere di più aspetti che ritengono importanti e man mano abbandonare le vecchie pratiche didattiche.

La valutazione del docente è stato citata come uno dei suggerimenti per potenziare la pratica della modellizzazione. Siamo parzialmente d'accordo con il fatto di valutare gli inseganti: prima di tutto bisogna aver chiaro cosa si intende di valutare e come viene realizzato tale giudizio. Tale considerazione necessita l'organizzazione di iniziative da proporre in base ai risultati raggiunti. Quello che ci sembra strano è la mancata apparizione della formazione del docente come proposta allo sviluppo della modellizzazione, che riteniamo fondamentale per l'integrazione di tale pratica didattica. Nella **formazione del docente** si dovrebbero quindi mettere a disposizione delle vere e proprie opportunità per sviluppare le competenze degli insegnanti, in modo che possano includere e potenziare le loro pratiche didattiche.

Se i docenti non hanno sperimentato ed imparato dalle precedenti esperienze formative, come all'università, come fanno ad acquisire le competenze necessarie per inserire la modellizzazione in classe e, in più, per promuoverla come una competenza? Tale quesito è estendibile all'avvio di altre competenze matematiche.

Il fatto è che l'istruzione ha bisogno di docenti competenti; Niss (2006) ci aiuta a definire cosa intendiamo "competente": un insegnante competente è quello che, in un modo efficace, è capace di aiutare i suoi studenti a costruire e sviluppare delle competenze matematiche. Secondo l'autore, i propri insegnanti devono conoscere a fondo le competenze matematiche che intendono di sviluppare con gli studenti e possedere le adeguate competenze didattiche nella prospettiva dell'istruzione matematica.

Considerazioni finali

I ricercatori sostengono che le concezioni degli insegnanti circa la modellizzazione matematica hanno un impatto sulla bassa integrazione delle attività di modellizzazione nelle classe di matematica (Frejd, 2012).

Frejd (2012) in seguito alla sua ricerca condotta con insegnanti della scuola superiore di secondo grado[91], nel quale ha investigato la loro concezione sulla modellizzazione matematica e le esperienze di tale pratica in classe, ha concluso che gli insegnanti hanno una minore esperienza delle applicazioni della modellizzazione nelle classe di matematica rispetto alle classe di fisica, in cui viene utilizzata come un'attività comune. In generale gli informatori privilegiati in questo studio sembrano non dare la priorità all'integrazione della modellizzazione nel loro insegnamento quotidiano della matematica.

Nei corsi di formazione matematica in ambito universitario l'argomento della modellizzazione spesso non è compreso; di conseguenza la sua applicabilità è mancante come una metodologia di insegnamento.

Specialmente a livello internazionale, si osserva una crescita del numero di ricerche con insegnanti sulla modellizzazione matematica, comprendendo i diversi livelli di istruzione. Secondo De Corte (2007), è attraverso la modellizzazione che si sviluppano il pensiero e le

[91] Ricerca condotta con 18 docenti della scuola superiore di secondo grado in Svezia.

competenze matematiche; di conseguenza tale processo dipende sostanzialmente dalle conoscenze, dalle abilità e dalle competenze degli insegnanti.

Nell'ottica delle competenze, il compito dell'insegnante non è tanto quello di aiutare gli studenti ad avere una conoscenza delle loro teorie e comprendere le loro insufficienze in modo da preparare il terreno alla loro revisione, quanto piuttosto di collegare in modo corretto i vari schemi tra di loro e con dei concetti che si riferiscono a entità e processi non osservabili, la cui trasmissione rientra nei compiti della scuola (Strike & Posner, 1985 citato in Berti, 2002).

La ricerca si propone inoltre di generare dei cambiamenti concettuali negli informatori privilegiati coinvolti riguardo l'applicazione della modellizzazione. Secondo Berti (2002) la parola "cambiamento" fa pensare che essi perdono la loro identità o diventano qualcos'altro nella riorganizzazione che porta ad una diversa concezione; ma il parallelismo tra cambiamento concettuale e rivoluzioni scientifiche suggerisce che essi vengano abbandonati e sostituiti con qualcosa di diverso. Alcuni studiosi sostengono che ciò che di fatto avviene, e che dovrebbe anche costituire l'obiettivo dell'istruzione, molto spesso non è un cambiamento delle concezioni elaborate al di fuori della scuola e spesso utili a proporre dei problemi pratici, ma la comprensione del diverso tipo di interrogativi che le varie scienze si propongono, e del modo in cui i concetti scientifici sono adeguati a rispondervi.

CAPITOLO 8 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

8.1 Considerazioni conclusive della tesi

Considerazioni riguardo l'analisi con gli studenti: FASE 1

Le interviste realizzate con gli studenti coinvolti in questa ricerca hanno fornito dati per indagare le motivazioni ad apprendere e l'autoefficacia dei soggetti attraverso *l'intervista studenti* e le concezioni iniziali e più articolate della loro competenza modellistica attraverso la sequenza di attività con problemi di modellizzazione.

La discussione della FASE 1 sulla prima parte delle interviste (cap. 5) ha posto in evidenza i seguenti risultati riguardo gli aspetti motivazionali e l'autoefficacia degli studenti:

- Riguardo le motivazioni ad imparare, gli studenti hanno presentato aspetti come: fiducia positiva nella scuola; comprensione di un argomento; motivazione in funzione della materia; motivazione in funzione dell'indirizzo scelto; l'aspetto della "novità" di un argomento. I fattori non stimolanti riguardo l'apprendimento si riferiscono a: incomprensione degli argomenti matematici; scuola concepita come un obbligo di frequenza; atteggiamento dell'insegnante.
- L'insegante della scuola media è stato scelto dagli studenti come un esempio di docente che ha gli incentivati ad imparare; nello specifico hanno fatto riferimento all'insegnante di matematica.
- I soggetti in generale sono riusciti ad identificare delle proprie competenze di studio, motivazionali e specifiche matematiche; hanno identificato l'ansia, la paura e la mancanza di voglia come degli ostacoli personali che influiscono sul loro processo di apprendimento.
- Gli studenti non hanno identificato molte lacune riguardo ai contenuti matematici imparati precedentemente; hanno individuato come aspetti matematici nei quali si sentono più forti le espressioni, l'analisi del problema e i problemi pratici. In relazione agli aspetti personali che possono rappresentare un "disturbo" nell'apprendimento della matematica, l'attenzione, l'organizzazione e l'ansia sono stati spesso citati.

- I soggetti spesso provano ad affrontare i compiti difficili e impegnativi che gli sono proposti, essendo consapevoli del perché si sottopongono a tali sfide.
- Gli studenti non si interrogano mai sulle applicabilità dei contenuti matematici imparati a scuola e in generale non vedono delle connessioni.
- Presentano concezioni innatiste e empiriste riguardo l'avvenimento delle conoscenze matematiche.

Alla scuola superiore di secondo grado gli studenti sentono più motivati nelle materie che si riferiscono ai loro indirizzi. In questa accezione possiamo considerare la motivazione ad apprendere come l'intenzione di acquisire la conoscenza o le abilità che le attività di apprendimento sono designate a sviluppare.

Rispetto all'interpretazione dei ragionamenti degli studenti nella seconda parte della FASE 1, riguardo le attività di modellizzazione (cap. 6) sono stati posti in evidenza i seguenti risultati per ciò che concerne le loro competenze di modellizzazione:

I primitivi fenomenologici presentati dagli studenti riguardano la:

- *Creazione del modello reale*: identificazione sbagliata ed eccessiva semplificazione nell'individuare le variabili del problema; creazione di nuove variabili non pertinenti; identificazione erronea dello strumento matematico e stime inadeguate.
- *Costruzione del modello matematico*: creazioni scorrette di relazioni fra le variabili, utilizzo di un criterio di pertinenza non matematica. L'identificazione di tutte le variabili non ha implicato la corretta costruzione del modello matematico.
- *Interpretazione dei risultati*: interpretazione attribuita ad un fattore non pertinente o inesistente; assunzioni e generalizzazioni di risultati non attendibili nella realtà.
- Nelle tre attività di modellizzazione proposta, la decodifica della situazione cosi come l'identificazione delle variabili dipendenti, indipendenti e le loro relazioni sono stati dei grandi ostacoli per gli studenti "principianti".
- Al momento di fare una stima sono presentate concezioni erronee e ingenue che hanno portato gli studenti a assumere dei valori non validi per la situazione.

I primitivi fenomenologici presentati dai soggetti indicano le proprie rappresentazioni mentali riguardo il processo di modellizzare, che tuttavia risultano non corrette dal punto di vista della conoscenza disciplinare consolidata. Queste concezioni erronee e ingenue interferiscono spesso negli apprendimenti successivi. Da una prospettiva costruttivista, queste concezioni sono considerate aspetti fondamentali ed indispensabili dell'apprendimento umano. Riassumendo, queste **idee sbagliate** si riferiscono alla complessità delle conoscenze metacognitive del processo di modellizzazione. Complessivamente, **lo sviluppo di competenze di modellizzazione** è un compito molto complesso che non deve essere sottovalutato. L'enorme varietà dei possibili errore e delle idee sbagliate mostra l'alta performance della maggior parte degli studenti che non hanno sviluppato adeguate competenze di modellizzazione.

Gli aspetti più articolati della competenza presentati dagli studenti riguardano :

- La *comprensione del problema reale presentato:* il riconoscimento delle grandezze che influenzano la realtà, l'identificazione delle variabili dipendenti e indipendenti e la creazione di certe relazioni fra i dati presentati hanno favorito gli studenti nella decodifica della situazione presentata.

- La *costruzione del modello matematico:* la costruzione delle relazioni tra le variabili, la matematizzazione delle quantità rilevanti e le loro relazioni cosi come la scelta appropriata della notazione matematica e rappresentazione della situazione hanno orientato i soggetti a creare il loro modello matematico. In particolare, i punti cruciali in questa fase sono state le stime realizzate in modo corretto e lo strumento matematico di riferimento adeguato. I modelli matematici presentati dai soggetti sono stati sempre diversi uno dall'altro.

- La *Risoluzione matematica del modello creato*: Attraverso l'impiego di poche strategie euristiche e l'utilizzo delle conoscenze matematiche per risolvere il problema formulato, gli studenti sono riusciti a risolvere il modello costruito e in generale non hanno effettuato degli errori di calcolo.

- *L'interpretazione e la verifica delle soluzioni*: l'interpretazione dei risultati matematici ottenuti non è stata eseguita da tutti i soggetti "esperti", pochi sono stati gli studenti che hanno presentato una riflessione critica sulla soluzione trovata.

