



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

SEDE AMMINISTRATIVA: UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE (ICEA)

CORSO DI DOTTORATO
IN SCIENZE DELL'INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE
XXIX CICLO

**Modellazione matematica
della componente diffusiva del trasporto solido al fondo
in uno schema di calcolo bidimensionale**

Coordinatore: Ch.mo Prof. Stefano Lanzoni

Supervisore: Ch.mo Prof. Andrea Defina

Dottoranda: Irma Bonetto

*Ad Anna ed Emma
perché non smettano di sognare
e di lottare per i loro sogni*

Indice

Sommario	7
Abstract	9
1 Introduzione	10
2 Il modello morfodinamico 2DEF	16
2.1 Il modello idrodinamico	17
2.2 Il modello di evoluzione del fondo	19
2.2.1 Alcuni casi test	24
3 L'implementazione dell'equazione di bilancio dei sedimenti	30
3.1 L'approccio ai volumi finiti	32
3.1.1 Casi test	34
3.1.2 Sulla formazione e propagazione delle barre alternate .	36
4 La componente diffusiva del trasporto solido di fondo	41
4.1 La randomicità del processo diffusivo	42
4.2 Il modello multigranulare multistrato	45
4.2.1 Casi test sulla diffusione	50
4.3 Il modello multigranulare monostrato	52
4.3.1 Diffusione fisica e numerica nella rappresentazione del trasporto solido di fondo	56

4.4	Ulteriori considerazioni sul modello multigranulare multistrato	61
5	Conclusioni	65
	Elenco dei simboli	69
	Elenco delle figure	75
	Elenco delle tabelle	76
	Bibliografia	77
	Ringraziamenti	82

Sommario

Nella presente ricerca, noti i problemi di stabilità legati all'implementazione dell'equazione di Exner, sono stati approfonditi alcuni aspetti riguardanti la descrizione numerica del trasporto solido di fondo in un modello matematico bidimensionale pre-esistente.

Dopo una prima fase di sperimentazione numerica, l'equazione di Exner è stata implementata ai volumi finiti e i flussi sono stati valutati mediante *upwinding* garantendo così la conservazione della massa e la stabilità della soluzione. Il modello modificato si è dimostrato in grado di descrivere in modo accurato l'evoluzione di alcune semplici forme di fondo e di riprodurre il processo di formazione e propagazione delle barre alternate.

Successivamente è stata indagata la natura stocastica del trasporto solido di fondo con particolare riferimento alla modellazione matematica della sua componente diffusiva.

Data la struttura del modello originario è apparso efficace introdurre la diffusione in modo indirettamente lagrangiano, come combinazione di una portata solida convettiva e di una componente casuale. L'intensità della diffusione è venuta così a dipendere dal reale coefficiente di diffusione, dalla portata media e dall'intervallo di integrazione temporale. Per consentire il tracciamento dei grani, al fine di verificare la correttezza e l'efficacia dell'approccio proposto, è stato introdotto un approccio multigranulare e, per completezza, è stata modificata anche la schematizzazione del fondo introducendo una rappresentazione multistrato. La validità dell'approccio introdotto è stata

testata e verificata con idonee sperimentazioni numeriche.

Abstract

The objective of the present work is to give further insights on the problem of the numerical description of the bed load transport. Here, two important issues are addressed.

A finite volume method is developed and applied for solving the Exner equation combined with an upwind discretization based on the direction of the sediment transport, in order to improve the accuracy and the stability of an existing morphodynamic model. The new approach shows a significant improvement; the modified model well describes the propagation of simple bed forms and the formation and evolution of free bars.

A new formulation of the solid flux is then introduced in the model to account for the stochastic nature of the bed load transport and to describe the related sediment diffusion. The sediment flux is represented as the sum of an advective term and a diffusive one. The latter is given as a random bed-load flux at each computational grid element and at time step. To trace the movements of the sediment particles and check the efficiency of the proposed approach a multigranular representation is developed and two equal size sediment classes are introduced. In addition, to account for the exchange of material between the bed surface and the bottom, the bed is divided into a number of layers.

Capitolo 1

Introduzione

Il fondo e le sponde dei corsi d'acqua consistono di ammassi di sedimenti, coerenti e non, che sottoposti all'azione della corrente possono dare luogo a fenomeni di erosione, trasporto e deposito degli stessi.

Come è noto l'insieme di tali processi può determinare importanti modificazioni dell'alveo, che a loro volta si riflettono sull'idrodinamica del corso d'acqua. Esiste quindi un legame di dipendenza reciproca molto stretto tra i fenomeni idrodinamico e di trasporto solido, che solo in alcuni casi può essere trascurato.

I meccanismi di trasporto, attraverso cui il materiale solido viene dapprima preso in carico dalla corrente e quindi trasportato, sono diversi e si distinguono in funzione delle caratteristiche del materiale costituente l'alveo e dell'intensità dell'azione esercitata dalla corrente (Abbot et al., 1975; Seizelles et al., 2013).

Con riferimento alla dinamica morfologica dei corsi d'acqua, soprattutto quelli montani e dell'alta pianura, riveste fondamentale importanza il trasporto solido di fondo, che costituisce in questi casi la quasi totalità del flusso di sedimento trasportato.

Scopo della presente ricerca è appunto la descrizione numerica del trasporto solido di fondo e delle variazioni morfologiche che induce con specifico riferi-

mento ad un modello bidimensionale già predisposto (Defina, 2000 e 2003). Nel modello morfodinamico (2DEF), il modulo idrodinamico e quello di trasporto sono risolti in sequenza, secondo il classico approccio non accoppiato. Il modulo idrodinamico è uno strumento per l'analisi del moto a superficie libera di onde lunghe in acque basse. Esso risolve le equazioni di Reynolds 2D, ottenute per mediazione su di un'Area Rappresentativa Elementare e per integrazione lungo la verticale, e l'equazione di continuità adottando uno schema di sottogriglia che consente di simulare in modo efficace lo scorrimento superficiale e le dinamiche di asciutto/bagnato su fondali irregolari e bassi numeri di Froude (Defina, 2000).

Il modulo di trasporto valuta dapprima l'intensità delle portate solide con la relazione empirica di Meyer-Peter e Müller, opportunamente corretta secondo le indicazioni di Struiksma (1985) e Struiksma e Crosato (1989) per tenere conto degli effetti della pendenza del fondo sull'entità e sulla direzione dei flussi solidi, e successivamente determina le variazioni di quota dell'alveo risolvendo, con un approccio agli elementi finiti, l'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner (Defina, 2003).

I problemi di stabilità legati all'implementazione dell'equazione di Exner, che non considera gli effetti diffusivi nel trasporto al fondo, sono noti e vanno appunto ricondotti all'assenza di un termine diffusivo in grado di smorzare le instabilità.

Come recentemente ricordato da Volp (2015), queste instabilità possono diventare dominanti rispetto alle reali variazioni del fondo, mascherandone l'effettiva evoluzione morfologica. Per questi motivi risulta essenziale utilizzare uno schema numerico in grado di fornire risultati accurati, senza d'altra parte generare instabilità numeriche.

Una delle soluzioni più frequentemente adottate consiste nell'introdurre della diffusione numerica artificiale che stabilizzi l'equazione di bilancio dei sedimenti; di utilizzo meno frequente ma decisamente efficace è l'impiego degli

approcci *upwind*, basati sulla direzione di trasporto del sedimento (Lesser, 2009) o sulla direzione della celerità del fondo (Volp, 2015).

Il modello matematico in questione fornisce delle soluzioni nel complesso stabili e accurate, che nelle situazioni indagate ben riproducono i dati sperimentali disponibili (Defina, 2003). D'altra parte, un'attenta analisi dei risultati evidenzia la tendenza a produrre zone alternate di erosione e di deposito in corrispondenza dei nodi della griglia di calcolo, producendo delle irregolarità che creano un effetto a 'macchie di leopardo' e che in alcuni casi si amplificano generando instabilità.

Partendo da queste considerazioni si è ritenuto interessante approfondire alcuni aspetti riguardanti la descrizione numerica dei processi di trasporto.

Dopo una prima fase di sperimentazione numerica è stata dunque reimposta l'implementazione dell'equazione di Exner con un approccio ai volumi finiti, che garantisce la conservazione della massa di sedimento, e una valutazione dei flussi mediante *upwinding*, che favorisce invece la stabilità della soluzione.

Il nuovo impianto del modello ha consentito di descrivere in modo accurato l'evoluzione di alcune semplici forme di fondo quali un dosso trasversale, una prominenza del fondo e una trincea trasversale, e di riprodurre precedenti indagini di laboratorio di Lanzoni (2000) sul processo di formazione, propagazione e crescita delle barre di fondo alternate.

Va tuttavia osservato che l'approccio fino a qui utilizzato dal modello per lo studio dei fenomeni di trasporto solido di fondo, si basa su di un'impostazione classica di tipo deterministico o puramente convettivo, che trascura le numerose e frequenti fluttuazioni generate dalle forme della turbolenza e dalle interazioni delle particelle con il fondo e contro le altre particelle (Furbish et al. 2012a, 2012c, 2012d; Roseberry et al. 2012b). Tali fluttuazioni si riflettono, a livello macroscopico, sulla struttura dell'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner (Ancy et al. 2014a, 2014b; Fan et al., 2014; Ballio et al.,

2014). La sua forma classica non ne tiene conto e approssima le grandezze caratteristiche del fenomeno con i loro valori medi.

In tempi relativamente recenti numerosi autori, tra cui Bohorquez e Ancey (2015), hanno evidenziato che l'utilizzo di relazioni di tipo deterministico può generare errori dell'ordine del 200%; trascurando gli effetti delle fluttuazioni di velocità e di concentrazione dei sedimenti trasportati al fondo possiamo infatti descrivere l'evoluzione del fenomeno, ma non siamo in grado di quantificare accuratamente il flusso di portata solida.

Come ricordato anche da Colombini (2014), Einstein (1937) per primo ha introdotto una visione probabilistica del trasporto al fondo dei sedimenti e le diverse analisi sperimentali e numeriche recentemente condotte, oltre a confermarne la natura stocastica, hanno contribuito a caratterizzarlo meglio. Studiando la traiettoria delle particelle si è trovata conferma della natura intermittente del loro moto, caratterizzato da un'alternanza di periodi di movimento e di riposo che si susseguono come in un processo Random Walk e danno luogo ad una diffusione di tipo fickiano (Seizelles et al., 2013).

Perciò, riconosciuta la natura stocastica del trasporto solido di fondo, la diffusione che essa genera e il suo peso nelle valutazioni inerenti il bilancio dei sedimenti, si è ritenuto interessante completare la presente ricerca con una serie di indagini finalizzate alla rappresentazione della componente diffusiva del trasporto solido di fondo all'interno del modello 2DEF.

Data la struttura del modello si è trovato conveniente introdurre la diffusione in modo indirettamente lagrangiano, sfruttando la natura random del trasporto di fondo ed esprimendo i flussi di portata solida come la combinazione lineare di un termine puramente convettivo e di uno aleatorio, creando di fatto un disturbo random dei flussi solidi.

Per ovviare alla difficoltà di tracciare gli spostamenti dei singoli grani è stato sviluppato un approccio multigranulare analogo a quello proposto da Stecca et al. (2014, 2015), basato sul concetto di *active layer model* di Hirano (1971,

1972), ripreso in seguito da vari autori (Lanzoni et al., 1999; Ganti et al., 2010), in alcuni casi superato (Parker et al., 2000), ma tuttora largamente utilizzato. Il materiale costituente l'alveo è stato suddiviso in due classi di sedimento di uguali caratteristiche geometriche e litologiche, di cui una generica e una di tracciante, e il fondo dell'alveo è stato rappresentato come una sovrapposizione di strati.

Questa impostazione ha effettivamente consentito di tracciare gli spostamenti del sedimento e ha in particolare permesso di visualizzare la diffusione generata dal disturbo delle portate solide al fondo. Tuttavia ha anche messo in evidenza la presenza di una significativa quantità di diffusione numerica in grado di mascherare quella fisica.

In uno schema di calcolo 1D alle differenze finite è stato perciò riproposto lo stesso tipo di approccio multigranulare e sono state considerate diverse ipotesi di lavoro corrispondenti ad altrettanti valori del numero di Courant-Friedrichs-Lewy associato al trasporto solido (CFL_{mor}). In modo più agevole di quanto sarebbe stato possibile con il modello 2D e con specifico riferimento al modulo di trasporto si è verificato che, per valori del numero di CFL_{mor} inferiori all'unità e in assenza dei termini che descrivono la dispersione, le soluzioni risultano molto diffuse. Con l'ausilio di ulteriori sperimentazioni numeriche e assumendo valori unitari del numero di Courant-Friedrichs-Lewy è stato possibile controllare la diffusione numerica, stimare l'entità di quella fisica e verificare l'efficacia dell'approccio proposto.

Lo stesso metodo e le stesse ipotesi applicati al modello 2D hanno infine messo in evidenza l'importanza della schematizzazione multistrato ai fini di una corretta rappresentazione dei processi di trasporto solido, con specifico riferimento ai trasferimenti di materiale tra strati differenti, che sempre si manifestano quando vi sia una variabilità dei valori delle portate solide.

Il presente lavoro è organizzato come segue.

Il capitolo 2 descrive il modello morfodinamico 2DEF, accennando solo bre-

vemente al modulo idrodinamico e illustrando un po' più nel dettaglio la struttura del modulo di trasporto e di evoluzione del fondo. Nella parte conclusiva del capitolo sono riportati gli esiti di alcune simulazioni numeriche preliminari, che mettono in evidenza i problemi di stabilità e accuratezza rilevati.

Il capitolo 3 descrive l'approccio ai volumi finiti proposto e ne illustra l'efficacia mediante confronto tra le sperimentazioni numeriche condotte con il modello originario e quello modificato; le simulazioni riguardano i casi test introdotti al capitolo precedente e l'esperimento di laboratorio di Lanzoni (2000) sulle barre alternate.

Il capitolo 4 affronta invece la questione relativa alla rappresentazione numerica della componente diffusiva del trasporto solido di fondo; illustra l'idea di rappresentarla mediante un 'disturbo' delle portate solide e descrive lo schema multigranulare multistrato utilizzato per visualizzarla.

Il capitolo 5 contiene infine le analisi conclusive.

Capitolo 2

Il modello morfodinamico 2DEF

Si è anticipato nell'introduzione che il moto dei fluidi, il trasporto di sedimenti e l'evoluzione del fondo sono parte di un unico processo accoppiato. Tuttavia, fatta eccezione per quei fenomeni che si sviluppano in modo particolarmente rapido, i processi idrodinamici e morfologici sono caratterizzati da tempi scala che, come ricordano anche Spasojevic e Forrest (1994), sono assai diversi tra loro.

Sulla base di tali considerazioni nel modello morfodinamico 2DEF i due moduli, idrodinamico e di trasporto, lavorano in forma disaccoppiata, valutando dapprima il campo di moto e in un secondo momento la portata solida e le variazioni di quota dell'alveo.

Nel modello le equazioni del moto e di evoluzione del fondo sono risolte con un approccio agli elementi finiti su griglia irregolare non strutturata. Rinviamo per i dettagli a Defina (2000), nel paragrafo 2.1 si richiamano le principali caratteristiche del modello idrodinamico. Nel successivo paragrafo 2.2 è invece puntualmente descritto il modulo di trasporto (Defina, 2003).

2.1 Il modello idrodinamico

Il modello idrodinamico è uno strumento per l'analisi bidimensionale del moto a superficie libera di onde lunghe in acque basse e si rivolge allo studio di fenomeni lentamente variabili nel tempo, caratterizzati da piccoli tiranti, fondali irregolari e bassi numeri di Froude.

Nel modello le equazioni di Reynolds 2D, ottenute per mediazione su di un'Area Rappresentativa Elementare A (REA) e per integrazione lungo la verticale, sono risolte adottando uno schema di sottogriglia che consente di descrivere in modo stabile e accurato i processi di transizione asciutto/bagnato:

$$\frac{d q_x}{dt Y} - \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{d q_y}{dt Y} - \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial R_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yy}}{\partial y} + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{by}}{\rho} \right) + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\eta \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.2)$$

dove: h è la quota idrometrica della superficie libera; Y è l'altezza d'acqua effettiva o il volume d'acqua per unità di area A ; η è la frazione di area A bagnata; g è l'accelerazione di gravità; ρ è la densità del fluido; \mathbf{q} è la portata unitaria di componenti q_x e q_y ; R_{ij} sono le tensioni di origine viscosa e turbolenta, in cui i pedici i e j denotano le direzioni coordinate x e y ; τ_{si} e τ_{bi} sono rispettivamente le risultanti delle tensioni agenti sulla superficie libera e sul fondo nella direzione i -esima.

Nel sistema di equazioni (2.1) e (2.2) la derivata totale $d(\mathbf{q}/Y)/dt$ è discretizzata come segue:

$$\frac{d \mathbf{q}}{dt Y} \cong \left[\frac{\mathbf{q}}{Y} - \left(\frac{\mathbf{q}}{Y} \right)_0 \right] \frac{1}{\Delta t} \quad (2.3)$$

essendo $(\mathbf{q}/Y)_0$ la componente della velocità in direzione \mathbf{s} valutata all'istante e nella posizione precedenti e individuata integrando indietro nel tempo le velocità lungo la traiettoria Lagrangiana $ds/dt = \mathbf{q}/Y$ (Defina e Bonetto,

1998).

Le (2.1), opportunamente riarrangiate, sono quindi riscritte nella seguente forma:

$$q_x = -\psi \left(\varphi_x + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2.4a)$$

$$q_y = -\psi \left(\varphi_y + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (2.4b)$$

essendo:

$$\psi = \left(\frac{1}{gY\Delta t} + \frac{|\mathbf{q}|}{k_s^2 H^{10/3}} \right)^{-1} \quad (2.5a)$$

$$\varphi_x = -\frac{1}{g\Delta t} \left(\frac{q_x}{Y} \right)_0 - \frac{1}{gY} \left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2.5b)$$

$$\varphi_y = -\frac{1}{g\Delta t} \left(\frac{q_y}{Y} \right)_0 - \frac{1}{gY} \left(\frac{\partial R_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yy}}{\partial y} \right) . \quad (2.5c)$$

Nelle precedenti equazioni gli sforzi tangenziali superficiali sono trascurati e quelli al fondo sono valutati con le relazioni di moto uniforme:

$$\tau_{bi} = \rho g Y \frac{|\mathbf{q}| q_i}{k_s^2 H^{10/3}} \quad (2.6)$$

avendo indicato con H l'altezza d'acqua equivalente (Defina, 2003).

