Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Filosofia, Sociologia, Pedagogia, Psicologia Applicata

Scuola di dottorato in

Scienze Pedagogiche dell'Educazione e della Formazione

Ciclo XXVIII

LA COMPRENSIONE MATEMATICA COME COSTRUZIONE DI RACCONTI

UN DESIGN EXPERIMENT PER APPRENDERE LA SOTTRAZIONE ALLA SCUOLA DELL'INFANZIA

Direttore della Scuola : Ch.ma Prof. ssa Marina Santi

Supervisore : Prof. Paolo Sorzio

Dottorando : Silvia Mion

INDICE

ABSTRACT (ITALIANO)

La ricerca di dottorato indaga come i bambini elaborino strategie risolutive di fronte a situazioni numericamente problematiche, coinvolgenti il concetto di sottrazione, attraverso l'attivazione di modalità di apprendimento innovative secondo il modello del Design Experiment (Cobb & Yackel, 1996). Il quadro teorico integra prospettiva costruttivista e socio-culturale e definisce il concetto di sottrazione, dapprima come differenza e resto e poi all'interno di modelli di situazioni sottrattive (Nesher, Greeno & Riley, 1982; Hayloch & Cockburn, 2008) che sottendono diversi approcci al calcolo e alla strutturazione del processo risolutivo dell'operazione.

La proposta didattica parte da un'attenta analisi ed osservazione del contesto delle pratiche didattiche delle insegnanti e vede la ricercatrice coinvolta in prima persona come insegnante-esperta. Il breve intervento didattico coinvolge due gruppi di bambini di 5 anni. In ogni incontro è possibile individuare tre momenti. In una prima fase l'insegnante-ricercatore fa emergere una situazione problematica attraverso un racconto (Zazkis & Liljedahl. 2005) e con l'implementazione di materiali ausiliari (Skoumpourdi, 2012). Ricercatore e bambini sono poi coinvolti in una discussione matematica (Bartolini Bussi & Boni, 1995) volta a trovare la soluzione numerica a quanto rilevato. Da ultimo ogni bambino è invitato a fornire la propria concettualizzazione tramite la rappresentazione grafica (Van Oers, 1997; Burton, 2002) e la successiva descrizione a parole del disegno all'esperto.

L'analisi evidenzia come l'articolarsi della discussione matematica si sviluppi come un vero e proprio processo di comprensione matematica, in cui le ipotesi avanzate dai bambini, sia in termini di valori numerici che di strategie di calcolo, non si susseguono in maniera lineare, ma siano piuttosto inquadrabili all'interno di una teoria di apprendimento ricorsiva multiplanare (Pierie & Kieren, 1989) caratterizzata da frequenti momenti di ritorno a quanto già emerso in un'ottica di integrazione dei vari aspetti parzialmente compresi.

La ricerca si basa su una metodologia prevalentemente qualitativa, che si avvale di videoriprese e si presenta come un'indagine esplorativa che si apre ad una contestualizzazione allargata dei fattori che intervengono sull'apprendimento e quindi ad un'interpretazione di tipo metodologico-didattico, che sostenga le insegnanti nella progettazione di contesti di insegnamento innovativi e che agiscono nella zona di sviluppo prossimo (Vygotskij, 1962), per lo sviluppo delle competenze numeriche fin dalle prime fasi della scolarizzazione.

Parole chiave: didattica, matematica, scuola dell'infanzia, narrazione, design experiment

ABSTRACT (INGLESE)

The PhD research investigates how children elaborate solution strategies to numerical problematic situations, involving the concept of subtraction. The study is conducted as a design experiment (Yackel & Cobb, 1996) integrating the constructivist and the socio-cultural perspectives. The concept of subtraction is defined first as taking apart and taking from and then within differently structured situations (Nesher, Greeno & Riley, 1982; Hayloch & Cockburn, 2008), that can be connected with the same symbol of "minus".

The teaching intervention begins with careful analysis and observation of the teaching practices in the daily school context of two groups of 5-years-old-children. The researcher joints the classes as a teacher-expert. Each teaching session is made up of three stages. In a first phase the teacher-researcher introduces a problematic situation through a story (Zazkis & Liljedahl. 2005) and with the implementation of auxiliary materials (Skoumpourdi, 2012). Secondly, the researcher and the children participate in a mathematical discussion (Bartolini Bussi & Boni, 1995) in order to find the numerical solution of the problem. Finally, the children are invited to imagine and express individually their conceptualization drawing by (Van Oers, 1997; Burton, 2002) and verbalizing their own mathematical version of the story.

Mathematical reasoning develops as a recursive processes through different levels of understanding (Pirie & Kieren, 1989) where each level of sophistication is contained in the following one. Children can draw back to a previous level, in order to incorporate partially understood aspects and then move again to the outer level.

It has been chosen a qualitative research methodology, based on video-recordings.

The study is intended to offer an enlarged contextualization of the factors influencing the learning process and to a methodological-didactic perspective, supporting teachers in the design of innovative teaching contexts and acting in the zone of proximal development (Vygotsky, 1962), for the development of numerical competencies in pre-schools.

Key words: didactics, math, kindergarten, storytelling, design experiment

INTRODUZIONE

Il presente lavoro descrive il percorso di ricerca affrontato nel corso del dottorato in Scienze Pedagogiche dell'Educazione e della Formazione. Lo studio tratta la didattica della matematica alla scuola dell'infanzia e si colloca all'interno di una più ampia riflessione sul come si articolino i processi di insegnamento-apprendimento nei contesti scolastici. La prospettiva d'indagine, che ha guidato la strutturazione e l'interpretazione di tutto lo studio, si rifà a quello che Cobb e Yackel (1996) definiscono come approccio emergentista. Nella prospettiva cosiddetta emergentista si guarda all'apprendimento come ad un processo costruttivo che ha luogo partecipando e contribuendo ad una comunità di pratiche. La dimensione del costruttivismo psicologico e quella socioculturale vengono tra loro messe in relazione non come semplice integrazione dell'una con l'altra, ma in un'ottica riflessiva. Ciò significa che la conoscenza si genera a partire da un processo che si articola su tre livelli tra loro interagenti. In primo luogo è connessa alle caratteristiche e alle modalità con cui il soggetto che apprende viene reso protagonista delle attività didattiche. I significati elaborati in questo primo livello sono a loro volta negoziati all'interno della comunità a cui il soggetto appartiene, che costituisce il secondo livello. Il terzo livello infine si riferisce al contesto, inteso come organizzazione del sistema formativo e normativo di riferimento, che porta alla definizione di una certa pratica didattica nei termini e nei modi in cui viene proposta.

Nello specifico della ricerca si è scelto di proporre un intervento didattico innovativo, il cui focus pedagogico è rappresentato dall'uso della narrativa in matematica secondo una duplice valenza. Da un lato nella sua accezione più conosciuta di "contesto narrativo" inteso come situazione che introduce i concetti matematici astratti descrivendoli all'interno di storie (Zazkis, 2009). Il racconto diviene un vero e proprio strumento didattico che apre le porte all'immaginazione non solo perché permette di attingere a scenari fantastici o reali, ma soprattutto perché quanto appreso diventa significativo (Egan, 1999) e può essere connesso a conoscenze preesistenti. Dall'altro lato si guarda alla narrativa nella sua accezione più innovativa e cioè come strumento cognitivo (Roberts & Stylianides, 2012). La narrazione viene riconosciuta come una forma di organizzazione del pensiero: attraverso il raccontare si elaborano e conferiscono significati in un processo

dialettico in cui pensiero narrativo e paradigmatico (Bruner,1996) hanno ruoli complementari: il primo può essere visto come un modo per sostenere e arricchire il secondo (Sinclair et al, 2009).
Procedendo con la descrizione del lavoro, la scelta di focalizzarsi sulla scuola dell'infanzia deriva sia dall'esperienza pluriennale come insegnante in questo ordine di scuola sia dall'analisi della letteratura disponibile. Il valore a livello educativo e le specificità di questa scuola dal punto di vista metodologico-didattico sono stati al centro di numerosi approfondimenti teorici nella seconda metà del secolo scorso da parte di studiosi quali Frabboni, Malaguzzi, Bertolini e Scurati. Come descritto nel capitolo iniziale si è passati dal considerarla un ambiente a funzione prevalentemente assistenziale a riconoscerla come primo ordine di scuola. In questo nuovo quadro numerose sono state le esperienze, come Reggio Children, la scuola materna statale o la realtà delle scuole comunali, che hanno portato a definire a livello ministeriale un curricolo di studi proprio della scuola dell'infanzia, iniziato con i Programmi ed sviluppato dalle Indicazioni. Descrizione di questo viene fornita nel secondo capitolo. Attualmente la scuola dell'infanzia sta vivendo un'altra grande fase di cambiamento, dettata da ragioni di stampo maggiormente amministrativo-organizzativo che hanno messo in evidenza il bisogno di una rinnovata riflessione sui metodi e i contenuti educativo-didattici. La ricerca qui presentata si colloca proprio all'interno di una riflessione che guarda al profilo didattico della scuola dell'infanzia attuale. Nello specifico si è scelta la matematica come ambito disciplinare.
La matematica rappresenta da sempre un mio interesse personale che mi ha portata a svolgere la tesi di laurea in Scienze della Formazione Primaria sulla didattica della matematica nella scuola primaria. Al contempo è una delle discipline maggiormente temute dagli studenti nonché dagli insegnanti dei primi ordini di scuola. I risultati dei test nazionali, quali le prove Invalsi o OCSE Pisa, mostrano come il livello degli studenti Italiani sia molto spesso più basso della media raggiunta in test analoghi dagli studenti di altri paesi dell'Unione Europea[1]. Inoltre le ricerche condotte sulla formazione degli insegnanti di matematica fanno emergere come gli stessi insegnanti si trovino nella doppia difficoltà di capire quale matematica insegnare e come insegnarla (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2009). Di

[1] https://data.oecd.org/pisa/mathematics-performance-pisa.htm (ultimo accesso 24 luglio 2016, ore 19,00)

contro gli studi inerenti lo sviluppo dell'intelligenza numerica testimoniano l'esistenza nel bambino di competenze matematiche innate che sono in stretta connessione con le competenze apprese (Fuson, 1991). Ciò significa che fin da piccoli i bambini sono in grado di comprendere concetti matematici e che, affinché l'incontro con la matematica sia efficace, questo deve coinvolgere la parola e l'esperienza come modalità di apprendimento privilegiate e non ridursi alla scrittura delle cifre simboliche attorno ai 6 anni. Vi è quindi l'esigenza per l'insegnante di scuola dell'infanzia di dotarsi di un bagaglio di conoscenze diversificato con un adeguata padronanza dei contenuti, dei processi di apprendimento, dei principi pedagogici e didattici e da ultimo, ma non meno importante, di tutti questi aspetti che caratterizzano l'insegnamento disciplinare a bambini in età prescolare (Backman & Attorps, 2012).

I capitoli terzo e quarto presentano un approfondimento sui contenuti matematici affrontabili nella scuola dell'infanzia e sulla loro didattica. Per quanto concerne i contenuti viene definito il concetto di sottrazione, dapprima come differenza e resto e poi all'interno di modelli di situazioni sottrattive (Nesher, Greeno & Riley, 1982; Hayloch & Cockburn, 2008) che sottendono diversi approcci al calcolo e alla strutturazione del processo risolutivo dell'operazione. La sottrazione è stata scelta in quanto permette di passare dal contare ad una visione dinamica del numero, attraverso una sua manipolazione legata alle azioni del comporre e del decomporre e rende più precisa l'idea di "maggiore e minore". Tra le quattro operazioni, assieme alla divisione, viene considerata come difficile. Le difficoltà sono probabilmente legate all'essere inversa dell'addizione, al contare all'indietro e al determinare qualcosa che manca. Tuttavia, come dimostrato nello studio, non è necessario padroneggiare il calcolo delle addizioni per eseguire le prime sottrazioni (Millán Gasca, 2016).

L'approfondimento sulla didattica affronta prima un discorso più generale sull'importanza di creare un contesto laboratoriale per entrare poi nello specifico della didattica della matematica. Viene descritta l'implementazione di materiali didattici e contesti narrativi che permettono ai bambini di interagire con i principi matematici scoprendoli, applicandoli, descrivendoli e creando una base solida per la formalizzazione che avverrà a livelli di scolarizzazione più alti (Skemp, 1977). L'esperienza e la narrazione aiutano chi sta imparando a formare ed esprimere un'immagine "mentale" a cui riferirsi per la strutturazione dei concetti astratti. A

partire da questi capitoli di approfondimento teorico, viene introdotta la ricerca prima dal punto di vista metodologico e poi nella sua articolazione.
Lo studio indaga come i bambini elaborino strategie risolutive di fronte a situazioni numericamente problematiche, coinvolgenti il concetto di sottrazione, attraverso l'attivazione di modalità di apprendimento innovative secondo il modello del design experiment (Cobb & Yackel, 1996). Lo scopo esplorativo della ricerca ha suggerito la scelta di una metodologia qualitativa, esplicitata nel quinto capitolo. Nello specifico vengono definiti il design experiment, secondo le premesse che ne hanno portato la genesi e l'inquadratura socio-costruttivista conferitagli da Paul Cobb, e l'utilizzo della videoripresa come metodo d'indagine. Il grande potenziale della videoripresa è infatti quello di mostrare le esperienze educative così come si svolgono e di far sì che queste diventino fruibili anche in tempi e luoghi diversi.
Il sesto capitolo descrive i partecipanti allo studio e la struttura del design experiment. La proposta didattica, formulata a partire da un'attenta analisi ed osservazione del contesto delle pratiche didattiche delle insegnanti, ha visto la ricercatrice coinvolta in prima persona come insegnante-ricercatore. Il breve intervento didattico ha coinvolto due gruppi di bambini di 5 anni appartenenti a due diverse realtà scolastiche. Il primo gruppo era formato da 11 bambini della stessa sezione. Il secondo gruppo di bambini era invece composto da 17 bambini frequentanti due diverse sezioni della stessa scuola abituati a lavorare in modalità laboratoriale. Ogni incontro è stato organizzato in tre momenti. In una prima fase l'insegnante-ricercatore faceva emergere una situazione problematica attraverso un racconto (Zazkis & Liljedahl. 2005) e con l'implementazione di materiali ausiliari (Skoumpourdi, 2012). Ricercatore e bambini sono stati poi coinvolti in una discussione matematica (Bartolini Bussi & Boni, 1995) volta a trovare la soluzione numerica a quanto rilevato. Da ultimo ogni bambino è stato invitato a fornire la propria concettualizzazione tramite la rappresentazione grafica (Van Oers, 1997; Burton, 2002) e la successiva descrizione a parole del disegno all'esperto. Gli incontri dell'intervento didattico sono stati sei: cinque di attività e un sesto riepilogativo in cui l'insegnante-ricercatore ha ripercorso attraverso i materiali le storie-problema raccontate e risolte con i bambini dando loro la possibilità di scegliere o creare la propria attraverso il disegno. Prima e dopo l'intervento sono stati condotti una chiacchierata collettiva con i bambini, volta ad indagare le loro preconoscenze sui numeri e considerata come pre e post- test, e un colloquio

individuale con ciascun docente per esplorare le loro idee, le difficoltà e le strategie di insegnamento nel fare matematica con i bambini.

Per ogni incontro sono stati creati o impiegati materiali di diverse tipologie. La progettazione e la costruzione dei materiali è stata operata dopo un'attenta riflessione sui concetti matematici in relazione alla cosiddette situazioni sottrattive e al racconto ideato come situazione problema. La classificazione e l'analisi della tipologia di appartenenza è stata condotta con la supervisione della professoressa Chrysanthi Skoumpourdi. Durante il secondo anno corso del dottorato ho infatti trascorso un periodo di tre mesi come visiting student presso il Department of Sciences of Preschool Education and of Educational Planning, University of the Aegean, Greece, sotto la supervisione della prof.ssa Chrysanthi Skoumpourdi, esperta di *Teaching Mathematics at Early Childhood: Designing Educational Material*.

Il settimo e l'ottavo capitolo sono dedicati all'analisi dell'intervento. Nel settimo, a partire dalle videoregistrazioni, si è chiarita l'impostazione pedagogico-didattica, delineato l'articolarsi della discussione e descritto il processo di comprensione matematica. L'analisi degli incontri è stata condotta separatamente per i due gruppi delineando l'evoluzione delle dinamiche del discorso. I dialoghi sono stati ricostruiti guardando alle dimensioni dello sviluppo narrativo e della comprensione dei concetti matematici coinvolti. I livelli narrativi della concettualizzazione matematica sono stati analizzati secondo il modello di Pirie e Kieren (1989), presentato nel terzo capitolo. L'ottavo capitolo invece viene presentata la descrizione dei disegni prodotti dai bambini nel corso degli incontri. La rappresentazione grafica ha dato ai bambini l'opportunità di rielaborare individualmente quanto emerso dalla discussione in gruppo e di formalizzare l'esperienza raccontando la propria storia matematica.

Nel nono ed ultimo capitolo vengono delineati i limiti del percorso di ricerca e tracciate le conclusioni, che aprono ad una contestualizzazione allargata dei fattori che intervengono sull'apprendimento e quindi ad un'interpretazione di tipo metodologico-didattico, che sostenga le insegnanti nella progettazione di contesti di insegnamento innovativi e che agiscono nella zona di sviluppo prossimo (Vygotskij, 1962), per lo sviluppo delle competenze numeriche fin dalle prime fasi della scolarizzazione.

1. L'INFANZIA E LA SUA SCUOLA IN ITALIA

1.1 La scoperta dell'infanzia

A partire dalla scoperta dell'età dell'infanzia, intesa da Comenio come stagione pedagogicamente specifica avente un ruolo chiave nella formazione dell'uomo, si è sempre più affermato ed espresso il diritto/dovere all'educazione, che ha visto l'aumento delle proposte formali a scapito o integrazione di quelle di natura materna o familiare (Bobbio, 2006).

All'interno di questo scenario, l'esperienza italiana si connota fin da subito per la ricchezza e la qualità dei contributi. In linea con l'evoluzione del pensiero pedagogico globale, si è verificato un primo instaurarsi di veri e propri metodi, basti pensare alla scuola delle sorelle Agazzi o ai materiali di Maria Montessori, che si è andato pian piano affievolendo lasciando spazio ad approcci che hanno puntato alla piena valorizzazione del potenziale evolutivo infantile (Bobbio, 2006). Queste realtà trovano però un riconoscimento istituzionale solo dal diciottesimo secolo. Prima sono infatti considerate enti assistenzialistici promossi dagli ordini religiosi, dai privati o dai Comuni. Nel regio decreto n. 1054 del 6 maggio 1923, art. 57, viene menzionata l'esistenza dei giardini d'infanzia o case dei bambini, che devono essere annesse agli istituti magistrali, ma la gestione non è del tutto statale. Bisogna attendere fino al 1968, quando con la legge 444 viene istituita la scuola materna, con organizzazione statale e con la pubblicazione degli Orientamenti per scuola materna (1969) che la uniformano a livello nazionale.