Nello specifico per l'attività del taxi, nessuno dei soggetti coinvolti ha identificato esattamente le stesse variabili dipendenti e indipendenti che influiscono nel valore della corsa. Gli studenti che sono riusciti a decodificare correttamente la situazione hanno trovato il valore del costo di un chilometro correttamente, ma non tutti hanno costruito il modello matematico senza errori.

L'attività della statua ha presentato come ostacolo iniziale il riferimento matematico assunto: non tutti i soggetti erano consci di relazionare i bambini della foto come uno strumento di misura. Le stime assunte e il riferimento matematico corretto ha portato i soggetti a trovare dei risultati per l'altezza totale della statua validi o parzialmente validi.

L'attività del viaggio ha presentato degli ostacoli nell'interpretazione della scala assunta nella mappa. Nonostante la diversità dei modelli matematici creati dai soggetti e, delle stime assunte, gli studenti sono arrivati a soluzioni valide, sia per la misura della tratta del viaggio sia per il tempo impegnato per realizzarlo di modo piacevole. Gli studenti "esperti" hanno presentato delle competenze storiche e geografiche nella realizzazione dell'attività.

Considerazioni riguardo l'analisi insegnanti: FASE 2

Riguardo la progettazione della pratica didattica abbiamo interrogato gli insegnanti di matematica della scuola superiore di secondo grado, nella ricerca nominati di informatori privilegiati, allo scopo di ripensare come si potrebbe adattare le attività di modellizzazione matematica in classe. I frammenti delle attività di modellizzazione svolte dagli studenti nella FASE 1 hanno aiutato gli insegnanti ad identificare gli ostacoli affrontati dai discenti nel processo modellistico.

La discussione della FASE 2 sulle interviste aperte a informatori privilegiati (cap. 7) ha posto in evidenza i seguenti risultati riguardo le concezioni degli insegnanti sull'oggetto dell'indagine:

- Gli insegnanti hanno delle difficoltà nell'identificare le competenze degli studenti, affermando che i loro studenti hanno una competenza modellistica *scarsa* o assente.

- Il riconoscimento e l'individualizzazione delle competenze di modellizzazione dei loro studenti sono state: *risolvere equazioni letterali in generale; riportare esperienze personali e di vita; cercare i dati del problema, costruire una struttura matematica a partire da una situazione reale; fare un'astrazione matematica e confrontare i dati con la realtà.*

- La diagnosi delle competenze degli studenti si manifesta nei *momenti "non formali" della lezione.* Gli informatori privilegiati hanno identificato specificamente le seguenti occasioni: *le discussioni indirette in classe e nei lavori a gruppi; quando gli studenti esprimono opinioni su un nuovo argomento; nella pratica di una didattica di sfida; durante la realizzazione di giochi matematici e quando vanno alla lavagna a correggere esercizi.* Tutti gli insegnanti hanno sottolineato il fatto che quando *gli studenti non vengono valutati* si riesce a indagare più a fondo le loro competenze.

- I maggiori *ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione* sono in relazione alle limitazioni cognitive degli studenti. Sono state identificate le seguenti difficoltà:
    - *Capire la situazione: decodifica del testo;*
    - *Riconoscere strutture matematiche di riferimento ;*
    - Costruzione del modello matematico: *mettere in relazione i dati del problema affrontato; ricavare da un testo delle informazioni e isolare i dati significativi; flessibilità di pensiero nella costruzione del modello; scelta del contenuto matematico appropriato alla situazione; passare dal linguaggio informale ad un linguaggio formale matematico; organizzazione dei dati per costruire l'equazione;*
    - *Lavorare con i modelli e confrontarli;*
    - *Confrontarsi con la credibilità dei procedimenti;*
    - *Fare una stima;*
    - *Lavorare con il concetto proporzionale.*

- Gli *ostacoli affrontati nel processo di modellizzazione* sono in relazione anche al *problema del contesto dell'istruzione:* la *pratica della didattica standard (libro di testo, lavagna, verifica)* è un impedimento allo sviluppo della competenza modellistica, cosi come *la paura dell'errore, il lungo programma da compiere e la didattica basata su esercizi e non su* *problemi*. La maggior parte degli insegnanti affermano che per favorire lo svolgimento della modellizzazione in classe *ci vuole l'azione stimolante del docente*.

- Le Indicazioni nazionali per il curriculo sono state assunte come un *supporto didattico all'insegnante,* enfatizzando *la possibilità di distaccarsi da una matematica basata solo sul libro di testo* e di *sostenimento alle decisioni dell'insegnante nella scelta dei contenuti da affrontare*. Inoltre, le Indicazioni *incentivano l'introduzione della realtà in classe e la realizzazione di una didattica laboratoriale.*

- Sono emersi degli *aspetti che dovrebbero essere contenuti nelle Indicazioni nazionali per il curriculo*, in particolare: *la scrittura potrebbe essere in un modo diverso; lo stimolo alla didattica laboratoriale e il sostenimento al docente nella didattica assunta potrebbero prevalere maggiormente.* Tutti gli informatori privilegiati sostengono che *si potrebbe includere degli esempi di attività didattiche e protocolli di "racconto di esperienza".*

- Hanno identificato *cosa potrebbe fare l'insegnante* per promuovere la modellizzazione in classe:
    - ➢ *Inserire la modellizzazione nella didattica quotidiana;*
    - ➢ *Cominciare la lezione o introdurre un argomento con le attività;*
    - ➢ *Fare didattica in modo laboratoriale; fare attività interdisciplinari;*
    - ➢ *Evidenziare cosa viene fatto classe: Uso di un modello, astrazione, assunzione e esplicitazione di cosa sarebbe il modello, le sue dimensioni e la distanza con la realtà;*
    - ➢ *Promuovere il ragionamento matematico congetturale e la competenza nell'uso di strumenti matematici;*
    - ➢ *Dare più spazio allo studente per esporre il suo ragionamento e mettere in luce le ipotesi implicite che crea;*
    - ➢ *Ridurre la correzione punto a punto;*
    - ➢ *Abituare gli studenti a costruire le formule;*
    - ➢ *Appassionare gli studenti alla matematica fin da piccoli;*
    - ➢ *Lavorare a gruppi in classe;*
    - ➢ *Iniziare la modellizzazione prima delle secondarie.*

- Sono state identificate anche delle *possibili azioni del sistema dell'istruzione nella promozione della modellizzazione in classe*: avere più materiale didattico di riferimento è stato citato da tutti gli informatori privilegiati, oltre la valutazione formativa del docente e l'aumento delle ore di matematica in classe, anche se ci sono poche probabilità che quest'ultimo possa avvenirsi.

Lo studio dell'intervista con gli insegnanti è stato realizzato attraverso l'analisi del contenuto, concentrandosi sull'aspetto proposizionale e non su quello linguistico della trascrizione. Esso ci ha permesso di comprendere il significato di quello che gli informatori privilegiati pensano, spingendoci ad effettuare un'analisi più riflessiva del fenomeno. In generale le discussioni sulle modalità di apprendimento dell'alunno non vanno ad integrare l'insieme delle riflessioni effettuate dagli gli insegnanti. I loro posizionamenti spesso esprimono sentimenti, convinzioni e non derivano da uno studio sistematico dell'argomento.

Gli insegnanti sono riusciti a cogliere gli ostacoli più significativi degli studenti riguardo lo svolgimento della modellizzazione. Nonostante ciò, il loro tentativo di attenuare le difficoltà riscontrate è ancora poco prevalente: si concentrano molto nell'identificazione dei problemi del discente, la loro mancanza di conoscenza, di esperienza, di attitudine… Qualche volta sembra che il docente non sia molto consapevole o non vogli assumere che è lui il responsabile dei cambiamenti, che è lui che detiene il potere di proporre delle metodologie diverse, di gestire l'attività in un modo o nell'altro.

Gli insegnanti riescono anche a identificare con chiarezza gli ostacoli imposti dal sistema dell'istruzione, ma sembra che non si accorgano che sono loro i primi a rinforzare tutti questi "atteggiamenti negativi" che impone l'istruzione verso lo sviluppo della competenza indagata.

Per il cambiamento concettuale degli insegnanti bisogna che loro incorporino i propri elementi di conoscenza riguardo il fenomeno indagato e che li adattino alle loro pratiche didattiche. Come abbiamo già sottolineato, l'insegnante ha un ruolo centrale nelle decisioni che stanno alla base della costruzione e della realizzazione di tale percorso.

I suggerimenti emersi nell'intervista verso una pratica didattica che promuova la modellizzazione in classe sono molto pertinenti. I docenti sono consapevoli di come potrebbero adattare la loro pratica e come si potrebbe agire in classe verso la costruzione di un ambiente di apprendimento significativo. Da tutto ciò la domanda che emerge è: perché gli insegnanti non mettono in pratica tutte le azioni che ritengono efficaci per la promozione della modellizzazione?

Conclusioni generali della ricerca

La ricerca si basa su un tema poco indagato, ma che consideriamo di cruciale importanza per lo sviluppo di specifiche competenze matematiche che hanno un forte transfer nello studio delle scienze sia naturali che sociali.

L'argomento della **modellizzazione porta l'introduzione** della complessità in classe, offre spazio al passaggio dalla ricerca della verità matematica pura verso una continua valutazione, una successione di significati, una riorganizzazione dei contenuti e dei vari aspetti del problema: permette una visione più profonda e significativa anche della matematica stessa. Insegnare a modellizzare può arricchire e ampliare nello studente l'idea della matematica e del suo ruolo nel mondo e nella società, illustrare e dare significato a enti e processi matematici e, di conseguenza, motivare allo studio stesso della matematica.

La modellizzazione permette ai cittadini di essere consapevoli anche delle scelte personali, di valutare le decisioni politiche, per una sua più ampia comprensione del mondo, per l'acquisizione di una flessibilità e attitudine mentale, ecc.

Si percepisce che tutti i fondamenti di apprendimento significativo e di insegnamento costruttivista arrivano ad un punto in comune: è impossibile per l'insegnante insegnare agli studenti senza recuperare le conoscenze e i valori che essi portano dalle sue precedenti esperienze. Per la concretizzazione di tale avvenimento è indispensabile che il docente ascolti i suoi allievi; per lo studente è indispensabile la possibilità di esprimersi, di parlare in classe ai compagni e all'insegnante.

Nell'andare a indagare gli studenti nella fase 1 della ricerca si osserva che loro gradualmente acquisiscono una prospettiva di meccanismi per molti aspetti del mondo matematico, appoggiandosi sulla attivazione dei p-prims matematici: questi possono essere attivati ma applicati in modi diversi. Come già sostenuto, la sensibilità verso il contesto è più facile da capire dal punto di vista dei p-prims che dai *misconceptions,* perché i p-prims sono codificati ad un livello più astratto. La sua attivazione nella situazione in cui si cerca di spiegare un fenomeno può essere corretta, ma l'elemento di conoscenza stessa può non esserlo. Questa differenza è molto rilevante per l'istruzione: un insegnante non potrebbe cercare di eliminare un p-prim, ma integrarlo alle altre conoscenze.