Sostituite le espressioni di q_x e q_y nell'equazione di continuità (2.2) si ottiene un'equazione di tipo parabolico nella variabile h che il modello, nell'ipotesi di moto gradualmente vario, risolve agli elementi finiti con approccio alla Galerkin e funzioni base ξ_i di classe $p1$ tali che, detto N il numero di nodi della griglia di calcolo, la quota della superficie libera h è approssimata dalla seguente espressione:

$$h \cong \sum_{i=1}^N h_i \xi_i \quad . \quad (2.7)$$

Indicando con l'apice tutte le grandezze riferite all'istante di calcolo precedente si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N h_i \left[B_{ij}(h') + \frac{1}{2} F_{ij}(h') \right] = \sum_{i=1}^N h'_i \left[B_{ij}(h') - \frac{1}{2} F_{ij}(h') \right] + \\ -G_j(h') , \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

dove:

$$B_{ij}(h) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{ne} \int_{A_k} \psi^k(h) \xi_i^k \xi_j^k dA_k \quad (2.9a)$$

$$F_{ij}(h) = \sum_{k=1}^{ne} \int_{A_k} \psi^k(h) \nabla \xi_i^k \cdot \nabla \xi_j^k dA_k \quad (2.9b)$$

$$G_j(h) = \sum_{k=1}^{ne} \int_{A_k} \psi^k(h) \Phi^k(h) \cdot \nabla \xi_j^k dA_k + Q'_j \quad (2.9c)$$

con il seguente significato dei termini: Δt è l'intervallo di calcolo considerato; A_k sono le aree degli ne elementi triangolari che compongono il dominio Ω ; Φ^k è il vettore di componenti scalari $(\varphi_x^k, \varphi_y^k)$ e Q'_j rappresenta la portata totale entrante o uscente dal nodo j -esimo all'istante di calcolo precedente. Da notare che nelle precedenti equazioni, le grandezze Φ^k , ψ^k sono tutte quantità mediate sul generico elemento k -esimo e con le portate Q'_j sono perciò costanti sullo stesso.

Risolto il sistema di equazioni (2.8) e determinati quindi i valori delle quote della superficie libera h sugli N nodi del dominio di calcolo, con le (2.4) è possibile valutare le componenti q_x e q_y della portata unitaria, anch'essa costante sugli ne elementi della griglia di calcolo.

2.2 Il modello di evoluzione del fondo

Il modello sviluppa l'analisi dell'evoluzione morfologica del fondo a partire dalla formulazione classica dell'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner:

$$(1 - n) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_b = 0 \quad (2.10)$$

in cui n è la porosità, z_b la quota del fondo e:

$$\mathbf{q}_b = q_b (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (2.11)$$

il volume di sedimenti trasportato per unità di larghezza, mentre q_b e α sono rispettivamente l'intensità e la direzione di trasporto dei sedimenti.

Nel modello si prendono in considerazione esclusivamente i processi in cui è predominante il trasporto solido di fondo, la cui intensità è espressa dalla relazione di Struiksmas (1985):

$$q_b = q_{b0} \left(1 - \chi c_F \frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{s}} \right). \quad (2.12)$$

Nella precedente equazione \mathbf{s} rappresenta la direzione del flusso; $c_F = k_s^2 Y^{1/3} / g$ è l'inverso del coefficiente di attrito espresso mediante la relazione di Gauckler - Strickler; χ è un coefficiente che tiene conto degli effetti della pendenza longitudinale del fondo e per il quale si assume il valore di 0.03 (Struiksmas e Crosato, 1989); q_{b0} è la portata solida corrispondente ad una condizione di moto uniforme unidimensionale valutata con la relazione di Meyer-Peter e Müller:

$$q_{b0} = 8 \sqrt{gd^3 (\rho_s / \rho - 1)} (\mu \theta - \theta_c)^{3/2} \quad (2.13)$$

dove: d è il diametro medio dei sedimenti che costituiscono il fondo; $\theta = u_*^2 / [(\rho_s / \rho - 1) gd]$ è il parametro di Shields, il cui valore critico o soglia è $\theta_c = 0.047$; $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ è la velocità di attrito; μ è il cosiddetto *ripple factor* che assume generalmente valori inferiori ad 1 per tenere conto del fatto che solo una parte dello sforzo tangenziale al fondo determina trasporto solido, mentre la restante è riferibile ad altre forme di dissipazione di energia che non possono essere esplicitamente descritte nel modello (dissipazioni tridimensionali o caratterizzate da scale spaziali più piccole di quelle risolte).

Nella (2.11), la direzione del flusso solido α , nel caso di gradualità variazioni del fondo, è data da (Struiksmas, 1985):

$$\alpha = \arctan \left[\frac{\sin \delta - \frac{1}{f(\theta)} \frac{\partial z_b}{\partial y}}{\cos \delta - \frac{1}{f(\theta)} \frac{\partial z_b}{\partial x}} \right] \quad (2.14)$$

avendo indicato con δ la direzione del flusso liquido in prossimità del fondo e con $f(\theta) = \zeta \cdot \sqrt{\theta}$ (Talmon et al., 1995) una funzione che pesa l'influenza della pendenza trasversale del fondo sulla direzione e sull'intensità della portata

solida per $\zeta = 9(d/Y)^{0.3}$.

La direzione del flusso δ può valutarsi con la seguente relazione:

$$\delta = \arctan(q_x/q_y) + \Delta\beta \quad (2.15)$$

essendo $\Delta\beta$ il termine che tiene conto dell'influenza dei moti elicoidali trasversali che si instaurano in presenza di forti curvature delle linee di corrente e che viene valutato con la relazione proposta da Olesen (1987):

$$\Delta\beta = \arctan\left(A_c \frac{Y}{R}\right) \quad (2.16)$$

in cui A_c è una costante il cui valore varia nell'intervallo $7 \div 12$ e R è il raggio di curvatura delle linee di corrente.

Dalle precedenti equazioni segue che le componenti della velocità al fondo $\mathbf{u}_f = (u_{fx}, u_{fy})$ valgono:

$$u_{fx} = \cos\Delta\beta \left[u + \left(A_c \frac{Y}{R} \right) v \right] \quad (2.17a)$$

$$u_{fy} = \cos\Delta\beta \left[v - \left(A_c \frac{Y}{R} \right) u \right]. \quad (2.17b)$$

Con riferimento alle portate solide al fondo \mathbf{q}_b , di intensità q_{b0} , sono interessanti le analisi sviluppate da Wong e Parker (2006) allo scopo di rivedere i coefficienti correttivi della portata solida a suo tempo introdotti da Meyer-Peter e Müller (1948) per tenere conto degli effetti di parete e delle forme di fondo. Basandosi sugli stessi dati utilizzati dai noti autori, Wong e Parker (2006) hanno avuto modo di verificare che in condizioni di fondo piano il coefficiente correttivo delle forme di fondo non è necessario e che in assenza di questo coefficiente la relazione proposta da Meyer-Peter e Müller (1948) produce una sovrastima della portata solida. Hanno perciò proposto due nuove versioni dell'equazione (2.13) che, mantenendo la stessa struttura della relazione originale e con alcune modifiche al coefficiente moltiplicativo, all'esponente e al valore soglia di Shields, meglio si adattano ai dati sperimentali in condizioni di fondo piano:

$$q_{b0} = 4.93 \sqrt{gd^3 (\rho_s/\rho - 1)} (\theta - 0.0047)^{1.6} \quad (2.18)$$

e

$$q_{b0} = 3.97 \sqrt{gd^3 (\rho_s/\rho - 1)} (\theta - 0.0495)^{1.5} \quad (2.19)$$

in cui il *ripple factor* assume ovviamente valore unitario e, come indicato dagli autori, la (2.18) si riferisce a basse condizioni di regime.

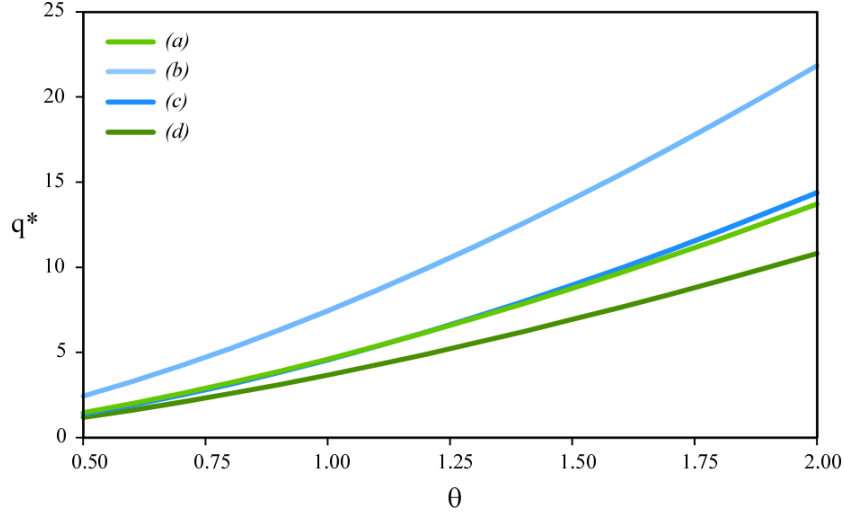


Figura 2.1: Rappresentazione della portata solida unitaria adimensionale q^* valutata: (a) con l'equazione (2.13) di Meyer-Peter e Müller (1948) per $\mu = 0.74$; (b) con l'equazione (2.13) di Meyer-Peter e Müller (1948) per $\mu = 1$; (c) con l'equazione (2.18) di Wong e Parker (2006); (d) con l'equazione (2.19) di Wong e Parker (2006).

Per confronto in figura 2.1 sono rappresentati i diversi valori che la portata solida unitaria adimensionale $q^* = q_{b0}/\sqrt{gd^3 (\rho_s/\rho - 1)}$ assume nelle varie ipotesi.

Nonostante le evidenti differenze, soprattutto per $\mu = 1$ (curva a) e ai bassi regimi di portata solida (curva d), nel modello modificato si è preferito continuare ad utilizzare la relazione 2.13 già presente nel modello originale. Questa scelta agevola le operazioni di confronto dei risultati delle due versioni del modello, senza tuttavia inficiarne la validità. Si ritiene infatti che ai fini della presente ricerca l'impiego dell'una o dell'altra relazione non abbia un'influenza significativa, sia con riferimento all'implementazione dell'equa-

zione di Exner, sia in relazione alla descrizione numerica della componente diffusiva del trasporto solido di fondo.

Nel modello numerico di evoluzione del fondo le quote dell'alveo z_b hanno un andamento lineare a tratti e le portate solide \mathbf{q}_b sono costanti sugli elementi computazionali. Applicando Galerkin e la Prima indentità di Green all'equazione di Exner (2.10) si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{ne} (1-n)^k \sum_{i=1}^N \int_{A_k} \xi_i^k \xi_j^k dA_k \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{ne} \int_{A_k} \mathbf{q}_b^k \cdot \nabla \xi_j^k dA_k + \\ + \sum_{k=1}^{ne} \int_{\Gamma_A} \mathbf{q}_b^k \xi_j^k \cdot \mathbf{n}_\Gamma d\Gamma_A = 0, j = 1, N \end{aligned} \quad (2.20)$$

essendo \mathbf{n}_Γ la normale al contorno Γ_A dell'elemento A_k .

In analogia con il modello idrodinamico, il terzo termine dell'equazione (2.20) rappresenta la portata solida Q_{bj} in uscita dal nodo j -esimo. Discretizzando nel tempo la derivata temporale $\partial z_{bi}/\partial t$ con uno schema alle differenze finite si ottiene un sistema di N equazioni:

$$\sum_{i=1}^N E_{ij} z_{bi} = \sum_{i=1}^N E_{ij} z'_{bi} - C_j, j = 1, N \quad (2.21)$$

dove:

$$E_{ij} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{ne} (1-n)^k \int_{A_k} \xi_i^k \xi_j^k dA_k \quad (2.22a)$$

$$C_j = Q_{bj} - \sum_{k=1}^{ne} \left(q_{bx}^k \frac{\partial \xi_j^k}{\partial x} + q_{by}^k \frac{\partial \xi_j^k}{\partial y} \right) A_k. \quad (2.22b)$$

La soluzione del problema, rappresentato dall'equazione (2.20), si ottiene esplicitamente concentrando sulla diagonale principale i termini della matrice E_{ij} nel seguente modo (Neuman, 1973):

$$E_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ \frac{1}{3\Delta t} \sum_{k=1}^{ne} (1-n)^k A_k, & \text{se } i = j \end{cases}$$

e l'equazione (2.20) può così riscriversi nella seguente forma:

$$z_{bj} = z'_{bj} - C_j/E_{jj}, j = 1, N. \quad (2.23)$$

2.2.1 Alcuni casi test

Senza apportare alcuna modifica al modello morfodinamico 2DEF, brevemente descritto nei paragrafi precedenti, sono stati analizzati alcuni casi semplici e di banale interpretazione.

Si sono prese in considerazione tre situazioni: in una canaletta a sezione rettangolare e pendenza uniforme, in condizioni stazionarie di moto e di trasporto dei sedimenti, sono stati infatti inseriti un dosso trasversale, una prominenzza del fondo e una trincea trasversale.

In tutti e tre i casi indagati sono stati adottati differenti gradi di schematizzazione del campo di moto e, pur senza sostanziali alterazioni del risultato, è stata osservata l'esistenza di un certo legame tra la griglia di calcolo utilizzata e la soluzione del modello. A titolo d'esempio, nel seguito, i tre casi di studio analizzati sono proposti con altrettante diverse tipologie di griglia, costituite da maglie della dimensione media di 2 m (figure 2.2a, 2.3a e 2.4a). Alla canaletta, lunga 100 m e larga 10 m , è stata attribuita una pendenza del fondo $i_f = 0.1\%$ e un coefficiente di resistenza al moto di Gauckler - Strickler $k_s = 40\text{ m}^{1/3}/s$.

Come sedimento al fondo è stato scelto del materiale granulare avente diametro medio $d = 0.1\text{ mm}$, densità relativa $\rho_s/\rho = 2.65$ e porosità $n = 0.4$. Si è assunto inoltre, per semplicità, un *ripple factor* unitario.

Per tutte e tre le geometrie indagate sono state impiegate le stesse ipotesi di lavoro, idrodinamiche e di trasporto: nella sezione di monte è stata immessa una portata uniforme $Q = 3.984\text{ m}^3/s$, nella sezione di valle è stato imposto il livello $h_v = 1.5\text{ m}$ e in tutta la canaletta è stata fissata una quota idrometrica iniziale $h_0 = 1.5\text{ m}$.

Il modello, nei casi analizzati, ha fornito delle soluzioni non particolarmente soddisfacenti, caratterizzate dalla presenza di alcune irregolarità concentrate in corrispondenza ai nodi della griglia di calcolo.

Il dettaglio dei risultati è rappresentato di seguito nelle figure 2.5, 2.6 e 2.7.

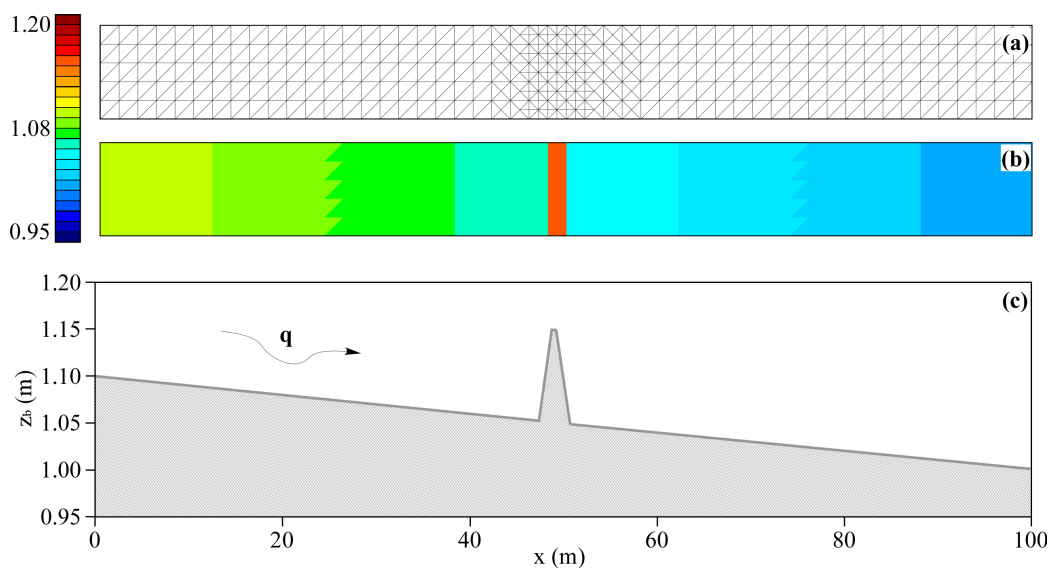


Figura 2.2: Rappresentazione della griglia di calcolo (a), della batimetria (b) e del profilo longitudinale (c) di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stato inserito un dosso trasversale.

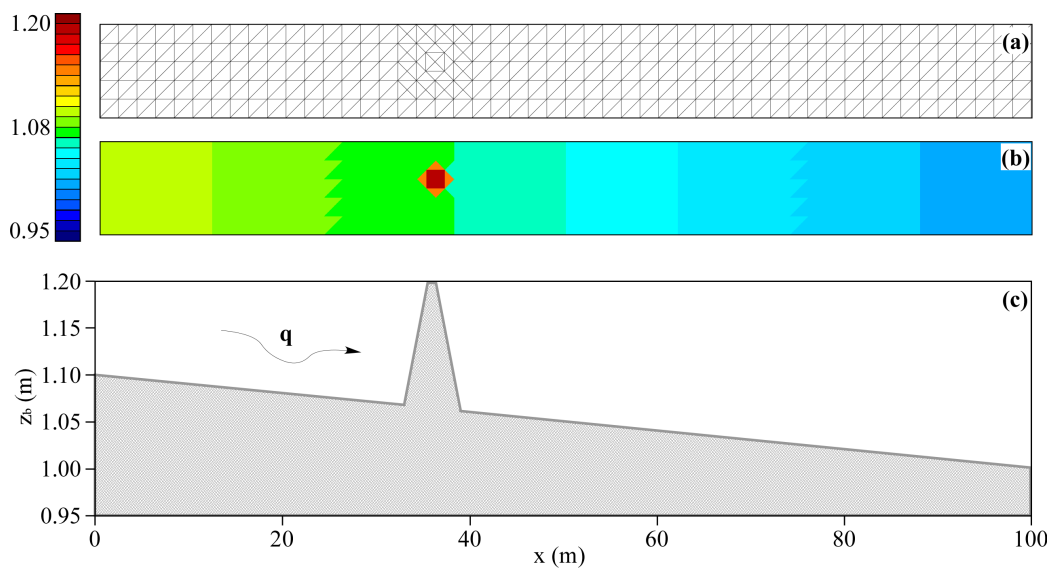


Figura 2.3: Rappresentazione della griglia di calcolo (a), della batimetria (b) e del profilo longitudinale (c) di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una prominenzza del fondo.