1.2 Bruno Ciari e il Movimento di Cooperazione Educativa

Tra i nomi di coloro che hanno portato l'attenzione all'infanzia e ai bisogni educativi specifici di questa età vi è quello di Bruno Ciari. Il pedagogista, nato in Toscana ma insegnante a Bologna, cambia l'immagine del bambino figlio-scolaro in quella dei bambini come soggetti sociali (Frabboni, 2008). Egli fa emergere l'inadeguatezza della famiglia nella formazione del bambino in quanto questa è primariamente impegnata su altro e non può organizzare i propri spazi, materiali, orari e attività in funzione esclusiva del bambino. È il bambino che in un certo modo entra a far parte della famiglia. Coglie il ruolo fondamentale che la scuola dell'infanzia può avere in questo senso e che ha nel creare una base culturale comune che prevenga dislivello e selezione intellettuali e culturali. Ciari stimola la società a promuovere lo sviluppo armonico del bambino attraverso la scuola. Il suo modello didattico si basa su due presupposti: la cooperazione e la ricerca. In riferimento al primo è allievo di Codignola e assieme ad altri maestri in Italia, quali M. Lodi, A. Manzi, A. Bernardini, e all'estero (P. Le Bohec), porta avanti l'idea di una cooperazione solidale che diviene crescita e integrazione sociale. Non si tratta solo dell'introduzione e dell'utilizzazione di alcune tecniche di base, ma di dare vita a un movimento di ricerca che pone al centro del processo educativo i soggetti, per costruire le condizioni di un'educazione popolare, in quanto garanzia di rinnovamento civile e democratico. Nasce così nel 1951 il *Movimento di Cooperazione Educativa* sulla scia del pensiero pedagogico e sociale di Célestin ed Elise Freinet. Per quanto concerne la ricerca Ciari è convinto che essa sia l'unico dispositivo di conoscenza in grado di allenare l'intelligenza e la creatività. Se un soggetto non viene adeguatamente stimolato entro i sei anni di età, difficilmente raggiungerà poi quei risultati che le sue dotazioni naturali gli avrebbero concesso di raggiungere (Catarsi, 1994). L'educatrice, che nell'ideale di Ciari è una professionista pedagogica attenta alla didattica, deve proporre attività aperte e flessibili, ma al contempo che favoriscano la maturazione intellettuale e creativa dei bambini. Viene valorizzata la dimensione cognitiva che permette al bambino di conoscere e comprendere il mondo del quale pian piano entra a far parte. La visione di Ciari non si pone come alternativa, ma integra l'immagine fatta esclusivamente di gesti spontanei, intuizione, affetti e bisogni fisiologici che hanno caratterizzato fino ad ora il bambino ed i servizi a lui dedicati. La sua proposta non confluisce in un "metodo" fisso e statico, ma fa una sintesi degli aspetti validi elaborati da pensieri pedagogici precedenti, quali quelli agazziano e montessoriano. Riconosce, ad esempio, come alcune operazioni realizzate con i materiali strutturati possano compiersi in situazioni della realtà con materiali comuni quali conchiglie o sassi. Le opportunità didattiche offerte dall'ambiente sociale non devono essere lasciate al caso: ci devono essere delle linee programmatiche che definiscono la progettualità didattica. Con Ciari emergono l'idea e l'importanza del curriculo, anche se non identificato con questo termine. L'impegno progettuale non solo garantisce il ruolo educativo della scuola dell'infanzia nello sviluppo del bambino, ma è prerogativa dell'adulto che si fa interprete degli stili di apprendimento del bambino e rappresenta per lui un modello. Al lavoro nelle sezioni omogenee Ciari affianca quello per sezioni aperte in cui i bambini fanno esperienze diversificate, sono liberi di unirsi a gruppi che lavorano ad un livello consono al proprio, ma soprattutto sviluppano la socialità: familiarizzano con altri bambini e trovano possibilità di confronto anche con gli altri adulti che popolano la scuola. Quello che Ciari sottolinea è l'importanza per il bambino di far crescere i rapporti sociali e di vedere in questo un esempio nell'adulto. La scuola in quest'ottica si apre internamente sostituendo all'educatore che lavora in modo individuale in una sezione chiusa, quello del professionista che collabora con i colleghi e gli altri membri della scuola pianificando un percorso didattico stimolante e metodologicamente strutturato. Al contempo si apre verso l'esterno riconoscendo l'insufficienza della famiglia nel costituire l'unico centro formativo del bambino e collaborando con essa in un rapporto dialettico. Scuola e famiglia collaborano in un impegno che rende la "gestione sociale" della scuola partecipata e animata da assemblee e riunioni, ma anche calata nel territorio con il coinvolgimento degli enti locali. Lo scopo è quello di rispondere ai bisogni reali delle singole personalità dei bambini (Catarsi, 1994), valorizzando la dimensione intellettuale e mantenendo un approccio ludico. Ecco quindi che Ciari sottolinea l'importanza della formazione degli insegnanti, fondamentale per un'adeguata all'infanzia e la costruzione di una nuova scuola in un'ottica di continuità educativa con le successive scuole elementare e media.

1.3 LA NASCITA DELLA SCUOLA MATERNA STATALE

L'istituzione della scuola dell'infanzia statale trova ragione nei cambiamenti sociali che hanno interessato gli anni sessanta e con la sempre maggiore autonomia raggiunta dalle donne. L'esigenza è quella di garantire il pluralismo culturale che contraddistingue uno stato laico ed un servizio educativo nazionale. La legge che ne sancisce la nascita è il frutto di un lungo dibattito che ha visto schierati sui due fronti il mondo cattolico e quello laico. Il primo osteggia la nuova scuola materna, perché vede minati gli interessi delle istituzioni confessionali che fino a quel momento avevano provveduto in prima linea all'educazione dei piccoli. Il compromesso legislativo fa si che la metà dei posti d'insegnamento vengano garantiti alle diplomate nella scuola magistrale. In questo modo si cerca di mantenere i privilegi degli enti gestori di tali scuole, che nella maggior parte dei casi erano di orientamento confessionale e che soprattutto dipendevano economicamente in gran misura dall'amministrazione di tali scuole di formazione (Catarsi, 1990). In linea con questa politica di adeguamento la prima forma della scuola materna statale appare incerta. Definita tra il supportare lo sviluppo della personalità del bambino, l'integrare l'educazione familiare e l'essere propedeutica alla frequenza della successiva scuola dell'obbligo, non denota una propria identità scolastica. Ad ulteriore conferma vi è il carattere assistenzialistico e di custodia del personale scolastico, l'esclusività femminile nel rivestire tale ruolo e il mancato coinvolgimento delle famiglie in qualsiasi attività.

Sul fronte innovativo però, la laicità della proposta porta con sé anche degli aspetti di cambiamento. Il numero dei bambini ammesso nelle sezioni viene esplicitamente stabilito tra i 15 e i 30 iscritti, parte delle insegnanti proviene dagli Istituti Magistrali, che offrono un'ampia e solida preparazione culturale e, anche se in maniera facoltativa, tutte le educatrici vengono invitate a frequentare periodici corsi di aggiornamento "istituiti e gestiti dal Ministero della pubblica istruzione". Tuttavia il mancato coordinamento tra le diverse istituzioni scolastiche appare come uno dei più grossi limiti del proposta educativa di quel periodo.

1.4 Le riviste

Il tipo di approccio che si va diffondendo negli anni settanta all'interno delle scuole materne accoglie una linea di pensiero di matrice costruttivista che considera i bambini protagonisti della costruzione del proprio sapere attraverso attività esperienziali e laboratoriali. Si va sempre più delineandosi un preciso progetto pedagogico che porta allo sviluppo di un'editoria specifica. Nel 1973 esce il primo numero della rivista *Infanzia.* Fondata da Piero Bertolini propone una scuola dell'infanzia alternativa che si oppone cioè a quella di tradizione nostrana. L'intento è quello di combattere le situazioni di svantaggio culturale e offrire a tutti i bambini le medesime opportunità culturali. I suggerimenti che la rivista propone vogliono dare alla scuola una specificità educativa che la contraddistingue dalla famiglie e si rivolge al bambino eliminando il rapporto gerarchico con l'adulto e promuovendo la socializzazione multidimensionale.

Nel 1976 prende vita un'altra rivista: *Zerosei*. Anche se non fu esplicitato fin da subito l'autore della rivista fu Loris Malaguzzi. L'impegno promosso già a partire dai

primi numeri è quello di coinvolgere non solo gli insegnanti, ma tutti coloro che si interessano di bambini uscendo dalla rigidità dei testi didattici e aprendo ad una cultura dell'infanzia nel nostro paese.
Le due riviste di orientamento laico si propongono come alternativa alla storica *Scuola Materna* (1913), esemplare praticamente unico fino a questi agl'anni, che aveva da sempre espresso le idee degli studiosi cattolici, ma soprattutto sono l'espressione ben più ampia di una grande esperienza: il diffondersi delle scuole dell'infanzia comunali.

1.5 LE SCUOLE DELL'INFANZIA COMUNALI

Nel secondo dopo guerra si vanno diffondendo esperienze educative che i grandi e medi centri urbani conducono in modo quasi autonomo e che sono destinate a diventare modelli di eccellenza a livello nazionale e non solo. Nascono le scuole dell'infanzia comunali: esprimono l'investimento degli enti locali di rispondere alle esigenze dei propri cittadini, probabilmente nell'ottica di accogliere il consenso dei ceti lavoratori che si dimostrano bisognosi in tal senso. La risposta che queste scuole offrono è ben diversa da quella delle scuole cattoliche. L'impianto laico e progressista mira a far rinascere la popolazione prostata dall'esperienza bellica. Sono le famiglie e la più ampia comunità a partecipare al processo educativo tanto che si parla di "gestione sociale". L'organizzazione non è più affidata ad un organo amministrativo che la cala dall'alto, ma coinvolge in modo più o meno diretto i vari attori impegnati nell'educazione del bambino. Agli insegnanti viene riconosciuto un ruolo di professionalità in cui sono chiamati a formarsi ed aggiornarsi; tenere i rapporti con le famiglie; progettare, realizzare e documentare attività didattiche; collaborare tra loro e con gli altri membri coinvolti nel processo educativo. Si definiscono i coordinamenti pedagogici che non riguardano solo le singole scuole, ma che si allargano sul territorio e trovano nella figura del coordinatore pedagogico il proprio elemento di direzione. Tale figura, che ben si differenzia dal direttore didattico, oggi dirigente scolastico, ha il compito di riconoscere e far mantenere la linea di azione comune, diffondendo le scelte didattiche e strategiche rivelatesi particolarmente efficaci. Viene riconosciuta la centralità della progettazione che abbandona gli stereotipi pedagogici tradizionali e di senso comune e trova nella ricerca accademica i propri fondamenti.

Per fare alcuni esempi vi è il noto modello reggiano che nasce attorno alle università dell'Emilia Romagna e ai nomi di Loris Malaguzzi e Bruno Ciari, ma anche il modello toscano che porta con sé la storia dell'Istituto degli Innocenti e i nomi di Catarsi e Fortunati, l'esperienza lombarda che testimonia la ricerca dell'ateneo milanese e di quello della vicina università di Pavia ed infine la realtà padovana che rappresenta un esempio quasi unico di eccellenza in quella che può essere considerata la regione bianca per antonomasia. Le scuole dell'infanzia comunali sono legate alle tradizioni pedagogiche in un rapporto innovativo tra università e scuola. Non è un travaso di conoscenze dall'università alle scuole né un applicazione operativa di teorie e pratiche elaborate da studiosi autorevoli (Franceschini & Borin, 2014). È uno scambio che possiamo definire alla pari: l'università entra nelle scuole per comprenderla e fare ricerca con gli insegnanti, mentre le scuole hanno l'opportunità di migliorare i propri modelli organizzativi, pedagogici e didattici.

1.6 Loris Malaguzzi e Reggio Children

Nel 1990 la rivista americana *Newsweek* nomina la scuola "Diana" di Reggio Emilia la scuola più bella del mondo. Con questo titolo da ancella del sistema educativo italiano, la scuola dell'infanzia passa ad esserne la regina e mette in evidenza lo scarto qualitativo esistente con i livelli successivi. In particolar modo quello che viene ad essere premiato è un vero e proprio modello di scuola ad opera di Loris Malaguzzi. Il pedagogista e direttore delle scuole della prima e seconda infanzia di Reggio Emilia, che Frabboni (1998) considera il padre degli Orientamenti del '91, crea nel proprio territorio un nuovo indirizzo di scuola caratterizzata da

- una cultura dell'infanzia diffusa e sparsa tra famiglie e enti locali;
- una fitta rete di servizi socioeducativi dedicati all'infanzia;
- centri territoriali di studio e documentazione

che tutt'oggi permane come punto di riferimento mondiale con il nome di *Reggio Children Approach*. Malaguzzi si rivolge a bambini e bambine lontani da quelli delle pubblicità, esce dall'omologazione promulgata dalle multinazionali e pone il centro di interesse nella creatività. Il bambino che frequenta la scuola dell'infanzia è ricco di interessi, attitudini, emozioni e fantasia e a scuola ha l'opportunità di esprimerli, sperimentarli, scoprirli, Malaguzzi ribalta l'organizzazione scolastica facendo di quelle che sono le attività da fare nei momenti morti o di pausa, il punto focale della sua proposta didattica. Si stabiliscono degli obiettivi finali, ma si procede per pianificazioni successive, riconsiderazioni di idee e degli obiettivi di comunicazione. Al bambino non vengono imposte delle strategie o delle metodologie per acquisire conoscenza: esso è libero di scegliere il percorso che più si confà alle proprie esigenze di apprendimento, coadiuvato dagli educatori nel suo svolgimento. Per Malaguzzi infatti un bambino apprende non necessariamente da quanto gli viene insegnato, ma dall'impiego delle risorse di cui è dotato. In quest'ottica l'apprendimento è un processo "auto-costruttivo" generato attivamente da chi mette in gioco se stesso e le sue capacità. Se il bambino è costruttore della propria conoscenza, l'insegnante gli è a fianco e impara con lui nei suoi processi di scoperta e apprendimento, incoraggiando scambi, riflessioni e considerazioni. Nell'approccio reggiano il bambino non apprende in modo isolato: è in continua interazione con gli oggetti, con l'ambiente, con gli adulti e con gli altri bambini. Si organizzano molti momenti di lavoro in piccolo gruppo soprattutto nello spazio dell'intersezione. Anche l'ambiente in cui si fa scuola è infatti parte fondamentale di questo tipo di approccio. Nella descrizione fornita da Malaguzzi si parte da una sala d'ingresso, che informa e offre documentazione riguardo alla struttura e alle attività della scuola; da qui si ha accesso alla sala da pranzo, con la cucina a vista e alla “piazza” centrale, che è il principale luogo per giochi, apprendimento, scambi e attività, le quali continuano anche all'interno delle aule. Le aule sono in una posizione di connessione, ma non presenti immediatamente alla vista, con la piazza e vengono utilizzate per le attività in gruppi medi e piccoli; al loro interno sono ulteriormente suddivise, per offrire ai bambini uno spazio dove sono presenti gli insegnanti ed uno dove possano stare da soli. Oltre alle aula è presente una cucina interna dove il bambino trova possibilità di stimolo ed espressione in questo senso. Luogo chiave delle scuole dell’infanzia reggiane è l’*atelier*, in cui i bambini sotto la guida dell’atelierista sperimentano i diversi linguaggi grafico-pittorici, plastico-manipolativi, motori, musicali, teatrali, iconici facendo cadere il primato del modello formativo verbalistico e libresco della scuola tradizionale.

1.7 La svolta della scuola materna

Con il passare del tempo e il fiorire delle diversificate esperienze viene elaborandosi un progetto pedagogico preciso per la scuola dell’infanzia, che trova riconoscimento istituzionale solo con la legge 463 del 1978. In tale direttiva viene ampliato l’orario di apertura della scuola: dalle 7 ore previste per tutte le sedi indifferentemente ad tempo variabile da un minimo di 8 ad un massimo di 10 con la possibilità di apertura alla sola mattina a seconda delle esigenze territoriali. Viene introdotta la seconda insegnante di sezione e l’orario settimanale di servizio viene portato da 20 a 30 ore. Nel luglio del 1980 un’ulteriore legge equipara finalmente gli insegnanti di scuola materna con quelli della scuola elementare, conferendo loro lo stesso stipendio. Nell’ambito dei riconoscimenti che la scuola materna ottiene negli anni Ottanta vi è anche quello dell’importanza educativa che quest’ordine di scuola ha per la formazione dei bambini e che accoglie i risultati che le ricerche in ambito psicologico promuovevano sin dalla seconda metà degli anni sessanta. Vi è anche la proposta di rendere la frequenza all’ultimo anno obbligatoria. Tale iniziativa non andò mai a buon fine. Tuttavia si registra un notevole incremento dei bambini iscritti con percentuali che agli inizi degli anni Novanta superano il 90% segno che si sta diffondendo una certa consapevolezza delle finalità educative della scuola dell’infanzia. Due dati sono degni di nota. La percentuale di bambini che frequentano la scuola dell’infanzia nelle regioni del nord è superiore a quella del sud Italia, ma al sud il numero delle scuole statali è notevolmente superiore che al

nord. Le due informazioni apparentemente discordanti testimoniano invece come il sud viva in una situazione di reale svantaggio rispetto al nord Italia. Mentre al sud vi è solo l'intervento statale, che mette a disposizione il personale, i locali e i servizi che garantiscono il diritto allo studio quali mensa e trasporti e lascia che siano i comuni, in notevoli difficoltà finanziarie, a provvedere al resto, al nord vi sono enti privati che creano un'offerta formativa alternativa o integrativa. Non solo tra gli enti privati devono essere annoverate le scuole comunali, che rappresentano esperienze di eccellenza, ma anche l'aiuto che tali enti, per lo più di stampo religioso, hanno dal contributo finanziario statale e da servizi collaterali che accolgono i bisogni delle famiglie come trasporti e mense. Le scuole inoltre arricchiscono la qualità della proposta educativa attraverso la collaborazione con enti locali, che al nord animano un certo fervore culturale e che invece appaiono praticamente assenti al sud.
Questo contesto di sviluppo porta alla consapevolezza delle finalità educative della scuola dell'infanzia che avvia riflessioni pedagogiche su temi quali la continuità educativa con gli altri ordini, la formazione universitaria anche per i maestri e la revisione degli Orientamenti.

1.8 La scuola degli Orientamenti

Gli Orientamenti del '91 raccolgono e convertono in testo legislativo le teorie e le pratiche dell'educazione prescolare che contraddistinguono il ventennio che li precede (Frabboni, 2008). Con l'adozione di questo testo, la scuola materna viene riconosciuta come scuola a tutti gli effetti e dispone di un solido "guardaroba" teorico-metodologico che le permette di formalizzare e legittimare le esperienze quotidiane che i bambini vivono al suo interno. Vengono riconosciute le caratteristiche dei bambini che apprendono e le ragioni degli oggetti dell'apprendimento. Si crea unitarietà tra la teoria pedagogica e la pratica didattica. Da un lato gli assunti teorici trovano attuazione nelle azioni delle insegnanti e dall'altro le attività didattiche rispondono a modelli organizzativi di validità scientifica. La chiave interpretativa non è però quella della fissità, ma quella della flessibilità che adotta uno stile problematico, congruente con i bisogni reali dei bambini e del contesto sociale e pluralistica che prende le distanze dai modelli operativi mutuati da univoche teorie sull'apprendimento. Il nuovo indirizzo che la

scuola dell'infanzia assume è quello di essere aperta e sperimentale. Si esce dalla sezione didattica in un'ampia e continua interazione con l'ambiente esterno: le risorse presenti sul territorio vengono usate didatticamente creando delle aule didattiche decentrate. Gli spazi vengono aperti anche all'interno della scuola con una gestione modulare: le aule vengono organizzate in centri di interesse o angoli didattici e al lavoro in classe si affiancano attività di intersezione multitematiche che danno vita ad una nuova progettualità. Alla continuità orizzontale, che arricchisce l'offerta formativa, si affianca quella verticale che porta la scuola dell'infanzia a porsi in ottica longitudinale verso il nido e la scuola primaria. Vengono così definiti i presupposti pedagogici affinché la scuola dell'infanzia trovi la sua specifica identità nel percorso evolutivo infantile. C'è complementarietà verso l'esterno e, al contempo, internamente. L'insegnante in questo nuovo contesto non opera più in modo individuale, ma condivide momenti di collegialità possibili solo a partire da un clima di lavoro costantemente arricchito da scambi, confronti e verifiche. Mettendo in gioco le varie professionalità, si guarda all'infanzia conoscendola e progettandola in un curricolo che non è lasciato al caso, ma validato dall'indagine pedagogica. Si esce dai metodi sequenziali per fare largo a ricerca e sperimentazione. Si crea così un vero e proprio dialogo tra il riconoscere l'impegno cognitivo e il lasciare spazio alla fantasia e alla creatività. Il gioco assume una nuova veste. Non più come solo momento ricreativo, ma anche come forma espressiva ed esplorativa. Diventa un vero e proprio medium che permette al bambino di esperire, attivando sia relazioni con il mondo adulto o tra pari sia in forma di autoeducazione (Frabboni, 2008).
Gli Orientamenti, considerati il miglior "programma nazionale" sia per i contenuti sia per il metodo che contrassegna la loro elaborazione (Fiorin, 2004), fanno definitivamente uscire dall'immagine della scuola d'infanzia come ambiente assistenzialistico in favore di quella di agenzia formativa che coinvolge la famiglia, è socialmente partecipata e, soprattutto, riscopre l'infanzia e il bambino come soggetto di diritti.