Investigare la conoscenza che gli studenti presentano nelle strategie di apprendimento che hanno sviluppato, e anche il proprio grado di "monitoraggio" che impiegano su di essi è di fondamentale importanza per progettare una pratica didattica.

I dati esplorativi non permettono di generalizzare i risultati ottenuti perché si tratta di un'indagine che approfondisce nei dettagli una serie di meccanismi che sono talmente di base da rendere improbabile una loro esplicitazione in modo cosciente o volontario da parte dell'individuo. L'intervista clinica ci ha permesso di andare in profondità su questi meccanismi di base; ribadiamo ancora che sia il numero di soggetti coinvolti che gli strumenti utilizzati nella presente ricerca sono molto adatti per andare in profondità dei p-prims. Approfondire i p-prims vuol dire andare a scavare a fondo del costruttivismo: riconoscere veramente quali sono gli elementi di base della conoscenza in modo molto ricco e approfondito, certamente limitandosi alla generalizzazione della popolazione coinvolta.

È stato importante lavorare nella prospettiva dei p-prims perché sono effettivamente emerse delle cose che nessuno avrebbe potuto prevedere; si tratta di cose veramente interessanti, che ci permettono di capire maggiormente il punto di vista degli studenti. Dal punto di vista metodologico abbiamo due considerazione da fare: la prima è che riteniamo la nostra tesi ovviamente esplorativa, poiché vuole indagare in profondità il fenomeno dello **sviluppo delle competenze matematiche** e indagarle in modo approfondito anche per costruire delle categorie di concettualizzazione che serviranno a ulteriori lavori investigativi. Tuttavia, è appunto un lavoro non di tipo convenzionale o triviale; questo significa che abbiamo preferito lavorare con pochi studenti ma in profondità in modo da avere una base concettuale per lavori successivi.

La seconda cosa che riteniamo importante sottolineare è che l'intervista clinica e la ricerca sui p-prims ci permettono di essere molto aderenti al modo in cui ragionano i ragazzi, o ragionano gli insegnanti sul problema. Se vengono utilizzate delle categorie già standardizzate, questo impone il punto di vista del ricercatore, ma alla fine sfugge il modo con cui loro lo vedono. I p-prims, in un certo senso obbligano i ricercatori dal loro punto di vista, a vedere le incongruenze dei soggetti; perché se si impone già un linguaggio, le incongruenze scompaiono.

I dati emersi dalla ricerca richiamano l'importanza dei docenti nello stare attenti a lavorare con gli studenti sulle loro concezioni, identificate qui come i primitivi fenomenologici di matematica. È attraverso lo sviluppo di strategie di insegnamento che si giunge ad un apprendimento relazionale, a un modo di pensare investigativo, in modo che le concezioni della conoscenza matematica siano integrate in una visione meno frammentata della scienza.

Gli insegnanti hanno mostrato la loro consapevolezza degli ostacoli affrontati dagli studenti nel processo di modellizzazione e hanno fatto dei significativi suggerimenti per promuovere la competenza modellistica in classe. Quello che si auspica è che gradualmente vengano messe in pratiche tutte queste significative idee emerse. Insegnanti e ricercatori non possono trascurare il potere che esercitano nella scelta delle situazioni e dei compiti in cui è valutata la conoscenza degli studenti. Riguardo alla domanda precedentemente posta sul perché gli insegnanti non mettano in pratica tutte le azioni che ritengono efficaci alla promozione della modellizzazione, abbiamo una possibile risposta: gli manca l'esperienza, gli mancano delle conoscenze del processo modellistico, gli manca il coraggio e l'attitudine verso il cambiamento. È per questo che la formazione del docente deve essere continua; i programmi ministeriali devono fornire dei corsi di formazione agli insegnanti. Nei particolari contesti in cui la modellizzazione fa parte del programma didattico e viene effettivamente messa in pratica, ciò si verifica perché sono state pensate delle strategie per farne. I cambiamenti non avvengono da un giorno all'atro; c'è bisogno di organizzazione, di progettazione e di volontà.

Crediamo che la modellizzazione matematica sia una strategia di insegnamento e apprendimento per sviluppare i contenuti matematici in tutto l'arco della scolarizzazione, ma ancora di più alle superiori. Intendiamo che la modellizzazione è una strategia che consente l'interazione dell'individuo con la matematica in un modo più significativo, che intende di preparare lo studente a risolvere i problemi del suo quotidiano. È di fondamentale importanza che l'insegnante promuova la risoluzione di problemi reali in classe. Questa è un'azione significativa verso l'inserimento della modellizzazione in classe. Tocca agli insegnanti contribuire all'immaginazione e alla creazione degli studenti, istigandoli ad analizzare, ad inventare verso un apprendimento di qualità; formando un cittadino che non abbia paura di esperimentare e di esprimersi.

La modellizzazione sostiene una pratica didattica diversa perché favorisce l'apprendimento, il pensiero critico, il posizionarsi criticamente di fronte ai problemi quotidiani, in cui lo studente deve riflettere e cercare soluzioni. Da tutto ciò, riteniamo che la modellizzazione debba essere messa in pratica frequentemente nelle lezioni di matematica, nonostante la mancanza di tempo per adempiere al programma scolastico o le difficoltà riscontrate negli studenti. In questa prospettiva, il compito dell'insegnante diventa complesso: creare delle situazioni che permettano allo studente di costruire conoscenza e sviluppare conoscenze. Il legame tra i concetti di competenza e socio costruttivismo si trova nelle situazioni, che sono fonte delle conoscenze e delle competenze.

Il nostro contributo quindi è quello di indagare i primitivi fenomenologici riguardo la modellizzazione matematica. Ma possiamo domandarci perché i p-prims? Poiché sono veramente molto aderenti al modo in cui ragionano gli studenti e sono anche difficilmente indagabili con strumenti standard, è veramente necessario capire qual è il problema dal loro punto di vista. E la stessa considerazione può essere fatta sul perché indagare gli insegnanti: perché si riesce a vedere che cose possono fare, quali sono gli ostacoli o le lacune che percepiscono, non tanto riguardo loro competenza, ma il contesto, le condizioni, in cui loro possono lavorare e cosa potrebbero fare. Siamo incisivi sul fatto che i risultati ottenuti non sono una soluzione, ma **sono le condizioni per le soluzioni.**

È importante sottolineare che non riteniamo di aver trovato il metodo per educare la competenza di modellizzazione, ma abbiamo trovato dei "mattoncini", delle componenti di base degli insegnanti e degli studenti per costruire e sviluppare le competenze.

Uno dei limiti della ricerca esplorativa è la difficoltà di generalizzazione dei risultati ottenuti. Tuttavia la nostra ricerca affronta in profondità un problema reale e permette che ulteriori studi di generalizzazione possano essere fatti successivamente. La ricerca esplorativa con un fine pratico, potrebbe servire poi per modificare le pratiche all'interno della scuola, come creare delle indicazioni agli insegnanti verso la riflessione dell'applicazione della modellizzazione e il suo inserimento ai prossimi curriculi.

Lo specifico intervento eseguito con gli insegnanti ci spinge verso altri possibili studi da svolgere; uno che ci incuriosisce è: se il docente è consapevole dei cambiamenti didattici che potrebbe mettere in pratica perché non lo fa?

Il principio della “conoscenza in pezzi”, proposto da diSessa (1988) e anche denominato nella ricerca di primitivi fenomenologici, esprime la nostra convinzione sul fatto che questa caratterizzazione debba essere presa sul serio ed esaminata con attenzione. Lo svolgimento delle attività di modellizzazione ha mostrato modi specifici con cui gli studenti utilizzano i loro concetti appresi e come mettono in pratica le proprie abilità. Questo suggerisce che la ricerca potrebbe indagare, ad esempio, i modi in cui la conoscenza viene riutilizzata e che intanto servono nuove funzioni per lo sviluppo della competenza modellistica. Serve anche a ricordare che le differenze superficiali tra i principianti e gli esperti possono nascondere importanti analogie nel contenuto delle loro conoscenze di dominio.

Se non viene fatto alcun tentativo per sondare aspetti impliciti della struttura delle conoscenze degli esperti, importanti connessioni agli stati precedenti della costruzione della conoscenza possono essere trascurati. Per progettare ambienti di apprendimenti significativi servono rilevamenti e studi sulle competenze dei processi che coinvolgano l'apprendimento di idee matematiche complesse.

8.2 Buone pratiche per lo sviluppo delle competenze di modellizzazione

Fino a poco tempo fa, la grande questione scolastica era l'apprendimento dei concetti. Il conoscere si restringeva ad accumulare concetti, l'intelligenza implicava l'articolazione logica delle idee, l'essere informati su grandi conoscenze; insomma ottenere come un "linguaggio" delle questioni presenti principalmente nei testi scolastici. Il problema è che molti studenti non riescono ad apprendere in questo contesto e neanche si sentono stimolati a pensare. Nel ripensare sulle nuove proposte didattiche secondo la prospettiva delle competenze, ci sembra essenziale riflettere:

- Un programma che si iscrive nella logica delle competenze può tralasciare la creazione di situazioni in classe che dovrebbero permettere la costruzione e lo sviluppo delle competenze?
- Un programma che si iscrive nella logica delle competenze può limitarsi a descrivere appena elenchi di saperi codificati e non fare nessun riferimento alle indagini che mettono in evidenza concezioni degli studenti a proposito di questi saperi codificati?

L'idea centrale di tutto il costruttivismo è che le conoscenze si costruiscono in funzione delle situazioni e del contesto che il soggetto affronta. Perché non si potrebbe succedere lo stesso con i programmi di studio, che dovrebbero essere costruiti con gli autori dell'educazione in funzione delle situazioni e delle caratteristiche dell'ambiente che dovrebbero svilupparsi per formare gli individui?

Se le competenze si sviluppano nelle situazioni, è fondamentale fare una riflessione su questo. Usando esempi accuratamente selezionati, il tipico processo di modellizzazione matematica può diventare uno dei temi centrali nelle classe di matematica, coinvolgendo i metodi di modellizzazione con la precisione della matematica, senza perdere di vista la discrepanza tra il modello matematico e la realtà. Nell'educazione matematica la modellizzazione viene attribuita come una strategia che consente una pratica di insegnamento differenziata. Questa offre agli studenti l'opportunità di imparare, di svolgere il pensiero critico davanti ai problemi del quotidiano, di discutere, di cercare delle soluzioni e di prendere delle decisioni. L'interazione generata dall’ambiente della modellizzazione può proporre ai partecipanti la costruzione dei concetti matematici carichi di senso e di significato: senso perché, partendo dai problemi reali, rendono utili i contenuti matematici già imparati; significato perché relaziona la matematica ad una situazione quotidiana.