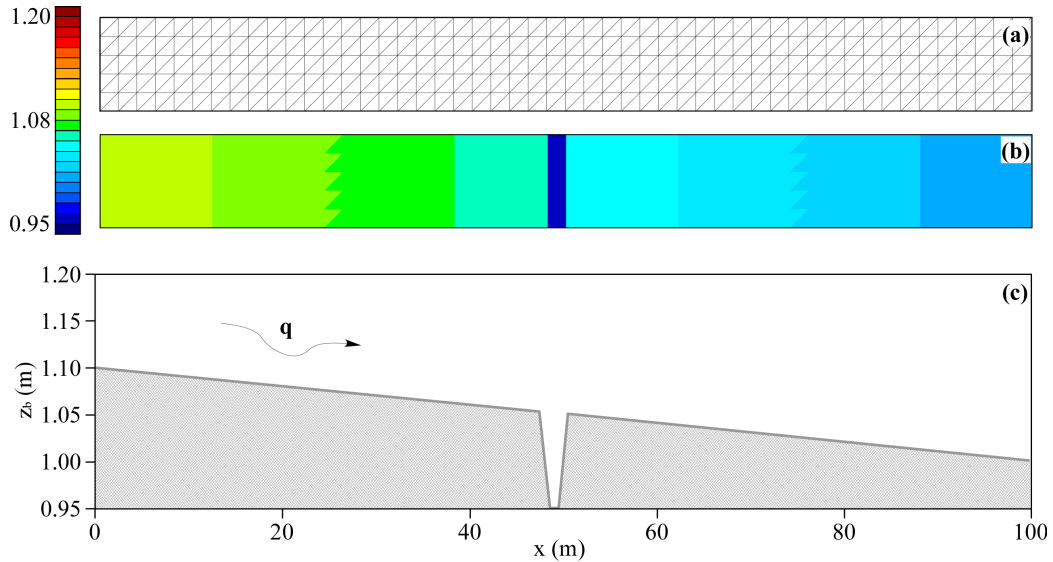


Figura 2.4: Rappresentazione della griglia di calcolo (a), della batimetria (b) e del profilo longitudinale (c) di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una trincea trasversale.

$ \mathbf{q} $	$ \mathbf{q}_b $	Y	i_f	k_s	d	ρ_s/ρ	n
(m^2/s)	(m^2/s)	(m)	$(\%)$	$(m^{1/3}/s)$	(mm)	$(-)$	$(-)$
$3.984 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-5}$	0.5	0.1	40	0.1	2.65	0.4

Tabella 2.1: Valore dei parametri idromorfologici adottati nell'analisi delle variazioni morfologiche del fondo in un canaletta a sezione rettangolare in cui sono stati alternativamente inseriti un dosso trasversale, una prominenzza del fondo e una trincea trasversale.

Prendendo come esempio il caso del dosso (figura 2.5) si osserva, nella fase di avvio del processo, una sua parziale erosione; successivamente l'azione della corrente si intensifica, fino alla completa elisione della struttura e alla contemporanea formazione di alcune zone di deposito a monte e a valle della stessa.

Nella fase conclusiva la corrente scava ben oltre la quota del fondo indisturbato e le discontinuità si amplificano fino al raggiungimento della configurazione di equilibrio rappresentata in figura. In condizioni di regime si osserva inoltre una parziale perdita dell'iniziale simmetria del problema rispetto all'asse longitudinale della canaletta.

È simile il comportamento nel caso della prominenza, dove la corrente incontrando l'ostacolo scava oltre la quota del fondo indisturbato e crea, a monte e valle, delle zone di deposito del sedimento.

Anche il caso della trincea mostra delle analogie con i due esempi precedenti; la configurazione di equilibrio individuata dal modello evidenzia infatti la formazione di una zona di deposito in corrispondenza alla trincea e di una zona di erosione a monte e a valle della stessa.

La soluzione, come nel caso del dosso, è leggermente asimmetrica.

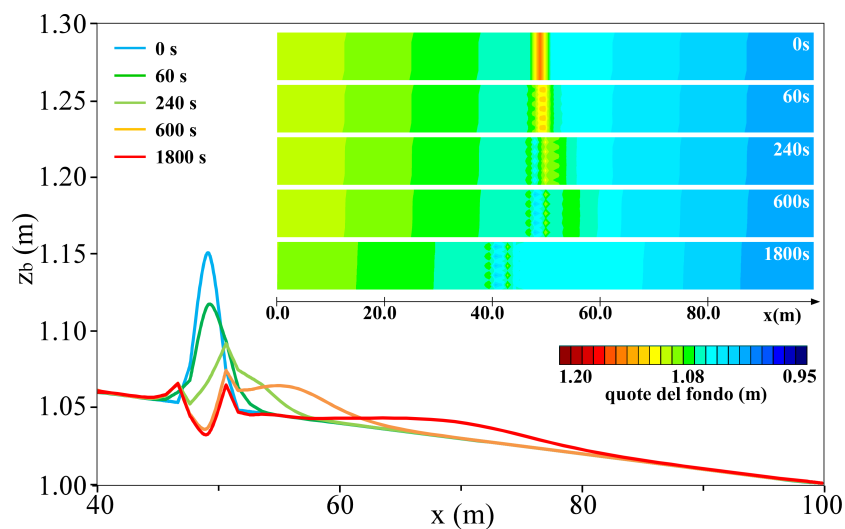


Figura 2.5: *Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio agli elementi finiti, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stato inserito un dosso trasversale.*

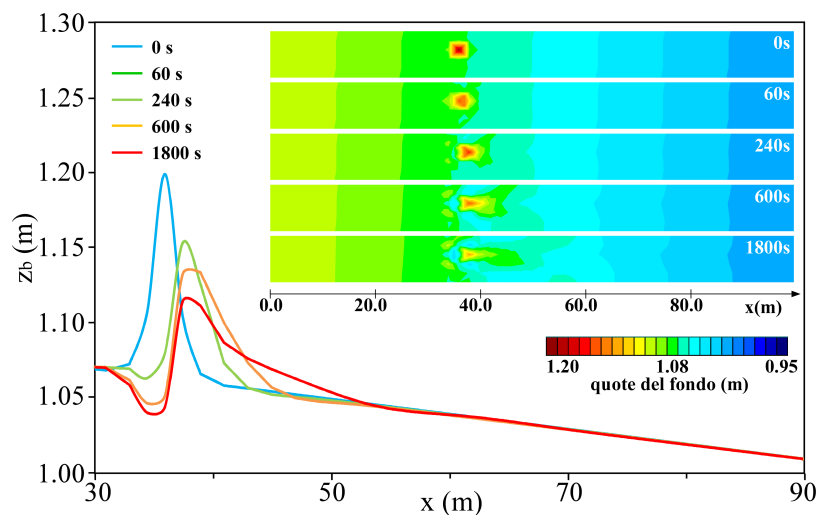


Figura 2.6: *Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio agli elementi finiti, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una prominenzza del fondo.*

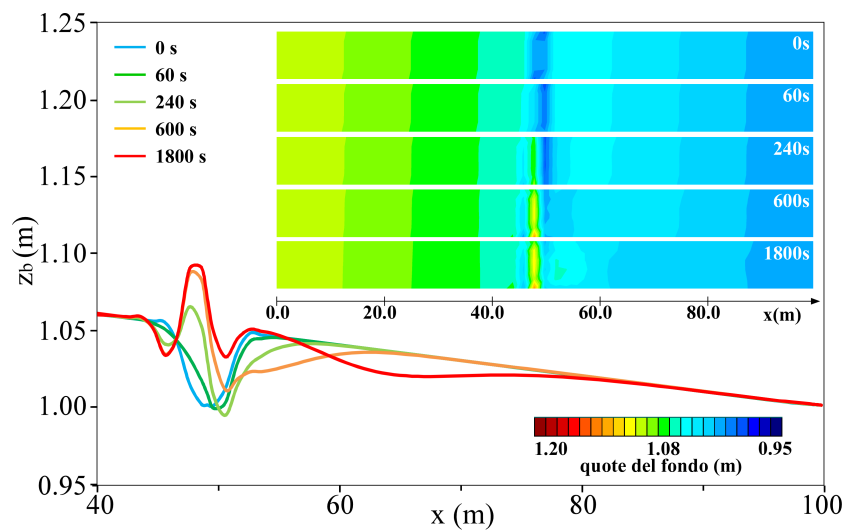


Figura 2.7: Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio agli elementi finiti, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una trincea trasversale.

Capitolo 3

L'implementazione dell'equazione di bilancio dei sedimenti

Le indagini numeriche condotte hanno suggerito che all'origine di queste irregolarità vi fosse l'approccio utilizzato nell'implementazione dell'equazione di Exner.

Come precedentemente illustrato, nel modello 2DEF il modulo idrodinamico e di trasporto sono disaccoppiati e risolti in sequenza; nota l'idrodinamica, il modulo di trasporto valuta dapprima le portate al fondo secondo la relazione empirica di Meyer - Peter e Müller e successivamente le variazioni di quota dell'alveo, risolvendo agli elementi finiti l'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner. Nel modello, le quote idrometriche sono definite nei nodi del reticolo di calcolo mentre le quote del fondo, le velocità, le portate liquide e le portate solide sono assunte costanti nelle maglie e definite sui rispettivi baricentri.

Facendo riferimento per semplicità ad uno schema di calcolo monodimensionale (figura 3.1) e considerando che la portata solida è funzione decrescente

della profondità della corrente, è semplice verificare che una valutazione delle variazioni morfologiche del fondo basata su di un bilancio dei sedimenti effettuato in corrispondenza ai nodi del reticolo di calcolo, porta inevitabilmente all'individuazione di una configurazione di equilibrio caratterizzata dalla presenza di alcune discontinuità residue; questo invece non succede se il bilancio dei sedimenti è valutato sugli elementi, in corrispondenza dei quali è definita la quota del fondo z_b utilizzata dal modulo idrodinamico per la stima del campo di moto.

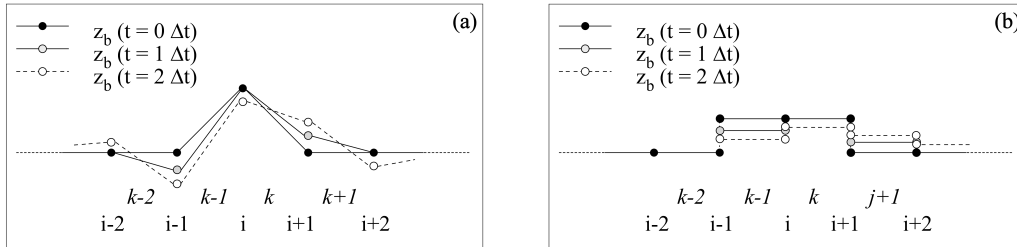


Figura 3.1: *Schema di calcolo monodimensionale per l'analisi delle variazioni morfologiche del fondo nei nodi del reticolo di calcolo (a) e sugli elementi (b).*

Indicando infatti con $q_{b(k)}$ la portata solida riferita alla maglia k -esima, al primo istante di calcolo vale la seguente relazione:

$$\dots \quad q_{b(k-2)} < q_{b(k-1)} = q_{b(k)} > q_{b(k+1)} \quad \dots \quad (3.1)$$

a cui corrispondono, nel caso di figura 3.1a, un incremento di quota del fondo nel nodo $i+1$ e una riduzione nel nodo $i-1$.

All'istante di calcolo successivo per la nuova configurazione del fondo vale invece:

$$\dots \quad q_{b(k-2)} < q_{b(k-1)} < q_{b(k)} > q_{b(k+1)} \quad \dots \quad (3.2)$$

che comporta un approfondimento dei nodi $i-1, i$ e $i+2$ e un innalzamento dei nodi $i+1$ e $i-2$.

Proseguendo in questo modo è facile verificare che la configurazione di equilibrio a cui si giunge è sempre contrassegnata dalla presenza di irregolarità che

si propagano sia verso monte che verso valle e che l'erosione, che dovrebbe interessare esclusivamente il dosso, viene invece attribuita anche al nodo a monte del dosso stesso.

Alla luce delle precedenti considerazioni, si è ritenuto poco conveniente definire su punti diversi della griglia le quote del fondo utilizzate dal modulo idrodinamico e dal modulo morfodinamico.

Inoltre, in base a quanto già detto circa la risoluzione dell'equazione di Exner, è chiaro che il modulo morfodinamico, valutate e modificate le quote del fondo nodali, procede all'aggiornamento delle quote delle maglie mediante interpolazione lineare delle quote del fondo dei tre nodi ad esse afferenti. Con questo tipo di approccio un'unica configurazione delle quote di maglia è compatibile con diverse distribuzioni delle quote nodali, in quanto le prime discendono dalle seconde attraverso un processo di media.

Si è ritenuto perciò più appropriato andare a valutare l'azione di erosione e di deposito della corrente direttamente sulle maglie della griglia di calcolo (figura 3.1*b*), descrivendo il fondo in modo univoco per entrambi i moduli. L'equazione di Exner è quindi risolta, su ogni singolo elemento, con un approccio ai volumi finiti.

Rispetto all'approccio agli elementi finiti della versione precedente, la nuova impostazione garantisce la conservazione della massa di sedimento e una maggiore stabilità.

3.1 L'approccio ai volumi finiti

La risoluzione dell'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner (2.10) è stata dunque reimpostata assumendo:

$$\begin{cases} z_b = & \text{quota del fondo costante a tratti sull'elemento 2D;} \\ \mathbf{q}_b = & \text{campo vettoriale delle portate solide unitarie costante a tratti.} \end{cases}$$

Dato in particolare quest'ultimo vincolo, si è ritenuto conveniente implementare l'equazione di Exner utilizzando delle funzioni di base ξ_k costanti a tratti e cioè tali che:

$$L = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_k \\ 0, & \text{se } x \notin A_k \end{cases}$$

dove si è indicato con A_k il generico elemento della triangolazione del dominio $\Omega = \cup A_k$ e si sono espresse le \mathbf{q}_b come combinazione lineare delle funzioni di base ξ_k :

$$\mathbf{q}_b \cong \sum_k^{ne} \mathbf{q}_{bk} \cdot \xi_k. \quad (3.3)$$

L'equazione di Exner, risolta ai volumi finiti, assume dunque la seguente espressione:

$$\int_{\Omega} (1-n) \frac{\partial z_b}{\partial t} \xi_k d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q}_b \xi_k d\Omega = 0, \quad k = 1, ne \quad (3.4)$$

da cui segue, per come sono state scelte le funzioni di forma, che:

$$\int_{A_k} (1-n) \frac{\partial z_b}{\partial t} dA_k + \int_{A_k} \nabla \cdot \mathbf{q}_b dA_k = 0, \quad k = 1, ne. \quad (3.5)$$

Applicando il Teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_{A_k} (1-n) \frac{\partial z_b}{\partial t} dA_k + \int_{\Gamma_A} \mathbf{q}_b \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma_A = 0, \quad k = 1, ne \quad (3.6)$$

e ricordando che z_b è definita costante sul generico elemento A_k , la (3.6) può risciversi come segue:

$$(1-n) \frac{dz_{bk}}{dt} |A_k| + F_k(\mathbf{q}_b) = 0, \quad k = 1, ne \quad (3.7)$$

dove il termine $F_k(\mathbf{q}_b)$ rappresenta il flusso di portata solida attraverso il contorno Γ_A del generico elemento k -esimo.

Approssimando alle differenze finite del primo ordine la derivata temporale delle quote del fondo e sostituendo nell'equazione (3.7) la quota z'_{bk} valutata all'istante precedente:

$$z_{bk} \approx z'_{bk} + \frac{dz_{bk}}{dt} \Delta t + \dots \Rightarrow \frac{dz_{bk}}{dt} \approx \frac{z_{bk} - z'_{bk}}{\Delta t}, \quad k = 1, ne. \quad (3.8)$$

è possibile valutare la quota del fondo aggiornata z_{bk} :

$$z_{bk} = z'_{bk} - \frac{\Delta t F_k(\mathbf{q}_b)}{(1-n)|A_k|}, \quad k = 1, ne. \quad (3.9)$$

Come già detto, nel modello le portate solide sono corrette con le relazioni di Struiksma (1985) e Struiksma e Crosato (1989) che, in funzione della pendenza longitudinale e trasversale del fondo, modificano l'intensità e la direzione della portata solida.

Tuttavia, rispetto al modello originario dove i coefficienti correttivi sono stati valutati in funzione delle pendenze medie di maglia, è ora necessario valutare la pendenza esistente tra maglie adiacenti, per contenere il trasporto di sedimenti da maglie a quota minore verso maglie a quota maggiore, ovvero secondo la direzione di minima resistenza delle portate liquide. Un comportamento di questo tipo genererebbe infatti delle soluzioni non accurate, irregolari e instabili.

Indicate con k e $k+1$ la maglia di partenza e quella di arrivo, le pendenze trasversali $\partial z_b/\partial x$, $\partial z_b/\partial y$ e longitudinale $\partial z_b/\partial \mathbf{s}$ si valutano facilmente con le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial z_b}{\partial x} = (z_b^{k+1} - z_b^k) \frac{x^{k+1} - x^k}{(x^{k+1} - x^k)^2 + (y^{k+1} - y^k)^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial y} = (z_b^{k+1} - z_b^k) \frac{y^{k+1} - y^k}{(x^{k+1} - x^k)^2 + (y^{k+1} - y^k)^2} \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\frac{\partial z_b}{\partial x} u_{fx} + \frac{\partial z_b}{\partial y} u_{fy}}{|\mathbf{u}_f|}$$

che sostituite nelle (2.12) e (2.14) forniscono i coefficienti correttivi della portata solida.

3.1.1 Casi test

Il modello morfodinamico modificato è stato preliminarmente utilizzato per riprodurre i casi test rappresentati nelle figure 2.2 - 2.4, già studiati al paragrafo 2.2.1 con la versione originale del modello, utilizzando anche la stessa

griglia di calcolo.

L'approccio ai volumi finiti impiegato per la risoluzione dell'equazione di Exner, e implementato all'interno del modello 2DEF, ha consentito di superare i problemi di instabilità precedentemente riscontrati e di incrementare l'accuratezza della soluzione.

Le figure (3.2) - (3.4) mostrano i significativi miglioramenti ottenuti: in tutti i casi studiati le soluzioni individuate risultano ora stabili e accurate e le irregolarità del fondo, presenti all'inizio della simulazione, subiscono un progressivo e graduale spianamento fino alla loro completa scomparsa.

A partire dalla quinta ora si comincia a osservare una modesta pendenza trasversale (dell'ordine dello 0.2‰), presumibilmente prodotta dalla asimmetria della griglia di calcolo e i cui effetti risultano tuttavia ininfluenti sul risultato della simulazione.

Con il modello modificato si raggiungono le condizioni di regime in tempi decisamente superiori rispetto a quelli impiegati con la versione originale.