1.9 La scuola dell'infanzia a cavallo dei due secoli

Gli Orientamenti del '91 danno un notevole impulso al processo evolutivo della scuola dell'infanzia conferendole oltra che qualità, organizzazione. L'emanazione del testo unita alla formazione fatta a tappetto in tutta la nazione sia del corpo dirigente che di quello docente e l'ampia produzione pedagogica portano questo livello di scuola ad acquisire una nuova dignità sul piano culturale, formativo, sociale ed istituzionale (Zammataro, 2004). L'attività didattica che caratterizza la scuola dell'infanzia a cavallo dei due secoli ha una fisionomia altamente scientifica e coinvolge spazi, attività e metodologie. Gli edifici che accolgono i bambini sono rinnovati negli spazi e mostrano piccole accortezze che li rendono specifici per l'età. Alle aule scolastiche vengono aggiunti nuovi spazi che ospitano laboratori di psicomotricità, travestimento, conversazione e ascolto… La routine quotidiana, caposaldo formativo, è vivacizzata e alimentata da vari esperti che propongono attività alternative. Il gioco non è solo un momento di svago: diventa modalità ludica che permette in modo privilegiato di introdurre i bambini ai sistemi simbolico-culturali del mondo. Il panorama che caratterizzata la proposta formativa per l'infanzia tre-sei è ricco e variegato. A fianco alle scuole statali e comunali, sorgono scuole private gestite da enti che possono offrire percorsi alternativi quali quelli elargiti in una lingua straniera, e scuole paritarie. Quest'ultime con la legge 62 del 10 marzo 2000 vengono fatte rientrare nell'alveo della scuola pubblica anche se non vengono amministrate dallo stato. Le insegnanti delle scuole paritarie hanno totale libertà circa materie e insegnanti. Se si attengano ai programmi ministeriali i titoli che rilasciano sono equivalenti a quelli della scuola statale. Diventano così paritarie anche le scuole dell'infanzia cattoliche che, riunitesi nella FISM (Federazione Italiana Scuole Materne) cercano di darsi un'identità differenziandosi dalle scuole statali e comunali. Ne consegue che l'offerta formativa elargita segue gli Orientamenti, ma ha come sfondo i valori religiosi del cattolicesimo; direzione ed organizzazione sono strettamente legate e intersecate con quelle della parrocchia a cui fanno riferimento.

1.10 A scuola negli anni Duemila

Agli inizi dell'attuale secolo si è fatto sempre più necessario un riordino del sistema d'istruzione del nostro paese. Questo è dovuto non ad una cattiva qualità della scuola italiana, ma all'esigenza di dare un assetto unitario alla varie norme entrate in vigore sul finire del secolo scorso. Vi è anche una ricerca di modernizzazione mossa da un lato da un'impostazione, disegnata sul vecchio modello gentiliano, che segna ancora una netta separazione tra istruzione e formazione professionale, e dall'altro dalle profonde trasformazioni economiche e sociali che hanno interessato i paesi industrializzati in generale. La scuola dei primi anni Duemila è quindi una scuola che cambia e cerca di definire una propria identità nuova ed aggiornata.

Nello specifico della scuola dell'infanzia negli anni Novanta, sulla scia degli Orientamenti, era stata riconosciuta la sua centralità non solo pedagogica ma anche istituzionale. Tale prospettiva viene ripresa e sottolineata sia con le *Linee di sviluppo* del 1999[1] sia con la legge n. 30 del 2000 che ribadisce il suo valore fondante. C'è l'esigenza di creare un'istituzione unica che sostenga la scolarità nel lungo periodo (3-18 anni) e alla scuola dell'infanzia viene riconosciuto, anche dal punto di vista normativo, un valore fondante in questo percorso. La realizzazione della *continuità educativa* diventa uno dei compiti della scuola infanzia, affinché la scuola si configuri come un contesto educativo e di apprendimento saldamente raccordato da esperienze formative precedenti, collaterali e successive (Falanga, 2004). La scuola dell'infanzia dà un contributo alla "formazione integrale dei bambini e delle bambine", come si trova scritto nella legge n. 53 del 2003, nel rispetto della primaria responsabilità educativa dei genitori. Nell'accogliere le esigenze dei genitori, sempre più numerosamente impegnati dal punto di vista lavorativo, la legge Moratti introduce per la prima volta la possibilità di iscrivere alla scuola dell'infanzia i bambini di età inferiore ai 3 anni, o meglio, che compiono i 3 anni entro il 30 aprile dell'anno scolastico di riferimento. Manca infatti un servizio di competenza statale che sostenga la fascia d'età 0-3 e quel che si registra è una disomogeneità territoriale con numerosi servizi al nord, erogati per lo più da enti convenzionati o comunali e soggetti privati o cooperativi, e una grande assenza nel resto del paese. Viene attuato il cosiddetto *anticipo o frequenza anticipata*, che è sottoposto all'introduzione di nuove professionalità (si parla di un rapporto aggiuntivo di uno a otto/dieci bambini) e modalità organizzative, quali i criteri di gradualità e sperimentazione nonché la disponibilità di posti e risorse finanziarie da parte dei comuni. A partire da questo primo intervento vengono successivamente (2006-2008) avviate le sezioni primavera, volte ad offrire un servizio educativo nella fascia dei 2-3 anni d'età.

[1] Circolare Ministeriale n. 98 emanata il 12 aprile 1999 con "Oggetto: consultazione sulle linee di sviluppo della scuola dell'infanzia".

Nel nuovo e variegato panorama che caratterizza la scuola dell'infanzia, con la presenza di bambini anche al di sotto dei 3 anni, ma anche di alunni disabili o stranieri, legati alle politiche dell'inclusione i primi e alle onde migratorie i secondi, riaffiora un altro problema: quello inerente la formazione degli insegnanti. I percorsi formativi che fino a questo momento portano a diventare educatori d'infanzia sono infatti diversi e diversificati tra loro e non sempre provvedono a fornire una preparazione che sia adeguata al quadro che caratterizzata le sezioni nonché al nuovo ruolo che la scuola d'infanzia riveste nel percorso educativo. Non solo. La preparazione degli insegnanti di scuola d'infanzia e di scuola primaria si interseca con quella dei professori dei livelli di scuola successivi, che fino ad ora sono qualificati solo dal punto di vista disciplinare. Viene così avviata una riflessione che porta all'unificazione dei profili professionali. Per i maestri si istituisce il corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria e per i professori la formazione disciplinare viene integrata da percorsi di approfondimento didattico-pedagogico post lauream. In questo modo la formazione degli insegnanti in generale e soprattutto per la scuola dell'infanzia, viene affidata interamente al mondo accademico. Si riconosce quindi nel mestiere del maestro il bisogno di una formazione legata non solo alla buona volontà dell'insegnante, ma che presenta una professionalità specifica legata a studi approfonditi e aggiornati poiché in stretto collegamento con la ricerca che li produce.

1.11 La scuola dell'infanzia oggi

La scuola dell'infanzia sta vivendo un momento di cambiamento legato sia alle vicissitudini legislative che la interessano[2] sia alla nuova condizione che caratterizza il bambino contemporaneo. Attualmente si sta infatti verificando una (nuova) scomparsa dell'infanzia causata da una parte dalle rischiose condizioni di vita a cui sono costretti i bambini che vivono nei paesi teatro di conflitti bellici e dall'altra dalla cultura consumistica che soggioga gli stati ad economia avanzata (Franceschini, 2014). A partire dal Novecento, ma soprattutto negli ultimi decenni il sistema economico mondiale ha subito una forte mutazione che da industriale e

[2] Dopo l'inserimento a pieno titolo come primo livello nel sistema educativo nazionale 3-14 anni, la legge 107/2015 propone il suo assembramento alle istituzioni educative della prima infanzia in un nuovo sistema formativo 0-6.

nazionale lo ha fatto diventare finanziario e planetario. Ciò significa che non solo sono le grandi multinazionali a decidere l'andamento dell'economia, ma che queste sono le responsabili della diffusione di una cultura di massa che si basa sui fini consumistici. In questo nuovo panorama sociale l'infanzia, nella sua condizione culturale le cui caratteristiche mutano nel tempo e nello spazio (Franceschini, 2014), ha subito un forte cambiamento. Il bambino di adesso si ritrova a crescere sin da subito già formato nelle proprie abitudini mentali e sociali come il futuro consumatore di domani. Il consumatore come soggetto esterno al sistema produttivo viene integrato al suo interno come colui che con le sue preferenze e le sue scelte di acquisto è in grado di condizionarlo. Le attività di marketing a questo proposito cercano di suscitare ed orientare il bisogno di consumo creando un'immagine diffusa e predominante. Il consumismo però non rende omogeneo il corpo sociale, ma al contrario accresce la disparità poiché accentua, o forse riapre, il divario tra ricchi e poveri. L'uguaglianza infatti non è solo quella dei modelli di riferimento ma quella totale di fronte a lettura e scrittura che, sul piano astratto offre a tutti le stesse potenzialità, mentre su quello concreto colma con il possesso di beni materiali la sempre maggiore discriminazione nella gestione del potere e delle responsabilità (Baudrillard, 2010). Il sentimento di uguaglianza diffuso porta a voler realizzare una società che punta alla conciliazione delle differenze anche di fronte alle grosse ondate migratorie, che lo stesso divario tra stati ricchi e stati poveri ha provocato, aumentando il sentimento di umiliazione nei confronti del "diverso". Quel che ne emerge è un'infanzia che cresce potenzialmente intollerante ed insensibile, con precoci fenomeni di bullismo, verso quello che non è conforme all'ideale socialmente condiviso di una convivialità consumistica e globalizzata, ma soprattutto in tempi brevi e non adeguati. "L'infanzia velocizzata trasforma i bambini in tante minicopie del mondo dei grandi" (Frabboni & Pinto Minerva, 2008), al quale però tali bambini approdano troppo presto e impreparati. In questo panorama, che appare del tutto nuovo rispetto a quelli che hanno caratterizzato la storia precedente, la scuola, come agenzia educativa, non può ignorare le caratteristiche dei soggetti che intende educare, al contrario deve farsene interprete. Al suo fianco non vi sono però solo le agenzie formative tradizionali quali la famiglia o la parrocchia, ma anche nuovi soggetti formativi. Tra questi alcuni sono intenzionali, come gli enti locali o associazionistici, altri subordinati alle leggi di mercato e ai consumi di massa. Nella crescente ramificazione delle opportunità formative, la scuola si pone come un ambiente di apprendimento alternativo e antagonista a quello extrascolastico volto a dare voce ai bambini senza anticiparli o forzali. Non si tratta quindi di insegnare qualcosa di specifico, ma di allestire un ambiente in grado di orientare i bambini ad abitudini mentali che al di fuori difficilmente esperiscono, quali il gusto per la scoperta, la curiosità o la ricerca di soluzioni, e al contempo di far sviluppare atteggiamenti sociali come la solidarietà, la cooperazione o il rispetto. Se la scuola è quella dell'infanzia deve dare seguito a quanto rilevato dalle ricerche in ambito psicopedagogico organizzando i tempi e gli spazi in modo tale che non solo non vi sia fretta, ma che la dimensione motoria torni ad essere quella prevalente. La didattica non può prescindere dall'osservazione e dev'essere strutturata ed organizzata in modo tale da proporre una valida offerta alternativa a quella presentata dai modelli consumisti e dalla società. All'immaginario del mondo esterno va contrapposto il piano esperienziale, alla sedentarietà dei pomeriggio di fronte la televisione va contrapposto il gioco motorio, alla frenesia delle mille cose da fare, vedere, toccare vanno contrapposti momenti liberi in cui coltivare il rapporto tra pari. L'ambiente proposto non deve essere quindi una riproduzione della società in miniatura, ma deve dare gli strumenti per imparare da adulti a muoversi in modo consapevole all'interno della società stessa. La scuola dell'infanzia attuale non solo riscopre quindi il proprio ruolo all'interno del sistema educativo, ma diventa un centro che, in discordanza con l'ambiente esterno, pone l'accento sul valore pedagogico nell'educazione dei bambini secondo i reali bisogni dell'infanzia e come luogo a cui la comunità può far riferimento per lo sviluppo di percorsi di sostegno alla genitorialità o, più in generale, al crescita e all'educazione.

2. LA DEFINIZIONE DEL CURRICOLO: DAGLI ORIENTAMENTI ALLE INDICAZIONI NAZIONALI

2.1 Gli orientamenti del '91

La scuola dell'infanzia italiana trova un punto di svolta e di approdo con gli Orientamenti del '91, che forniscono una linea educativa e didattica d'indirizzo (Fiorin, 2006). Nella loro impostazione gli Orientamenti sottolineano la dimensione materna e di cura, che l'ha da sempre caratterizzata e connotata, e dall'altro la riconoscono come ambiente di apprendimento. Si legge al termine della premessa:

> "I termini 'scuola materna' e 'scuola dell'infanzia' sono usati nel testo indifferentemente, come pure, talvolta, scuola del bambino. La denominazione scuola dell'infanzia è però ritenuta più rispondente alla evoluzione che caratterizza l'istituzione allo stato attuale."

Si è quindi a una fase di cambiamento che riconosce e legittima i nuovi bisogni dell'infanzia rispetto al contesto di appartenenza. Non più un'eccessiva attenzione alla cura della persona, alla pulizia, all'educazione legata ai bisogni primari dovuta soprattutto alla povertà e alle condizioni di disagio in cui vivevano la maggior parte delle classi sociali durante gli anni del dopo guerra, ma un rinnovato impegno e un nuovo entusiasmo che accoglie i risultati emersi dalle ricerche di ambito psicologico sul processo di apprendimento nei bambini. La grande peculiarità di tale documento è che per la prima volta non viene proposto un testo programmatico con specifiche proposte educative e didattiche, ma vengono fornite finalità e criteri a cui l'insegnante si deve riferire mentre agisce. La nuova linea di indirizzo non interessa solamente la visione del bambino, orientata dai tre cardini de "la *progressiva conquista dell'autonomia,* la *consapevolezza della propria identità* e l'*acquisizione delle competenze*", ma considera l'insegnante come un professionista che contribuisce, in modo individuale e collegiale, allo sviluppo di un progetto educativo e conferisce alla scuola una vera e propria autonomia d'azione, anticipandone la successiva formalizzazione dal punto di vista normativo. Si passa quindi da un sistema centralizzato, che dava una visione unitaria e uniformata del sistema scuola, all'attenzione ad esigenze e risorse locali. Il punto di partenza sono le singole istituzioni ed il territorio in cui esse sono localizzate. Dal programma al curricolo, la scuola dell'infanzia, che proprio negli Orientamenti assume questa nuova denominazione e si sostituisce alla precedente *scuola materna*, viene riconosciuta come il primo punto del sistema scuola.

2.2 Campi di esperienza

Gli Orientamenti educativi del '91 accolgono e rendono effettive le varie teorie e pratiche di educazione pre-scolastica che si sviluppano in Italia nel secondo Novecento. Nel panorama nazionale l'identità infantile non è più percepita come naturalità ed innatismo da accogliere e "coccolare", ma è ricavata e desunta dalla società in cui vive e dalla cultura che di cui partecipa. Ha una propria dimensione che va indagata con scientificità. In questo panorama la scuola dell'infanzia si libera dalla condizione di subalternità rispetto la famiglia, che ne aveva esaltato l'attenzione alla dimensione della cura "materna", ma anche da quella tenuta per molto tempo nei confronti della scuola elementare, di cui rappresentava il grado preparatorio. Le viene riconosciuto il ruolo di agenzia educativa autonoma dotata di un proprio percorso formativo. Gli Orientamenti '91 guardano all'infanzia con fondamento scientifico inserendo le scelte didattiche all'interno della progettualità curricolare. Il curricolo della scuola tre-sei si configura come un congegno teorico-pratico (Frabboni, 2008) che da un lato formalizza le finalità ed i contenuti educativi sulla base delle specifiche dimensioni di sviluppo del bambino e dall'altro dà forma ai contenuti della conoscenza. La risposta pedagogica a questo crocevia di interessi sono i *campi di esperienza*, che fin dalla loro prima formulazione si presentano come ambiti di padronanza *del fare e dell'agire del bambino* da non perseguire come discipline scolastiche, ma che, al contrario, danno ordine all'esperienza del bambino. I campi di esperienza valorizzano il momento esperienziale, facendo sì che si svolga *entro confini definiti,* e delineano sentieri sensati, sui quali la didattica guida l'apprendimento del bambino. Ogni campo di esperienza porta con sé *una pluralità di sollecitazioni ed opportunità*. L'esperienza diventa di supporto alla costruzione dei sistemi simbolico-culturali, ovvero dei linguaggi che raggruppano e definiscono gli oggetti culturali e valoriali dell'ambiente. Ogni campo di esperienza si presenta quindi come un alfabetiere verbale e non verbale, insieme di linguaggio e pensiero, per imparare a mettersi in relazione con gli altri e come blocco logico per capire il mondo (Frabboni, 2008). Sebbene non siano presenti nelle Indicazioni Nazionali del 2004, che individuano quattro aree denominate comunque campi di esperienza, vengono presentati nel documento[1] che uscì sempre in quell'anno a supporto della progettazione nella scuola dell'infanzia. Possiamo quindi affermare che sono lo strumento che nel susseguirsi dei documenti ministeriali caratterizzano da sempre l'organizzazione della conoscenza cognitiva e socio-affettiva alla scuola dell'infanzia. Rappresentano gli ambiti dentro i quali sono delineati i sistemi simbolico-culturali del mondo. Possono essere considerati gli ambiti di sapere precursori delle discipline presentate a partire dalla scuola primaria. La coerenza che caratterizza la loro definizione, anche se leggermente variata nel corso degli anni, è dimostrata dalle varie descrizioni con cui sono stati argomentati e che sono presentate qui sotto.

> "Campi di esperienza educativa
>
> Con questo termine si indicano i *diversi ambienti del fare e dell'agire del bambino* e quindi i *settori specifici ed individuabili di competenza* nei quali il bambino conferisce significato alle sue molteplici attività, sviluppa il suo apprendimento, acquisendo anche le strumentazioni linguistiche e procedurali, e *persegue i suoi traguardi formativi*, nel concreto di una *esperienza che si svolge entro confini definiti* e con il costante suo attivo coinvolgimento.
>
> Ciascun campo di esperienza presenta i suoi *peculiari esiti educativi, percorsi metodologici e possibili indicatori di verifica* ed implica una pluralità di sollecitazioni ed opportunità.
>
> Orientamenti dell'attività educativa nelle scuole materne statali, 1991"
>
> "Con il termine campi di esperienza si indicano *diversi ambiti del fare e dell'agire* del bambino. I campi di esperienza non riproducono stratificazioni culturali preesistenti ai soggetti, ma *si formano in rapporto ai processi di conoscenza e di conferimento di senso quotidianamente elaborati dal bambino* nel luogo, nel tempo e nelle relazioni stesse in cui egli vive le sue esperienze. Essi, quindi, non sono una struttura formale precostituita cui meccanicamente adeguarsi, né, tantomeno, un insieme compiuto di attività didattiche predeterminate da trasferire in situazione, magari seguendo la successione con cui sono presentati nelle pagine seguenti. Sono, piuttosto, una dimensione dall'esperire del soggetto nel suo incontro con gli altri e con il mondo, ovvero il vissuto di un soggetto intero che scopre il mondo e la

[1] Raccomandazioni per l'attuazione delle Indicazioni nazionali per i Piani Personalizzati delle Attività Educative nelle Scuole dell'Infanzia.

vita con passione, ordinando e trasformando progressivamente la propria visione dell'uno e dell'altra insieme a se stesso

Raccomandazioni per l'attuazione delle
Indicazioni nazionali per i Piani Personalizzati
delle Attività Educative nelle Scuole dell'Infanzia, 2004"

"L'esperienza diretta, il gioco, il procedere per tentativi ed errori permettono al bambino, opportunamente guidato, di approfondire e sistematizzare gli apprendimenti e di avviare *processi di simbolizzazione e formalizzazione*. Pur nell'approccio globale che caratterizza la scuola dell'infanzia, *gli insegnanti individuano, dietro ai vari campi di esperienza, il delinearsi dei saperi disciplinari e dei loro alfabeti*.

Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia
e per il primo ciclo d'istruzione, 2007"

"L'esperienza diretta, il gioco, il procedere per tentativi ed errori, permettono al bambino, opportunamente guidato, di approfondire e sistematizzare gli apprendimenti. *Ogni campo di esperienza offre un insieme di oggetti, situazioni, immagini e linguaggi, riferiti ai sistemi simbolici della nostra cultura*, capaci di evocare, stimolare, accompagnare apprendimenti progressivamente più sicuri.

Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia
e del primo ciclo d'istruzione, 2012"

2.3 Indicazioni nazionali per i piani di studio personalizzati delle attività educative nelle scuole d'infanzia (2004)

Le Indicazioni nazionali per i piani di studio personalizzati vengono emanate come una tessera della riforma del sistema scolastico avviata dalla legge 53 del 2003, la cosiddetta legge Moratti. Con tale legge viene confermata la non obbligatorietà della scuola infanzia, ma essa viene riconosciuta come parte del sistema educativo. Costituiscono un allegato del Decreto Legislativo 59/2004 e "esplicitano i livelli essenziali di prestazione a cui tutte le Scuole dell'Infanzia del Sistema Nazionale di Istruzione sono tenute per garantire il diritto personale, sociale e civile all'istruzione e alla formazione di qualità." Si pongono in una netta linea di discontinuità rispetto gli Orientamenti del '91. La denominazione *scuola dell'infanzia* diventa ufficiale e viene completamente elisa quella di *scuola materna* mentre il termine *curricolo*, introdotto con il Regolamento dell'autonomia (D.P.R. 275/1999), viene sostituito dall'espressione *piani di studio personalizzati*. Nel rispetto della legge dell'autonomia il piano di studi personalizzato è strutturato su un nucleo fondamentale omogeneo su base nazionale e da una quota riservata alle regioni relativa agli specifici interessi delle stesse in collegamento con le realtà locali. Questo nuovo modello progettuale è costituito dalla successione di unità di apprendimento che l'insegnante, come tutor dell'apprendimento dell'alunno, stila in modo individuale. In questo modo si viene a perdere la dimensione di collegialità, confronto e condivisione che porta alla definizione del curriculo didattico. Seguendo il Piano dell'Offerta Formativa (POF) scolastica e la definizione del piano personalizzato due linee di programmazione diverse, tale dimensione viene persa. I campi di esperienza sono "raccomandabili"[2], ma non costituiscono un riferimento vincolante. Non vengono più utilizzati come organizzatori degli obiettivi didattici, ma sono sostituiti da quattro grandi aree, definite sempre campi di esperienza, ma che sono in realtà i contenitori di "obiettivi specifici di apprendimento". L'ordinamento degli obiettivi specifici di apprendimento non trova riscontro in nessuna teoria pedagogica o didattica né tantomeno sono ordinati in una successione cronologica: rispondono ad una semplice pragmatica e contingente chiarezza espositiva. Ben poco è lasciato all'interpretazione del bambino. Sebbene all'interno dell'intero documento si faccia riferimento continuo alla *personalizzazione*, come attenzione alle esigenze formative della persona che (ri)dà una visione fatta di innatismo e spontaneità (Frabboni, 2008), attraverso le *Raccomandazioni* si fissano precisi *traguardi di sviluppo* che i bambini devono raggiungere al termine della scuola dell'infanzia. La prospettiva è quella del Profilo Educativo, Culturale e Professionale (Pecup) che funge da filo conduttore della continuità tra gli ordini di scuola e si propone come finalizzatore di tutta l'impostazione progettuale (Fiorin, 2004), definendo le caratteristiche degli studenti al termine del primo ciclo (3-14 anni). La continuità corrisponde quindi al progressivo sviluppo delle dimensioni della persona e il Pecup come riferimento curricolare fa sì che la scuola dell'infanzia si ponga

[2] Nel 2004 vengono emanate anche le Raccomandazioni per l'attuazione delle *Indicazioni nazionali per i Piani Personalizzati delle Attività Educative nelle Scuole dell'Infanzia* che, nella terza parte "pur senza avere alcun valore prescrittivo" suggeriscono "ai docenti e alle scuole alcune ipotesi ed orientamenti scientificamente e professionalmente legittimati per organizzare le attività educative per i bambini e per favorire la traduzione delle Indicazioni Nazionali nella concretezza delle differenti realtà scolastiche, in rapporto alle domande formative delle diverse comunità territoriali."

come mediatore di quanto gli alunni dovranno raggiungere al termine della scuola media.

2.4 Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione (2007)

A seguito delle forti critiche mosse verso la figura del tutor, il portfolio, ritenuto un solo atto burocratico, e i piani di studio personalizzati, nel 2007 il ministro Fioroni presenta le "Indicazioni per il curricolo" con le quali ritorna l'impianto curricolare. L'adozione del curricolo al posto del programma esprime uno degli elementi di maggiore innovazione introdotti dalla legge sull'autonomia(D.P.R. 275/1999). La singola istituzione diventa il centro delle decisioni che porta il processo di elaborazione della progettazione a subire un ribaltamento: non si parte più dall'alto, ma dalle risorse e dalle esigenze del territorio. Le Indicazioni del 2004 con la loro struttura in categorie di obiettivi avevano tentato di rappresentare la componente nazionale interna al curricolo, tanto che si è detto che le Indicazioni nazionali non erano *al posto*, ma *dentro* il curricolo (Fiorin, 2004), nel tentativo di mantenere l'unitarietà del sistema nazionale di istruzione. Nate come strumento facoltativo da adottare in via sperimentale, le Indicazioni del ministro Fioroni sono stese da una commissione di esperti con il compito di redigere un manifesto della scuola di base secondo una visione unitaria della scolarità dai 3 ai 14 anni. Di fatto non è mai avvenuta l'armonizzazione che era prevista tra questo documento ed il suo predecessore del 2004, considerate soprattutto le difformità e le distanze, e le Indicazioni per il curricolo hanno tracciato i curricola nazionali della scuola di base, oltre a delinearne le finalità sociali, culturali ed educative. Le finalità descritte per la scuola dell'infanzia ripropongo lo sviluppo dell'identità, la promozione dell'autonomia e la maturazione di competenze degli Orientamenti del '91, aggiungendo l'attenzione al senso di cittadinanza. Il quadro pedagogico sottolinea l'idea di persona come soggetto che apprende, caratterizzato da una sua singolarità nell'imparare. La società che fa da sfondo alle Indicazioni per il curricolo è infatti la società della conoscenza che con notevole difficoltà incontra la prospettiva dell'educazione permanente. Ad una standardizzazione della conoscenza fatta di saperi di tipo mnemonico, va preferita la capacità di ragionare e dell'essere portatore di un proprio stile di apprendimento teso a soddisfare i propri interessi ed i propri bisogni e a far emergere la ricchezza legata alla diversità. Compito della scuola in questa società complessa è quello di garantire alla propria utenza di essere nelle condizioni di padroneggiare le diverse strutture cognitive. Il testo sottolinea l'importanza della scuola dell'infanzia come luogo di relazione, di cura e di apprendimento. Vengono ripresentati i campi di esperienza anche se modificati nella struttura. Variati nei titoli (il sé e l'altro; il corpo e il movimento; linguaggi, creatività, espressione; i discorsi e le parole; la conoscenza del mondo) sono tutti e cinque composti da una parte argomentativa sulle conoscenze e da un riquadro che indica i *traguardi formativi per lo sviluppo delle competenze* di tipo comunicativo e cognitivo. Lo scopo è quello non solo di mettere al centro la qualità dell'apprendimento piuttosto che la quantità, ma anche di generare conoscenze nuove. Operare per competenze significa quindi mettere progressivamente a disposizione di bambini e bambine la padronanze metodologiche ed operative tramite cui saranno in grado di far emergere i loro saperi, i paradigmi di senso e significato che li porteranno ad avvicinarsi correttamente e consapevolmente alle discipline nel prosieguo del loro percorso di studi in un'ottica di continuità educativa nella scuola del primo ciclo.

2.5 Le indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (2012)

Con l'avvicinarsi del termine dell'anno scolastico 2011-2012 scade il triennio di applicazione delle Indicazioni del 2007. Nel novembre 2011 viene avviata l'operazione di revisione del documento. La scelta di lavorare su questa normativa e non sulla precedente del 2004, di cui di fatto costituisce l'aggiornamento, è riconducibile alla maggiore accettazione che il testo del 2007 ha avuto rispetto a quello del 2004 da parte di dirigenti, docenti e scuola in generale, e al fatto che si presenta essere un testo più aggiornato. Queste nuove Indicazioni confermano sostanzialmente la validità del sistema educativo e culturale della scuola italiana di base, in particolar modo nelle sue vocazioni di accoglienza e di inclusione di tutti, ma ribadiscono che tali prospettive devono tener conto del mutato scenario ambientale, sociale e culturale entro cui gli studenti italiani si trovano a vivere e ad operare (Traversetti, 2015). Nella loro impostazione confermano e sottolineano la verticalità del curricolo che rivela espressione della cultura progettuale dell'istituzione che lo produce, ma soprattutto di un percorso educativo che spinga il bambino a fare scelte autonome e feconde nel confronto continuo con i valori che orientano la società in cui vive. È chiamata non tanto a proporre un continuo moltiplicarsi di microprogetti che colgono le svariate sollecitazioni che provengono dalla società e tentano di definire norme di comportamento specifiche per ogni situazione, quanto a far acquisizione conoscenze e abilità fondamentali per sviluppare le competenze culturali di base nella prospettiva del pieno sviluppo della persona. Complice probabilmente la sempre maggior carenza finanziaria dei fondi d'istituto, la scuola e gli insegnanti tornano ad occupare una posizione di centralità nella formazione dei bambini. I bambini sovra stimolati dalla società trovano a scuola un ambiente educativo accogliente e sicuro, capace di cogliere le loro peculiarità e di promuovere una formazione integrale. Il curricolo si contraddistingue per l'organizzazione, che permette ai bambini di prendere consapevolezza della potenziale ricchezza dell'esperienza quotidiana e dei diversi modi in cui la società vi dà forma, e la flessibilità che risponde alle esigenze dei singoli. I campi di esperienza rimangono l'ambito privilegiato per sperimentare i linguaggi e conoscere la realtà che ci circonda. Le loro denominazioni rimangono le stesse del 2007, ma vengono tolti i sottotitoli. Questo a supporto che finalità ed obiettivi vanno predisposti per non cadere nello spontaneismo, ma non devono essere vincolanti in modo rigoroso per lasciare spazio alle domande e alla curiosità dei bambini. Si sottolinea così il ruolo centrale che il bambino ha alla scuola dell'infanzia come soggetto attivo e l'importanza che questa ha nel raccordo con i successivi livelli di formazione. Per la prima volta compare infatti il paragrafo *Dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*, che presenta il profilo che lascia la prima per frequentare la seconda e ribadisce la continuità che deve caratterizzare il curricolo come espressione del percorso educativo nella prospettiva del *life long learning*.

2.6 Dal curricolo verticale al sistema integrato 0-6

L'attuale panorama della scuola dell'infanzia è controverso e lascia parecchie perplessità rispetto la sua direzione futura. Quando nel 1994 con la legge 97, per non far morire il sistema educativo nelle zone montane, nascono gli Istituti Comprensivi, la scuola dell'infanzia viene riconosciuta a pieno titolo come facente parte il sistema scuola. Le problematiche legate alla complessità nella dimensione istituzionale-territoriale portano alla diffusione del modello del comprensivo a livello

nazionale prima in forma sperimentale e poi ordinamentale[3]. Si legge poi nell'art. 19, comma 4 della legge 111/2011 che "per garantire un processo di continuità didattica nell'ambito dello stesso ciclo di istruzione, a decorrere dall'anno scolastico 2011-2012 la scuola dell'infanzia, la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado sono aggregate in istituti comprensivi". Il raccordo dei tre livelli di scuola viene definito continuità verticale e vuole affermare un'idea di scuola di base unitaria che prende in carico il bambino a tre anni e lo guida fino al termine del primo ciclo d'istruzione. All'interno di questo quadro la scuola dell'infanzia è la scuola del bambino, che accoglie, promuove e arricchisce l'esperienza in prospettiva evolutiva, avvia agli alfabeti disciplinari attraverso i campi di esperienza e definisce la progettualità del primo segmento del curricolo verticale.
La legge 107/2015 propone però un cambio di direzione: l'unificazione del segmento 0-6 che, se da un lato rappresenta un avanzamento del nido da servizio socio assistenziale a servizio educativo[4], dall'altro porta con sé un ripiegamento della scuola dell'infanzia verso una concezione che recupera la finalità dell'assistenza. Nel nuovo quadro che si va delineando, anche alla luce di richieste avanzate da alcuni settori del mondo sindacale, non sembrano essere le esigenze dei genitori in quanto tali ad essere prese in considerazione, ma piuttosto le richieste del mondo economico e del mercato del lavoro. E sono queste ultime che paiono imporsi sui bisogni educativi e sul benessere delle bambine e dei bambini. Nel ddl 1260/2014 si legge che "il sistema integrato[5] favorisce la conciliazione fra i tempi e le tipologie di lavoro dei genitori e la cura delle bambine e dei bambini e promuove azioni di sostegno alla funzione educativa delle famiglie". L'affermazione viene ripresa e confermata nella stessa legge 107/2015 come "conciliazione tra tempi di vita, di cura e di lavoro dei genitori". Tali parole non compaiono in nessuna precedente norma né tanto meno nelle Indicazioni nazionali per la scuola dell'infanzia del 2012, che compongono un tutto unitario con le Indicazioni per il primo ciclo e dove le finalità sono formulate attraverso le tre parole chiave di *identità, autonomia* e *competenza* con al centro il bambino. Il quadro che si sta delineando appare quindi diverso da quello che ha condotto all'odierno ruolo della

[3] La legge finanziaria del 1997, n. 662 del 23 dicembre 1996 ha stabilito la diffusione su tutto il territorio nazionale del modello del comprensivo e i successivi provvedimenti n. 233/1998, n. 331/1998 e n. 112/1998 ne hanno curato la diffusione.
[4] L. 107/2015: art. 1 comma 181 e.3 " I servizi per l'infanzia non rientrano tra i servizi pubblici a domanda individuale".
[5] ndr: Per sistema integrato si intende la nuova proposta educativa che interessa i bambini da 0 a 6 anni in un sistema formativo che pone in continuità gli asili nido con la scuola dell'infanzia.

scuola dell'infanzia. Il servizio integrato in assenza di una delega di una chiara specificità dei percorsi 0-3 (nidi) e 3-6 (scuola dell'infanzia) consente di introdurre una sorta di flessibilità deprofessionalizzante degli insegnanti della scuola dell'infanzia, che potrebbero essere collocati indifferentemente anche nei nidi, e di penalizzare la stessa scuola dell'infanzia non salvaguardandola nella sua autonomia e nella sua specificità pedagogica e didattica.

3. LA MATEMATICA ALLA SCUOLA DELL'INFANZIA

3.1 I NUMERI

La prima esperienza numerica che i bambini hanno è il contare (Israel & Millán Gasca, 2012). Sono presenti come argomento da affrontare durante tutto il percorso scolastico a partire dall'infanzia. Nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* (2012) all'interno del campo di esperienza *La conoscenza del mondo* viene dedicato un paragrafo a "numeri e spazio". Si legge:

> "La familiarità con i numeri può nascere a partire da quelli che si usano nella vita di ogni giorno; poi, ragionando sulle quantità e sulla numerosità di oggetti diversi, i bambini costruiscono le prime fondamentali competenze sul contare oggetti o eventi, accompagnandole con i gesti dell'indicare, del togliere e dell'aggiungere. Si avviano così alla conoscenza del numero e della struttura delle prime operazioni, suddividono in parti i materiali e realizzano elementari attività di misura. Gradualmente, avviando i primi processi di astrazione, imparano a rappresentare con simboli semplici i risultati delle loro esperienze."

Le azioni descritte vengono riprese in prospettiva di continuità con i livelli di scuola successivi come traguardi per lo sviluppo di competenze del bambino. In particolare si dice che il bambino

> "raggruppa e ordina oggetti e materiali secondo criteri diversi, ne identifica alcune proprietà, confronta e valuta quantità; utilizza simboli per registrarle; esegue misurazioni usando strumenti alla sua portata."

e

> "ha familiarità sia con le strategie del contare e dell'operare con i numeri".

I numeri rappresentano quindi non solo una peculiarità del linguaggio matematico, ma il punto di partenza per una trattazione sistematica della disciplina a partire dall'aritmetica. La matematica scolastica riconosce nel calcolo la sua più antica radice: rappresenta non solo l'obiettivo che ha contraddistinto per più tempo la principale finalità della disciplina ("far di conto"), ma anche la prima vera forma di manipolazione cognitiva dei numeri con attività di memorizzazione ed addestramento. Ai bambini viene chiesto di far pratica nell'applicazione di regole e formule con un chiaro riferimento ad una sorta matematica dei mestieri. L'uso del linguaggio simbolico è sinonimo di una corretta conoscenza dei concetti. Ancora oggi questa interpretazione trova riscontro nella pratica in aula con attività matematiche sviluppate prevalentemente durante l'ultimo anno di frequenza e come un'anticipazione di quanto viene poi affrontato alla scuola primaria.

Nel corso degli anni però, oltre alla pratica dominante, si sono distinte anche esperienze innovative quali quelle di Maria Montessori o di Laisant, nell'ambito della geometria, oltre agli studi di stampo psicologico che hanno portato a rivedere l'impostazione tradizionale in favore di un nuovo approccio alla didattica della matematica. Le ricerche dimostrano che proporre la matematica sin dalla scuola dell'infanzia non è prematuro, perché il bambino ha familiarità con il mondo dei numeri fin da piccolissimo (Donaldson, 1978). Tale propensione naturale va assecondata attraverso l'offerta di occasioni di esperienza matematica in cui viene facilitata la successiva alfabetizzazione. In questo quadro i numeri e le loro proprietà appaiono come espressioni di semplici esperienze che concernono la realtà e gli oggetti che vi appartengono. Attraverso operazioni quali la manipolazione, l'ordinamento, il confronto… i bambini prendono inconsciamente consapevolezza di alcune loro capacità mentali e iniziano ad approcciarsi ai numeri come un potente strumento intellettuale che permette loro di eseguire specifiche operazioni fisiche o cognitive quali il calcolare.

3.2 La sottrazione

Nell'insieme N dei numeri naturali i bambini imparano ad eseguire le operazioni interne di addizione e successivamente di moltiplicazione in modo "lineare". Ben presto però incappano in ostacoli legati al tornare indietro o allo spartire quantità in modo uguale. Le operazioni di sottrazione e divisione non sono infatti interne all'interne all'insieme N e per poter essere eseguite devono prima essere verificate alcune condizioni.

Nello specifico della sottrazione questa operazione è definibile all'interno dell'insieme Z dei numeri interi, positivi e negativi. È *il sommare ad un primo numero intero l'opposto del secondo numero intero*.

$$4 - 5 = 4 + (-5) = -1$$

Il riferimento è all'addizione tanto che non solo si parla di sottrazione come operazione inversa all'addizione, ma in algebra non si distingue tra addizione e sottrazione e si indicano le due operazioni come un'unica *addizione algebrica*.

$$m + n - n = m$$

$$m \xrightarrow{+n} \xrightarrow{-n} m$$
$$m \xrightarrow{-n} \xrightarrow{+n} m$$

Il principio sottrattivo come diminuzione di una quantità però è percepito sin dai primi anni del bambino e la sua proposta è suggerita, anche dal punto di vista di padronanza dell'algoritmo e conoscenza della definizione, sin dalla scuola primaria. Secondo Israel & Millán Gasca la sottrazione deve essere presentata quasi in concomitanza con l'addizione per non far identificare il concetto stesso di operazione aritmetica con la somma. L'introduzione della sottrazione tra i numeri naturali porta con sé un importante principio matematico: il confronto fra numeri per il riconoscimento del maggiore e del minore. Courant e Robbins (2000), la definiscono in questo modo:

"Si considerino due numeri naturali a e b, rappresentati come scatole rettangolari contenenti un certo numero di palline.

Le affermazioni equivalenti

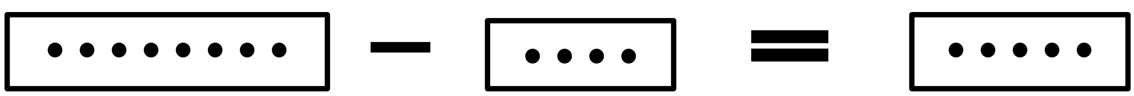
$a<b$ (a minore di b) e $a>b$ (a maggiore di b)

Vogliono significare che la scatola b può essere ottenuta dalla scatola a con l'addizione di una terza scatola c, opportunamente scelta, in modo che $b=a+c$.

Quando accade questo si verifica l'uguaglianza

$$c = b - a,$$

che definisce la sottrazione.



3.3 La struttura della sottrazione

Nei testi scolastici si trova scritto che il risultato della sottrazione è chiamato *differenza* o *resto*. Benché il simbolo venga collegato ad entrambi i termini e che gli stessi risultino tra loro intercambiabili, i significati riconducibili alle due parole sono diversi tra loro.