Risolvere problemi posti da altri è certamente una competenza ambiziosa e a lungo termine ed è anche per questo che dovrebbe essere perseguita fin dalla scuola dell’infanzia. Nella didattica della matematica, uno dei compiti degli insegnanti, anzi obblighi, dovrebbe essere quello di colmare il divario tra il mondo della precisione tipica della matematica e quello della mancanza di precisione nel resto del mondo. Questo è indispensabile perché entrambi i mondi sono importanti ed entrambi sono indispensabili. Come possiamo imparare il vero valore della precisione e certezza della matematica se non abbiamo ancora imparato che, nel "resto del mondo", la precisione e l'affidabilità è qualcosa molto difficile da raggiungere? D'altra parte, si può solo imparare a gestire bene questa imprecisione se uno ha imparato a sfruttare le numerose possibilità offerte dai precisi campi della matematica.

Per sviluppare la modellizzazione l’insegnante deve avere la capacità di comunicare con gli studenti, di rendersi disponibile al confronto generato in classe e avere un’aggiornata preparazione didattica. Riguardo alla conoscenza matematica, l'insegnante deve mettere il suo sapere a disposizione dell'allievo, trasformandolo in punto di partenza per un ulteriore arricchimento culturale e autonomo da parte dello studente. In più, deve essere consapevole dei problemi sociali per suggerirli e integrarli in classe. Non è proprio un compito semplice e facile. Attualmente **un buon insegnante** è quello che sa coniugare attività di progettazione, di programmazione e di valutazione con le attività di motivazione, gratificazione degli alunni e di gestione della classe.

Per lo sviluppo della modellizzazione è fondamentale che l’insegnante assuma dei principi metodologici come: promuovere l’autonomia di ragionamento degli studenti e prendersi cura della motivazione dei propri studenti. L’azione docente è di fondamentale importanza per suscitare le convinzioni di efficacia dello studente; ci serviamo di Bandura (2000, p. 156) per suggerire delle condotte da seguire che riteniamo importanti:

- descrivere le attività come basate sull’uso di abilità possibile da apprendere;

- arricchire le convinzioni degli esecutori circa la loro capacità di apprendere le abilità in questione;
- creare situazioni in cui tali abilità possano essere apprese attraverso l'osservazione di modelli,
- strutturare le attività in passi gestibili efficacemente, in modo da garantire all'inizio un livello elevato di successo,
- fornire un feedback esplicito sui progressi dello studente.

Occorrerebbe ritrovare e riorganizzare sia le prospettive teoriche sulla motivazione sia gli interventi didattici affrontati in classe. Le prospettive teoriche forniscono indicazioni preziose su tanti aspetti conosciuti, ma che spesso influiscono poco nella pratica quotidiana. Gli interventi strategici possono avere un'influenza diretta nello svolgimento della modellizzazione e la dinamica adottata dall'insegnante può rendere più motivati gli studenti.

Durante l'intervista, gli studenti hanno riconosciuto delle "buone pratiche" degli insegnanti di matematica. Durante l'intervista è stato chiesto loro se avessero già avuto qualche insegnante che ha motivato il loro apprendimento. Praticamente tutti gli studenti hanno fatto riferimento all'insegnante della scuola media e, nello specifico, hanno citato l'insegnante di matematica:

> ROT: *Sicuramente la mia insegnante delle medie, di matematica. Lei era una grande e brava professoressa. Ha stimolato un po' certa gente brava a studiare la matematica.*
>
> I: Come?
>
> ROT: *Cioè… oltre a saper spiegare in maniera, cioè spiegava molto bene, riusciva anche a… non so come dire... […] insomma in qualche maniera riusciva a fare che gli altri la ascoltassero senza dover minacciare.*

> SIM: *Uhm... si alle medie avevo una prof che era abbastanza severa però dal suo metodo di insegnamento ho imparato davvero tanto.*
>
> I: In quale materia?
>
> SIM: *Matematica... infatti la mia capacità di apprenderla è dovuta in gran parte a lei.*
>
> I: E cosa faceva lei che ti piaceva cosi tanto?
>
> SIM: *Niente, niente di che... era davvero brava a spiegare e a comprenderla bene anche se era abbastanza severa. […] Sono molto contento di averla avuta come maestra perché… per fortuna che non sono mai stato bocciato alle elementari o alle medie perché l'anno successivo è andata in pensione quindi non ce l'avrei avuta per la preparazione all'esame di terza.*

MON: Sì *quella alle medie.*

I: Ma cosa faceva lei che ti incentivava?

MON: *Ma… lei* [l'insegnante di matematica] *spiegava bene e poi comunque questo ci aiutava, oppure lei ci teneva molto ad insegnare e per me quando uno ha proprio la passione dentro può anche fare la bella insegnante.*

I: E che attività didattica faceva lei in classe che ti piaceva?

MON: N*o, facevamo comunque quello che c'era sul libro però lei ci dava spesso proprio degli appunti che aveva lei.*

È notevole il compito dell'insegnante nel motivare gli studenti a studiare, ad apprendere e a creare una metodologia di studio. Leggendo questi tre frammenti sopra citati possiamo capire la rilevanza e l'influenza del docente di matematica nell'istruzione.

Riguardo le sfide del sapere scolastico, l'insegnante deve saper equilibrare le discontinuità fra quello che propone la scuola e quello che il mondo esige e presenta agli individui; Resnick (1995) ci aiuta a distinguere tale discontinuità: la scuola richiede prestazioni individuali, mentre il lavoro mentale all'esterno è spesso condiviso socialmente; la scuola richiede un pensiero privo di supporti, mentre fuori ci si avvale di strumenti cognitivi; la scuola coltiva il pensiero simbolico, nel senso che lavora su simboli, mentre fuori della scuola la mente è sempre direttamente alle prese con oggetti e situazioni; a scuola si insegnano capacità e conoscenze generali, mentre nelle attività esterne dominano competenze specifiche, legate alla situazione.

Insegnare per competenze significa riconoscere i collegamenti esistenti tra la modalità di conoscenza propria della scuola e la complessità del mondo reale. Prendendo i suggerimenti di Mario Comoglio (2004) presentiamo le differenze fra due concezioni dell'insegnamento scolastico che possiamo trovare nei comportamenti in aula dei docenti: **l'insegnamento-muro,** che si fonda su una sequenza lineare e gerarchica "insegnante– conoscenza-studente-apprendimento" e **l'insegnamento-ponte,** che si basa su una sequenza circolare "studente-conoscenza-insegnante", sintetizzato nella tabella che segue:

IL MURO	IL PONTE
La conoscenza come prodotto predefinito, materia inerte	La conoscenza come processo elaborativo, materia viva
La conoscenza viene frammentata in parti per facilitare l'assimilazione	La conoscenza viene vista nelle sue reciproche relazioni
Lo studente riproduce la conoscenza	Lo studente produce la conoscenza
Organizzato intorno a contenuti	Organizzato intorno a problemi
Strutturato e uniforme	Differenziato e regolato sulla persona
Prevede un percorso lineare insegnante-conoscenza-studente	Prevede un percorso ricorsivo insegnante-conoscenza-studente
Usa il libro come strumento principale	Usa fonti e materiali diversi
Procede in modo individualistico	Procede in modo cooperativo

Nell'insegnamento-muro si prendono in considerazione le discontinuità precedentemente indicate da Lauren Resnick, come dati innegabili su cui costruire l'identità formativa della scuola; si crea una sorta di barriera tra mondo scolastico e mondo reale, posta a difesa della missione culturale della scuola. L'insegnamento per competenze viene rappresentato dall'insegnamento ponte, nel quale si punta a superare tali discontinuità, creando dei costanti collegamenti tra mondo reale e conoscenza scolastica, tra saperi pratici e teorici. In questa prospettiva il lavoro scolastico diventa un'opportunità per prendere le distanze dalla realtà contingente, per ritirarsi ad osservarla e comprenderla più in profondità (Castoldi, 2011).

In conclusione, riteniamo che l'insegnamento delle competenze sia un compito sfidante per tutti gli insegnanti. Adottare un posizionamento riflessivo e flessibile di fronte alla professione e alle sfide imposte è la base per i cambiamenti e adattamenti. Nel contesto scolastico siamo all'inizio di un lungo processo di cambiamenti, ma siamo già partiti! Si tratta di una profonda modifica dell'approccio quotidiano della didattica scolastica: una rivoluzione paradigmatica.

Riferimenti Bibliografici

Amietta P.L., Fabbri D., Munari A. & Trupia, P. (2011): *I destini cresciuti. Quattro percorsi dell'apprendere adulto*. Milano: FrancoAngeli.

Bandura, A. (2000). *Autoefficacia: teoria e applicazioni*. Erickson: Trento.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática:* Uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

Becker, F. (2003). *A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar*. Porto Alegre: Artmed.

Berti, A.E. (2002). Cambiamento concettuale e insegnamento. *Scuola e città*, 1, 18-38.

Biembengut, M.S. & Hein, N. (2013). *Modelagem Matematica no Ensino*. São Paulo: Contexto.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the Fuss about Competencies? *Modelling and applications in mathematics education*, p. 45 – 56.

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications,* 22, p. 123 - 139.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. and Niss, M. (eds.), *Applications and Modelling in Mathematics Education: The 14th IMCI Study* (pp. 45-56). New York, USA: Springer.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics,* 22(1), p. 37 - 68.

Blum, W. et. al. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1/2), p. 149 - 171.

Blum, W., Galbraith, P. L. & Niss, M. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, &M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study,* New York: Springer, p. 3 - 32.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38 (2).

Boscolo, P. (1997). *Psicologia dell'apprendimento scolastico. Aspetti cognitivi e motivazionali*. Torino: UTET.

Boscolo, P. (2002). La motivazione ad apprendere tra ricerca psicologica e senso comune. *Scuola e Città*, *52*(1), p. 81 - 92.

Boscolo, P. (2012). *La fatica e il piacere di imparare*. Torino: UTET.

BRASIL (2006). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. Disponíbile in: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 10 junho de 2013.

Carletti, A. & Varani, A. (2005). Didattica costruttivista: dalle teorie alla pratica in classe. Trento: Erickson.

Castoldi, M. (2007). *Apprendimento, insegnamento, valutazione quali relazioni?* Indire.

Castoldi, M. (2011). Progettare per competenze. Percorsi e strumenti. Roma: Carocci.