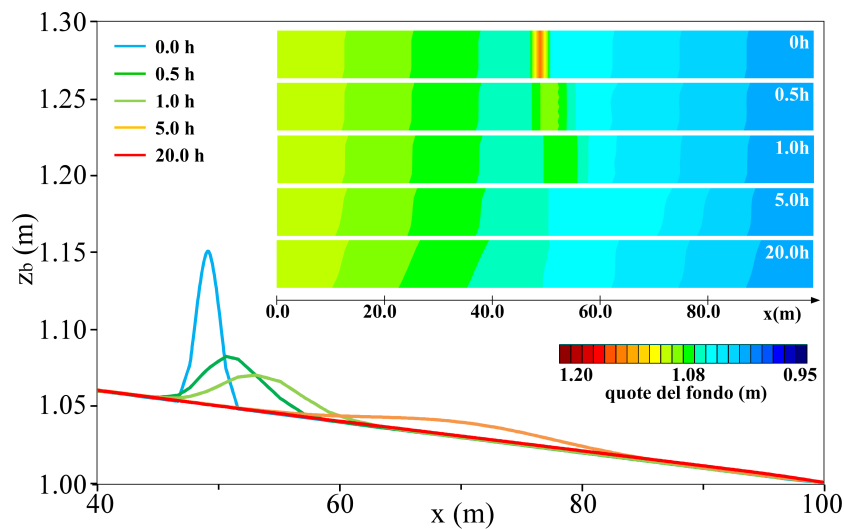


Figura 3.2: *Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio ai volumi finiti upwind, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stato inserito un dosso trasversale.*

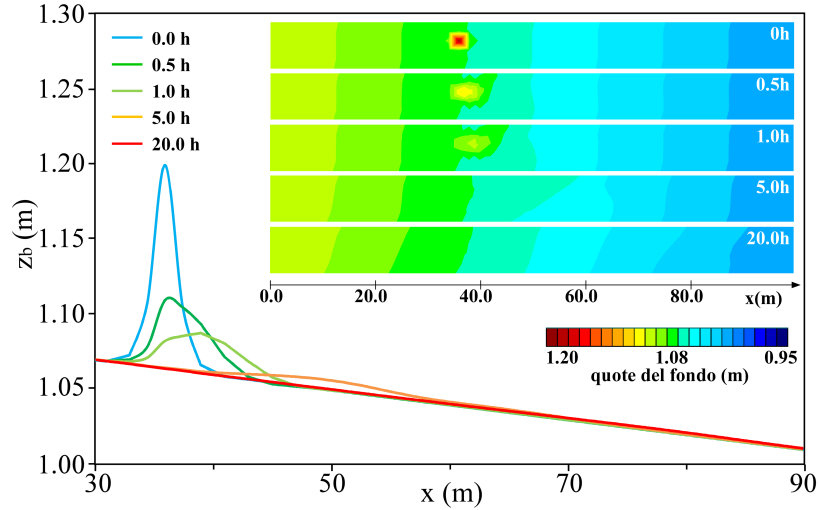


Figura 3.3: *Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio ai volumi finiti upwind, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una prominenzza del fondo.*

3.1.2 Sulla formazione e propagazione delle barre alternate

Con il modello numerico modificato sono stati successivamente riproposti alcuni esperimenti numerici già condotti da Defina (2003) per riprodurre precedenti indagini di laboratorio di Lanzoni (2000), sul processo di formazione e crescita delle barre alternate.

L'esecuzione di tali sperimentazioni ha richiesto un'ulteriore correzione del modello. Si tratta di una modifica non sostanziale che ha però consentito di gestire in modo più conveniente le dinamiche del trasporto che si manifestano durante i processi di transizione asciutto/bagnato, che a loro volta possono influenzare l'evoluzione delle barre di fondo alternate.

La relazione di Meyer-Peter e Müller è stata infatti riscritta in una forma

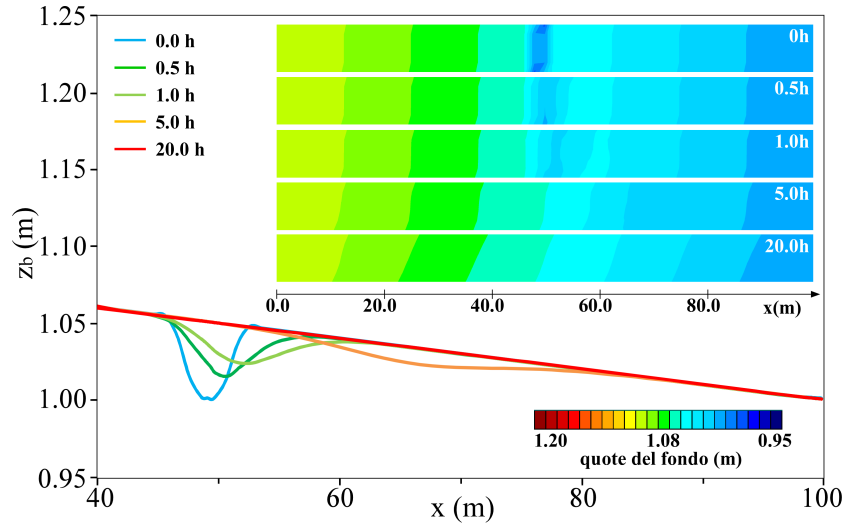


Figura 3.4: Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio ai volumi finiti upwind, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una trincea trasversale.

(Carniello et al., 2012) che tiene conto della non uniforme distribuzione degli sforzi tangenziali al fondo e della possibilità che il moto dei sedimenti avvenga, seppur in forma ridotta, anche al di sotto del valore soglia θ_c di Shields:

$$q_{b0} = 8\sqrt{gd^3(\rho_s/\rho - 1)} \left[\theta_c \left(-1 + \left(1 + \left(\frac{\mu\theta}{\theta_c} \right)^4 \right)^{1/4} \right) \right]^{3/2}. \quad (3.12)$$

Gli esperimenti sulla formazione e propagazione delle barre alternate sono stati condotti in una canaletta a sezione rettangolare larga 1.5 m e lunga 55 m in Lanzoni (2000), 117.5 m in Defina (2003) e 120 m nella presente ricerca; le ipotesi di lavoro adottate sono riassunte in tabella 3.1.

In figura 3.5 sono rappresentati i profili longitudinali del fondo, riferiti all'asse centrale della canaletta e alle sponde sinistra e destra, e l'altezza delle barre, valutata rispetto al fondo indisturbato.

Sono state messe a confronto la soluzione del modello originario e di quello modificato alla 10^a ora di simulazione, quando le barre sono prossime alle

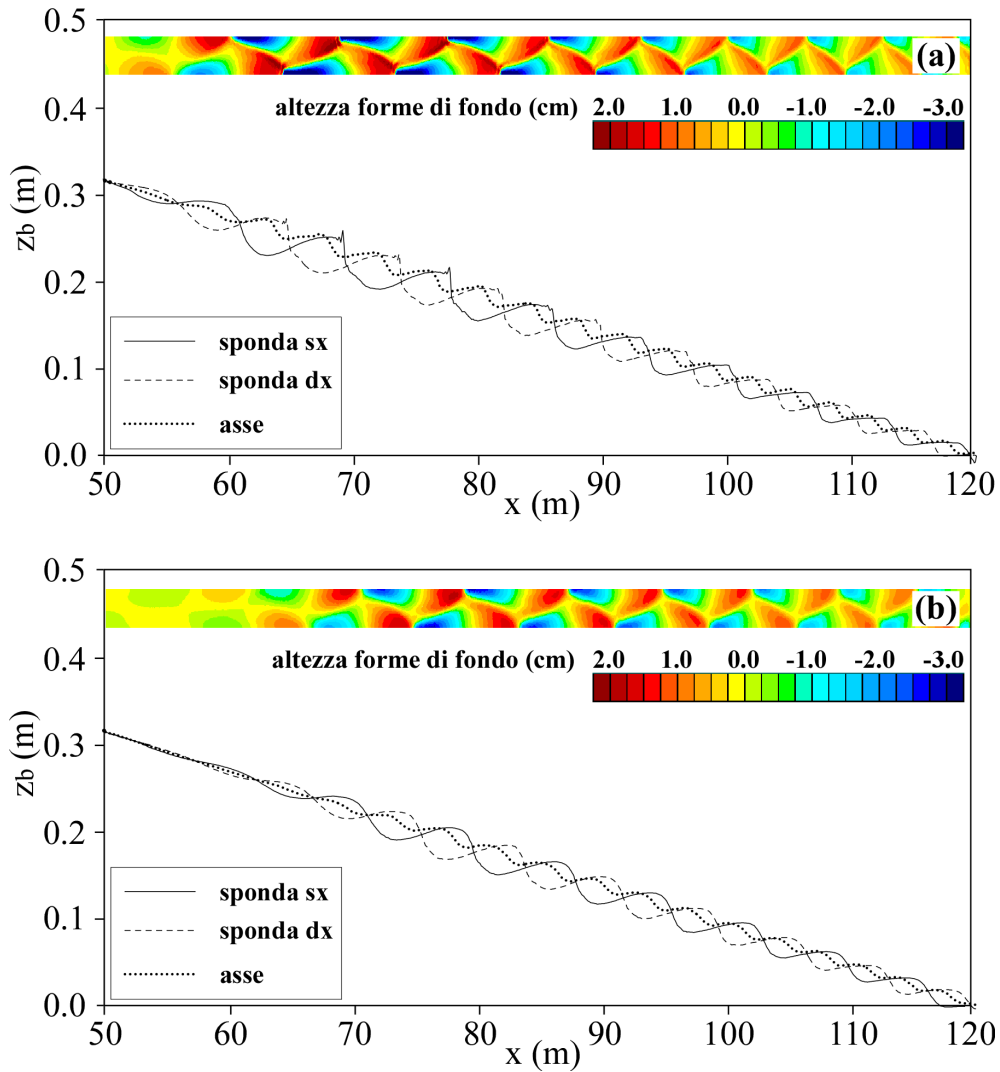


Figura 3.5: *Profilo longitudinale e rappresentazione con mappa a colori dell'altezza delle barre valutati alla 10^a ora dal modello originario (a) e da quello modificato (b) nell'ambito di alcuni esperimenti sul processo di formazione e crescita delle barre.*

$ \mathbf{q} $	$ \mathbf{q}_b $	Y	i_f	k_s	d	ρ_s/ρ	n	μ
(m^2/s)	(m^2/s)	(m)	$(\%)$	$(m^{1/3}/s)$	(mm)	$(-)$	$(-)$	$(-)$
$2 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-5}$	0.044	0.452	54.25	0.48	2.65	0.4	0.74

Tabella 3.1: *Valore dei parametri idromorfologici adottati nell'analisi del processo di formazione e propagazione delle barre alternate.*

condizioni di regime e le differenze tra i due modelli sono più evidenti.

Si nota che la soluzione del modello modificato (figura 3.5b) presenta un certo ritardo rispetto a quella del modello originario (figura 3.5a); nella parte destra del grafico infatti le barre, che hanno avuto meno tempo per svilupparsi, sono caratterizzate da altezze inferiori o risultano addirittura appena accennate.

I fronti delle barre della soluzione originaria sono inoltre più ripidi rispetto a quelli del modello modificato e in alcuni punti generano delle irregolarità ben visibili nel profilo di figura 3.5a.

Il differente comportamento dei due modelli dipende dal diverso modo di trattare le dinamiche del trasporto in presenza di elementi di calcolo parzialmente o completamente asciutti. La nuova versione del modello, infatti, consente di gestire con maggiore accuratezza i processi di deposito che si manifestano durante la transizione dalla condizione di bagnato a quella di asciutto.

I risultati numerici ottenuti utilizzando il modello numerico proposto da Defina (2003), e illustrati in figura (3.5a), mostrano nel complesso una buona corrispondenza con i rilievi sperimentali riportati da Lanzoni (2000): dopo la formazione le barre tendono progressivamente a una condizione di equilibrio caratterizzata da lunghezze d'onda e altezze superiori a quelle iniziali; all'equilibrio le barre raggiungono una lunghezza d'onda di circa 14 m, contro i 10 m misurati in laboratorio, e un'altezza d'onda di circa 8 cm di poco superiore ai 7 cm di Lanzoni (2000). I profili longitudinali del fondo mostrano

infine lo stesso comportamento osservato da Lanzoni (2000), secondo cui il profilo, lungo l'asse, tende a disporsi seguendo il più alto tra i profili destro e sinistro.

Le simulazioni effettuate con il modello modificato (figura 3.5b) oltre a confermare le conclusioni di Defina (2003), mostrano un incremento di accuratezza nella stima della lunghezza d'onda e dell'altezza delle barre, che assumono rispettivamente valori medi di 9.6 *m* e 6.7 *cm*. La soluzione risulta inoltre più stabile e liscia, nonché priva delle irregolarità visibili nei profili longitudinali ottenuti da Defina (2003).

Anche la celerità di propagazione delle barre c_b viene riprodotta con notevole accuratezza. In tabella (3.2) sono riportati alcuni valori di confronto.

	λ (<i>m</i>)	Δ (<i>cm</i>)	c_b (<i>m/h</i>)
Esperimenti (Lanzoni, 2000)	10.0	7.0	2.8
Modello (Defina, 2003)	14.0	8.0	2.0
Modello attuale	9.6	6.7	2.7

Tabella 3.2: *Confronto dei valori, a regime, di lunghezza d'onda λ , altezza d'onda Δ e celerità di propagazione c_b delle barre.*

Capitolo 4

La componente diffusiva del trasporto solido di fondo

Per molti anni l'approccio utilizzato nello studio dei fenomeni di trasporto solido di fondo è consistito nell'implementare, oltre all'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner, le equazioni di trasporto propriamente dette. Si tratta di relazioni algebriche, di natura semi-empirica, che esprimono il flusso medio dei sedimenti in funzione dei valori medi delle grandezze caratteristiche del moto.

La metodologia di analisi che ne deriva è di tipo deterministico, o puramente convettivo, e si riflette a livello macroscopico sulla struttura dell'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner già descritta al capitolo 3, dove sono state appunto trascurate le fluttuazioni di velocità e di concentrazione e le grandezze caratteristiche del fenomeno di trasporto, quali flusso solido e concentrazione dei sedimenti, sono invece approssimate con i loro valori medi.

Nel tempo si è tuttavia maturata la consapevolezza che l'utilizzo di relazioni in cui si trascurano gli effetti di queste fluttuazioni può generare errori anche grossolani nella valutazione dei flussi di sedimenti e sono state quindi avviate numerose indagini sperimentali e numeriche finalizzate alla caratterizzazione

probabilistica del trasporto al fondo dei sedimenti.

Sono così emerse le analogie tra i meccanismi di trasporto e i processi Random Walk, che danno luogo ad una diffusione di tipo fickiano (Seizelles et al., 2013), e sono inoltre state sviluppate varie espressioni, tra cui quelle molto simili di Furbish et al. (2012a) e di Ancey et al. (2014a), per la valutazione della portata solida.

In base alle loro elaborazioni la portata solida di fondo può esprimersi come la somma di un termine convettivo e di uno diffusivo. Furbish et al. (2012a) valutano il coefficiente di diffusione in funzione dei momenti del secondo ordine degli spostamenti, mentre Ancey et al. (2014a) lo esprimono in funzione dei momenti del secondo ordine delle velocità.

Sulla base di tali considerazioni e allo scopo di individuare una metodologia per la rappresentazione numerica della componente diffusiva del trasporto solido di fondo all'interno del 2DEF, si sono avviate le analisi e le sperimentazioni numeriche descritte nel seguito.

4.1 La randomicità del processo diffusivo

La struttura del modello 2DEF suggerisce di non impiegare un approccio di tipo lagrangiano classico, che ad ogni istante di calcolo comporterebbe l'onere di valutare l'esatta posizione di ciascuna particella solida coinvolta nei processi di erosione, trasporto e deposito. Trasporto solido ed evoluzione del fondo è preferibile invece che vengano valutati nel loro complesso, facendo riferimento alle modificazioni del fondo che avvengono globalmente, durante un adeguato intervallo di tempo, e che riguardano un insieme di particelle ovvero il volume di sedimento trasportato attraverso i diversi elementi della griglia di calcolo.

Tuttavia, neppure un approccio di tipo euleriano sembra particolarmente

vantaggioso, poiché introdurrebbe nel sistema delle derivate del secondo ordine che appesantirebbero le operazioni di calcolo.

Si è perciò pensato di descrivere la diffusione in modo indirettamente lagrangiano, sfruttando la natura random del trasporto solido di fondo ed esprimendo la portata solida q_b come combinazione, ad ogni passo di calcolo, di una portata solida deterministica di natura convettiva e di una portata solida aleatoria, la cui intensità dipenda dal reale coefficiente di diffusione, dall'intensità della portata solida media e dal passo di integrazione temporale, come in un classico approccio Random Walk.

L'idea trae spunto dalla relazione con cui Furbish et al. (2012a) rappresentano la portata solida, continuando però a valutare la frazione deterministica con la relazione di Meyer-Peter e Müller. Gli autori, con riferimento al flusso di sedimenti nel caso monodimensionale, propongono la seguente espressione:

$$q_{bx} = u_p c - \frac{1}{2} \frac{d \kappa c}{dx} \quad (4.1)$$

dove q_{bx} e u_p sono la portata solida e la velocità delle particelle valutate lungo x ; κ è il coefficiente di diffusione e c è la concentrazione per unità di superficie del sedimento. Esprimendo la concentrazione come rapporto $c = q_{mx}/u_p$ tra la portata di Meyer-Peter e Müller q_{mx} e la velocità delle particelle u_p , la (4.1) può esprimersi nel seguente modo:

$$q_{bx} = q_{mx} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{q_{mx}}{u_p} \right). \quad (4.2)$$

In analogia con i processi Random Walk si è dunque pensato di esprimere la portata solida complessiva q_{bx} come combinazione lineare della portata q_{mx} di Meyer-Peter e Müller e di una fluttuazione q'_{mx} . In questo modo le fluttuazioni di velocità e di concentrazione delle particelle, responsabili della diffusione del flusso solido, vengono ad essere raggruppate in un unico termine.

Secondo la teoria dei processi Random Walk le posizioni casuali delle particelle di sedimento x'_p manifestano una distribuzione di probabilità di Gauss a

media nulla e varianza $\sigma_{x_p}^2$ legata al coefficiente di diffusione D dalla relazione:

$$\sigma_{x_p}^2 = 2Dt \quad (4.3)$$

in cui t è l'istante di tempo considerato. La relazione si mantiene valida se anzichè la posizione casuale x'_p si considera lo spostamento casuale $\Delta x'_p$ che avviene nell'intervallo di tempo Δt , potendosi quindi scrivere che:

$$D = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\Delta x_p}^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sigma_{u_p}^2 \Delta t = \frac{1}{2} \frac{\sigma_q^2}{(1-n)^2 \Delta_a^2} \Delta t \quad (4.4)$$

dove $\sigma_{u_p}^2$ e σ_q^2 sono rispettivamente la varianza della distribuzione di probabilità, gaussiana, delle variazioni di velocità casuale delle particelle di sedimento e delle variazioni di portata solida di fondo casuale e $(1-n)\Delta_a$ è il volume di sedimento unitario contenuto nel generico spessore Δ_a di cui nel seguito si illustrerà meglio il significato.