"La differenza è un numero naturale che indica la distanza fra due punti nella loro rappresentazione geometrica sulla retta e stabilisce tra tali numeri naturali un confronto additivo" (Israel & Millàn Gasca, 2012), mentre la definizione di resto si rifà all'operazione di divisione. In particolare indica la distanza che separa un dividendo (numero che va diviso) da un numero naturale a lui più piccolo, multiplo più prossimo del suo divisore (numero che indica le parti in cui dividere).

Proprio in riferimento a questa distinzione terminologica, la letteratura ha per molti anni presentato due modelli di sottrazione: il modello del confronto (*comparison model*) e il modello del togliere (*taking-away model*).

I due modelli sotto forma di diversi risultati, differenza o resto, vengono solitamente presentati sin dal primo approccio all'operazione. Anzi la tendenza è quella di evidenziarne le specificità nei primi anni di scuola e andare poi a tralasciarle con il progredire dei livelli scolastici fino al loro quasi completo abbandono.

3.4 Dalla sottrazione alle situazioni sottrattive

Gli studi inerenti la definizione del concetto di sottrazione hanno evidenziato come allo stesso simbolo possano essere associate molte situazioni che vanno al di là del semplice calcolo della differenza o rimanenza tra due quantità. Le stesse espressioni verbali possono essere esemplificate in modi diversi che non offrono semplicemente diverse dimostrazioni di come operare tramite il calcolo sottrattivo, ma sottendono schemi d'azione diversi. Haylock e Cockburn (2008) individuano cinque categorie:

1. Partizione: individua il togliere una parte da un intero e quindi lo spartire un numero in due parti complementari rispetto l'insieme iniziale. Dà origine al resto.
2. Confronto[1]: paragona due quantità, di cui una numericamente inferiore all'altra e permette di individuare la differenza numerica tra le due.
3. Completamento di un insieme: individua un gruppo di elementi che appartengono ad un insieme ma ne rappresentano un sottoinsieme che differisce dagli altri per una qualche caratteristica. È molto simile alla partizione.

[1] È possibile identificare tre livelli nell'uso del confronto. Se per esempio si paragonano due torri di cubetti una di dodici pezzi blu ed di tre pezzi rossi, in un primo momento viene detto che "ci sono più che rossi". Ad una seconda osservazione, i bambini possono essere aiutati a vedere il confronto dall'altro punto di vista dicendo che "i rossi sono meno dei blu". Ad un terzo livello il bambino riesce ad esprimere il confronto ad un livello più astratto dicendo "dodici è un numero maggiore di tre" o che "tre è minore di dodici di nove".

4. Conteggio all'indietro: è il determinare una quantità minore di una data contando in senso opposto a quello di avanzamento sulla linea dei numeri a partire dal numero più grande.
5. Addizione inversa: è il determinare un numero procedendo in avanti a partire da un numero inferiore fino al numero che rappresenta il punto di arrivo sulla linea dei numeri.

Al di là del riconoscimento della sottrazione come concetto formale che identifica un significato matematico, vi è una lettura informale della realtà che esemplifica come alla sottrazione non corrisponda solo il togliere. Le diverse strutture di sottrazione aprono a differenti interpretazioni semantiche che devono essere fatte conoscere ai bambini fin da piccoli per prevenire il sorgere di difficoltà negli anni di scuola successivi legate ad una conoscenza dei concetti non corretta o completa. Il concetto di sottrazione, ad esempio, non può essere trattato in modo svincolato a quello dell'addizione in quanto le due operazioni sono tra loro inverse e presentano a livello di proposta verbale una commistione di termini. In algebra si parla ad esempio di somma algebrica comprendendo sia l'addizione che la sottrazione tra numeri interi.

Nesher, Greeno e Riley (1982) analizzano la struttura di diversi problemi a parole rilevando che la problematizzazione di un quesito può assumere diversi livelli di difficoltà a seconda di come viene formulata. Gli autori parlano infatti di *categorie semantiche* dell'addizione e della sottrazione. All'interno di questa classificazione gli autori collocano diversi studi che nel corso degli anni hanno analizzato come l'entità del dato da calcolare influenzi la performance dei bambini. Viene precisato che non è possibile dare una risposta certa in termini di percentuali tantomeno ordinare per difficoltà le varie categorie individuate in quanto le varie ricerche sono state condotte con metodi e intenti d'indagine diversi. Oltretutto a parità di categoria semantica possono esserci altri fattori che variano la difficoltà.

Le tre categorie semantiche principali individuate sono:

- combinazione: coinvolge relazioni statiche tra due insiemi. La domanda riguarda l'unione di due gruppi o la suddivisione di un gruppo in due parti;
- cambio: descrive il crescere o il decrescere di una somma iniziale per dare origine ad un quantità finale diversa;

- confronto: comprende la comparazione statica tra due insiemi. La domanda riguarda la differenza tra i due gruppi o il determinare uno dei due gruppi quando è nota la differenza.

Per ognuna di queste categorie è possibile formulare diverse tipologie di quesiti variando il termine sconosciuto per un totale di quattordici.

Categoria	Descrizione
Combinazione 1	La domanda riguarda l'unione di insiemi (intero)
Combinazione 2	La domanda riguarda un sottoinsieme (parte)
Cambio 1	Incremento, domanda sull'insieme finale
Cambio 2	Riduzione, domanda sull'insieme finale
Cambio 3	Incremento, domanda sulla quantità che cambia
Cambio 4	Riduzione, domanda sulla quantità che cambia
Cambio 5	Incremento, domanda sull'insieme iniziale
Cambio 6	Riduzione, domanda sull'insieme iniziale
Confronto 1	Si nomina "più", domanda sulla differenza
Confronto 2	Si nomina "meno", domanda sulla differenza
Confronto 3	Si nomina "più", domanda sull'insieme che viene confrontato
Confronto 4	Si nomina "meno", domanda sull'insieme che viene confrontato
Confronto 5	Si nomina "più", domanda sull'insieme di riferimento
Confronto 6	Si nomina "meno", domanda sull'insieme di riferimento

Tab. 1: Categorie semantiche individuate dell'addizione e della sottrazione (Nesher, Greeno & Riley, 1982)

Quello che appare chiaro è che i bambini in età tra l'ultimo anno di scuola dell'infanzia e il primo anno della scuola primaria sanno risolvere semplici addizioni e sottrazioni senza conoscere la struttura aritmetica delle operazioni e che la proposta didattica non può non tenere conto delle componenti empirica, logica e matematica che vengono di volta in volta ed in misura diversa messe in gioco. Questo significa che la sottrazione da operazione aritmetica deve essere ripensata come situazione concreta su cui i bambini possono interagire attivando schemi cognitivi che permettono di dare un significato matematico formale all'esperienza informale. In questo modo si avvia ad un processo di vera e propria modellizzazione matematica che permette di riflettere sui nodi concettuali e non enfatizza la traduzione letterale delle parole in simboli (Usiskin, 2008).

Alla luce di quanto emerso, resto e differenza non è sufficiente siano definiti ma vanno considerati in relazione ai rispettivi modelli di riferimento: quello del togliere e del confrontare. Tali modelli però non sono isolati perché il bambino nell'approssimarsi alle situazioni non utilizza algoritmi, ma applica strategie ragionate o esperienziali molto spesso strettamente connesse all'atto dell'aggiungere, come azione inversa a quella del togliere identificabile nell'addizione. Anche il calcolo della somma presenta dei modelli concettuali di riferimento: quello dell'unione e quello dello slittamento. Il primo fa riferimento alle situazioni in cui due quantità vengono tra loro unite per dare luogo ad una terza, mentre il secondo al crescere dei numeri o, detto in altre parole, al muoversi in senso crescente sulla linea dei numeri. Il tipo di azioni che sottendo i modelli sia dell'addizione che della sottrazione hanno portato alcuni studiosi a considerare il modello del togliere e il modello dell'unire come un unico modello in cui vengono prese in considerazione diverse quantità come interi che vengono divisi in parti o, viceversa, come parti che formano un intero. Si parla di modello *Parte – Parte – Tutto*. Analogamente il modello del confronto nella sottrazione e quello dello slittamento per l'addizione possono essere considerati un unico modello che fa emerge l'aspetto ordinale dei numeri. I numeri sono infatti disposti in modo ordinato su un'ideale linea. Tale linea può essere percorsa in senso crescente e decrescente e gli spostamenti possono essere quantificati in unità numeriche. Questo modello viene detto *Partenza – Spostamento – Arrivo*.

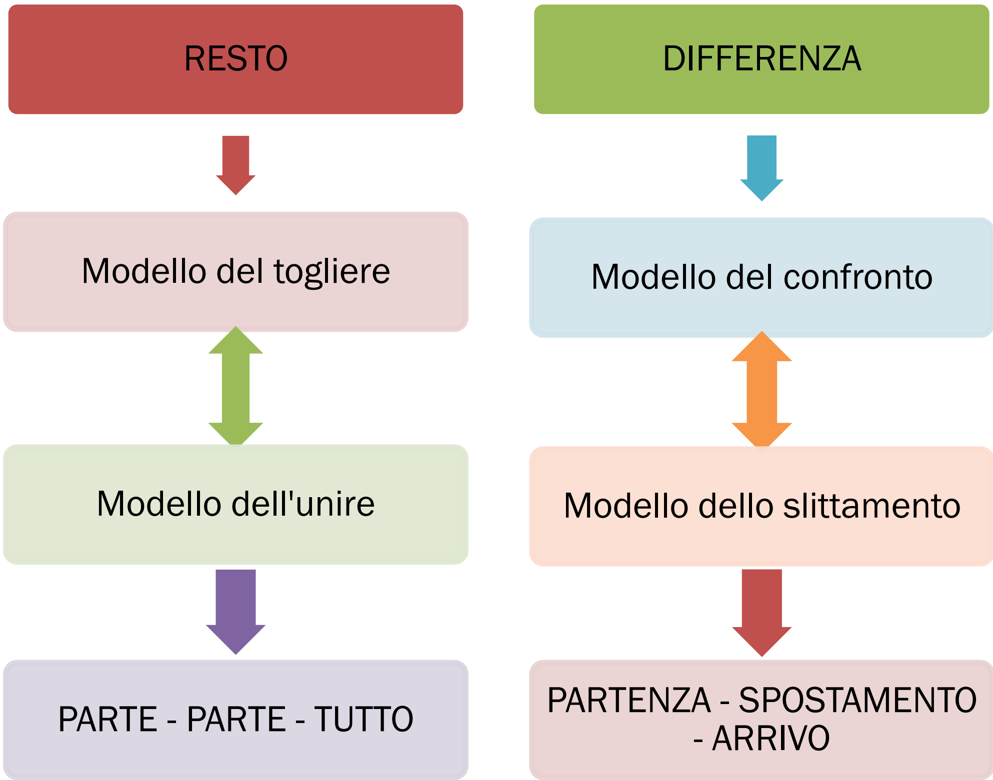


Fig. 1: schema riassuntivo dei modelli di addizione e sottrazione

L'unione dei rispettivi modelli di addizione e sottrazione trova ragione nella stessa definizione di sottrazione formulata in termini algebrici attraverso l'addizione e soprattutto apre ad una riflessione sulla didattica. Presentare i numeri attraverso diverse strutture, riconoscendo il legame tra le operazioni, in particolare di addizione e sottrazione, con cui possono essere combinati tra loro e affrontando i vari aspetti che li definiscono[2] permette di non condizionarne la manipolazione all'interno dell'insieme dei numeri naturali, ma di fornire esempi che troveranno poi discussione e motivo di concettualizzazione all'interno dell'insieme dei numeri interi e che potranno prevenire l'applicazione di schemi di risoluzione errati.

3.5 Lo sviluppo delle abilità numeriche

Le teorie relative alla costruzione del concetto di numero dimostrano che il periodo dai due agli otto anni d'età ha un'importanza decisiva. Per tale ragione è auspicabile che lo sviluppo della conoscenza numerica sia adeguatamente sostenuto a partire dalla scuola dell'infanzia. Devono essere proposte attività che siano qualitativamente stimolanti, accessibili rispetto all'età e che soprattutto coinvolgano aspetti matematici. I bambini devono essere portati a discriminare gli

[2] Cardinale, ordinale, unità di misura…

aspetti numerici implicati nelle varie situazioni o a riconoscere cosa rappresenta il numero all'interno di un contesto. Le diverse espressioni numeriche indicano il numero di cose in un insieme: determinano la sua numerosità. La *numerosità* è una proprietà che caratterizza qualsiasi tipo di insieme: oggetti fisici, persone, suoni, enti astratti (Butterworth, 2005). La matematica da proporre alla scuola dell'infanzia è strettamente connessa al concetto di numerosità: lo sviluppo delle abilità aritmetiche può essere infatti visto come l'affinarsi della comprensione del concetto di numerosità e la sempre maggiore abilità nel manipolarlo (Butterworth, 2005). A sua volta le prime abilità aritmetiche possono essere considerate vere e proprie competenze numeriche che si riferiscono a tre ambiti altamente correlati, ma tra loro distinti: (a) l'enumerazione, (b) le relazioni tra numeri e (c) le operazioni aritmetiche (Giordania, Kaplan, Locuniak, Ramineni, 2007; Purpura, 2009). (a) L'enumerazione è la conoscenza della sequenza dei numeri, che sta alla base dell'atto del contare e che porta a determinare il numero totale degli elementi di un insieme (cardinalità) attraverso il riconoscimento visivo intuitivo (subitizing) o il conteggio diretto degli elementi. (b) Le relazioni tra numeri indicano in che rapporto siano tra loro due o più elementi, intesi sia come insiemi che come numeri, oppure come i numeri siano disposti su un'immaginaria linea dei numeri. (c) Le operazioni aritmetiche rappresentano la capacità del bambino di comprendere variazioni di quantità e di ottenere nuove quantità variando le dimensioni di un insieme iniziale.

3.6 Il processo di comprensione matematica

La comprensione matematica è un processo che coinvolge più piani. Non corrisponde all'acquisizione di definizioni e formule; affinché venga sviluppata non basta la presentazione di materiali che permettono di manipolare un significato matematico. Va quindi al di là della proposta didattica o delle peculiarità disciplinari, perché coinvolge l'intenzionalità del bambino ed è legata all'interpretazione che egli dà ai fenomeni posti alla sua attenzione in relazione al linguaggio matematico che gli permette di esprimerla. Le ricerche dimostrano che i concetti base nello sviluppo della conoscenza numerica vengono appresi con una relativa facilità da parte dei bambini, se non sono presenti particolari problematiche legate al processo di apprendimento, e che l'acquisizione di tali concetti avviene con una certa gradualità e all'interno di un certo arco temporale, come riassunto in tabella, ma non è necessariamente legata all'età (Butterworth, 2005). Tra le abilità cognitive specifiche infatti alcune sono innate (Starkey e Cooper, 1980; Brannon, 2002). Appartengono alla conoscenza informale che deriva dall'ambiente (Ginsburg, 1975) e dal contesto familiare, ma che può essere incentivata dall'insegnamento (Baroody, Eiland e Thompson, 2009; Clements e Sarama, 2008; Lai, Baroody e Johnson, 2008; Ramani e Siegler, 2008; Starkey, Klein e Wakeley, 2004). Se, per esempio, la percezione dei numeri corrisponde ad una capacità innata, enumerare la sequenza verbale dei numeri è una capacità che viene acquisita (Lucangeli e Tressoldi, 2002).

Come queste abilità vengano o meno acquisite, è di notevole importanza non solo per i singoli bambini, ma anche per l'organizzazione del sistema di istruzione formale e del suo ruolo nella società. Vi sono infatti molte connessioni tra la matematica, in quanto scienza formale, e il mondo reale (Civil, 1995). La vita quotidiana è piena di situazioni implicanti i numeri che richiedono abilità molto più complesse e sofisticate di quanto non possa apparire a prima vista a degli adulti competenti. Ne sono esempi la compravendita, il riferirsi a date ed orari, la ricerca della pagina di un manuale, la selezione di un canale televisivo e il relativo uso del telecomando. Un'espressione numerica infatti può non avere un solo significato e un bambino deve imparare a distinguere quando questa è utilizzata per localizzare un oggetto all'interno di una sequenza o per indicare una quantità. La conoscenza matematica (informale) quotidiana è una base importante per l'apprendimento della conoscenza matematica (formale) scolastica (Baroody, Lai e Mix, 2006; Clements, Sarama e DiBiase, 2004; Ginsburg, Klein e Starkey, 1998).

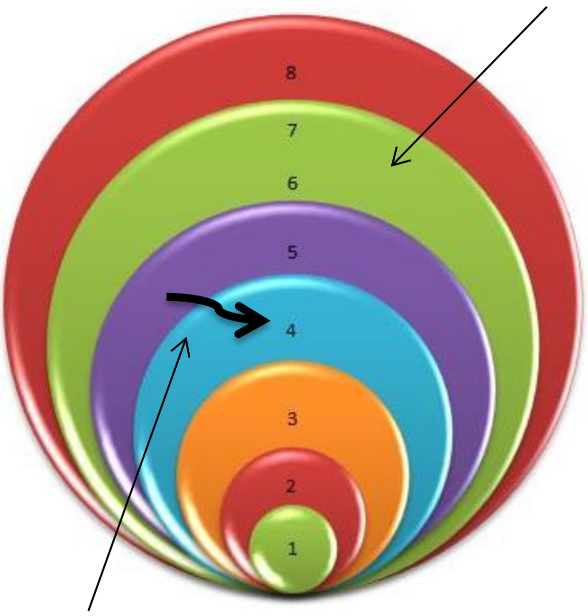
Età	Principali studi nell'ambito della competenza numerica
Appena nato	Riesce a discriminare sulla base di piccole numerosità (Antell & Keating, 1983)
4 mesi	È in grado di aggiungere e sottrarre un'unità (Wynn, 1992)
11 mesi	Discrimina sequenze di numerosità crescenti e decrescenti (Brannon, 2002)
2 anni	Comincia ad imparare la sequenza verbale del contare (Fuson, 1992); Riesce a spartire quantità attraverso secondo la corrispondenza uno-a-uno (Potter & Levy, 1968)
2 anni e mezzo	Riconosce che le parole che indicano i numeri più grandi di uno (Wynn, 1990)
3 anni	Dà in modo contato un piccolo numero di oggetti (Wynn, 1990)
3 anni e mezzo	Riesce ad aggiungere e sottrarre un'unità con oggetti e verbalmente (Starkey e Gelman, 1982) Riesce ad un usare il principio di cardinalità per stabilire il numero di oggetti di un insieme (Gelman & Gallistel, 1978)
4 anni	Usa le dita per aiutarsi nell'aggiungere (Fuson & Kwon, 1992)
5 anni	Riesce ad aggiungere un piccolo numero senza però determinare la somma totale (Starkey e Gelman, 1982)
5 anni e mezzo	Comprende la commutatività dell'addizione e conta in avanti da numeri grandi (Carpenter e Moser, 1982) Conta correttamente fino a 40 (Fuson, 1988)
6 anni	Tiene a mente i numeri (Piaget, 1952)
6 anni e mezzo	Comprende la complementarità di addizione e sottrazione (Bryant et al, 1999) Conta correttamente fino a 80 (Fuson, 1988)
7 anni	Ricorda e riprende episodi numerici dalla memoria

Tab. 2: Principali traguardi nell'ambito della comprensione matematica e relativi studi dimostrativi.

3.7 La teoria ricorsiva

Secondo Pirie e Kieren (1989) il processo di apprendimento della matematica non è lineare, stadiale o relativo all'età, ma ricorsivo. Ciò significa che c'è una continua sistematizzazione della conoscenza, che diviene sempre più elaborata e completa. La comprensione matematica segue un prosieguo di livelli di sofisticazione in un processo *multiplanare*. Ogni livello può essere definito in modo autonomo, ma ingloba e trascende il precedente, rendendo la comprensione un processo *ricorsivo* in cui appunto il processo di strutturazione ricorre e si evolve.

I livelli individuati dagli autori sono otto: i primi, o meglio, i più interni fanno riferimento alla comprensione legata al contesto, basata su esempi concreti o immagini; i successivi descrivono invece la formalizzazione simbolica e non trovano riscontro in enti concreti. Il passaggio da un livello ad un altro non è sequenziale, ma può attraversare anticipazioni, ripensamenti o integrazioni che rendono il processo *non lineare* e *dinamico*. Di particolare interesse è il processo di *folding back*, letteralmente “volgersi indietro”.