Castoldi, M., Cattaneo, P. & Peroni, F. (2006). *Valutare le competenze, certificare le competenze* (Dossier), Cremona. In http://www.edscuola.it/archivio/comprensivi/dossier_competenze.pdf

Ceruti, M. (1989). *La danza che crea. Evoluzione e cognizione nell'epistemologia genetica.* Milano: Feltrinelli.

Charmaz K. (2006). *Constructing Grounded Theory. A practical guide through qualitative analysis*. London: Sage.

Cohen, D. (1987). Behaviorism. In *The Oxford Companion to the Mind*. R. L. Gregory (Ed). New York: Oxford University Press: 71.

Comoglio, M. (2004*). Insegnare e apprendere con il Portfolio*. Milano: Fabbri Editore.

Corbetta, P. (1999). *Metodologia e tecniche della ricerca sociale*. Bologna: Il Mulino.

De Corte, E. (2007). Learning from instruction: the case of mathematics*. Learning Inquiry*, 1 (1), p. 19 - 30.

De Grada, E. & Bonaiuto, M. (2002). Introduzione alla psicologia sociale discorsiva Roma: Laterza.

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños. Introducción a la práctica del método clínico*. Barcelona: Paidós.

DiSessa A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In: Gentner D., Stevens A. (eds.) (1983). *Mental models.* Hillsdale, N.J.: Laurence Erlabaum. p. 15 – 33.

DiSessa, A. (1988). Knowledge in Pieces. In G. Forman & P. Putall (Eds.), *Constructivism in the Computer Age*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Publishers, p. 49 – 70.

DiSessa, A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction*, 10, p. 105 – 225.

DiSessa, A. (2007). An Interactional Analysis of Clinical Interviewing. *Cognition and Instruction*, 25(4), p. 523 - 565.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstration in Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer, p. 95 - 123.

Dubinsky, E. (2000). Mathematical Literacy and Abstraction in the 21st Century. *School Science and Mathematics*, 100(6), p. 289 – 297.

Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1993). *Protocol analysis: verbal reports as data*. MIT Press.

Eurydice. (2011). *L'insegnamento della matematica in Europa: sfide comuni e politiche nazionali*. Bruxelles: Agenzia esecutiva per l'istruzione, gli audiovisivi e la cultura –P9 Eurydice.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à pratica educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Frejd, P. (2012). Teachers' conceptions of mathematical modelling at Swedish Upper Secondary school. Journal of Mathematical Modelling and Application, 1 (5). p. 17 – 40.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.

Glasersfeld, E. (1994). L'interpretazione Costruttivista dell'Epistemologia Genetica. In *Atti del III Simposio Internazionale di Epistemologia Genetica.* Aguas de Lindòia, Brazil, 8 Agosto – 2 Settembre 1994.

Hammer, D. (1996) Misconceptions or P-Prims: How May Alternative Perspectives of Cognitive Structure Influence Instructional Perceptions and Intentions? *The Journal of the Learning Sciences*, 5(2), p. 97 – 127.

Herget, W. & Richter, K. (2012). Here is a Situation…!" Team Challenges with "Pictorial Problems. In *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (pp. 80-89). Vieweg+ Teubner Verlag.

INVALSI (2009). *Le competenze in lettura, matematica e scienze degli studenti quindicenni italiani. Rapporto nazionale PISA 2009*. Roma: Armando.

INVALSI (2012). *OCSE PISA 2012 Rapporto nazionale.* A cura di INVALSI.

Jonnaert, P. (2012). *Competencias e socioconstrutivismo.* Lisboa: Instituto Piaget. (titolo originale *Compétences et socioconstructivisme*, 2009).

Kvale, S. (2007). *Doing interviews*. London: Sage.

Lima, L. de O. (2000) *Piaget: Sugestões aos educadores*. Petrópolis: Vozes.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalist inquiry*. *Beverly Hills, CA: Sage*.

Lucangeli, D. (2011). Orientamento formativo ed educazione affettivo-emozionale a sostegno dell'interesse e della motivazione dello studente: è possibile insegnare a «voler apprendere»? In Ferraro, S. (a cura di) *Studi e documenti degli annali della pubblica istruzione.* New Print: Milano, pp. 237 – 246.

Maaß. K. (2006). *What are modelling competencies? ZDM*, 38, p. 113 – 142.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn?. In *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics: Proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (p. 63 - 78). ISBS.

Macedo, L. (2005). Competências e habilidades: Elementos para uma reflexão pedagógica. In: Jair Santana Moraes. (Org.). *Exame Nacional da Ensino Medio (ENEM): Fundamentação teórico-metodológica.* Brasília: O Instituto (Inep/MEC), p 13 – 28.

Mariani, L. (2006). *La motivazione a scuola: prospettive teoriche e interventi strategici*. Roma: Carocci.

McCloskey, M. (1983). Naive theories of motion. In D. Gentner & A.L. Stevens (Eds.), *Mental models* (pp. 299-323). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Miles, M.B. & Huberman, A.M. (1994). *Qualitative Data Analysis*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Moè A. & Lucangeli, D. (2010). Difficoltà in matematica e motivazione, in Lucangeli D. e Mammarella I. (a cura di), *Psicologia della cognizione numerica*. Franco Angeli: Milano, pp. 207-235.

Niss, M. A. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. *23 o Panellenio Synedrio Mathematikis Paideias*, p. 39 – 47.

Nuttin, J (1996). *The Illusion of Attitude Change: Towards a Response Contagion Theory of Persuasion.* Leuven: Cornell University Press.

OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy. A framework for PISA 2006* , OECD, Parigi (tr. It PISA 2006. Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica. Quadro di riferimento di PISA 2006, a cura dell'INValSI, Armando Editore, Roma, 2007).

Papert, S. (1994). *I bambini e il computer*. Milano: Rizzoli.

Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. Roma: La Nuova Italia.

Pellerey, M. (2006). Sulla ricerca didattica degli ultimi cinquanta anni a partire da alcuni apporti metodologici di Luigi Calonghi. In La Marca, A. (ed) *Ricerca, Educazione, didattica. L'opera di Luigi Calonghi: sviluppi attuali.* Palermo: Palumbo.

Pellerey, M. (2010). *Questionario di Percezione delle Competenze Strategiche* (QPCS) Roma: Las (controllare editore).

Pellerey, M. (2011). Lessico pedagogico. *Education Sciences & Society*, 2(1). p. 173 – 179.

Perez-Tello, S., Antonietti, A., Sempio Lliverta, O. & Marchetti, A. (2005). *Che cos' è l'apprendimento? Le concezioni degli studenti*. Roma: Carocci.

Perrenoud, P. (2002) *Dieci competenze per insegnare*. *Invito al viaggio*. Roma: Anicia.

Perrenoud, P. (2003). *Costruire competenze a partire dalla scuola*. Roma: Anicia.

Piaget, J. (1970). *Piaget's Theory.* In Mussen P.H. (a cura di), Carmichael's *Manual of Child Psychology*, 1, New York: Wiley.

Piaget, J. (1972). Desenvolvimento e aprendizagem. In Lavatelly, C.S. & Stendler. *Reading in child behavior and development.* New York: Hartcourt Brace Janovich.

Piaget, J. (1975). *O Nascimento da Inteligência na Criança*. (Cabral, A., Trad.). Rio de Janeiro: Zahar. (Originale *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*, 1936).

Piaget (1975b) Problemas De Psicologia Genetica. Sao Paulo: Abril Cultural. (originale *The child and reality: Problems of genetic psychology,* 1973).

Piaget, J. (1977). *O desenvolvimento do pensamento: equilibração das estruturas cognitivas*. Lisboa: Dom Quixote. (titolo originale *L'equilibration des structures cognitives,* 1977).

Piaget, J. (1979). *La formazione del simbolo nel bambino. Imitazione, gioco e sogno. Immagine e rappresentazione.* Firenze: La Nuova Italia.

Piaget, J. (1980). *Adaptation and Intelligence: Organic Selection and Phenocopy*. Paris: Hermann.

Piaget, J. (1995) Abstração Reflexionante. Relaçoes Logico-Aritmeticas e Ordem das Relaçoes Espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas. (in originale *Recherches sur l'abstraction réfléchissante: L'Abstraction des relations logico-arithmétiques,* 1977*)*

Piaget, J. (2005). *Seis estudos de psicologia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Piaget, J. & Gréco, P. (1974). *Aprendizagem e Conhecimento*. Rio de Janeiro: Freitas Bastos. (Titolo originale *Apprentissage et Connaissance*, 1959).

Polya G. (1945) *How to solve it*. Princeton: University Press (traduzione in lingua italiana *Come risolvere i problemi di matematica* (1976), Milano: Feltrinelli).

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185 - 239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Resnick, L.B. (1987). Constructing knowledge in school. In L.S. Liben (Ed.) *Development and learning: Conflict or congruence?* (pp. 19-50). Psychology Press (1)

Resnick, L. B. (1995) Imparare dentro e fuori la scuola. In Pontecorvo, C., Ajello, A.M., Zucchermaglio, C. (eds), I contesti sociali dell'apprendimento. Milano: LED, p. 61 – 81.

Resta, L., Gaudenzi S. & Alberghi, S. (2012). *Matebilandia: Laboratorio di matematica e modellizzazione in un parco divertimenti.* Milano: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic press.

Schoenfeld A.H. (1987) – What's all the Fuss about Metacognition? In A. Schoenfeld (Ed), *Cognitive Science and Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale 189

Schoenfeld, A. H. (1992) Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: Grouws, D. A. (Ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan, p.334 - 370.

Schwandt, T. (2007). *Dictionary of qualitative inquiry*. London: Sage.

Semeraro, R. (2011). L'analisi qualitativa dei dati di ricerca in educazione. *Giornale Italiano della Ricerca Educativa,* numero 7. p. 97 – 106.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22 ,p. 1 – 36.

Smith, J., disessa, A. & Roschelle, J. (1993/1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3 (2), p. 115 - 163.

Sorzio, P. (1999). *Lo sviluppo della comprensione del numero nel bambino.* Milano: La Nuova Italia.

Sorzio, P. (2005). *La ricerca qualitativa in educazione*. Carocci. Roma.

Stanic. G. M. & Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In Charles R. & Silver E. *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Lawrence Erlbaum Associates, p. 1 – 22.

Tall, D.O. (2002). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking Mathematics Education*. Cambridge, U.K: Kluwer

Tall, D. O. (2004). The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23 (3), p. 29 – 33.

Thompson, A. G. (1992). Teachers'beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: Grouws, D. A. (Ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan. p. 127 – 146.