Detta q_{Mx} la massima fluttuazione di portata solida, in modulo, nel modello si assume, per semplicità, che le portate casuali anzichè seguire la distribuzione di probabilità di Gauss siano di fatto uniformemente distribuite nell'intervallo $[-q_{Mx}; q_{Mx}]$ con densità di probabilità $p(q'_{mx}) = (2q_{Mx})^{-1}$; il teorema del limite centrale garantisce infatti che dopo un numero infinito di passi, ma nella realtà dopo pochi, il risultato che si ottiene con questa distribuzione approssimi bene quello che si otterrebbe con una distribuzione di tipo gaussiano.

Introducendo la variabile random $rnd(\bullet)$, che assume valore medio nullo e varia all'interno di un intervallo di ampiezza massima $[-k_M; k_M]$ con $k_M = q_{Mx}/q_{mx}$, per le fluttuazioni di portata solida q'_{mx} vale la seguente espressione:

$$q'_{mx} = q_{mx} \cdot rnd(\bullet) \quad (4.5)$$

che sostituita nella (4.2) consente di valutare la portata al fondo complessiva q_{bx} :

$$q_{bx} = q_{mx} + q'_{mx} = q_{mx} \cdot (1 + rnd(\bullet)) \quad (4.6)$$

il cui valore medio è pari a q_{mx} e che varia al più nell'intervallo di estremi $[q_{mx} - q_{Mx}; q_{mx} + q_{Mx}]$.

In base a queste ipotesi la varianza delle portate assume l'espressione riportata di seguito:

$$\sigma_q^2 = \int_{-q_{Mx}}^{q_{Mx}} q_{mx}'^2 \cdot p(q_{mx}') dq' = \frac{q_{Mx}^2}{3} \quad (4.7)$$

e il legame tra il coefficiente di diffusione, la massima fluttuazione di portata solida casuale e l'intervallo di integrazione temporale è dato dalla seguente relazione:

$$D = \frac{q_{Mx}^2}{6(1-n)^2 \Delta_a^2} \Delta t. \quad (4.8)$$

4.2 Il modello multigranulare multistrato

Per verificare la correttezza della teoria esposta sono state avviate alcune sperimentazioni numeriche; assegnato il coefficiente di diffusione D e stimata con la (4.8) la portata solida corrispondente, si sono determinati gli spostamenti $\Delta x'_p$ del sedimento e si è valutata con la (4.4) la diffusione D' effettivamente introdotta nel problema.

Al fine di tracciare gli spostamenti del materiale solido e valutarne quindi sia lo spostamento medio che la sua diffusione si è adottata una soluzione analoga a quella descritta da Stecca et al. (2014, 2015) per la modellazione morfodinamica di sedimenti eterogenei.

Il materiale costituente l'alveo è stato perciò suddiviso in due classi di sedimento di uguali caratteristiche geometriche e litologiche, di cui una generica e una di tracciante. Il fondo dell'alveo è stato rappresentato come una sovrapposizione di strati all'interno dei quali si sviluppano processi fisici di natura differente e, per ciascuna delle classi considerate, è definita la frazione di sedimento inizialmente presente ed è valutata la sua variazione nel tempo. La suddivisione in più strati consente di rappresentare correttamente la distribuzione, nel piano e lungo la verticale, delle diverse classi di sedimento

presenti e quindi, nel caso specifico, di studiare la storia del tracciante.

La schematizzazione proposta, rappresentata in figura (4.1), prevede che un solo strato di terreno sia direttamente coinvolto nei processi di deposito ed erosione; si tratta dello strato superficiale, denominato *active layer*, a cui è assegnato uno spessore Δ_a costante. Al suo interno, lungo tutta la sua altezza, il sedimento è uniformemente distribuito e tutti i grani appartenenti ad una stessa classe sono egualmente esposti all'azione della corrente, indipendentemente dalla loro posizione all'interno dello strato (Spasojevic et al., 1994). I meccanismi di trasporto innescati dai processi idrodinamici ne modificano la composizione determinando variazioni delle frazioni di sedimento inizialmente assegnate.

Al di sotto dell'*active layer* è previsto uno strato di mescolamento del materiale, il *mixing layer*, introdotto allo scopo di evitare che durante l'evoluzione morfologica del fondo il ricampionamento del materiale possa interessare tutti gli strati di terreno che compongono la verticale, comportando quindi la necessità di rivalutarne la composizione ad ogni singolo passo di calcolo. A differenza di quanto avviene nell'*active layer* lo spessore Δ_m del *mixing layer* non rimane costante durante i fenomeni di deposito ed erosione, ma può variare tra un valore minimo nullo e un valore massimo, Δ_{sub} , inizialmente assegnato.

Raggiunto eventualmente tale valore limite il *mixing layer* si trasforma in un generico *sublayer* e il numero di strati n_s che compongono il terreno si incrementa di un'unità. Le frazioni di sedimento contenute nel nuovo strato sono esattamente quelle che erano contenute nel *mixing layer* da cui è stato originato.

Dal momento della sua formazione in poi lo spessore e le frazioni di sedimento di un *sublayer* non possono più modificarsi. Può invece variare il numero di strati, come conseguenza di un ulteriore incremento, o al contrario soppressione, di uno o più *sublayer*.

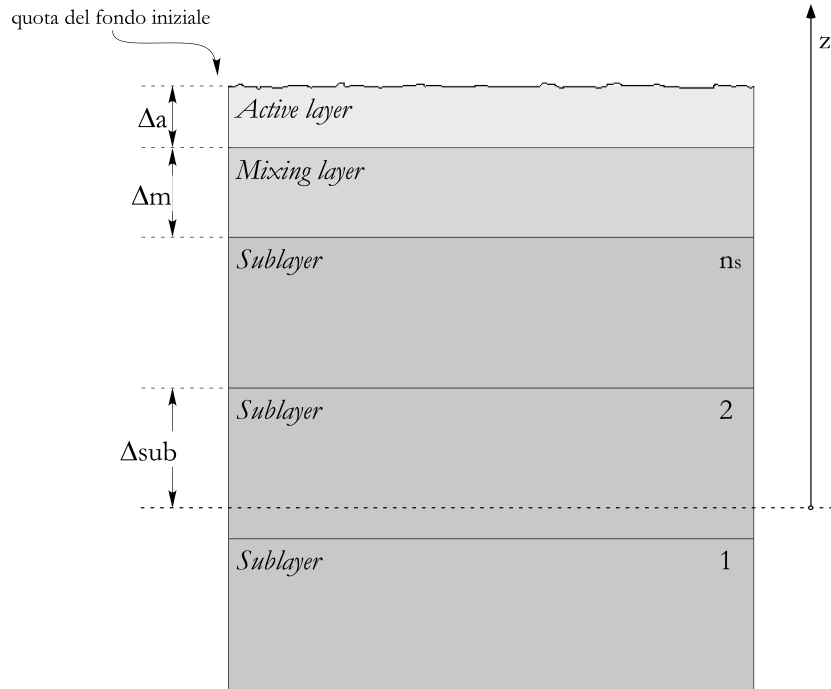


Figura 4.1: Schematizzazione del fondo secondo il modello multistrato.

Ciò premesso, note le condizioni idrodinamiche e valutata la portata solida corrispondente, ad ogni istante t si individuano la frazione di portata solida q_{bi} competente a ciascuna classe di sedimento i -esima e la corrispondente variazione di quota del fondo Δz_i . In base al valore, positivo o negativo, che quest'ultima grandezza assume è possibile distinguere tra i due casi di deposito ($\Delta z_i > 0$) ed erosione ($\Delta z_i < 0$).

Deposito: $\Delta z_i > 0$

Nell'eventualità che le variazioni di quota del fondo competenti alla classe di sedimento i -esima siano positive, va in primo luogo aggiornata la corrispondente frazione di sedimento f_{ai} contenuta nell'*active layer*:

$$f_{ai} = \frac{(f'_{ai} \cdot \Delta a + \Delta z_i)}{\Delta a + \Delta z} \quad (4.9)$$

dove: il pedice a indica l'appartenenza all'*active layer*; il pedice i indica la classe di sedimento i -esima; $\Delta z = \sum_i \Delta z_i$ rappresenta la variazione totale delle quote del fondo e tutti i termini con l'apice si riferiscono all'istante di calcolo precedente.

La frazione f_{ai} , intesa come il rapporto tra il volume di sedimento i -esimo e il volume di sedimento totale, non può ovviamente assumere valori superiori all'unità; si rende quindi necessario trasferire l'eccedenza nel sottostante *mixing layer*.

Nuovamente si deve distinguere tra due diverse possibili situazioni.

Indicando ancora con l'apice le grandezze riferite all'istante di calcolo precedente, lo spessore del *mixing layer* è dato dalla seguente relazione:

$$\Delta_m = \Delta'_m + \sum_i \Delta z_i. \quad (4.10)$$

Quando Δ_m assume valori inferiori a Δ_{sub} , la frazione f_{mi} della classe di sedimento i -esima contenuta nel *mixing layer* va valutata con la seguente relazione:

$$f_{mi} = \frac{\Delta z \cdot f_{ai} + \Delta'_m \cdot f'_{mi}}{\Delta_m}. \quad (4.11)$$

In caso contrario, si assiste alla formazione di un nuovo *sublayer* e un nuovo *mixing layer*, il numero di strati si incrementa e le altre grandezze in gioco vanno aggiornate come segue:

$$f_{subi} = \frac{(\Delta_{sub} - \Delta'_m) \cdot f_{ai} + \Delta'_m \cdot f'_{mi}}{\Delta_{sub}} \quad (4.12)$$

$$\Delta_m = \Delta'_m + \sum_i \Delta z_i - \Delta_{sub} \quad (4.13)$$

$$f_{mi} = f_{ai} \quad (4.14)$$

dove: f_{subi} è la frazione di sedimento della classe i -esima contenuto nel nuovo *sublayer* e la (4.14) sta ad indicare che la miscela di materiale di cui è costituito il nuovo *mixing layer* è esattamente la stessa che compone l'*active layer*.

Erosione: $\Delta z_i < 0$

Quando il modello individua una riduzione delle quote del fondo, va prioritariamente verificato che l'erosione corrispondente a ciascuna classe di sedimento non comporti l'asportazione di una quantità di materiale superiore a quella effettivamente disponibile nello strato superficiale e si impone quindi che:

$$\Delta z_i \geq -\Delta_a \cdot f_{ai} . \quad (4.15)$$

Quindi, con la (4.10), si determina lo spessore provvisorio Δ_m del *mixing layer* il cui valore, positivo o negativo, corrisponde a due diverse condizioni di erosione.

Nel primo caso, per $\Delta_m > 0$, l'erosione riguarda il solo *active layer* e le frazioni di sedimento diventano:

$$f_{mi} = f'_{mi} \quad (4.16)$$

$$f_{ai} = f'_{ai} + \frac{\Delta z_i - \Delta z \cdot f_{mi}}{\Delta_a} . \quad (4.17)$$

Quando invece $\Delta_m < 0$ il processo erosivo va ad interessare anche il *mixing layer*, che scompare e si riforma ad un livello inferiore. Con il consueto significato dei simboli valgono allora le seguenti relazioni:

$$\Delta_m = \Delta'_m + \Delta_{sub} + \Delta z \quad (4.18)$$

$$f_{mi} = f'_{subi} \quad (4.19)$$

$$f_{ai} = f'_{ai} + \frac{\Delta z_i + \Delta'_m \cdot f'_{mi} - (\Delta'_m + \Delta z) \cdot f'_{subi}}{\Delta_a} . \quad (4.20)$$

Nell'eventualità che al di sotto del *mixing layer* non siano presenti altri strati è necessario crearne uno ad hoc a cui assegnare le frazioni di sedimento f'_{subi} di *default*.

In ambedue i casi, di deposito e di erosione, è immediata la valutazione della quota del fondo z_b :

$$z_b = z'_b + \sum_{i=1}^2 \Delta z_i . \quad (4.21)$$

4.2.1 Casi test sulla diffusione

Con il modello multigranulare multistrato sono state analizzate le stesse condizioni geometriche, idrodinamiche e di trasporto solido dell'esempio studiato al paragrafo 3.1.2, e riassunte in tabella 3.1, introducendo l'ulteriore ipotesi di fondo iniziale perfettamente piano.

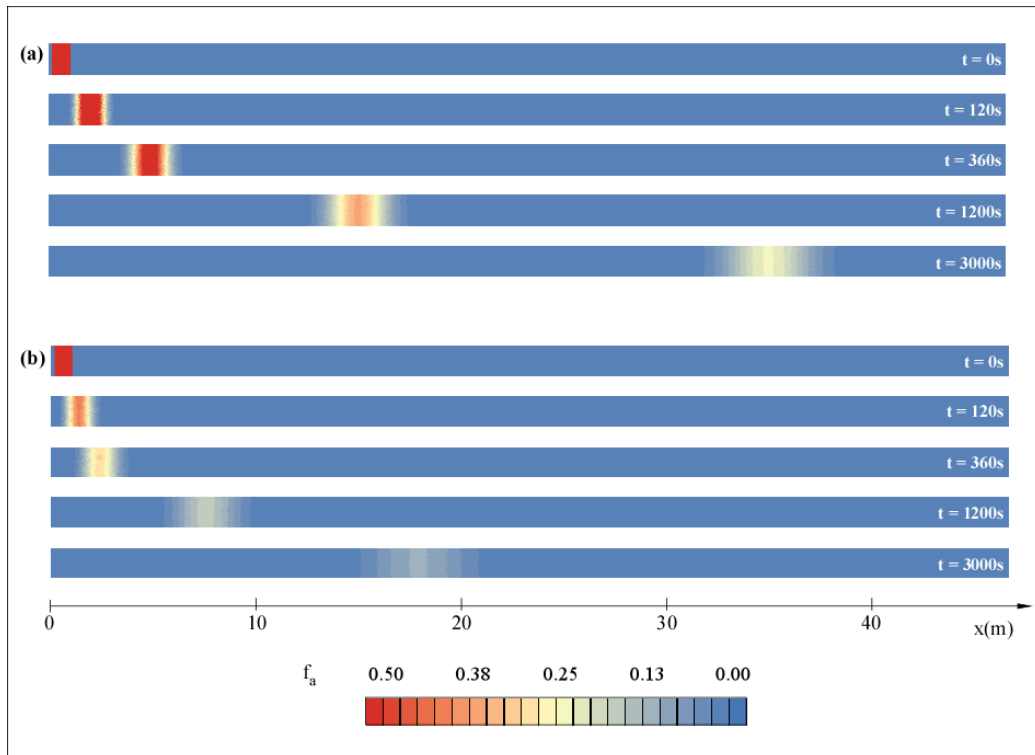


Figura 4.2: *Rappresentazione della propagazione e della dispersione della frazione f_a di sedimento tracciante contenuto nell'active layer nei casi (a) senza diffusione e (b) con diffusione.*

Lungo la canaletta a sezione rettangolare si sono assunti: $\Delta_a = 5 \cdot d = 2.5 \cdot 10^{-3} m$ e $\Delta_m = \Delta_{sub} = 5 \cdot 10^{-3} m$; per l'active layer si è infatti scelto uno spessore un po' superiore a quello che, come è noto, corrisponde alla condizione di incipiente movimento di Shields e cioè al diametro medio del sedimento costituente il fondo.

Nell'*active layer*, all'incile della canaletta, si è ipotizzata la presenza di solo materiale tracciante e, avviata la simulazione, se ne sono studiate le modalità di propagazione e diffusione.

Il tracciante ha le stesse caratteristiche geometriche e sedimentologiche del materiale costituente il fondo (4.1), fatta eccezione per la colorazione rossa che consente appunto di distinguerlo.

d	ρ_s/ρ	n
(mm)	(-)	(-)
0.48	2.65	0.4

Tabella 4.1: *Caratteristiche del materiale tracciante e costituente il fondo.*

I risultati della modellazione mostrano (figura 4.2) che questo tipo di rappresentazione è idonea a descrivere il meccanismo della dispersione sul piano orizzontale. Tuttavia evidenziano anche un significativo rallentamento della soluzione con diffusione rispetto a quella senza diffusione.

Lo si nota chiaramente in figura 4.2 ed è ancora più evidente in figura 4.3 dove sono rappresentati, per le due soluzioni, gli spostamenti dei centri di massa del sedimento tracciante contenuto lungo la verticale.

Questo fenomeno è una conseguenza degli scambi di materiale che si esplicano tra l'*active* e il *mixing layer*, particolarmente evidenti nella soluzione con diffusione a causa della variabilità delle portate solide al fondo indotta dalla diffusione stessa. In figura 4.4 sono posti a confronto i volumi di sedimento tracciante contenuti nell'*active layer* e sull'intera verticale. Mentre nel caso della soluzione senza diffusione i volumi di tracciante contenuti nell'*active layer* coincidono con quelli contenuti sull'intera verticale, per la soluzione con diffusione non è così e nei diversi istanti di tempo, all'aumentare della quantità di materiale scambiato tra gli strati, cresce anche il ritardo accumulato dal tracciante nella sua propagazione lungo la canaletta.

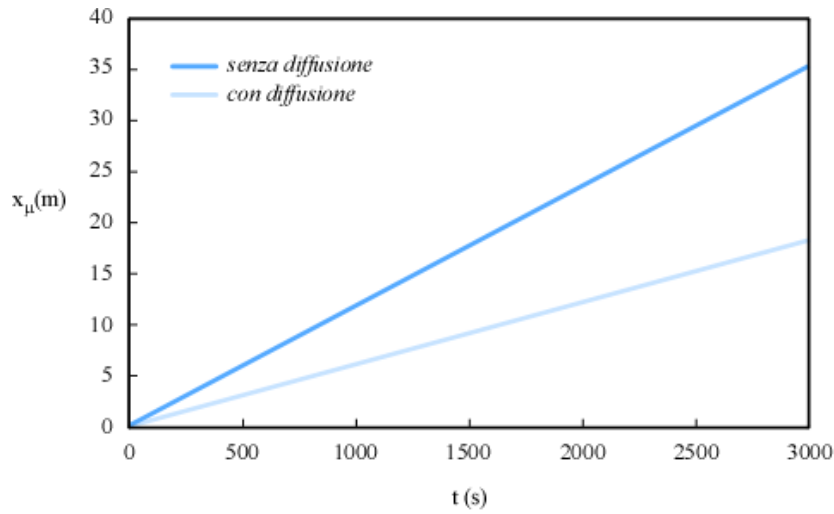


Figura 4.3: *Propagazione dei centri di massa della frazione di sedimento tracciante contenuta sull'intera verticale: confronto tra la soluzione senza diffusione e la soluzione con diffusione.*

In figura 4.5 sono invece poste a confronto le varianze delle frazioni di sedimento tracciante f_{ai} contenute lungo la verticale. La varianza della soluzione con diffusione appare significativamente inferiore a quella della soluzione senza diffusione che assume un singolare andamento parabolico.