Livello	Livello di conoscenza
1	Fare
2	Elaborare immagini
3	Possedere una forma
4	Notare una proprietà
5	Formalizzare
6	Osservare
7	Strutturare
8	Inventare

Fig. 2: Illustrazione e denominazione dei livelli della teoria ricorsiva (Pirie & Kieren, 1989)

Questa azione non indica una regressione della conoscenza ad un livello precedente, quando piuttosto una “ripartenza”. Ad ogni livello è infatti possibile che il soggetto necessiti di tornare ad un precedente livello di comprensione, ma nel *volgersi indietro* utilizza le conoscenze parziali acquisite per descrivere le configurazioni dei successivi livelli e attua un’integrazione che gli permette di riformulare il proprio pensiero con maggiore completezza e coerenza. Il *volgersi indietro* fa quindi parte del processo di comprensione matematica, perché testimonia una crescita cognitiva attuata come ridescrizione delle rappresentazioni e la rende completa. Per tali ragioni di complementarietà tra livelli e relazioni il processo di comprensione matematica può considerato *olistico*.

3.7.1 I LIVELLI

Il modello si basa sul concetto di *ricorsione*, che in matematica si riferisce alle funzioni che richiamano se stesse per la risoluzione di problemi. Dal punto di vista dell’apprendimento dire che esso si attua attraverso un livellamento ricorsivo significa che il riproporsi di azioni fisiche inerenti uno stesso fenomeno da parte di un soggetto che sta imparando avviene lungo una linea evolutiva di sempre maggiore consapevolezza cognitiva e padronanza concettuale (Margenau, 1987; Maturana & Tomm, 1986; Maturana & Varela, 1987; Vitale, 1988; Tomm, 1989). Analogamente ai modelli ad esso antecedenti, i livelli descritti da Pirie e Kieren non individuano prestazioni di competenza in matematica, ma inquadrano il presentarsi di una determinata azione sia in se stessa in relazione al contesto in cui si attua sia come crescita o evoluzione in quanto ri-proposta di un'azione analoga o simile, ma non uguale in una performance precedente.

Quel che gli autori considerano in aggiunta agli altri è il concepire la crescita cognitiva non solo in se stessa, ma anche in una possibile interazione sia interna al modello (es: *volgersi indietro*) sia verso l'esterno.

Procediamo ora con la descrizione approfondita dei livelli.

1. Fare: indica l'azione fisica del manipolare oggetti concreti, figure, simboli;
2. Elaborare immagini: subentra quando il soggetto riesce a darsi delle rappresentazioni di quanto esperito;
3. Possedere una forma: può essere considerato un primo livello di astrazione in quanto non c'è più il riferimento ad un esempio o ad un'azione. È il soggetto che a partire dalle immagini elaborate al livello precedente, costruisce uno schema che astrae le caratteristiche specifiche. È a questo livello che si formulano metafore. Dal punto di vista matematico i simboli matematici sono gli oggetti che utilizzano nel risolvere i problemi (Sorzio, 1999).
4. Notare proprietà: è il rilevare similitudini, distinzioni, combinazioni, connessioni all'interno degli schemi posseduti e l'elaborare oggetti con proprietà specifiche.

I primi quattro livelli rappresentano il nucleo della comprensione matematica basata sulla rappresentazione di azioni compiute su oggetti concreti. I simboli matematici sono utilizzati per descrivere strutture possibili o presenti nella realtà. In questo quadro l'ultimo livello, il quarto, è da considerarsi il più esterno della formazione di una conoscenza di tipo inconsapevole. Il suo raggiungimento dà la possibilità di tornare ai precedenti con un maggiore esperienziale cognitivo e dà accesso ai livelli successivi, che non trovano riscontro in azioni fisiche, ma sono costruiti dai bambini.

5. Formalizzare: rappresenta il pensare consapevole in cui non vi è riferimento alla realtà. Vi è l'astrazione delle proprietà comuni e il definitivo abbandono

della situazione di partenza. A questo livello si presentano le definizioni matematiche: si riconosce l'appartenenza degli oggetti matematici a classi costruite sulle immagini formate e sulle proprietà generalizzate.

6. Osservare: è il trovarsi nella posizione di riconoscere i teoremi, saperli formulare e provare, verificando la correttezza delle proprie concezioni.
7. Strutturare: è un'operazione strettamente connessa alla precedente in quanto localizza all'interno di un sistema matematico quanto osservato. Emergono le connessioni e la consequenzialità e si è in grado di rispondere al perché un certo ragionamento è valido.
8. Inventare: è il livello più esterno e ha una conformazione molto diversa dai precedenti. Gli altri livelli infatti, sebbene attuino un processo di superamento dell'uno sull'altro in senso crescente, fanno sì che la comprensione venga indirizzata, o meglio, segua una linea di convergenza che si determina dal precedente al successivo. In quest'ultima fase si mantiene il processo ricorsivo, ma il soggetto acquisisce la libertà di scegliere come a partire da una struttura matematica consolidata possa elaborarne una nuova comunque compatibile. Sono un esempio le geometrie non euclidee, che sono state inventate da alcuni matematici piuttosto che dedurre o argomentare postulati paralleli a quelli di Euclide.

4. LA DIDATTICA

4.1 Il profilo didattico della Scuola dell'Infanzia

Il profilo didattico della scuola dell'infanzia è da sempre oggetto di riflessioni e revisioni in quanto i soggetti coinvolti a vario titolo nella sua organizzazione sono numerosi e i ruoli che come livello di scuola ha occupato nel corso della storia sono stati diversi. Nata con funzione prevalentemente assistenziale, è stata caratterizzata per lungo tempo dalla mancanza di strumenti volti a verificare le competenze raggiunte dai bambini frequentandola o a monitorare le procedure di insegnamento-apprendimento che venivano attuate. Mentre le ricerche in ambito psicopedagogico dimostravano la potenzialità e la piena espansione evolutiva dei bambini nella fascia di età tra i 3 e i 6 anni, la ricchezza di quest'ambiente come conteso didattico è stata per lo più relazionata al consenso e all'esperienza che gli insegnanti hanno dimostrato sul campo. Il fiorire di realtà legate a nomi quali quelli di Loris Malaguzzi o Bruno Ciari unito alla formazione del corpo docente e dirigente attraverso specifici percorsi e al diffondersi di un'ampia letteratura pedagogica hanno portato pian piano questa scuola ad acquisire una nuova dignità sui piani culturale, formativo, sociale ed istituzionale. Si è aperto un vivo interesse che ha fatto passare da pratiche episodiche o casuali a sistematicità ed intenzionalità nei processi educativi. Si è usciti dalle varie stereotipie di bambini come piccoli adulti o bisognosi solo di cura, lasciando spazio alla scoperta, all'osservazione, al confronto, alla dinamicità del fare (Zammataro, 2004). L'approccio didattico della scuola dell'infanzia ha cominciato ad evolversi secondo una certa scientificità che ha visto negli Orientamenti del '91 una prima espressione ufficiale.

4.2 La Didattica alla Scuola dell'Infanzia

L'offerta formativa della scuola dell'infanzia deve rispondere a diverse esigenze individuate a partire da un'attenta analisi pedagogica che fa emergere come l'ambiente educativo non possa essere statico e rigido e i docenti portatori di un sapere settorializzato o formale. L'età dai 3 ai 6 anni è molto plastica, contraddistinta da comportamenti motori vivaci e in continua esplorazione, il gioco è l'attività prevalente, il desiderio di conoscere vivido, ma l'attenzione non prolungata nel tempo. Lo spazio fisico può essere organizzato in angoli d'interesse che il bambino con il tempo impara a gestire autonomamente attraverso poche e semplici regole date all'adulto. La disposizione degli ambienti deve coinvolgere svariate tipologie organizzative: dall'atelier in cui il bambino può dedicarsi al disegno libero attraverso più tecniche pittoriche (pennarelli, ma anche pastelli, colori a cera e a tempera) ai giochi in scatola in cui poter stare con i compagni, dai libri su cui ricostruire le storie ascoltate alle costruzioni in cui manipolando può dare forma alla propria immaginazione. Analogamente la proposta didattica deve offrire un susseguirsi di attività differenziate ed aperte, lontane dal simbolismo del mondo adulto. La principale modalità di interazione deve essere quella esperienziale, in cui vi è la possibilità di fare, vedere, osservare, che trova nel laboratorio la sua espressione didattica. Il laboratorio, come verrà descritto poi, non va inteso qui solo come spazio fisico, ma anche come luogo figurato in cui l'insegnante ha la possibilità di guidare, ma non imporre, l'azione del bambino contribuendo alla costruzione del suo sapere (Baldacci, 2007). L'accesso alle categorie concettuali, ovvero sia la formalizzazione del sapere che avverrà in modo effettivo nei successi livelli di scuola, si attua come l'acquisizione di strategie per la memorizzazione, la rappresentazione, il riconoscimento e la generalizzazione di quanto esperito attraverso il confronto, il racconto e la mediazione dialogica dell'insegnante. Da qui si intende come la didattica che caratterizza la scuola dell'infanzia non deve essere strutturata nelle modalità e nei contenuti quanto piuttosto in un approccio che conferisca validità scientifica a processi di (a) osservazione, (b) verifica e (c) documentazione (Zammataro, 2004). Con (a) osservazione ci si riferisce all'osservare da parte dell'insegnante del bambino e delle sue specificità per delinearne l'evolversi e progettare interventi didattici coerenti e calibrati su interessi e bisogni reali. L'osservazione sistematica non è occasionale, ma costante nel tempo e attuata per mezzo di tecniche connotate dal punto di vista metodologico. In questo modo (b) valutare il percorso di apprendimento non significa somministrare schede, ma considerare competenze acquisite nel tempo e all'interno di un contesto in linea con la stessa proposta formativa. Quel che ne risulta (c) è un percorso documentato non attraverso strumenti ministeriali o burocratici, ma da note narrative ed immagini che tengono traccia delle esperienze didattiche e offrono un profilo completo e dettagliato dello sviluppo e dell'apprendimento del bambino. La nuova figura docente della scuola dell'infanzia è lontana da quella dell'assistente dedito alla custodia e alla soddisfazione dei bisogni "meno nobili" dei bambini o a quello dell'animatore che intrattiene divertendo. Si connota invece come un vero e proprio insegnante capace di lavorare in equipe, che ha ricevuto una solida formazione iniziale e che è sempre dedito all’aggiornamento e alla specializzazione. Il suo agire didattico testimonia un bagaglio di conoscenze diversificato con un adeguata padronanza dei contenuti, dei processi di apprendimento, dei principi pedagogici e didattici e da ultimo, ma non meno importante di tutti questi aspetti che caratterizzano l’insegnamento disciplinare a bambini in età prescolare (Backman & Attorps, 2012).

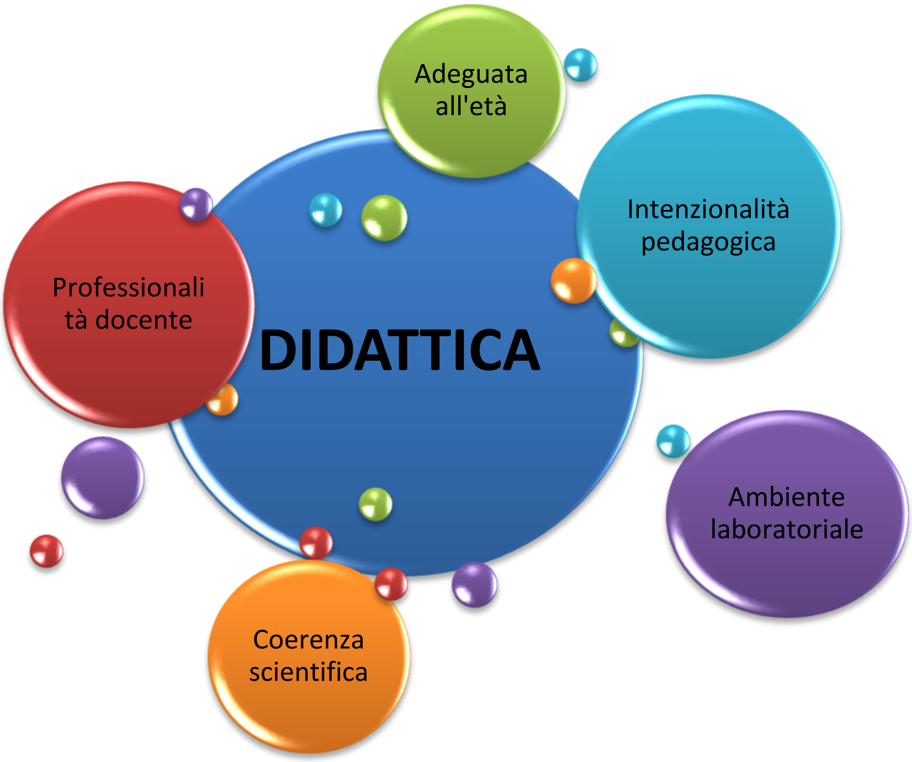


Fig. 1: Aspetti che definiscono la didattica ala scuola dell’infanzia.

Per concludere possiamo riassumere che la didattica della scuola dell’infanzia dev’essere fondata su pilastri scientifici, guidata dall’intenzionalità pedagogica, coerente con le caratteristiche del bambino, svolta all’interno di ambiente aperti, strutturati come laboratori ricchi di stimoli di diversa natura ed affrontata da insegnanti professionalmente preparati (Franceschini & Borin, 2014).

4.3 Il laboratorio

All’interno delle Indicazioni Nazionali (2012) si legge che “il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento"(p.27). Descritto ampiamente in riferimento alla scuola primaria, compare come indicazione metodologica nei documenti ministeriali, per la prima volta, nelle tanto discusse Raccomandazioni per l'attuazione delle *Indicazioni nazionali per i Piani Personalizzati delle Attività Educative nelle Scuole dell'Infanzia* del 2004. In tale strumento i laboratori vengono descritti come "centri specializzati che richiedono un'azione del gruppo dei docenti, basata su differenziate competenze professionali, adeguatamente armonizzate". Se ne danno delle indicazioni organizzative sulle tipologie in relazione alle attività contemplate o ai materiali che li connotano. Senza entrare nel merito dell'adeguatezza di tali specificità, quel che viene sottolineato è il carattere di eterogeneità che li contraddistingue e le svariate possibilità che offrono. Organizzare l'ambiente scuola in laboratori significa attrezzare lo spazio in modo tale che diventi funzionale allo svolgimento di attività sempre più strutturate, poiché centrate su precisi oggetti culturali, che fanno evolvere la naturale curiosità in costruttive e piacevoli scoperte. Il laboratorio ha quindi, in senso stretto, una spazialità di posizione che lo distingue dalla consueta aula. In senso largo invece il laboratorio connota una spazialità che può essere detta di situazione. Individua il sentirsi in una situazione laboratoriale come il lavorare in modo attivo, partecipato attraverso cui l'apprendimento è quello dell'imparare facendo. In questo senso il laboratorio non è tale, ma si fa in tale in ragione della qualità dell'attività che l'insegnante propone ai propri allievi. Si passa da uno spazio fisico ad un contesto, che definisce il significato della proposta didattica, e da un "territorio" ad una "mappa" come atteggiamento mentale di propensione attiva e riflessiva verso una certa tematica (Baldacci, 2004). Il laboratorio è specifico per un'oggettualità che può essere legata ad una disciplina o a più discipline in un'ottica di trattazione trasversale di un contenuto, ma può anche essere definita attraverso un medium, cioè come campo culturale che permette l'esecuzione di attività volte a far fare esperienza, o come dominio simbolico-conoscitivo che attiva un'esperienza riflessiva di ricerca ed indagine. Se con il crescere dell'età degli studenti può risultare difficoltoso attuare sempre dei laboratori, in quanto richiedono tempi lunghi o sembrano essere meno efficienti della lezione frontale, secondo il criterio dell'economicità dei tempi di trattazione e assimilazione dei contenuti, alla scuola dell'infanzia la modalità laboratoriale si presenta essere, proprio per le sue caratteristiche, la più indicata. Lo stile d'apprendimento attivo, il fare, il provare, lo sbagliare ed il riprovare ben rivestono il modo di conoscere del bambino. Il suo valore formativo inoltre non risiede solamente negli esiti esperienziali immediati, ma anche negli effetti che a lungo termine ha sull'apprendimento. Le situazioni create attraverso il laboratorio infatti da un lato accolgono la naturale propensione conoscitiva del bambino e dall'altro sviluppano in lui delle abitudini cognitive che lo guidano nel conoscere. Si passa dal semplice fare al capire come fare, dal provare al ragionare, dall'ipotizzare al controllare quanto supposto. In questo particolare contesto il bambino prende consapevolezza di quanto lo circonda, scopre regolarità, individua sistemi di rappresentazione mentre l'insegnante lo conduce ad un prima formalizzazione del proprio sapere attraverso l'esperienza riflessiva, il dialogo, il confronto.

4.4 I MATERIALI DIDATTICI

Recenti studi affermano che includere l'impiego di materiali ausiliari nelle attività didattiche contribuiscono a rendere la matematica attiva, interessante e che vale la pena di essere investigata da parte degli studenti (Skoumpourdi, 2012). I materiali didattici permettono infatti a tutti i bambini di sviluppare equamente il proprio pensiero matematico, perché offrono eque opportunità di interazione con i concetti e le procedure matematiche (Szendrei, 1996). Inoltre permettono di stimolare abilità che in un contesto extra scolastico non sarebbero ad ugual portata di tutti. Inizialmente l'utilizzo di materiali ausiliari però non è stato accettato all'unanimità tra gli esperti. Se infatti vi chi era chi sottolineava come essi permettessero di superare eventuali difficoltà legate alla comprensione dei concetti ed aiutassero un apprendimento non mnemonico della disciplina, sono stati difficilmente accettati da una seconda corrente di pensiero. Alcuni studiosi ritenevano infatti che i materiali, proprio per le loro caratteristiche di oggetti, non presentavano il lato astratto della matematica ed ostacolavano la concettualizzazione tipica dell'atteggiamento matematico. Il controverso dibattito ha portato alla completa sospensione dell'utilizzo di materiali didattici in ambito matematico. Grazie al pensiero di Comenio e Pestalozzi, che hanno sottolineato l'importanza dell'esperienza e della rappresentazione sia per l'insegnamento sia per l'apprendimento e hanno riscoperto l'età dell'infanzia in termini di potenzialità, opportunità e specificità, i materiali didattici sono stati riscoperti e re-introdotti all'interno del panorama educativo. Molti studiosi, quali Maria Montessori o Fröbel, si sono addirittura cimentati nella progettazione e nella creazione dei propri "materiali", ancora oggi riconosciuti, coniugando da un lato le ricerche di stampo più prettamente cognitivo sulle modalità di apprendimento e dall'altro i concetti disciplinari su cui volevano far focalizzare l'attenzione del bambino. Inoltre le numerose esperienze testimoniano come sia veramente difficile, se non impossibile, immaginare l'attività didattica della scuola dell'infanzia senza la presenza di strumenti manipolativi. Essi risultano indispensabili per il coinvolgimento attivo dei bambini. Come dimostrato da Piaget (1967) i bambini non hanno la maturità mentale atta a comprendere i concetti matematici presentati solo attraverso parole o simboli: hanno bisogno di esperire in prima persona attraverso la manipolazione ed il disegno·(Van Oers, 1997). Disporre di oggetti fisici, che permettono di interagire con i principi matematici scoprendoli, applicandoli e dandone una primitiva definizione, crea una base solida per la formalizzazione che avverrà a livelli di scolarizzazione più alti (Skemp, 1977). Il pensiero astratto infatti si basa sulla percezione materiale del mondo. L'esperienza pratica permette a chi sta imparando di creare immagini "mentali" a cui riferirsi per la strutturazione dei concetti astratti.

4.4.1 SCEGLIERE, PROGETTARE E INTRODURRE NUOVI MATERIALI DIDATTICI

Disporre di una grande varietà e tipologia di materiali non solo aiuta gli studenti ad organizzare e a strutturare il loro sapere, ma permette loro di imparare a trattare i concetti e le procedure matematiche da diverse prospettive. Tuttavia l'impiego di materiali didattici deve far attenzione a possibili rischi, che sembrano riproporre in chiave attuale le criticità di chi nei secoli scorsi li aveva considerati lontani dalla disciplina matematica. Scegliere i materiali in modo meccanico, per non dire abitudinario, senza tener conto delle caratteristiche dei bambini che li useranno, senza una loro adeguata contestualizzazione, senza predisporre una proposta variata fa sì che l'esperienza degli stessi bambini termini con il concludersi della mera attività manipolativa. In questo modo non solo l'esperienza non viene interiorizzata come significativa, ma non si gettano le basi per la costruzione del ponte che permette alla concettualizzazione astratta di trovare memoria tra le esperienze pratiche. (Pimm, 1995).