UNESCO. (2011). *Challenges in basic mathematics education*. Paris: UNESCO

Van Lint, S. (2007) Quels jeux pour dèvelopper quelles compètences. "*Les Nouvelles de l'Observatoire",* Dossier special: Le jeu comme outil pèdagogique? Frameries p. 7 – 13.

Varisco, B. M. (1995). Paradigmi psicologici e pratiche didattiche con il computer. *Tecnologie didattiche*, 7, p. 57 - 68.

Varisco, B. M. (2002). *Costruttivismo socio-culturale. Genesi filosofiche, sviluppi psico-pedagogici, applicazioni didattiche*. Roma: Carocci.

Appendice A 1 **Attività 1 - Il taxi**

Un tassametro è un dispositivo meccanico o elettronico installato in un taxi, che calcola i prezzi di un trasporto, sulla base di una combinazione tra la distanza percorsa e il tempo impiegato.

Alla partenza viene inserito il tassametro che visualizza la SPOSTATA che è una cifra iniziale che cambia da feriale, festivo e notturno. Tutti i tassametri del mondo hanno queste funzioni di spostata, costo chilometrico, costo orario e supplementi i cui importi vengono dalla pubblica amministrazione e sono esposti in vettura.

Nella tabella che segue sono indicate le tariffe fissate dal comune di Bologna:

Sembra che i primi esempi di questo tipo di servizio si possano far risalire al XIX secolo; precedentemente all'invenzione dell'automobile un servizio similare era quello fornito da carrozze trainate da cavalli. Le prime regolamentazioni in proposito risalgono alle città di Parigi e Londra dove per la prima volta venne limitato il numero delle vetture in circolazione. Il tassametro è arrivato a bordo dei taxi londinesi nel 1907.

	QUOTA FISSA DI SPOSTAMENTO	**IMPORTO MASSIMO CHIAMATA RADIO-TAXI**
feriale dalle ore **6:00** alle ore **22:00**	€ 3,00	€ 5,30
festiva dalle ore **6:00** alle ore **22:00**	€ 4,70	€ 7,00
notturna dalle ore **22:00** alle ore **6:00**	€ 5,60	€ 7,90

Un.I.C.A. Bologna - Unione Italiana Conducenti Autopubbliche

Assumendo che la tariffa chilometrica è sempre la stessa (domande 1, 2 e 3), rispondi:

1) Quali sono i fattori che influiscono nel valore della corsa?

2) Anna in taxi

Anna ha percorso 10km in taxi partendo dalla fermata del taxi alle 15:00 di lunedì. Per il viaggio ha pagato € 15,70.

a) Quanto ha pagato per ogni chilometro percorso?

b) Indipendentemente di quanti km si percorre, qual è la funzione matematica (l'equazione) che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna?

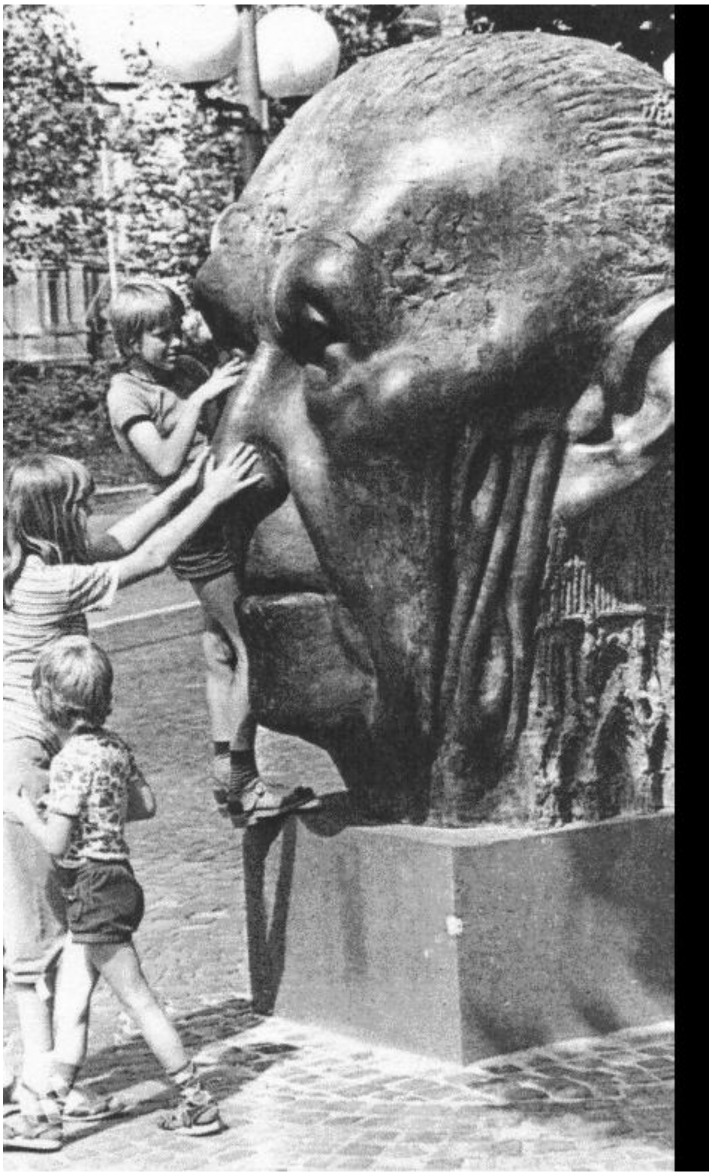
3) Durante una corsa in taxi, quali sono i dati costanti e quali sono i dati variabili?

Dati costanti:____

Dati variabili:____

Appendice A 2 **Attivita 2[92] - La statua di Adenauer**

Konrad Herman Josef Adenauer (1876 – 1967) è una delle più importanti figure della storia europea. È stato il primo cancelliere tedesco della Repubblica Federale della Germania, carica che ha tenuto tra il 1949 e il 1963; ha contribuito significativamente a cambiare la storia della Germania e dell'Europa dopo la Seconda Guerra Mondiale. Per Adenauer, l'unità europea non era solo un modo per garantire la pace, ma anche un mezzo per reintegrare la Germania post-nazista nella vita internazionale.



Il monumento Adenauer. Artista: Hubertus von Pilgrim

Il monumento mostra la testa di Konrad Adenauer, si trova presso la corte federale di Bonn.

Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi?

Spiegare dettagliatamente tutti i tuoi ragionamenti e calcoli fati per arrivare alla tua risposta.

[92] Attività adattata dal sito http://did.cermat.org/

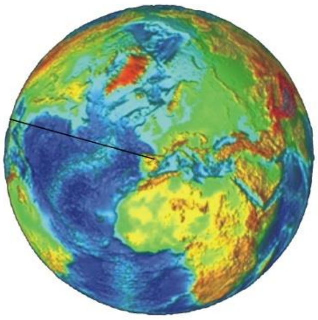
Appendice A 3

Attività 3 - Il viaggio

Angela organizza un viaggio da fare con suo padre nelle prossime vacanze. Lei vorrebbe andare in America del Sud e fare il percorso indicato nella mappa sottostante. Per tale viaggio suggerisce di noleggiare una macchina nella città di partenza e consegnarla nella destinazione finale.

La partenza è la città di Rio Gallegos in Argentina, passando per le città di San Carlos de Bariloche, Iquique, La Paz, Manaus e finendo il viaggio a Bogotá in Colombia.

Dopo aver presentato l'itinerario a suo padre, lui le dice: "*Il viaggio mi sembra molto interessante ma la lunghezza sarebbe come fare un giro attorno alla circonferenza della terra!*"



Il raggio della Terra è la distanza del centro della Terra dalla sua superficie al livello del mare. La forma non perfettamente sferica della Terra comporta che il suo raggio vari a seconda di dove venga misurato. Il raggio medio corrisponde circa **6373 km**

La SCALA di una mappa è il ***RAPPORTO*** *tra* ***la distanza sulla mappa*** *e* ***la distanza reale*** *sulla superficie terrestre, espresse nella stessa unità di misura.*

Prendendo in considerazione le informazioni contenute anche nella mappa, rispondi:

1) Come potrebbe Angela ribattere al commento di suo padre? Spieghi chi ha ragione ed il perché.

Presenta tutti i calcoli per giustificare la tua soluzione.

2) Mettendoti al posto di Angela, organizzi il viaggio che secondo te sarebbe piacevole di farlo e rispondi:

In base alla tua organizzazione quanti giorni sarebbero necessari per fare il viaggio?

Nota bene: considerando che il quesito non ha un'unica risposta, presenta il ragionamento che hai fatto tenendo conto di tutte le variabili presenti in un viaggio.


South America
Caribbean Sea
North Atlantic Ocean
South Pacific Ocean
South Atlantic Ocean
HONDURAS
Tegucigalpa
NICARAGUA
Managua
San José
COSTA RICA
Panama
PANAMA
Isla de San Andrés (COLOMBIA)
Isla de Malpelo (COLOMBIA)
Aruba (NETH.)
Netherlands Antilles (NETH.)
Martinique (FRANCE)
ST. LUCIA
BARBADOS
ST. VINCENT AND THE GRENADINES
GRENADA
Port-of-Spain
TRINIDAD AND TOBAGO
Barranquilla
Cartagena
Maracaibo
Caracas
Barquisimeto
Valencia
Cúcuta
San Cristóbal
Ciudad Guayana
VENEZUELA
Georgetown
GUYANA
Paramaribo
SURINAME
Cayenne
French Guiana (FRANCE)
Medellín
Bogotá
Cali
COLOMBIA
Boa Vista
Macapá
Quito
ECUADOR
Guayaquil
Equator
Iquitos
Manaus
Santarém
Belém
São Luís
Fortaleza
Teresina
Natal
Recife
Maceió
Piura
Trujillo
Huánuco
PERU
Lima
Cusco
Lago Titicaca
Arequipa
Rio Branco
Porto Velho
BRAZIL
Trinidad
La Paz
BOLIVIA
Cochabamba
Santa Cruz
Sucre
Potosí
Arica
Iquique
Cuiabá
Brasília
Goiânia
Salvador
Uberlândia
Belo Horizonte
Campo Grande
Vitória
Rio de Janeiro
São Paulo
Santos
Curitiba
Florianópolis
Pôrto Alegre
Antofagasta
Tropic of Capricorn
Salta
San Miguel de Tucumán
PARAGUAY
Asunción
Resistencia
Isla San Ambrosio (CHILE)
Isla San Félix (CHILE)
CHILE
Córdoba
Santa Fe
Salto
Valparaíso
Mendoza
Rosario
URUGUAY
ARCHIPIÉLAGO JUAN FERNÁNDEZ (CHILE)
Santiago
Buenos Aires
La Plata
Montevideo
Concepción
ARGENTINA
Bahía Blanca
Mar del Plata
Puerto Montt
San Carlos de Bariloche
Comodoro Rivadavia
Scala 1 : 35.000.000
Río Gallegos
Strait of Magellan
Stanley
Falkland Islands (Islas Malvinas) (administered by U.K., claimed by ARGENTINA)
Punta Arenas
Ushuaia
South Georgia and the South Sandwich Islands (administered by U.K., claimed by ARGENTINA)
Boundary representation is not necessarily authoritative.
802585 (R02108) 6-98

Appendice A 4

Modulo di richiesta di autorizzazione alla registrazione

Gentili Genitori,

con la presente Vi informiamo che la classe di cui fa parte Vostro figlio è stata scelta per rappresentare la Scuola in un progetto riguardante l'innovazione nella didattica delle scienze presentato e condotto dalla dott.ssa Lucia Lupo nell'ambito della sua ricerca presso l'Università di Palermo. La sperimentazione si svolgerà durante le ore di scienze alla presenza dell'insegnante curriculare e dell'insegnante ricercatrice. Poiché la documentazione a fini di ricerca scientifica dell'attività ne prevede la registrazione audio/video/foto vi invitiamo ad autorizzare la ricercatrice per la raccolta di tali dati, che verranno utilizzati nel pieno rispetto della privacy di ogni alunno, (non verranno rese pubbliche immagini dei ragazzi o dati che ne permettano l'identificazione).