Le soluzioni fornite dal modello modificato sollevano quindi due interrogativi; il primo riguarda il ritardo della soluzione con diffusione e il secondo la natura dispersiva manifestata anche dalla soluzione senza diffusione.

4.3 Il modello multigranulare monostrato

Avendo intuito che il rallentamento del materiale è una conseguenza, in parte interpretativa, delle complesse modalità di rappresentazione del fondo dell'alveo e in particolare dei meccanismi di scambio che si esplicano tra strati lungo la verticale, si è cercato uno schema di rappresentazione del fondo che non introducesse i problemi evidenziati.

Senza abbandonare l'idea di suddividere il materiale costituente il fondo in

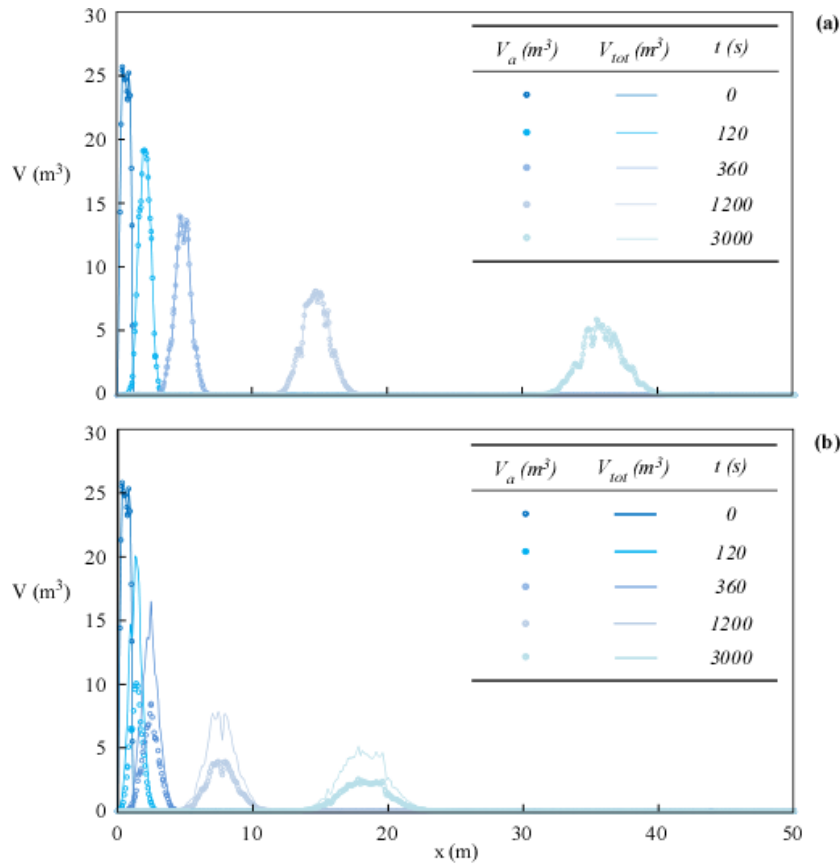


Figura 4.4: Confronto, per la soluzione senza diffusione (a) e quella con diffusione (b), dei volumi di sedimento tracciante contenuti nell'active layer V_a e sull'intera verticale V_{tot} nei diversi istanti di tempo indicati.

due classi di sedimento, sono state quindi apportate alcune modifiche al modello precedente, che hanno consentito di verificare l'efficacia dell'approccio multigranulare nel 'tracciamento' del sedimento trasportato.

Gli strati dell'alveo sono stati ridotti al solo *active layer*, assunto in questo caso di spessore variabile, al quale sono stati assegnati lo spessore iniziale Δ_a e le frazioni di sedimento f_{ai} .

Note le condizioni idrodinamiche e valutata la portata solida corrispondente, ad ogni istante t si sono individuate la frazione di portata solida q_{bi} competente a ciascuna classe di sedimento i -esima e la corrispondente variazione di

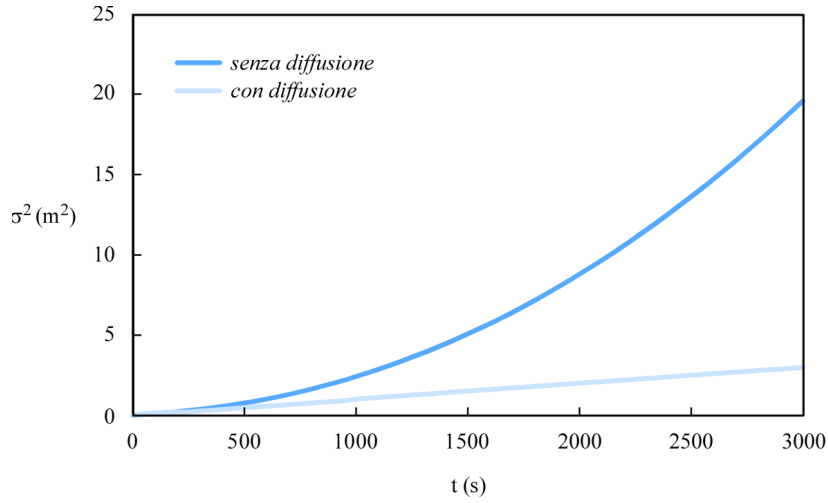


Figura 4.5: Varianza della frazione di sedimento tracciante contenuta sull'intera verticale: confronto tra la soluzione senza diffusione e la soluzione con diffusione.

quota del fondo Δz_i ; infine si sono aggiornate la quota z_b dell'alveo (4.21), lo spessore dell'*active layer* (4.22) e le frazioni di sedimento i -esimo in esso contenute (4.23):

$$\Delta_a = \Delta'_a + \sum_{i=1}^2 \Delta z_i \quad (4.22)$$

$$f_{ai} = \frac{(f'_{ai} \cdot \Delta'_a + \Delta z_i)}{\Delta_a}. \quad (4.23)$$

Il modello multigranulare monostrato ha effettivamente fornito dei risultati di più facile interpretazione rispetto a quelli della versione multistrato.

La schematizzazione monostrato ha infatti impedito il confinamento del materiale in strati del fondo che, diversamente dall'*active layer*, non sono direttamente esposti all'azione della corrente. Conseguenza diretta di questa semplificazione è stata la possibilità di apprezzare l'efficacia della rappresentazione multigranulare ai fini del tracciamento dei grani.

In figura 4.6 è rappresentato il confronto tra gli spostamenti dei centri di massa delle distribuzioni di tracciante dei casi senza diffusione ($x_{\mu-det}$) e con diffusione ($x_{\mu-rnd}$); è evidente il perfetto sincronismo tra le due soluzioni del

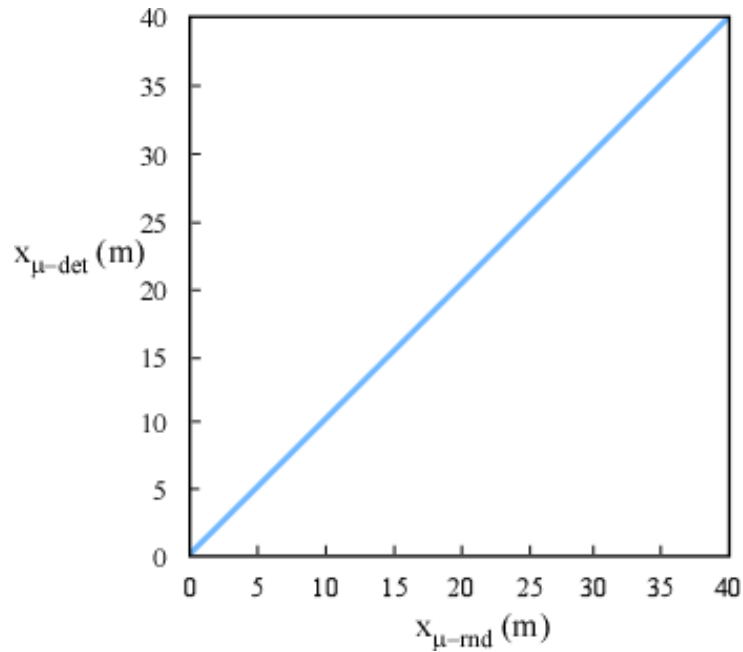


Figura 4.6: *Spostamenti dei centri di massa delle distribuzioni di traccianti contenute lungo l'intera verticale: confronto tra la soluzione senza diffusione ($x_{\mu-det}$) e quella con diffusione ($x_{\mu-rnd}$).*

modello, con il tracciante che si diffonde senza alterazioni della velocità media di propagazione del sedimento.

Rimane invece aperta la questione relativa alle modalità di rappresentazione della componente diffusiva del trasporto solido di fondo. In figura 4.7 è rappresentata la varianza delle distribuzioni di traccianti nei due casi considerati, senza diffusione σ_{det}^2 e con diffusione σ_{rnd}^2 . L'analisi del grafico, con $\sigma_{det}^2 = \sigma_{rnd}^2$, suggerisce infatti che la diffusione sia la stessa nei due casi e che il modello sia quindi affetto da una significativa diffusione numerica che maschera quella fisica introdotta con il disturbo delle portate solide.

Con riferimento a questi aspetti, sono interessanti le considerazioni rese possibili dall'applicazione del modello multigranulare mostrato ad uno schema di calcolo monodimensionale risolto alle differenze finite e descritto nel seguito.

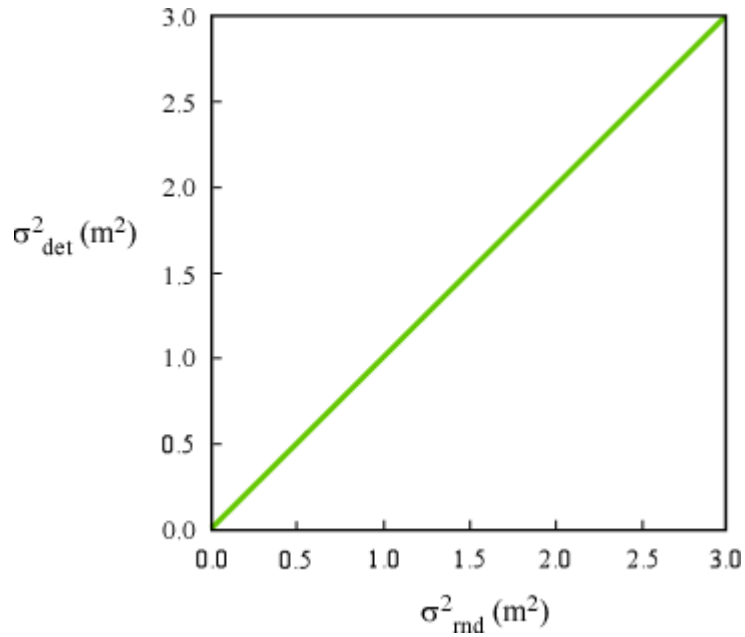


Figura 4.7: Varianza delle distribuzioni di tracciante contenute lungo l'intera verticale: confronto tra la soluzione senza diffusione (σ_{det}^2) e la soluzione con diffusione (σ_{md}^2).

4.3.1 Diffusione fisica e numerica nella rappresentazione del trasporto solido di fondo

Il modulo di trasporto del modello 2DEF, così come descritto al paragrafo 3.1, prevede che l'equazione di Exner sia implementata ai volumi finiti e che i flussi di portata solida siano determinati mediante un metodo di *upwinding*. L'indubbio vantaggio di questo approccio consiste nel favorire la stabilità del modello. Tuttavia, come per tutti i metodi *upwind* del I ordine, offre anche lo svantaggio di introdurre della diffusione numerica non sempre trascurabile. Per contenerla entro valori accettabili si richiede che il numero di Courant-Friedrichs-Lewy associato al trasporto solido (CFL_{mor}) e definito quindi come $CFL_{mor} = u_p \cdot \Delta t / \Delta x$ sia quanto più possibile prossimo all'unità.

Alla luce di queste osservazioni e dei risultati illustrati nei paragrafi preceden-

ti, si è ravvisata l'opportunità di verificare la validità del modello morfologico e degli effetti della diffusione numerica eventualmente presente, considerando diverse ipotesi di lavoro corrispondenti ad altrettanti valori del CFL_{mor} . Per rendere più semplici le valutazioni, si è fatto riferimento ad uno schema di calcolo monodimensionale risolto alle differenze finite.

Rispetto alla versione 2D, nel modello 1D la valutazione delle variazioni morfologiche del fondo è frazionata in due parti. In un primo momento si valuta la variazione prodotta dal flusso convettivo, che per CFL_{mor} unitario corrisponde a spostare tutto il sedimento presente nell'*active layer* da una maglia a quella adiacente; successivamente si valuta e si sovrappone, alla prima, la variazione prodotta dal flusso diffusivo. In questo modo, anche se il CFL_{mor} è assunto uguale ad uno, non si incorre nell'errore di asportare quantità di materiale superiori a quelle effettivamente presenti nell'unico strato di fondo. Richiamando le condizioni geometriche, idrodinamiche e di trasporto dei casi esaminati al paragrafo precedente, riassunte in tabella 3.1, all'*active layer* è stato nuovamente assegnato uno spessore iniziale $\Delta_a = 5 \cdot d = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, in modo da contenere l'azione erosiva della corrente entro uno strato di altezza non superiore a quella dell'*active layer* stesso, e all'istante iniziale nella sezione posta all'incile della canaletta è stato immesso del materiale tracciante di frazione iniziale $f_a = 1$.

In tutte le indagini condotte, e nel seguito descritte, sono stati assunti differenti valori del CFL_{mor} per verificare l'eventuale deterioramento della soluzione morfologica prodotto dalla diffusione numerica. I risultati delle simulazioni sono rappresentati in figura 4.8.

Nel primo caso esaminato (figura 4.8 pannello *a*) si è assunto un valore unitario del numero di Courant-Friedrichs-Lewy ($CFL_{mor} = 1$) e si è considerata una condizione di trasporto al fondo puramente convettiva ($q'_{mx} \equiv 0$). In figura è rappresentata la propagazione della frazione di tracciante f_a : la massa di sedimento, in assenza di diffusione numerica e fisica, si sposta lungo la ca-

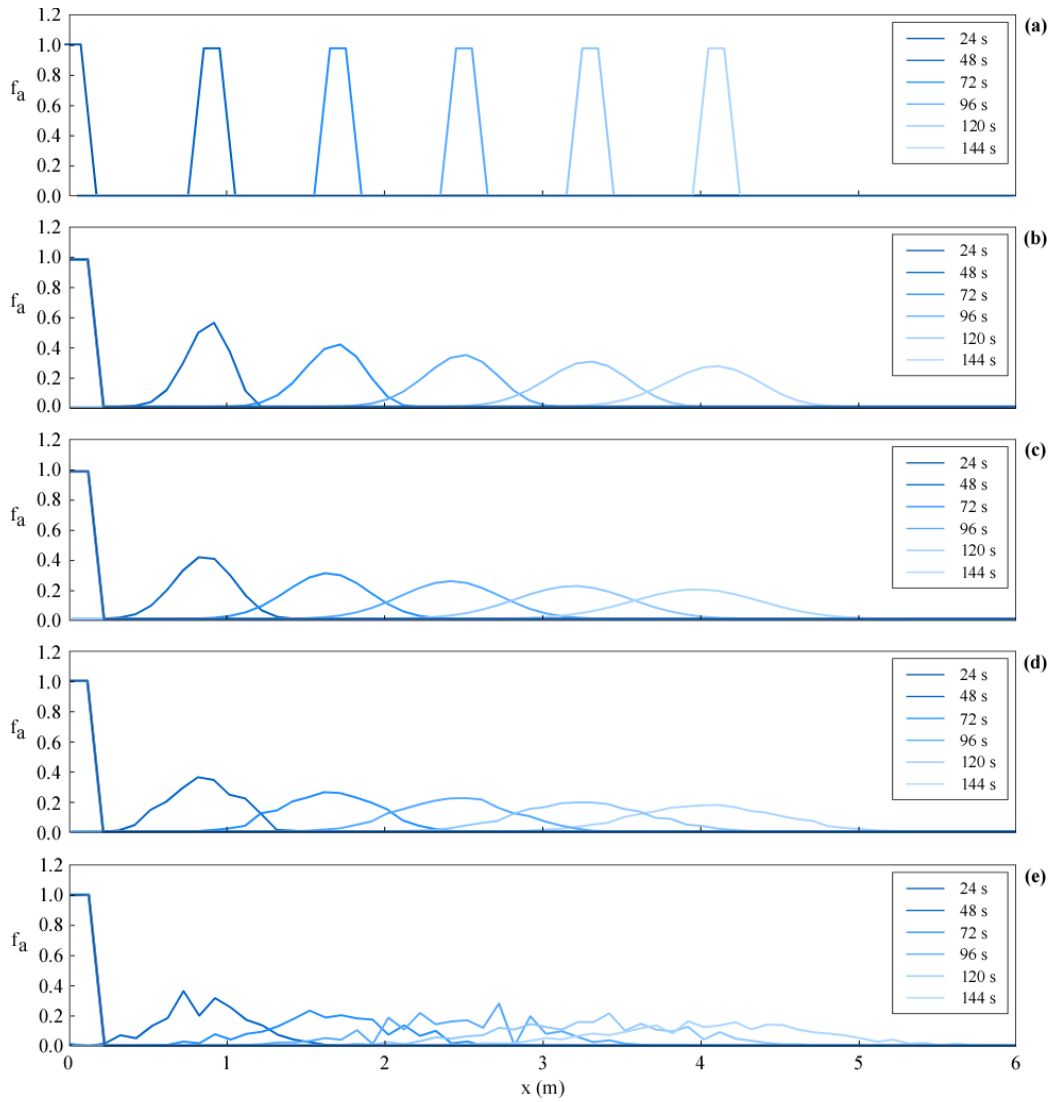


Figura 4.8: Propagazione ed eventuale diffusione della frazione di sedimento tracciante nelle ipotesi: (a) soluzione senza diffusione e $CFL_{mor} = 1$; (b) soluzione senza diffusione e $CFL_{mor} = 0.8$; (c) soluzione senza diffusione e $CFL_{mor} = 0.6$; (d) soluzione con diffusione, $CFL_{mor} = 1$ e coefficiente della componente random $k_M = 0.5$; (e) soluzione con diffusione, $CFL_{mor} = 1$ e coefficiente della componente random $k_M = 1$.

naletta senza alcuna deformazione.

Nei due casi successivi, la progressiva riduzione del CFL_{mor} introduce un'importante diffusione numerica che, al pari di quella fisica, disperde il tracciante durante la sua propagazione lungo la canaletta. La frazione di sedimento f_a modifica ora la propria distribuzione, assumendo forme che appaiono sempre più lisce e schiacciate (figura 4.8, pannelli *b* e *c*).