Non sempre però i materiali didattici presenti in commercio, sebbene disponibili in grande varietà e quantità, si rilevano sufficienti o adatti ad interpretare la proposta didattica di un insegnante e sorge l'esigenza di doverne produrre di nuovi. Le motivazioni che possono spingere all'ideazione di nuovi supporti didattici possono essere svariate e nascere sia dalla riflessione di un singolo docente sia dalla ricerca e sperimentazione scientifica di esperti. Vi può essere l'esigenza di perfezionare alcuni strumenti esistenti, che hanno causato il sorgere di eventuali misconcezioni tra gli studenti o presentato dei limiti (Szendrei, 1996), di rispondere a bisogni di apprendimento specifici di determinati contesti, di adattare uno strumento in modo da interpretare al meglio i bisogni di un gruppo di alunni, di innovare in modo sempre più efficace la didattica, di ottenere risultati migliori da parte degli alunni (Burkhardt, 2007). L'esperienza nelle classi può mostrare come uno strumento didattico sia difficoltoso nel suo utilizzo per gli alunni o formato da componenti non adatte al tipo di pubblico a cui viene proposto. Un'analisi approfondita di pratiche didattiche e disciplina può far emergere la mancanza di oggetti in grado di rendere concreto e manipolabile uno specifico concetto o l'attesa da parte dei protagonisti del processo di insegnamento-apprendimento di strumenti in grado di supportare o migliorare tale dinamica.

Una, più d'una o eventualmente anche altre motivazioni tra quelle elencate sopra può dare luogo alla creazione di nuovi materiali didattici. Il processo in generale consta di quattro fasi: progettazione, costruzione, implementazione ed uso. L'attuazione di questo processo non è però lineare ed automatica. Affinché l'introduzione di un supporto didattico nuovo sia consapevole e contestualizzata, va effettuata una riflessione preliminare che consideri l'oggetto in sé, il concetto disciplinare che intende presentare e il pubblico a cui si rivolge. Sul piano dell'*oggetto* vanno presi in considerazione i materiali già presenti, osservandone caratteristiche, aspetti di similarità e di differenza in relazione alla specificità del concetto affrontato, peculiarità di forma (es: gioco motorio o da tavola, strumento operativo…), punti di forza e limiti. Dal punto di vista della *disciplina* vi deve essere uno studio approfondito del concetto su cui si vuole focalizzare l'attenzione che non prescinda dalle teorie dell'apprendimento o dalle pratiche didattiche. Un determinato oggetto si colloca infatti all'interno di uno specifico approccio e si pone come mediatore del processo di insegnamento-apprendimento. Gli ostacoli che insegnanti e scolari incontrano di fronte a determinati argomenti fanno parte integrante di tale processo e non possono non essere motivo di indagine. Gli *studenti* infatti sono portatori di un certo tipo di conoscenza informale, hanno interessi in relazione all'età, alle esperienze, al contesto di appartenenza.

L'effettiva introduzione e l'uso dei nuovi materiali all'interno del contesto scolastico devono essere poi sottoposti ad un ulteriore riflessione che esprima una valutazione sulla loro validità. I tre piani di indagine evidenziati sembrano riprendere rispettivamente quelli che Zbiek, Heid, Blume e Dick (2007) individuano come criteri per la valutazione di strumenti cognitivi. Gli autori si rifanno al concetto di “fidelity”, traducibile in italiano con il termine *attendibilità* e individuano tre tipi di attinenza connotanti uno strumento didattico: l’attendibilità pedagogica, l’attendibilità matematica ed infine l’attendibilità cognitiva. L’attendibilità pedagogica indica in che misura un supporto connota un certo tipo di apprendimento, quella matematica la capacità di un oggetto di rappresentare una proprietà matematica e l’attendibilità cognitiva è espressione di un modo di pensare e elaborare strategie da parte dei soggetti che stanno imparando. Proprio per questa analogia di interesse tra i tre criteri di attendibilità e i tre piani di riflessione, gli stessi criteri possono costituire uno strumento atto a valutare l’efficacia e l’implementazione di nuovi materiali didattici.

4.4.2 Tipologia di materiali didattici

Esistono molti tipi di materiali educativi. Per citarne alcuni Piaget, ad esempio, distingue tra materiali propri dell’insegnare (es: Tangram) e materiali propri dell’imparare (es: blocchi logici); Hart tra linguaggi informatici, libri e manipolativi; Szendrei tra materiali comuni, materiali concreti e strumenti specifici per la didattica. Tra i primi identifica sia gli strumenti che appartengono alla quotidianità sia gli artefatti. Più vicino a noi Bartolini Bussi e Boni propongono 4 gruppi: materiali concreti, strumenti e artefatti culturali, oggetti tecnologici e software informatici. Ahmed, Clarck-Jeavons e Oldknow parlano infine di materiali didattici intendendo artefatti e strumenti.

Tutte le varie categorizzazioni proposte dai diversi autori, possono essere riferite ad una distinzione generale tra (a) supporti esistenti e appartenenti alla vita di ogni giorno quali il corpo e le sue parti, ma anche i libri, le storie, i giochi… e (b) materiali ideati e realizzati con uno specifico intento educativo. A quest’ultimo grande insieme fanno riferimento oggetti come i doni di Froebel, i regoli di Cuisenaire, i blocchi logici di Dienes, i pentamini… così come tutti i vari artefatti impiegati a sostegno del processo di insegnamento-apprendimento.

Per quanto riguarda i numeri e le operazioni, gli insegnanti delle scuola dell’infanzia italiane utilizzano sia materiali strutturati sia attività che contraddistinguono la quotidianità e sono ben conosciute dai bambini, ma che con adeguati attenzioni ed adattamenti si prestano all’insegnamento dei concetti matematici. Tra i più diffusi troviamo

- *calendario*: è lo strumento che per antonomasia misura il tempo nella sua complessa struttura di susseguirsi di giorni, settimane, mesi… evidenziando al contempo aspetti quali durata, simultaneità e ciclicità di eventi e fenomeni. Nelle aule scolastiche si trovano diversi tipi di calendari che, a seconda della conformazione, focalizzano l'attenzione dei bambini su differenti aspetti matematici;
- *libri e storie*: da sempre i libri e le storie appartengono al panorama dell'infanzia per le potenzialità che il racconto e le immagini hanno nello sviluppo dei bambini. Il racconto di un insegnante guida i bambini a comprendere concetti matematici che possono connotarsi come azioni e elementi appartenenti a situazioni semplici e familiari. I libri inoltre offrono un supporto visivo che aiuta ad avere una rappresentazione di quanto ascoltato. Affinché vi sia una riflessione consapevole e significativa a partire dai racconti i bambini devono essere coinvolti in attività che permettano loro di interiorizzare in modo esperienziale. Esistono in commercio molti "libri matematici" il cui intento è esplicitamente volto all'argomentazione o alla visualizzazione di un concetto matematico così come è possibile ri-leggere o modificare storie note al fine di evidenziarne le ricorsività matematiche presenti.
- *cartelloni o poster*: ne esistono di vari tipi e vengono utilizzati in più occasioni e ambiti: dall'università alle aziende per documentare ricerche, indagini di mercato… A scuola riempiono le pareti delle aule e hanno vari intenti quali presentare un argomento, sintetizzare o rappresentare un percorso di studio; possono essere anche interattivi permettendo ai bambini o all'insegnante di modificarli e illustrare un concetto matematico;
- *rime e filastrocche*: caratterizzano molti momenti della scuola dell'infanzia come l'inizio giornata, l'introduzione di una nuova attività o il passaggio da una all'altra. Sono caratterizzate dal ritmo a volte coordinato con movimenti delle mani o del corpo in generale. Non hanno potenziale didattico specifico, ma aiutano nel consolidamento e nella memorizzazione di processi quali la progressione dell'ordine numerico, le procedure di conteggio, il meccanismo di ricorsività;
- *oggetti manipolativi*: sono oggetti quali cubi, biglie, ma anche scatole, lego®, bastoncini o *cannucce*… che si prestano ad essere raggruppati, allineati, contati,

smontati, disegnati, proiettati diventando operatori di una procedura matematica volta alla successiva concettualizzazione;

- *giochi*: sono l'attività principale nella vita quotidiana dei bambini e sono alla base della metodologia educativa della scuola dell'infanzia. Attraverso il gioco i bambini si divertono ed appassionano, ma al contempo fanno ragionamenti, congetture, esprimono idee… Il giocare crea situazioni che richiedono di superare ostacoli, porre e risolvere problemi concreti, confrontare e stimare, mettere in relazione elementi e trovare le migliori soluzioni. La struttura dei giochi classici, quali quelli da tavolo o i giochi di carte, ben si presta ad essere "matematizzata" stimolando i bambini a riconoscere o utilizzare i numeri ed altri concetti matematici;
- *artefatti*: sono materiali concreti, o loro riproduzioni, che i bambini incontrano e possono manipolare caratterizzati da una "duplice natura": sono oggetti *materiali* che appartengono alla quotidianità, ma allo stesso tempo *ideali* perché mediano l'acquisizione di un linguaggio simbolico e di congetture formali (Bonotto, 1999). Secondo altre visioni vengono considerati artefatti anche alcuni materiali strutturati che contraddistinguono il laboratorio di matematica perché presenti nella fenomenologia storica della matematica. Oggetti come il *pallottoliere*, l'*abaco*, la *linea dei numeri* sono stati elementi costitutivi della costruzione dei significati matematici nel tempo o, meglio, incorporano significati matematici (Bartolini-Bussi, 2009).

4.4.3 Gli artefatti

L'idea di artefatto è molto generale e comprende diversi tipi di "oggetti", prodotti dagli esseri umani nel corso dei secoli: suoni, gesti; utensili e strumenti; forme orali e scritte del linguaggio naturale; testi e libri; strumenti musicali; strumenti scientifici; strumenti informatici, ecc.. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Quello che rende un particolare oggetto un artefatto è l'essere caratterizzato da peculiarità intrinseche, progettate e realizzate allo scopo di eseguire un particolare compito (Verillon & Rabardel, 1995).

Se il contributo degli artefatti in campo educativo è noto, basta pensare che da molto tempo i libri sono i principali artefatti utilizzati nelle scuole, non è altrettanto chiara la teoria che ne ha formulato la genesi concettuale. O meglio, non esiste un'unica teoria a

cui far riferimento in quanto più d'uno sono gli approcci che evidenziano il contributo che l'artefatto dà nel passaggio dalla sfera pratica a quella dell'intelletto e viceversa.
Riferendosi al contesto italiano, possiamo considerare due definizioni principalmente: quella degli artefatti culturali di Bonotto e quella degli artefatti cognitivi di Bartolini Bussi e Mariotti.
Bonotto elabora il suo approccio a partire dalle riflessioni di Hans Freudenthal. Secondo il matematico olandese la matematica è un'attività che si esplica costruendo quelle strutture attraverso le quali la nostra mente "legge" la realtà che osserviamo (Felice Manara, 1994). L'apprendimento della matematica è una "reinvenzione" in cui lo studente attua un processo di progressiva e consapevole matematizzazione. Le strutture formali sono la rielaborazione e naturale estensione della realtà esperienziale. Perché ciò avvenga nell'ambiente di insegnamento-apprendimento l'alunno deve essere incoraggiato a "cercare, riconoscere, analizzare e riflettere su «fatti matematici» riconosciuti in quelli che Freudenthal chiama «contesti ricchi». Il termine "contesto" si riferisce a "quel dominio della realtà che può essere matematizzato", mentre il termine "ricco" sottolinea le molte opportunità di strutturazione che la situazione può offrire (Bonotto, 2012). Bonotto riconosce un esempio di «contesto ricco» negli *artefatti culturali* ovvero sia in materiali concreti, o loro riproduzioni, che i bambini incontrano e possono manipolare nella vita di ogni giorno. Nella definizione data da Bonotto l'artefatto culturale è "un rappresentante, un testimone della società in cui viviamo, della cultura a cui apparteniamo, dei mezzi e modi di comunicare tipici della nostra epoca" . "Attraverso il loro uso in aula l'insegnante stimola la riflessione dei propri alunni sottoponendolo a nuove situazioni didattiche: il contesto si arricchisce di materiali pregni di significati, che i bambini devono imparare a leggere e combinare. Attraverso le proprie ricerche Bonotto ha dimostrato come oggetti quali gli scontrini dei supermercati, le etichette presenti nei vari prodotti, le guide televisive, il righello... possano essere impiegati con successo nella scuola sostituendo i tradizionali testi dei problemi a parole ed il materiale strutturato, favorendo l'emergere delle conoscenze extrascolastiche degli alunni. La verbalizzazione e l'elaborazione della conoscenza di "senso comune", come viene definito da Freudenthal, permette agli artefatti culturali di diventare un punto di partenza per l'apprendimento di nuove conoscenze in rapporto al livello scolastico frequentato dagli alunni. Utilizzando artefatti culturali significativi ed attuali si aumentano le occasioni di incontro tra la matematica scolastica e le esperienze di vita portando la matematica stessa ad essere

intesa come uno strumento per interpretare e capire il mondo. In questo modo gli artefatti diventano dei veri e propri strumenti di mediazione e di integrazione tra i contenuti delle ore scolastiche e la conoscenza di senso comune, facendo in modo che il bagaglio culturale maturato a scuola venga impiegato anche al di fuori e che, al contempo, il senso pratico partecipi della costruzione dei ragionamenti formali.
La riflessione di Bartolini Bussi, di matrice vygotskiana, parte dalla definizione di *artefatto cognitivo* data da Donald Norman (1993) di dispositivo artificiale ideato dall'uomo per agire in vari modi sull'informazione in particolare per conservare, presentare, operare sull'informazione, espandendo in tal modo le capacità cognitive. L'uso di un artefatto cognitivo trasforma la conoscenza stessa per la quale è stato progettato, perché permette di svolgere in maniera più efficiente funzioni solitamente affidate alla mente dell'uomo, mettendo a disposizione dispositivi o supporti che esternalizzano operazioni meccaniche e liberando la mente al fine di affinare nuove e più complesse abilità. Gli artefatti cognitivi presentano un *aspetto pragmatico o esperienziale*, l'orientamento verso l'esterno che consente di modificare l'ambiente circostante, e un *aspetto riflessivo*, l'orientamento verso l'interno che permette ai soggetti di sviluppare l'intelligenza. L'artefatto si pone al centro del processo di interiorizzazione definito come la ricostruzione interna dell'azione esterna. Tale processo non corrisponde al puro trasferimento dell'attività esterna su un piano mentale preesistente, ma si tratta di un processo costitutivo del piano mentale stesso. L'artefatto modifica la percezione della realtà interpretando e producendo segni volti a supportare l'attività mentale. I segni fungono da mediatori tra l'individuo ed il contesto e la mediazione esercitata dagli stessi artefatti-segni tra i processi esterni e quelli interni è di tipo semiotico. L'impiego di artefatti in contesti scolastici inoltre fa sì che l'artefatto sia da un lato messo in relazione ad un compito specifico, a cui fornisce mezzi di soluzioni adatti, e dall'altro collegato ad una specifica conoscenza matematica. Si hanno da un lato segni il cui significato è fortemente legato alle operazioni svolte che pongono in relazione l'artefatto con il compito e dall'altro segni, culturalmente determinati, il cui significato esprime la relazione tra l'artefatto e la conoscenza.
Come affermano Bartolini Bussi e Mariotti la relazione tra i due sistemi paralleli di segni (fig, 2), correlati ad un artefatto, non è né evidente né spontanea e la sua costruzione diventa un cruciale scopo educativo che può essere realizzato promuovendo l'evoluzione

dei segni che esprimono la relazione tra l'artefatto e i compiti in segni che esprimono la relazione tra artefatto e sapere (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009).

Fig. 2: Mediazione semiotica

4.5 Il racconto di storie

Lo *storytelling*, o racconto di storie, si presenta come una metodologia didattica che permette di introdurre la matematica sia in modo attivo sia con continuità all'interno del curriculum scolastico, evitando che venga presentata a spot senza una reale connessione con il percorso svolto durante l'anno o diventi essa stessa il progetto dell'anno scolastico. Carrada (2005) afferma a tal riguardo che "qualunque sia il mezzo, il formato, lo scopo e il contenuto, comunicare la scienza al pubblico vuol dire saperla trasformare in una storia". Da sempre infatti il racconto di storie, personali o fantastiche che siano, risulta una delle modalità preferite dagli uomini per comunicare e per condividere. I bambini in prima linea amano raccontare storie ed ascoltarle. Riuscire a introdurre la matematica attraverso le storie può diventare un canale d'accesso privilegiato che crea nell'alunno ascoltatore un'immagine vivida, significativa e facilmente recuperabile dalla memoria (Haven, 2000). Attraverso le storie gli alunni vengono coinvolti in contesti che portano a simulare, esplorare, immaginare, trovare punti di riferimento, indagare favorendo la comprensione di idee e concetti astratti.

Alla scuola dell'infanzia il racconto di storie, in generale, aiuta il bambino a sviluppare proprietà di linguaggio e ad ampliare il lessico. Con l'acquisizione del linguaggio non solo migliorano le capacità comunicative, ma divengono possibili le operazioni di concettualizzazione che stanno alla base dello sviluppo mentale e dell'educazione intellettiva, aiutando la comprensione dei contenuti matematici.

4.5.1 Che cos'è un racconto

Prima di descrivere come il racconto di storie possa essere coniugato alla didattica della matematica è bene interrogarsi su cosa sia una storia. Accade infatti in modo accidentale di imbattersi in una "storia matematica" e, se avviene, si presenta come un momento di passaggio prima del "vero lavoro" sui numeri e le operazioni. Le storie presentano invece caratteristiche strutturali che le rendono adatte non solo all'essere un elemento cardine durante le ore di matematica, ma anche a renderla più accessibile e coinvolgente per gli studenti. Delle storie esistono diverse tipologie e numerosi sinonimi tanto che non vi è una definizione univoca. Molte volte questa definizione viene data come non necessaria o ovvia, perché alla portata di bambino. Egan (2004, 2008) nel tentare di formularla ha colto nella storia un'unità narrativa in grado di trasmettere quanto vissuto e provato dai suoi protagonisti. In tutti i vari tipi di storie vi è un inizio in cui emerge un conflitto o che descrive una situazione di tranquillità che troverà nel prosieguo fattori di complicanza. In entrambi i casi la conclusione porta alla risoluzione del tutto. Esistono poi elementi narrativi quali il *flashback*, ritorno al passato, o l'*anticipazione*, che servono a creare maggiori interessi o suspense nei confronti della trama. Quel che contraddistingue il racconto dalle altre forme narrative, quali report scientifici, articoli, cronache… è proprio la capacità di coinvolgere, comprendere, catturarci dal punto di vista emozionale verso i contenuti. Green (2004) evidenzia anch'egli il coinvolgimento che le storie creano in chi le ascolta ma, con un punto di vista diverso da quello di Egan, collega questo al come le informazioni sono strutturate nella trama e quindi trasmesse. Questo ci permette di conferire loro un significato che trova riscontro, o che viene giustificato proprio, all'interno delle nostre vite o degli ambienti che ci circondano. Green si focalizza maggiormente sul ruolo dell'immedesimazione del soggetto all'interno del racconto mentre Egan ne sottolinea gli aspetti emotivi. Entrambi però individuano il ruolo chiave della struttura e del momento del conflitto da cui tutto poi si succede.

Il valore delle storie nell'insegnamento è legato al loro coinvolgere gli studenti, che può interessarli ed appassionarli alla disciplina, e la loro immaginazione a partire dai materiali del curriculum. Le storie che prevalentemente fino ad ora sono state presentate in matematica riguardano come sia (noiosa) la matematica, come (con umiliazione) vengano vissute le esperienze scolastiche legate ad essa e come siano (inutili) i suoi esercizi. "Narrare una storia è un modo per stabilire un significato" (Egan, 1986) e questa è una delle finalità principali nell'insegnamento della matematica. Certamente non tutti i contenuti matematici possono essere appresi attraverso una storia, ma esse possono far uscire dall'idea di una disciplina percepita solo come la manipolazione di simboli in favore di una maggiore consapevolezza conoscitiva. (Zazkis & Liljedahl, 2009)

4.5.2 I DIVERSI TIPI DI STORIE

Le ricerche dimostrano come l'impiego di storie in classe susciti non solo quanto descritto nel paragrafo precedente, ma possa servire ad ulteriori e diversi intenti. Il loro approccio crea un'atmosfera di supporto all'insegnamento che rompe la consueta routine e permette di rientrarvi alla ricerca di nuove suggestioni. Nel caso specifico della matematica il parlare, il descrivere una situazione, l'argomentare aiuta a superare difficoltà insorte e dà concretezza ad un'idea, portando al superamento di un ostacolo o alla risoluzione di un elemento problematico. Una possibile ragione di questo può essere ritrovata nella caratteristica delle storie di avere, a differenza della realtà, sembra una fine (Egan, 2008). Il finale può quindi creare l'immagine di una metà raggiungibile o di una soluzione che è non incalcolabile, ma possibile perché elaborata riflettendo su un contesto e attraverso strategie risolutive non casuali.