Ringraziandovi della disponibilità,
Cordialmente

AUTORIZZAZIONE E LIBERATORIA PER L'ATTIVITA' DI SCIENZE

Io sottoscritto/a ………………………………………………………………… in qualità di genitore del minore………………………………………………………….. nato a ……………………………. il………………………………..

autorizzo in base alla L. 675/97
mio/a figlio/a a partecipare all'attività didattica "Il caldo, il freddo e la materia" (che si svolgerà nel periodo 15 novembre 2007-15 dicembre 2007 per la durata complessiva di 10 ore), in presenza dell'insegnante ricercatore ed acconsento a che le immagini, le registrazioni ed il materiale cartaceo prodotto durante le attività vengano utilizzate per la documentazione del percorso *ai soli fini di ricerca scientifica.*

Data………………………   Firma……………………

Appendice A 5

Frammenti delle trascrizioni sulle attività di modellizzazione

Le attività considerate si chiamano rispettivamente *IL TAXI* e *LA STATUA*, ad ogni soggetto è stato consegnato le attività che seguono in allegato. La risoluzione del problema è stata realizzata attraverso un'intervista. Per analizzare il ragionamento dei ragazzi sono state selezionati dei frammenti che sono riportati di seguito. All'inizio della seconda attività è stato consegnato un righello.

Frammento 1: Attività del TAXI - soggetto MON

Passati 2,5 minuti di lettura in silenzio glielo chiedo: Qual è la prima domanda?

MON: **Legge***: "Quali sono i fattori che influiscono nel valore della corsa"?*

I: E secondo te quali sono?

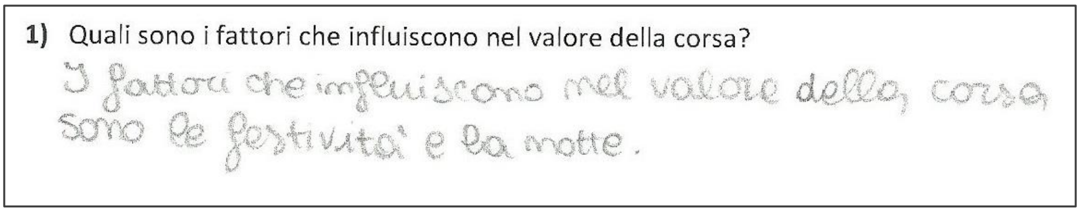
MON: *Le festività e la notte.*

I: Ok, hai capito la tabella? Non so se hai già visto questa situazione, cosa significa la quota fissa?

MON: *Di spostamento è quella .. normale.*

I: Si, quando entri nel taxi c'è già quella cifra lì. Poi se devi fare una chiamata devi aggiungere…

Il soggetto scrive come si vede nella figura 1, fa un gesto che la risposta è quella e segue la risoluzione.


1) Quali sono i fattori che influiscono nel valore della corsa?

I fattori che influiscono nel valore della corsa sono le festività e la notte.

Figura 24

Domanda 2:

MON: *È sempre con questi dati?*

I: Si, sempre con questi dati.

MON: *Oh Dio! I problemi……*

Il soggetto fa una espressione di dispiacere. Rilegge il primo item della seconda domanda a voce alta. Passati 2 minuti comincia a scrivere la risposta come si vede nella figura 2.

I: Ok, allora come hai fatto per risolvere? Che cifra sei arrivata?

MON: *A €1,57.*

I: Spiegami un po' come sei arrivata a quel numero lì.

MON: *Allora "quanto ha pagato per ogni chilometro percorso?" Quindi ho preso il totale di quello che lei ha pagato €15,70 e ho diviso per i chilometri che ha percorso in taxi.*

I: E quando Anna ha preso il taxi?

MON: *Alle 15:00.*

I: E il giorno era festivo, feriale?

Silenzio.

I: Cambia qualcosa se il giorno è festivo o feriale?

MON: *No, in questo caso non cambia niente…. Perché ti dice già il prezzo.*

Il soggetto leggeva l'item b della seconda domanda. Passati 2 minuti in silenzio: Se mi vuoi fare qualche domanda… non c'è solo una forma di scrivere l'equazione, dipende di quello che prendi in considerazione.

MON: *Non lo so….*

I: Ti ricordi cosa significa un'equazione in matematica?

MON: *Si, si! Ma qui non lo so!*

I: Leggi un'altra volta la domanda.

MON: *"Indipendente di quanti chilometri si percorre qual è la funzione matematica che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna"?*

I: Vuoi provare a scrivere qualcosa?

MON: *Ma devo scrivere anche quello?* **(punta per l'item a del esercizio).**

Passati 2 minuti in silenzio…

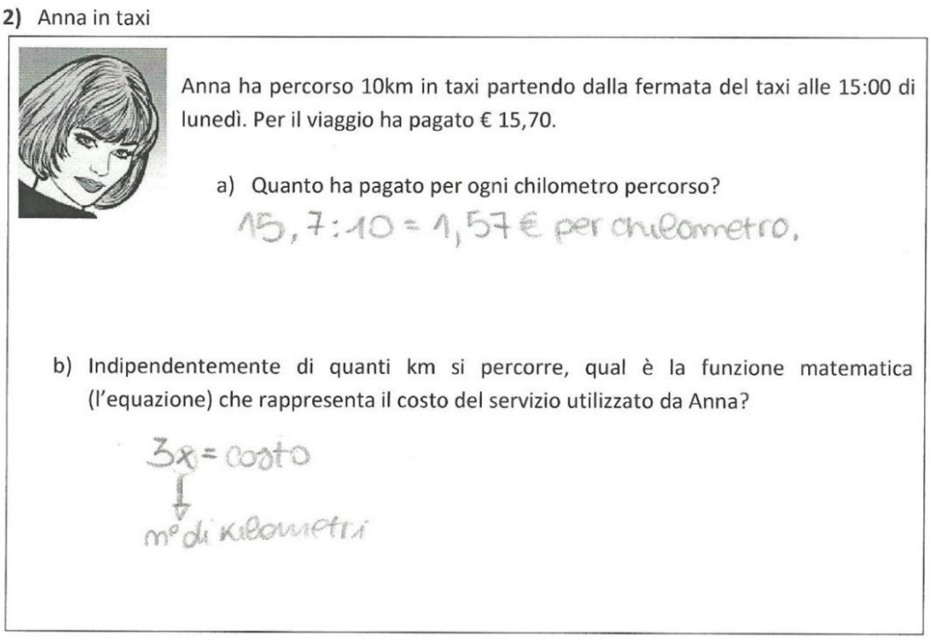
MON: *No, non lo so!*

I: Ok, possiamo saltare e poi se vuoi tornare non è un problema.

Alla fine dell'attività il soggetto ritorna all'item b della seconda domanda e scrive quello che si vede nella figura 2.

I: Cosa significa la x?

MON: *È il numero di chilometri percorsi.*



2) Anna in taxi

Anna ha percorso 10km in taxi partendo dalla fermata del taxi alle 15:00 di lunedì. Per il viaggio ha pagato € 15,70.

a) Quanto ha pagato per ogni chilometro percorso?

15,7:10 = 1,57 € per chilometro.

b) Indipendentemente di quanti km si percorre, qual è la funzione matematica (l'equazione) che rappresenta il costo del servizio utilizzato da Anna?

3x = costo

n° di kilometri

Figura 25

Il soggetto comincia a rispondere la domanda 3. Dopo che aveva letto gli ho chiesto:

I: Sai cosa sono i dati costanti? Quelli che non variano… sono sempre uguali.

MON: *Aham.* **(espressione di affermazione)**

Dopo quasi 2 minuti in silenzio:

MON: *Boh, io non lo so!*

I: Ti faccio un esempio: Secondo te la distanza può variare?

MON: *Si.*

I: Quindi?

MON: *È un dato variabile.*

I: Ok, immagina proprio una corsa in taxi. La distanza è una cosa che può variare, e le altre cose?

MON: *Il prezzo.*

MON: *Dati costanti….* **(fa un'espressione di non sapere cosa sia).**

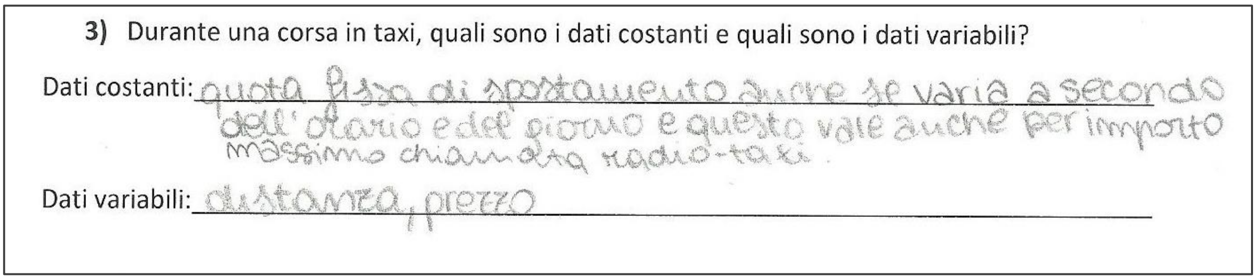
I: Quelle cose che non cambiano mai!

MON: *In taxi?*

I: Si, ad esempio queste quote qui **(punto per la tabella della prima pagina**) cambiano o no?