I due esempi appena illustrati mostrano chiaramente che la diffusione numerica aumenta man mano che il CFL_{mor} assume valori che si discostano dall'unità e che già per $CFL_{mor} = 0.8$ avviene una notevole dispersione del sedimento.

Si è quindi trovata conferma di quanto già in effetti noto circa l'importanza dello schema di calcolo impiegato per l'implementazione dell'equazione di Exner e sulla necessità di adottare i giusti accorgimenti per raggiungere, in generale, un buon grado di accuratezza e per evitare, in particolare, la presenza di diffusione numerica. Nell'ambito della presente ricerca, risulta pratico e conveniente agire direttamente sul numero di Courant-Friedrichs-Lewy CFL_{mor} .

Partendo da queste considerazioni è stata svolta un'ultima serie di sperimentazioni numeriche con cui verificare la validità della teoria esposta al paragrafo 4.1; si è imposto $CFL_{mor} = 1$ e si è introdotto un disturbo delle portate solide al fondo corrispondente ad un dato coefficiente di diffusione D . Quindi, determinati gli spostamenti $\Delta x'_p$, si è confrontato il risultante coefficiente di diffusione D' (4.4) con il coefficiente di diffusione D di partenza. In figura 4.8, pannelli *d* ed *e*, sono riportati due esempi corrispondenti ad altrettanti valori della componente random k_M . Si noti che l'andamento irregolare della frazione tracciante f_a , in particolare per il pannello *e*, dipende dall'aver rappresentato una sola realizzazione.

I grafici mostrano che avendo schematizzato il fondo con un unico strato si è raggiunta una sincronia pressoché perfetta tra le soluzioni senza diffusione e

con diffusione. Lo stesso si era visto anche con il modello 2DEF monostrato. Il principale risultato raggiunto consiste però nell'aver rimosso la diffusione numerica, creando quindi le condizioni per verificare l'entità di quella fisica. In tabella 4.2 sono riportati, per diversi valori del coefficiente k_M e del CFL_{mor} , i valori del coefficiente di diffusione teorico D e di quello sperimentale D' calcolato con l'approccio suggerito. Si vede che in realtà un po' di diffusione numerica è ancora presente, soprattutto per bassi valori del coefficiente k_M ai quali corrispondono infatti degli errori $(D' - D)/D$ non trascurabili. L'errore è invece piuttosto contenuto per $k_M = 1$. La questione

CFL_{mor}	k_M	D	D'	$\frac{D'-D}{D}$
(-)	(-)	(m^2/s)	(m^2/s)	(-)
1.0	1	$5.56 \cdot 10^{-4}$	$7.81 \cdot 10^{-4}$	0.41
1.0	0.5	$1.39 \cdot 10^{-4}$	$4.50 \cdot 10^{-4}$	2.24
1.0	0.1	$5.56 \cdot 10^{-6}$	$8.74 \cdot 10^{-5}$	14.73
0.5	1	$2.78 \cdot 10^{-4}$	$1.79 \cdot 10^{-3}$	5.46

Tabella 4.2: *Valutazione dei coefficienti di diffusione teorico D e calcolato D' per diversi valori del CFL_{mor} e gradi di randomicità del processo di trasporto.*

si spiega facilmente se si considera che, in base alla definizione del CFL_{mor} , l'intervallo di integrazione temporale Δt vale:

$$\Delta t = \frac{CFL_{mor} \cdot \Delta x}{u_p} \quad (4.24)$$

e consente di eliminare la diffusione numerica del processo convettivo ma non di quello diffusivo.

Le portate casuali q'_{mx} variano infatti all'interno dell'intervallo di estremi $[-k_M \cdot q_{mx}; +k_M \cdot q_{mx}]$; al diminuire del coefficiente random k_M i valori estremi della portata casuale si allontanano sempre più dal valore della portata convettiva q_{mx} . La portata casuale è quindi generalmente inferiore a quella convettiva e raramente, e comunque solo se $k_M = 1$, può eguagliarla. In

conseguenza di ciò, anche il CFL_{mor} assume in genere valori inferiori ad uno. Detto questo, i valori riportati in tabella 4.2 mostrano anche che il coefficiente di diffusione sperimentale valutato per $k_M = 1$ e $CFL_{mor} = 0.5$ è maggiore del corrispondente valutato per $CFL_{mor} = 1$ e se da un lato confermano la validità dell'approccio introdotto al paragrafo 4.1, dall'altro indicano la necessità di intervenire in modo strutturale sullo schema di calcolo per abbattere la diffusione numerica, per esempio adottando uno schema upwind del II ordine.

4.4 Ulteriori considerazioni sul modello multigranulare multistrato

L'approccio proposto al paragrafo 4.1, pur necessitando di un affinamento dello schema di calcolo per contenere entro valori accettabili la diffusione numerica e renderlo quindi più accurato ed efficace, consente di rappresentare in modo soddisfacente la dispersione del trasporto solido di fondo in un modello 1D multigranulare monostrato.

Avendo in mente i limiti sopra esposti, si è comunque ritenuto interessante verificarne la validità nell'ambito della modellazione matematica bidimensionale. A tale scopo anche nel modello multigranulare multistrato si è provveduto a frazionare il calcolo delle variazioni morfologiche del fondo. Quindi, adottato un intervallo temporale di calcolo che rendesse unitario il CFR_{mor} , sono state avviate le simulazioni. Si sono considerate le stesse ipotesi di lavoro riassunte in tabella 2.1 e in tabella 3.1, ma si riportano di seguito solo i risultati relativi alla prima.

Nello scegliere il Δt di calcolo si è richiamato il concetto di *active layer*, l'unico strato che partecipa attivamente ai processi di trasporto e all'interno del quale il sedimento è in movimento. Nota la schematizzazione del fondo (figura 4.9) e la griglia di calcolo (figura 4.10), vale dunque la seguente

relazione:

$$q_{bx} \cdot L \cdot \Delta t = A_e \cdot (1 - n) \Delta_a \quad (4.25)$$

da cui segue che:

$$\Delta t = \frac{A_e \cdot (1 - n) \Delta_a}{q_{bx} \cdot L} = \frac{L_x \cdot (1 - n) \Delta_a}{2 \cdot q_{bx}} = 0.9375 \text{ s} \quad (4.26)$$

decisamente superiore al valore di 0.1 s utilizzato in precedenza per la stessa serie di simulazioni.

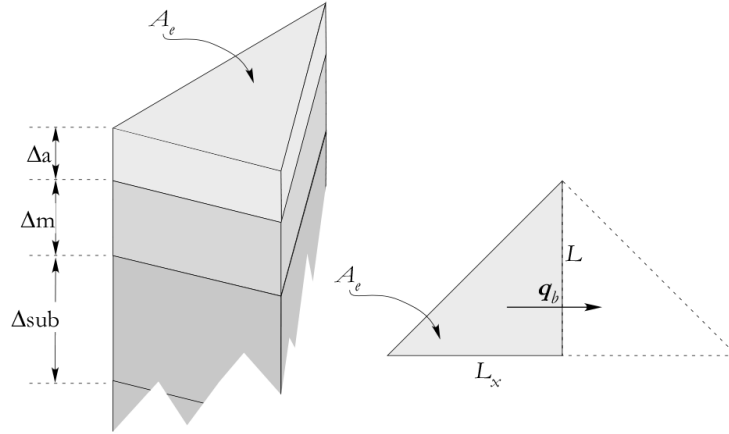


Figura 4.9: *Rappresentazione multistrato del fondo nel modello 2DEF.*

I risultati sono riportati in figura 4.11, dove è rappresentata la propagazione dei volumi di sedimento tracciante contenuti nell'*active layer* e sull'intera verticale in tre diverse ipotesi: in assenza di disturbo delle portate solide (caso *a*), con un disturbo $k_M = 0.5$ (caso *b*) e con un disturbo $k_M = 1.0$ (caso *c*).

L'adozione di un numero di Courant-Friedrichs-Lewy unitario ha consentito di abbattere la diffusione numerica anche nel 2DEF. Questo è particolarmente evidente nella soluzione senza diffusione ($k_M = 0.0$) in cui la massa di sedimento tracciante si propaga lungo la canaletta senza la minima dispersione. Per valori maggiori del coefficiente k_M interviene ovviamente la

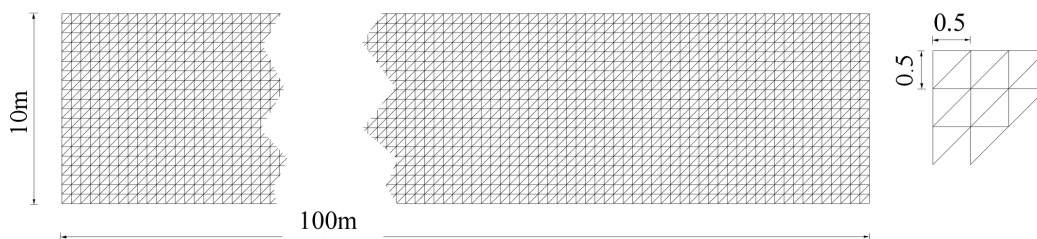


Figura 4.10: Griglia di calcolo utilizzata nell'analisi della diffusione con il modello morfodinamico 2D multigranulare multistrato con $CFL_{mor} = 1$.

dispersione fisica introdotta con il disturbo delle portate solide e, in base alle considerazioni già esposte al paragrafo precedente, la diffusione numerica generata dall'impossibilità di adottare un Δt che renda unitario il CFL_{mor} del flusso convettivo e di quello casuale.

Si nota inoltre che la soluzione senza diffusione si propaga con maggior celerità rispetto alle altre; nei primi istanti i fronti delle masse di sedimento tracciante sono sostanzialmente sincroni, ma poi si distanziano e il ritardo delle soluzioni con diffusione aumenta progressivamente col trascorrere del tempo e al crescere del coefficiente k_M . Ai maggiori valori di k_M corrisponde infatti una distribuzione delle portate solide casuali più ampia e, di conseguenza, un maggiore scambio di materiale tra l'*active layer* e gli strati sottostanti.

Questi risultati evidenziano la necessità di adottare una schematizzazione multistrato nell'ambito delle analisi idromorfologiche di tipo numerico. La variabilità delle portate, sia essa prodotta dalla componente diffusiva del trasporto solido di fondo o da condizioni di moto non stazionarie, genera infatti dei gradienti dei flussi solidi nel piano che si riflettono sui meccanismi di scambio verticale dei sedimenti. Tali processi non modificano la velocità media delle particelle ma interferiscono con la velocità di propagazione della massa di sedimento e non possono essere trascurati. Solo una schematizzazione multistrato è in grado di coglierli e rappresentarli.

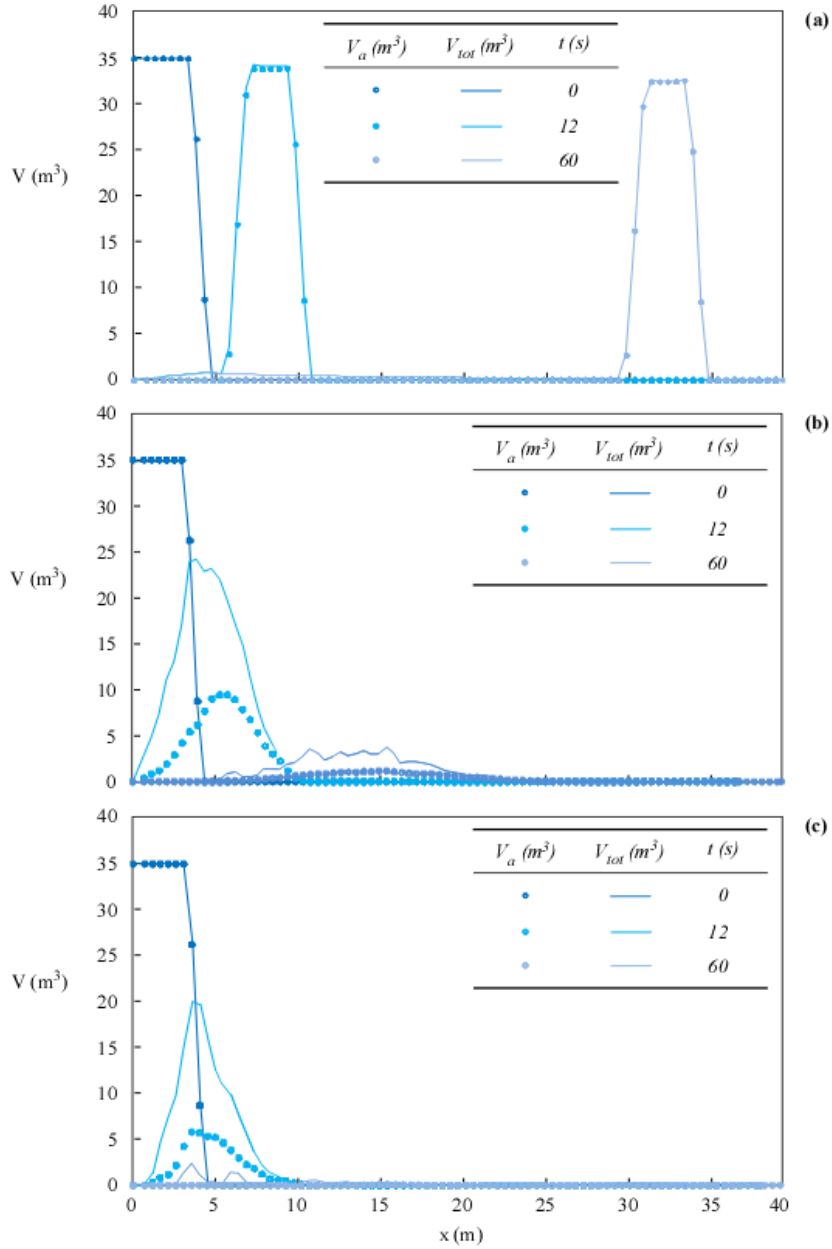


Figura 4.11: Volumi di sedimento tracciante contenuti nell'active layer V_a e sull'intera verticale V_{tot} : confronto, per i diversi istanti di tempo indicati, della soluzione senza diffusione (a), della soluzione con diffusione con $k_M = 0.5$ (b) e della soluzione con diffusione con $k_M = 1.0$ (c).

Capitolo 5

Conclusioni

La presente ricerca ha riguardato la modellazione matematica del trasporto solido di fondo, affrontando i problemi di stabilità legati all'implementazione dell'equazione di Exner e sviluppando una metodologia per la rappresentazione della componente diffusiva del trasporto solido di fondo.

Nel modello originario il modulo idrodinamico e di trasporto sono disaccoppiati e risolti in sequenza; nota l'idrodinamica il modulo di trasporto valuta le variazioni morfologiche del fondo, in corrispondenza ai nodi della griglia di calcolo, implementando l'equazione di Exner agli elementi finiti.

Il modello originario, 2DEF, fornisce soluzioni generalmente stabili e accurate, ma una prima fase di sperimentazioni numeriche ha messo in evidenza la presenza di alcune irregolarità. È stata perciò modificata l'implementazione dell'equazione di Exner, adottando un approccio ai volumi finiti che garantisce la conservazione della massa di sedimento e una valutazione dei flussi mediante *upwinding* che favorisce la stabilità della soluzione.

La nuova impostazione ha consentito di descrivere in modo accurato l'evoluzione di alcune semplici forme di fondo e di riproporre alcuni esperimenti numerici di Defina (2003), relativi a precedenti indagini di laboratorio di Lanzoni (2000), sul processo di formazione, propagazione e crescita delle barre di fondo alternate.

Le simulazioni effettuate con il modello modificato hanno confermato le precedenti conclusioni di Defina (2003), circa le modalità di formazione e propagazione delle barre alternate, e hanno mostrato un incremento di accuratezza nella stima della lunghezza, dell'altezza e della celerità di propagazione delle barre, ottenendo valori ben aderenti a quelli di Lanzoni (2000).

Nota la natura stocastica del trasporto solido di fondo, la diffusione che genera e l'importanza che riveste nelle valutazioni inerenti il bilancio dei sedimenti, sono state avviate una serie di indagini finalizzate alla sua rappresentazione nel modello.

Data la struttura del modello originario si è trovato conveniente introdurre la diffusione in modo indirettamente lagrangiano, creando un disturbo casuale delle portate solide; i flussi di portata sono cioè stati espressi come la combinazione lineare di un termine convettivo e di uno aleatorio. Come in un Random Walk l'intensità della componente diffusiva è venuta a dipendere dal reale coefficiente di diffusione, dall'intensità della portata solida media e dal passo di integrazione temporale.

Per verificare la correttezza della teoria esposta sono state avviate alcune sperimentazioni numeriche: assegnato il coefficiente di diffusione D e stimata la portata solida corrispondente, si sono determinati gli spostamenti del sedimento e si è valutata con la diffusione realmente introdotta nel problema. Preliminarmente, per ovviare alla difficoltà di tracciare gli spostamenti del sedimento, è stato sviluppato un approccio multigranulare. Contestualmente il fondo dell'alveo è stato rappresentato secondo uno schema multistrato, in cui solo lo strato superficiale denominato *active layer* partecipa attivamente ai processi di trasporto.

Le prime simulazioni hanno messo in evidenza l'attitudine del modello a tracciare gli spostamenti del sedimento, ma hanno anche rivelato la presenza di una certa quantità di diffusione numerica in grado di mascherare quella fisica. Per favorire l'interpretazione dei risultati sono state attuate alcune semplifi-

cazioni.

L'approccio multigranulare è stato riproposto all'interno di uno schema di calcolo 1D, risolto alle differenze finite, in cui la valutazione delle variazioni morfologiche del fondo è stata frazionata in due momenti successivi: il primo per la stima delle variazioni di quota indotte dai flussi convettivi, il secondo per la valutazione di quelle indotte dai flussi diffusivi.

Nota la natura diffusiva degli schemi di calcolo *upwind* sono state considerate diverse ipotesi di lavoro corrispondenti ad altrettanti valori del numero di Courant-Friedrichs-Lewy associato ai fenomeni di trasporto solido. Quindi, trovata conferma di quanto già noto circa l'importanza dello schema di calcolo impiegato per l'implementazione dell'equazione di Exner e sulla necessità di adottare i giusti accorgimenti per ridurre la diffusione numerica, è stata svolta un'ultima serie di sperimentazioni numeriche.

Assunto per il CFL_{mor} un valore unitario, le indagini numeriche hanno consentito di apprezzare l'efficacia dell'approccio introdotto per la rappresentazione della componente diffusiva del trasporto solido di fondo, pur evidenziano la presenza di una dispersione numerica residua da correggere con sistemi più idonei.