MON: *Si, però varia €3,00, €4,70…*

I: Puoi anche scrivere queste cose che mi stai dicendo… È il tuo ragionamento… **Il soggetto scrive come nella figura 3.**



3) Durante una corsa in taxi, quali sono i dati costanti e quali sono i dati variabili?

Dati costanti: quota fissa di spostamento anche se varia a seconda dell'orario e del giorno e questo vale anche per importo massimo chiamata radio-taxi.

Dati variabili: distanza, prezzo

Figura 26

Frammento 2: Attività della STATUA – soggetto SIM

Dopo aver letto per 2 minuti glielo chiedo: Hai capito la domanda?

SIM: *Più o meno.*

I: Quest'attività non c'è una risposta che è corretta e le altre sbagliate… Cosa chiede il problema?

SIM*: Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi.*

I: È in base a quello che pensi te, se vuoi usare la calcolatrice, il righello…. Fai come vuoi.

Il soggetto si mette a scrivere in continuazione. Passati 4 minuti gli chiedo: Cos'è che stai scrivendo?

SIM*: Si, allora stavo scrivendo che se fosse grande dalla testa ai piedi sarebbe davvero una statua grandissima perché è stata una delle persone più importanti della storia della Germania … poi stavo scrivendo perché ha lottato contro i propri ideali provando a cancellare l'immagine brutta come quella del nazismo nella propria nazione.*

I: Avete visto questo in storia?

SIM: *No ma da quanto ho letto qua poi avevo già sentito parlare è stata davvero una persona importante… Poi adesso scrivendo mi verrà in mente qualcosa.*

E continua a scrivere la risposta. Passati oltre 4 minuti:

SIM: *Direi che basta.* **(Il soggetto scrive fino al primo paragrafo della figura 7)**

I: Ok, allora vengo io sempre con la domanda della matematica: Ma tipo quanto sarebbe alta, in numeri, secondo te?

SIM: *Anche tre barra quattro metri.*

I: Come hai fatto a capire che è alta tipo 3 o 4 metri?

SIM: *No, scusa! Diciamo anche un po' di più…. cinque o sei…. Perché sarebbe davvero importante per fare ricordare a tutta la gente che è stata la persona più importante della Germania nella storia post nazista e a punto per questo sarebbe davvero molto grande…*

I: E come hai fatto ad intuire questi 5 o 6 metri? Come faresti a spiegare ad un tuo compagno?

SIM: *Perché una costruzione da 5 o 6 metri è davvero molto alta… abbastanza alta e questo darebbe l'immagine di quello che è stata questa persona.*

I: Sarebbe più alta o più bassa di questo palazzo? **(questo palazzo = palazzo da 4 piani)** O arriverebbe fino a che piano secondo te?

SIM: *Secondo* **(piano).**

I: E dal disegno di quest'immagine possiamo intuire qualcos'altra?

SIM: *Che più o meno la testa è… il bambino è ¾ della sua testa. … quindi vediamo quanto potrebbe essere alto il bambino… 1,30m o 1,40m…*

SIM: *La sua testa è già abbastanza alta.*

I: Quanto sarebbe alta più o meno la testa?

SIM: *Quasi 2 metri, o 2 metri anche…. Forse 5 o 6 metri sono pochi.*

I: Allora ti chiederei di scrivere queste informazioni perché quando arrivo a casa mi ricorderò del tuo ragionamento.

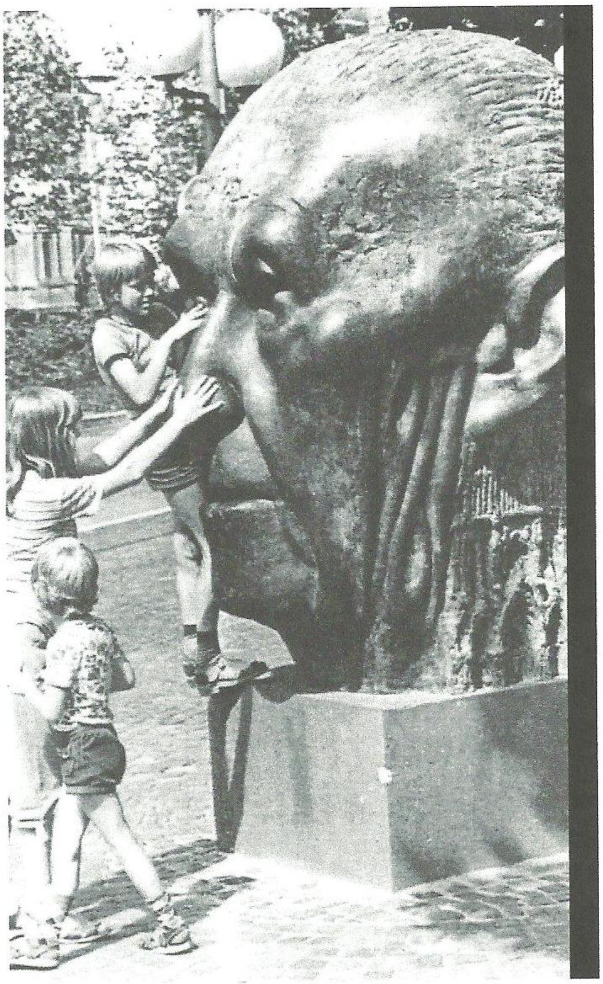
Passati 1,5 minuto:

SIM: *Vuoi chiedere anche quanto secondo me sarebbe alta la statua?*

I: Si.

Il soggetto scrive che la statua sarebbe alta 15 metri. Come hai fatto ad arrivare ai 15 metri?

SIM: *È più o meno una proporzione, siccome la testa è alta 2metri in relazione al corpo poi l'altezza complessiva sarà più o meno intorno ai 15 metri.*



Il monumento Adenauer. Artista: Hubertus von Pilgrim

Il monumento mostra la testa di Konrad Adenauer, si trova presso la corte federale di Bonn.

Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi?

Spiegare dettagliatamente tutti i tuoi ragionamenti e calcoli fati per arrivare alla tua risposta.

SE LA STATUA DI ADENAUER LO MOSTRASSE DALLA TESTA AI PIEDI AVREBBE DAVVERO DELLE DIMENSIONI GRANDISSIME: È STATA UNA ~~DE~~LLE PERSONE PIÙ IMPORTANTI NELLA STORIA DELLA GERMANIA. HA CERCATO DI CANCELLARE UN' IDEA BRUTTISSIMA COME IL NAZISMO NON SOLO DALLA PROPRIA NAZIONE, MA ANCHE IN TUTTA EUROPA GARANTENDO L' UNITÀ DEL CONTINENTE. È PER QUESTO CHE LA SUA STATUA SAREBBE DAVVERO GRANDISSIMA SE FOSSE COMPLETA.
SECONDO ME, IL BAMBINO POTREBBE ESSERE ALTO 1,30M E, VEDENDO QUINDI DALL' IMMAGINE, LA TESTA SARÀ ALTA CIRCA 2 M. SICCOME LA TESTA È PIÙ O MENO 2M, L'ALTEZZA COMPLESSIVA SARÀ DI CIRCA 15 M.

[1] Attività adattata dal sito http://did.cermat.org/

Figura 27

Frammento 3: Attività della STATUA – soggetto MAN

Dopo 2,5 minuti di lettura glielo dico: Quest'attività non c'è un'unica risposta… è in base al tuo ragionamento.

Il soggetto si mette a scrivere la sua risoluzione come si può vedere nella figura 8. Quando ha fatto un segno che era "pronto", gli ho chiesto: Dimmi cos'è che hai scritto.

MAN*: Bisognerebbe conoscere i dati mancanti: altezza, larghezza della testa di Adenauer e si dovrebbe fare una proporzione alla fine perché si fosse raffigurato dalla testa ai piedi ogni parte del corpo ha una propria grandezza.*

I: Va bene, però prendendo in considerazione l'immagine abbiamo la testa di Adenauer e poi davanti ci sono….

MAN: *Dei bambini, due bambini e forse una madre.*

I: E in base a questi dati, dati che in realtà i numeri non ci sono, riusciresti più o meno a….

MAN*: Sarebbe un monumento colossale perché la testa del bambino che è graffato al viso di Adenauer è grande quanto il suo occhio destro, ...e poi il naso, la mano della madre che mette sul naso è grande ¼ del naso del presidente.*

I: E riusciresti a fare qualche calcolo anche approssimativo …. Se sarebbe alta tipo 3 metri o 300 metri?

MAN: *Allora, prendiamo in considerazione il bambino, questo bambino qua che è alto dal occhio al colo del presidente 1,20m. No! 1,30m ed è grande quanto… quasi tutta la testa e per il monumento dalla testa ai piedi bisognerebbe moltiplicare il bambino per la parte della faccia, tutto il busto, tutto l'addome e fino ad arrivare alle gambe e ai piedi quindi se il bambino è 1,30m si fa per quattro o cinque volte e poi si scopre l'altezza molto approssimata della statua.*

I: Ti chiederei di scrivere questo ragionamento.

Il soggetto fa dei calcoli nella calcolatrice come si possono vedere in fondo nella figura 8.

I: Quanto è alta più o meno?

MAN: *Allora… il risultato che mi è venuto è di quasi 5 metri e mezzo togliendo la fronte e dopo la ho aggiunta più o meno alla grandezza del bambino. Ho moltiplicato il bambino per 4 immaginando tutto il corpo del presidente e alla fine per me sarebbe quasi 5 metri e mezzo.*

Il monumento Adenauer. Artista: Hubertus von Pilgrim

Il monumento mostra la testa di Konrad Adenauer, si trova presso la corte federale di Bonn.

Quale sarebbe la dimensione della statua se mostrasse Adenauer dalla testa ai piedi?

Spiegare dettagliatamente tutti i tuoi ragionamenti e calcoli fati per arrivare alla tua risposta.

BISOGNEREBBE CONOSCERE I DATI MANCANTI (ALTEZZA E LARGHEZZA DELLA TESTA DI ADENAUER). SI DOVREBBE FARE UNA PROPORZIONE PERCHÉ, SE FOSSE RAFFIGURATO DALLA TESTA AI PIEDI, OGNI PARTE DEL CORPO HA UNA PROPRIA GRANDEZZA.

BISOGNEREBBE METTERE TANTI BAMBINI (VEDI FOTO) UNO SOPRA L'ALTRO PER ARRIVARE ALLA SOLUZIONE. SE IL BAMBINO È DI 1.30 cm ED È ALTO QUANTO LA TESTA, LO SI MOLTIPLICA IMMAGINANDOLO FINO AI PIEDI DEL PRESIDENTE.

[1] Attività adattata dal sito http://did.cermat.org/

1.30 · 4 = 5,2

SAREBBE QUASI 5 METRI E MEZZO

Figura 28