Le stesse ipotesi ($CFL_{mor} = 1$ e valutazione frazionata delle variazioni morfologiche del fondo) sono state successivamente riproposte nel modello 2D multigranulare multistrato, mettendo in evidenza l'importanza della rappresentazione multistrato nelle situazioni in cui vi sia variabilità delle portate. I gradienti dei flussi solidi generano infatti dei trasferimenti verticali di sedimento che contraddistinguono i processi di trasporto e che solo una schematizzazione di questo tipo è in grado di riprodurre.

Gli obiettivi raggiunti sono riassumibili nei seguenti punti: è stata reimplementata l'equazione di bilancio dei sedimenti di Exner all'interno di un modello morfodinamico pre-esistente; l'approccio ai volumi finiti adottato ha consentito di garantire la conservazione della massa e la valutazione dei flussi

mediante *upwinding* ne ha garantito la stabilità. Nello stesso modello, mediante disturbo delle portate solide, è stata efficacemente introdotta la componente diffusiva del trasporto solido di fondo. È stata testata e dimostrata la validità della schematizzazione multigranulare nel tracciamento dei grani ed è stata infine verificata l'importanza di una rappresentazione multistrato del fondo ai fini di una corretta descrizione dei fenomeni di trasporto.

Elenco dei simboli

- A area elementare rappresentativa (REA) [m^2].
- A_c parametro per la valutazione della curvatura delle linee di corrente.
- A_k generico elemento del dominio di calcolo Ω [m^2].
- a_r ampiezza delle irregolarità del terreno [m].
- c concentrazione del materiale solido per unità di superficie [m].
- c_b celerità di propagazione delle barre [m/h].
- CFL_{mor} Numero di Courant-Friedrichs-Lewy associato al trasporto solido.
- D coefficiente di diffusione teorico [m^2/s].
- D' coefficiente di diffusione sperimentale [m^2/s].
- d diametro medio dei sedimenti [mm].
- f_a frazione di sedimento contenuta nell'*active layer*.
- f_{ai} frazione di sedimento di classe i -esima contenuto nell'*active layer*.
- f_{mi} frazione di sedimento di classe i -esima contenuto nella *mixing layer*.
- f_{subi} frazione di sedimento di classe i -esima contenuto nella *sublayer*.
- g accelerazione di gravità [m/s^2].
- H altezza d'acqua equivalente [m].
- h quota della superficie libera [m].
- h_i quota della superficie libera nel nodo i -esimo [m].
- i_f pendenza del fondo.

- k_M coefficiente che definisce l'ampiezza delle oscillazioni di portata solida casuale.
- k_s coefficiente di resistenza al moto di Gauckler - Strickler [$m^{1/3}/s$].
- N, ne numero di nodi ed elementi nel dominio di calcolo.
- n porosità.
- \mathbf{n}_Γ normale al contorno Γ_A del generico elemento A_k .
- $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ portata liquida unitaria [m^2/s].
- $\mathbf{q}_b = (q_{bx}, q_{by})$ portata solida unitaria [m^2/s].
- q_{b0} intensità portata solida unitaria di Meyer-Peter e Müller [m^2/s].
- $\mathbf{q}_m = (q_{mx}, q_{my})$ componente convettiva portata solida unitaria [m^2/s].
- $\mathbf{q}'_m = (q'_{mx}, q'_{my})$ componente diffusiva portata solida unitaria [m^2/s].
- $[-q_{Mx}; +q_{Mx}]$ intervallo di variazione delle portate solide unitarie [m^2/s].
- R raggio di curvatura delle linee di corrente [m].
- R_{ij} sforzi di Reynolds (i e j denotano le direzioni coordinate x e y) [N/m^2].
- $rnd(\bullet)$ variabile casuale.
- \mathbf{s} direzione del flusso liquido.
- t tempo [s].
- $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ velocità del flusso liquido [m/s].
- $\mathbf{u}_f = (u_{fx}, u_{fy})$ velocità del flusso liquido al fondo [m/s].
- $\mathbf{u}_p = (u_{px}, u_{py})$ velocità delle particelle solide [m/s].
- V_a volume di tracciante contenuto nell'*active layer* [m^3].
- V_{tot} volume di tracciante contenuto sull'intera verticale [m^3].
- x_μ spostamento del centro di massa del sedimento tracciante [m].
- Y altezza d'acqua effettiva [m].
- z_b quota del fondo [m].

- Δ_a spessore dell'*active layer* [m].
- Δ_m spessore del *mixing layer* [m].
- Δ_{sub} spessore dei *sublayer* [m].
- Δt intervallo di integrazione temporale [s].
- Δx intervallo di integrazione spaziale [m].
- Δz variazione morfologica del fondo [m].
- Δz_i variazione morfologica del fondo riferita alla classe i -esima [m].
- η frazione di area A bagnata.
- Γ_A contorno del generico elemento A_k [m].
- λ lunghezza d'onda delle barre [m].
- κ coefficiente di diffusione di Furbish [m/s^2].
- Ω dominio di calcolo [m^2].
- θ parametro di Shields.
- ρ densità del fluido [kg/m^3].
- ρ_s densità del sedimento [kg/m^3].
- $\sigma_{x_p}^2$ varianza delle posizioni casuali [m^2].
- $\sigma_{\Delta x_p}^2$ varianza degli spostamenti casuali [m^2].
- $\sigma_{u_p}^2$ varianza delle variazioni di velocità casuale [m^2].
- σ_q^2 varianza delle variazioni di portata solida unitaria casuale [m^2].
- σ_{det}^2 varianza della distribuzione di tracciante (senza diffusione) [m^2].
- σ_{rnd}^2 varianza della distribuzione di tracciante (con diffusione) [m^2].
- τ_{bi}, τ_{si} sforzi tangenziali al fondo e in superficie nella direzione i -esima [N/m^2].

Elenco delle figure

2.1	<i>Rappresentazione della portata solida unitaria adimensionale q^* valutata: (a) con l'equazione (2.13) di Meyer-Peter e Müller (1948) per $\mu = 0.74$; (b) con l'equazione (2.13) di Meyer-Peter e Müller (1948) per $\mu = 1$; (c) con l'equazione (2.18) di Wong e Parker (2006); (d) con l'equazione (2.19) di Wong e Parker (2006).</i>	22
2.2	<i>Rappresentazione della griglia di calcolo (a), della batimetria (b) e del profilo longitudinale (c) di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stato inserito un dosso trasversale.</i>	25
2.3	<i>Rappresentazione della griglia di calcolo (a), della batimetria (b) e del profilo longitudinale (c) di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una prominenzza del fondo.</i>	25
2.4	<i>Rappresentazione della griglia di calcolo (a), della batimetria (b) e del profilo longitudinale (c) di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una trincea trasversale.</i>	26
2.5	<i>Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio agli elementi finiti, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stato inserito un dosso trasversale.</i>	28

2.6	<i>Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio agli elementi finiti, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una prominenza del fondo.</i>	28
2.7	<i>Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio agli elementi finiti, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una trincea trasversale.</i>	29
3.1	<i>Schema di calcolo monodimensionale per l'analisi delle variazioni morfologiche del fondo nei nodi del reticolo di calcolo (a) e sugli elementi (b).</i>	31
3.2	<i>Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio ai volumi finiti upwind, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stato inserito un dosso trasversale.</i>	35
3.3	<i>Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio ai volumi finiti upwind, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una prominenza del fondo.</i>	36
3.4	<i>Rappresentazione, mediante profilo longitudinale e quote nodali, dell'evoluzione del fondo valutata con l'approccio ai volumi finiti upwind, nel caso di una canaletta a sezione rettangolare nella quale è stata inserita una trincea trasversale.</i>	37
3.5	<i>Profilo longitudinale e rappresentazione con mappa a colori dell'altezza delle barre valutati alla 10^a ora dal modello originario (a) e da quello modificato (b) nell'ambito di alcuni esperimenti sul processo di formazione e crescita delle barre.</i>	38
4.1	<i>Schematizzazione del fondo secondo il modello multistrato.</i>	47

4.2	<i>Rappresentazione della propagazione e della dispersione della frazione f_a di sedimento tracciante contenuto nell'active layer nei casi (a) senza diffusione e (b) con diffusione.</i>	50
4.3	<i>Propagazione dei centri di massa della frazione di sedimento tracciante contenuta sull'intera verticale: confronto tra la soluzione senza diffusione e la soluzione con diffusione.</i>	52
4.4	<i>Confronto, per la soluzione senza diffusione (a) e quella con diffusione (b), dei volumi di sedimento tracciante contenuti nell'active layer V_a e sull'intera verticale V_{tot} nei diversi istanti di tempo indicati.</i>	53
4.5	<i>Varianza della frazione di sedimento tracciante contenuta sull'intera verticale: confronto tra la soluzione senza diffusione e la soluzione con diffusione.</i>	54
4.6	<i>Spostamenti dei centri di massa delle distribuzioni di traccianti contenute lungo l'intera verticale: confronto tra la soluzione senza diffusione ($x_{\mu-det}$) e quella con diffusione ($x_{\mu-rnd}$).</i>	55
4.7	<i>Varianza delle distribuzioni di traccianti contenute lungo l'intera verticale: confronto tra la soluzione senza diffusione (σ_{det}^2) e la soluzione con diffusione (σ_{rnd}^2).</i>	56
4.8	<i>Propagazione ed eventuale diffusione della frazione di sedimento tracciante nelle ipotesi: (a) soluzione senza diffusione e $CFL_{mor} = 1$; (b) soluzione senza diffusione e $CFL_{mor} = 0.8$; (c) soluzione senza diffusione e $CFL_{mor} = 0.6$; (d) soluzione con diffusione, $CFL_{mor} = 1$ e coefficiente della componente random $k_M = 0.5$; (e) soluzione con diffusione, $CFL_{mor} = 1$ e coefficiente della componente random $k_M = 1$.</i>	58
4.9	<i>Rappresentazione multistrato del fondo nel modello 2DEF.</i>	62

4.10	<i>Griglia di calcolo utilizzata nell'analisi della diffusione con il modello morfodinamico 2D multigranulare multistrato con $CFL_{mor} = 1$.</i>	63
4.11	<i> Volumi di sedimento tracciante contenuti nell'active layer V_a e sull'intera verticale V_{tot}: confronto, per i diversi istanti di tempo indicati, della soluzione senza diffusione (a), della soluzione con diffusione con $k_M = 0.5$ (b) e della soluzione con diffusione con $k_M = 1.0$ (c).</i>	64

Elenco delle tabelle

2.1	<i>Valore dei parametri idromorfologici adottati nell'analisi delle variazioni morfologiche del fondo in un canaletta a sezione rettangolare in cui sono stati alternativamente inseriti un dosso trasversale, una prominenza del fondo e una trincea trasversale.</i>	26
3.1	<i>Valore dei parametri idromorfologici adottati nell'analisi del processo di formazione e propagazione delle barre alternate.</i>	39
3.2	<i>Confronto dei valori, a regime, di lunghezza d'onda λ, altezza d'onda Δ e celerità di propagazione c_b delle barre.</i>	40
4.1	<i>Caratteristiche del materiale tracciante e costituente il fondo.</i>	51
4.2	<i>Valutazione dei coefficienti di diffusione teorico D e calcolato D' per diversi valori del CFL_{mor} e gradi di randomicità del processo di trasporto.</i>	60

Bibliografia

- Abbot, J., E., e Francis, J., R., D., 1975**, Civil Engineering Department, Imperial College, London, Saltation and suspension trajectories of solid grains in a water stream.
- Ancey, C., e Heyman, J., 2014a**, A microstructural approach to bed load transport: mean behaviour and fluctuations of particle transport rates, *Journal of Fluid Mechanics*, volume 744, pagine 129-168.
- Ancey, C., Bohorquez, P., e Bardou, E., 2014**, Sediment Transport in Mountain Rivers, *Ercoftac Bulletin*, volume 'September'.
- Ballio, F., Nikora, V., e Coleman, S., 2014**. On the definition of solid discharge in hydro-environment research and applications, *Journal of Hydraulic Research*, volume 52, n. 2, pagine 173-184.
- Bohorquez, P. e Ancey, C., 2015**, Stochastic-deterministic modeling of bed load transport in shallow water flow over erodible slope: Linear stability analysis and numerical simulation, *Advances in water resources*, volume 83, pagine 36-54.
- Carniello, L., Defina, A. e D'Alpaos, L., 2012**, Modeling sand-mud transport induced by tidal currents and wind waves in shallow microtidal basins: Application to the Venice Lagoon (Italy), *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, volume 102-103, pagine 105-115.

- Colombini, 2014, M.**, A decade's investigation of the stability of erodible stream beds, *Journal of Fluid Mechanics*, volume 756, pagine 1-4.
- Defina A., 2000**, Two-dimensional shallow flow equations for partially dry areas, *Water Resources Research*, volume 36, n. 11, pagine 3251-3264.
- Defina A., 2003**, Numerical experiments on bar growth, *Water Resources Research*, volume 39, n. 4, 1092.
- Defina A., e Bonetto, I., 1998**, Rappresentazione dei termini di accelerazione convettiva in un modello bidimensionale della propagazione di onde lunghe in acque basse, *Atti XXVI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche Catania*, 9 - 12 settembre 1998, volume I, pagine 53-64.
- Einstein, H.A., 1937**, The bedload transport as probability problem. *Mitteilung der Versuchsanstalt fuer Wasserbau an der Eidgenössischen Technischen Hochschule. Zürich*, 110.
- Fan, N., Zhong, D., Wu, B., Foufoula-Georgiou, E., e Guala, M., 2014**, A mechanic-stochastic formulation of bed load particle motions: From individual particles forces to the Fokker-Plank equation under low transport rates, *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, volume 119, pagine 464-482.
- Furbish, D.J., Haff, P.K., Roseberry, J., e Schmeeckle, M.W., 2012a**, A probabilistic description of the bed load sediment flux: 1. Theory, *Journal of Geophysical Research*, volume 117, F03031.
- Furbish, D. J., J. C. Roseberry, e M. W. Schmeeckle, 2012c**, A probabilistic description of the bed load sediment flux: 3. The particle velocity distribution and the diffusive flux, *Journal of Geophysical Research*, volume 117, F03033.

- Furbish, D. J., A. E. Ball, and M. W. Schmeeckle, 2012d**, A probabilistic description of the bed load sediment flux: 4. Fickian diffusion at low transport rates, *Journal of Geophysical Research*, volume 117, F03034.
- Hirano, M., 1971**, River bed degradation with armoring, *Transaction of Japanese Society of Civil Engineering*, volume 3, page 194-195.
- Hirano, M., 1972**, Studies on variation and equilibrium state of a river bed composed of nonuniform material, *Transaction of Japanese Society of Civil Engineering*, volume 4, page 128-129.
- Lanzoni S., 2000**, Experiments on bar formation in a straight flume 1. Uniform sediment, *Water Resources Research*, volume 36, n. 11, page 3337-3349.
- Lanzoni, S., e Tubino, M., 1999**, Grain sorting and bar instability, *Journal of Fluid Mechanics*, volume 393, page 149-174.
- Lesser, G.R., 2009**, An Approach to Medium-term Coastal Morphological Modelling, Ph.D. dissertation, The Delft University of Technology, Delft.
- Meyer-Peter, E., e Müller, R., 1948**, Formulas for bed-load transport, 3rd IAHR Congress, Proceedings, International Association for Hydraulic Structures Research IAHSR, page 39-64.
- Neuman, P.S., 1973**, Saturated-unsaturated seepage by finite elements, *Journal of Hydraulics Division ASCE*, Volume 99, HY. 12, page 2233-2250.
- Olesen, K.W., 1987**, Bed topography in shallow river bends, *Communications on Hydraulic Geotechnical Engineering*, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 87-1.

- Parker, G., Paola, C., e Leclair, 2000**, Probabilistic Exner sediment continuity equation for mixtures with no active layer, *Journal of Hydraulic Engineering*, volume 126, pagine 818-826.
- Roseberry, J., C., Schmeeckle, M., W., e Furbish, D., J., 2012b**, A probabilistic description of the bed load sediment flux: 2. Particle activity and motions, *Journal of Geophysical Research*, volume 117, F03032.
- Seizelles, G., Devauchelle, O., Lajeunesse, E., e Bak, M., 2013**, Cross-stream diffusion in bedload transport, *Physics of Fluids*, volume 26, 013302.
- Spasojevic, M., e Forrest M.H.Jr., 1994**, Three-Dimensional Numerical Simulation of Mobile-Bed Hydrodynamics, Final report.
- Stecca, G., Siviglia, A., e Blom, A., 2014**, Mathematical analysis of the Saint-Venant-Hirano model for mixed-sediment morphodynamics, volume 50, pagine 7563-7589.
- Stecca, G., Blom, A., e Siviglia, A., 2015**, An accurate numerical solution to the Saint-Venant-Hirano model for mixed-sediment morphodynamics in rivers, volume 93, pagine 39-61.
- Struiksmā, N., 1985**, Prediction of 2-D bed topography in rivers, deformation in curved alluvial channels, *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, volume 111, pagine 1169-1182.
- Struiksmā, N., e Crosato, A., 1989**, Analysis of 2-D bed topography model for rivers, *River Meandering Water Resources Monograph Series* edited by Ikeda, S. and Parker, G., AGU, Washington D.C., pagine 153-180.

- Talmon, A.M., Van Mierlo, M.C.L.M., e Struiksma, N., 1995,** Laboratory measurements of the direction of sediment transport on transverse alluvial-bed slopes, *Journal of Hydraulic Research*, volume 33, pagine 495-517.
- Volp, N.D., 2015,** A subgrid based approach for morphodynamics modeling, *Advances in Water Resources*, volume 93, pagine 105-117.
- Wong, M., E Parker, G., 2006,** Reanalysis and Correction of Bed-Load Relation of Meyer-Peter and Müller Using Their Own Database, *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, volume 132, n. 11.

Ringraziamenti

La presente tesi è il coronamento dei tre anni di attività svolta presso il Dipartimento ICEA dell'Università di Padova. Sono molto fortunata ad aver avuto l'opportunità di vivere questa esperienza, per la quale devo innanzitutto ringraziare l'ing. Francesco Baruffi e l'ing. Roberto Casarin dell'Autorità di bacino di Venezia, che hanno rispettivamente promosso e approvato l'idea di 'far studiare' un loro collaboratore, e l'avv. Cesare Lanna, che ha curato tutti i dettagli che hanno consentito di tradurre l'idea in realtà. Ma non posso ovviamente dimenticare i colleghi dell'Autorità di bacino, che in questi tre anni hanno dovuto accollarsi anche parte del mio lavoro.

Un sentito ringraziamento va al mio supervisore prof. Andrea Defina, per l'acume e la competenza che da sempre mi dimostra.

Rivolgo inoltre un particolare ringraziamento al dott. ing. Daniele P. Viero, la cui collaborazione si è rivelata fondamentale.

Desidero infine ringraziare il prof. Alessandro Valiani e la dott. ing. Nicoletta Tambroni per gli utili e interessanti commenti alla mia tesi.