Rispetto ai vari tipi di storie che possono veicolare un'argomentazione matematica, la distinzione non va posta in termini di genere letterario e di strumento mediale che la presenta quanto piuttosto rispetto al tipo di coinvolgimento creato attorno ai contenuti matematici. Zazkis e Liljedahl (2009) distinguono

- storie che creano uno scenario all'interno del quale svolgere un'attività matematica;
- storie la cui trama si conclude dando inizio all'attività matematica;
- storie che articolano un'attività matematica e che continuano attraverso e con la riflessione matematica;
- storie che permettono di introdurre un nuovo concetto matematico;
- storie che spiegano una regola sostituendosi ad una memorizzazione controintuitiva;
- storie che pongono domande;
- storie che si presentano sotto forma di brevi scherzi, controsensi, aneddoti divertenti.

Le storie possono essere sia create dal nulla, ed in tal caso l'insegnante deve dimostrare non solo un'approfondita conoscenza dei contenuti matematici ma anche una certa creatività nello strutturare il contesto all'interno del quale questo si articola, nonché adattate a partire da storie già scritte o conosciute. Un insegnante può anche riconoscere gli aspetti matematici che una storia coinvolge nella sua formulazione originaria. In questo caso va posta molta attenzione al narrare, che non è meno importante dei contenuti, ma al contrario può introdurre, soprattutto in bambini della scuola dell'infanzia, a particolari del racconto (il numero di un oggetto, una corrispondenza, una seriazione…) alla quale non avevano mai dato molta attenzione. L'insegnante può avviare riflessioni diverse dalle consuete attività che seguono o accompagnano una lettura partecipata con i bambini. È bene precisare che alla scuola dell'infanzia è difficile individuare in modo chiaro a quale fra le tipologie di storie sopra elencate appartengano quelle presentate. Le storie infatti si connotano in maniera trasversale come scenari o contesti che sono il preludio ad un'attività matematica e al contempo rendono quella stessa attività tale ed attuabile. A questo livello scolastico non si possono infatti proporre esercitazioni fini a se stesse o definizioni da imparare. Vi deve sempre uno sfondo, più o meno fantastico, sul quale i bambini possono confrontarsi, discutere, trovare soluzioni, immaginare conclusioni, trovare riscontri con il proprio vissuto. Se, come nel caso della matematica, lo stimolo che l'insegnante lancia vuole far emergere un conflitto, la storia è una storia che non è propriamente una storia. Evocano situazioni problematiche semplici, che offrono ai bambini la possibilità di descrivere ed argomentare i concetti più astratti prendendone consapevolezza e favorendo l'articolarsi della discussione matematica. Il significato matematico diventa così un processo dialettico in cui pensiero narrativo e paradigmatico (Bruner,1996) hanno ruoli complementari: il primo può essere visto come un modo per sostenere e arricchire il secondo (Sinclair et al, 2009).

5. SCELTE METODOLOGICHE

5.1 RICERCA COME DESIGN

Il crescente interesse verso i processi di apprendimento è stato accompagnato dal definirsi di una nuova prospettiva di indagine educativa. Si è passati da un'impostazione paradigmatica contraddistinta da coerenza ed unità interne ad una di natura pluralista che ha portato a guardare agli stessi processi di apprendimento con una nuova ottica. Prima l'apprendimento era definito principalmente attraverso due prospettive. Da un lato era la conseguenza dell'applicazione di una particolare metodologia di studio volta ad indagare lo sviluppo del pensiero degli studenti in relazione ad uno specifico contenuto disciplinare. Dall'altro veniva costruito a partire dai contenuti e dagli alfabeti disciplinari dei singoli campi di indagine. La ricerca recente ne ha invece fatto emergere il carattere distribuito che guarda al conoscere come ad un processo costruttivo ad opera del soggetto che apprende e legato al contesto in cui si articola e alle attività di cui è protagonista (Barab & Squire, 2004).[1] Ne consegue un sistema educativo complesso dove si intersecano (a) la dimensione esperienziale che si presenta o viene creata all'interno del contesto, (b) il sistema concettuale definito dalla disciplina e (c) le logiche inferenziali legate alle operazioni di pensiero (fig. 1).

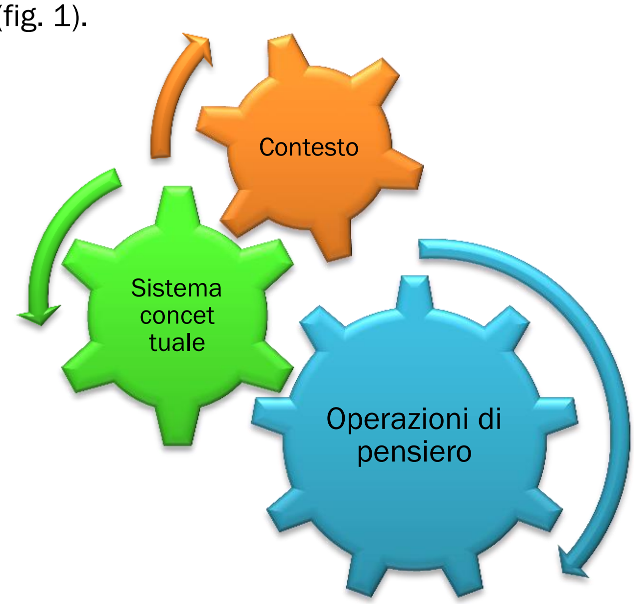


Fig. 1: componenti del processo di apprendimento.

[1] Anthony E. Kelly (2003) parla di un linguaggio di descrizione dei processi nel primo caso e di un linguaggio di conferma delle teorie scientifiche implementate nel secondo, precisando che solo con la definizione dei processi di apprendimento come proprio oggetto di studio la ricerca educativa ha cominciato a delineare un proprio linguaggio argomentativo.

In questo nuovo quadro l'apprendimento diventa il vero e proprio oggetto di studio della ricerca educativa che vede l'esigenza di ridefinire i propri parametri di indagine non secondo un modello unico, ma attraverso l'integrazione di modelli già esistenti (Sloane, 2003). Vi è l'esigenza di (1) confermare la validità di costrutti e procedure attraverso il rigore scientifico, di (2) far emergere la dimensione cognitiva attraverso la descrizione dei processi e di (3) definire la pratica educativa che permette l'attuazione degli stessi processi di apprendimento. Ai modelli delle scienze e delle scienze umane, che ben sostengono i primi due punti, si aggiunge quello del design. Attraverso il design, qui inteso come progettazione e realizzazione di attività in classe, il ricercatore viene riconosciuto nel suo ruolo di educatore attivo che entra in aula per attuare interventi innovativi volti a comprendere e migliorare i processi di insegnamento-apprendimento.

5.2 Il metodo di indagine: scelte e ragioni

Intendere la ricerca come design significa riconoscere alla ricerca educativa un proprio linguaggio che legittima i processi attraverso cui si attua, integrando consapevolmente gli aspetti teorici guidati dai paradigmi di indagine e disciplinari e una pratica educativo-didattica non casuale, ma derivante dalla stessa teoria e giustificata sulla base del contesto e dei processi che si vogliono implementare.

La metodologia che risulta come la più coerente e la più idonea ad accogliere una riflessione di questo tipo sui fenomeni educativi compresi nella loro complessità è quella qualitativa. Le ricerche qualitative pongono problemi che devono essere considerati dal punto di vista metodologico poiché vi è l'impossibilità di stabilire alcuna relazione di tipo causale tra le variabili presenti nel contesto o appartenenti al fenomeno indagato. Non vi sono procedure predefinite per analizzare le interazioni che si osservano o che si descrivono e questo richiede un costante riferimento al progetto di ricerca (Sorzio, 2005). Lo sviluppo dell'architettura globale elaborata a partire da fondamenti teorici precisi per la formulazione di un ragionamento ampio e accurato porta alla stessa validità dello studio qualitativo. Le ricerche di tipo qualitativo sono dunque collegate ai paradigmi di complessità (multidimensionalità delle esperienze), di contestualità (i fenomeni vengono considerati tenendo conto delle realtà situazionali) e di processualità (i dati di indagine sono dipendenti dalla dimensione temporale che caratterizza il processo di ricerca) (Semeraro, 2011).

Si può affermare che la ricerca qualitativa è un'attività situata, che colloca l'osservatore nel mondo Denzin e Lincoln (2005). Consiste in un insieme di pratiche interpretative che rendono visibile tale mondo, dandone un'immagine che Guba e Lincoln definiscono "naturalistica", trasformandolo.

Nello specifico della ricerca qui descritta si è scelto di effettuare un indagine di tipo qualitativo attuata attraverso un *design experiment* che si è valsa di tecniche di video-ripresa per la registrazione e l'analisi dei dati. Due sono state le ragioni che ne hanno guidato la scelta. In primo luogo ci si è voluti focalizzare sui processi, sulle relazioni che si stringono nel contesto classe, sulle interazioni alunno-alunno ed insegnante–alunno e su come queste interagiscano a loro volta sui processi di insegnamento-apprendimento. Secondo punto molto importante che è stato considerato è l'età dei bambini coinvolti e la tipologia di scuola a cui appartengono. Alla scuola dell'infanzia non esiste una programmazione disciplinare dettagliata e, anche quando questa è presente, non viene portata avanti in ugual modo ed in ugual misura in tutte le scuole. Questo avrebbe gravemente compromesso i risultati di ricerca svolta in classi sperimentali e classi di controllo. Inoltre l'apprendimento dei bambini della fascia tre-sei è caratterizzato da lunghi momenti di dialogo e confronto che non possono essere non presi in considerazione.

5.3 Il modello del Design Experiment

> "The underlying philosophy of design research is that you have to understand the innovative forms of education that you might want to bring about in order to be able to produce them."
>
> (Gravemeijer & Cobb, 2006)

La citazione qui riportata evidenzia non solo una finalità, ma quella che può essere considerato un vero e proprio punto di partenza per il design experiment. Il design experiment nasce come risposta all'esigenza di dare un maggiore contributo teorico alla pratica educativa (Van den Akker, Gravemeijer, McKenney, & Nieveen, 2006). Il versante applicativo non è infatti contemplato da chi si dedica all'indagine dei processi di apprendimento in senso lato ed è interessato a formulare una definizione di conoscenza in sé e per sé. Dall'altro lato è argomentato in modo carente e debole da chi cerca di descriverlo all'interno di contesti scolastici e non: molte esperienze di ricerca in ambito educativo e didattico si articolano come la semplice verifica di ipotesi formulate a partire da riflessioni strettamente teoriche (Barab & Squire, 2004). Il design experiment si genera con un preciso intento scientifico volto a sviluppare empiricamente teorie frutto dello studio combinato dei processi di apprendimento e degli strumenti che li supportano. (diSessa & Cobb, 2004; Gravemeijer, 1994, 1998). In altre parole si può dire che il design experiment conferisce validità alla pratica della progettazione didattica (Barab & Squire, 2004).

Di contro al chiaro e vivo interesse verso questa metodologia troviamo invece una terminologia ancora indefinita nell'indicarlo. L'espressione "design experiment" è molto spesso sostituita con "experimental design", "design research", "design study/experiments", "development/developmental research", "formative research/evaluation" e simili che indicano una serie di approcci alla ricerca il cui intento è quello di produrre nuove teorie, artefatti e pratiche che giustifichino e modifichino i processi di apprendimento e insegnamento all'interno di contesti autentici (Barab & Squire, 2004). Quelli che però vengono considerati autentici *design-based research methods* sono contraddistinti da

1. la commistione tra la progettazione di ambienti di apprendimento e lo sviluppo di teorie sull'apprendimento;
2. il riproporsi ciclico di fasi di progettazione, attuazione, analisi e riprogettazione nell'ottica della ricerca su e dello sviluppo di apprendimento;
3. la produzione di teorie condivisibili che aiutano la comunicazione e lo scambio di implicazioni pratiche;
4. una ricerca volta ad indagare come realmente si articola l'apprendimento in contesti autentici e quindi non semplicemente dedica al documentare cosa funziona o meno e perché;
5. lo sviluppo di riflessioni che si basano su metodologie che possono connettere in modo sistematico e non intuitivo o casuale i processi di attuazione ai risultati interessanti.

5.3.1 Origini del modello

Il modello viene inserito tra le scienze pedagogiche a partire dalla metà degli anni novanta offrendo ai ricercatori una nuova grande possibilità: l’andare oltre l’applicazione di un’ipotesi di ricerca. L'aspettativa, come precisato da Ann Brown, è quella che i ricercatori regolino sistematicamente il proprio disegno di ricerca in modo tale che ogni adattamento si inserisca all’interno del contesto di ricerca come una vera e propria sperimentazione volta ad essere teorizza e validata (Brown, 1992). Questa nuova prospettiva si inserisce creando un punto di svolta all’interno del panorama educativo: dall’essere inteso in senso teorico, come Rousseau, Dewey, Bruner e gli altri grandi studiosi avevano fatto, all’essere indagato da sperimentalisti il cui scopo è quello di confrontare diversi stili e modelli al fine di sviluppare non una teoria dell’educazione, ma una scienza dell’educazione, Collins (1992), che con Brown rappresenta uno dei pionieri nell’introduzione della ricerca di design in educazione, sottolinea come quest’approccio permetta di indagare in che modo si articolano le componenti, o variabili dipendenti, del processo di insegnamento-apprendimento nei diversi ambienti di apprendimento. In questo senso Collins si rifà alla distinzione che Herbert Simon (1969) aveva dato tra scienze analitiche o naturali e la scienze di design”. Mentre le prime, quali la fisica, la biologia e l’antropologia, cercano di capire come un fenomeno del mondo possa essere spiegato, le seconde sono volte a determinare come gli artefatti ideati dall’uomo si comporti in differenti condizioni. A questa sfera appartengono saperi come l’aeronautica, la robotica, l’acustica.

> “Just as in aeronautics, where researchers look at how different designs affect lift, drag, and other dependent variables, he argued that we need to develop a design science of education, where we investigate how different learning-environment designs affect dependent variables in teaching and learning.”
>
> (Collins, Joseph, Bielaczyc, 2004)

Il concetto di design ha quindi origini esterne la ricerca educativa e si riferisce inizialmente alle professioni in cui, a differenza delle scienze, vi è l’ideazione di uno strumento, un contesto, una sistema che non esiste, ma viene predisposto ai fini pratici. È in questo senso che il modello di *design-based research* fa si che venga colmato il grande distacco tra teoria e pratica in modo tale che questa non venga influenzata dalla ricerca solo indirettamente e genericamente e che la stessa teoria trovi legittimazione nella replicabilità e adattabilità ad altri contesti, poiché è dai contesti stessi che è stata originata.

5.3.2 Caratteristiche del modello

Il modello del Design Experiment (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, Schauble, 2003) permette l'attuazione di particolari modalità di apprendimento e il loro studio sistematico all'interno del contesto definito dalle pratiche che li hanno sostenuti. La sua caratteristica principale, e al contempo elemento di maggiore innovazione, è la "doppia tendenza": da un lato la progettazione e la realizzazione di interventi didattici (*utility-oriented*) e dall'altro l'orientamento teorico (*theory-oriented*) per l'elaborazione di una riflessione, che può essere considerata una sorta di teoria, non generalizzabile ma valida e legittimata dal contesto a cui si riferisce e da cui è stata generata (Cobb, Confrey, Lehrer& Schauble, 2003).

A partire da questo è possibile delineare quelli aspetti che lo distinguono da metodologie di indagine simili. Proprio perché calata nella pratica la ricerca design-based è sempre a) di tipo interventistico e b) attuata in contesti reali. Inoltre c) è iterativa poiché propone sempre un approccio ciclico preciso che coinvolge solitamente tre fasi:

1. Sviluppo di un disegno preliminare volto a formulare un'elucubrazione teorica connessa al contesto di riferimento. Durante questo primo momento vengono ipotizzati (a) gli obiettivi di apprendimento, (b) le attività, i compiti e i possibili strumenti da proporre e (c) i ragionamenti che potranno essere elaborati dagli alunni. Alla base dell'ideazione vi stanno la conoscenza della genesi e dell'evoluzione dei concetti disciplinari trattati, ma soprattutto di quanto emerso dalle ricerche rispetto alle strategie di conoscenza informale dei bambini, le misconcezioni, i processi cognitivi…
2. Conduzione di un esperimento didattico in cui le ipotesi iniziali trovano attuazione, ma soprattutto vengono gradualmente e metodicamente modificate e adattate, corrette, ridefinite sulla base della risposta degli alunni così come delle indicazioni fornite dagli insegnanti partecipanti.
3. Analisi retrospettiva che sintetizza quanto è stato sviluppato e appreso e apre ad un'eventuale implementazione successiva.

Il contesto assume un ruolo nuovo: non è più o osservato in modo sommario da chi vi partecipa o studiato dagli esperti con un preciso intento volto a sbrogliarne la complessità, ma diventa parte integrante. Di conseguenza l'interazione sociale e le altre variabili che si attuano sono anch'esse componente fondamentale dell'indagine. I soggetti passano dall'essere considerati all'essere co-partecipanti sia nella fase di progettazione, che è continua, sia in quella di analisi dei risultati (Barab & Squire, 2004). Non è ammesso "il rientro in laboratorio" per un approfondimento di quanto emerso. Lo studio avviene "sul campo" e porta a risultati validi perché valutabili anche dagli esterni e rilevanti perché replicabili. Il design experiment affronta situazioni di complessità, debolezza o poca chiarezza attraverso un modello di azione solido poiché flessibile e ancorato a precisi fondamenti teorici che ne permettono la riproposta in altri contesti.

5.3.3 Paul Cobb e l'inquadratura socio costruttivista

Una grande influenza allo sviluppo del modello dell'experimental design è stata data da Paul Cobb. Lo studioso, soprattutto in seguito alla lunga collaborazione con il Freudenthal Institute e all'approfondimento del concetto di "developmental research" tipicamente utilizzato dalla Realistic Mathematics Education, ha approfondito gli studi inerenti tale paradigma metodologico.

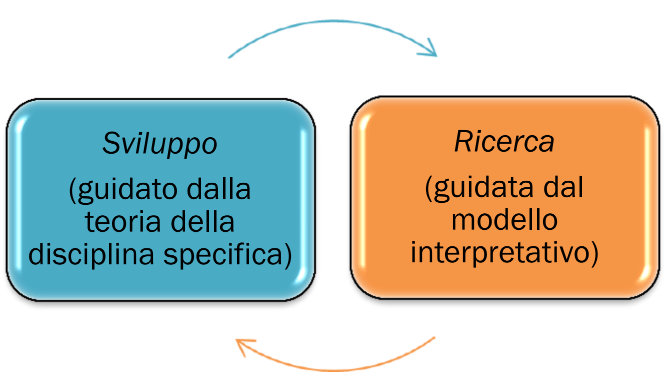


Fig. 2: *Developmental research*: fasi del ciclo (Gravemeijer, 1994)

Developmental research fa riferimento ad un ben preciso quadro di inquadramento teorico che non si identifica né con la ricerca sullo sviluppo dei bambini né con la ricerca sullo sviluppo di particolari concetti. In questa prospettiva gli aspetti di sviluppo e ricerca si alternano in un processo ciclico in cui ad una fase orientata dall'articolarsi dei concetti disciplinari specifici ne segue sempre una guidata dal modello interpretativo. Come detto in precedenza, tale paradigma porta a percorsi di riorganizzazione e adattamento continui, volti a supportare attivamente i processi di apprendimento-insegnamento e non semplicemente a valutare l'efficacia dell'implementazione di più o meno innovative strategie o attività. L'impronta che Cobb dà a questo approccio ha contribuito alla discussione inerente le possibili relazioni tra la teoria socioculturale e il costruttivismo. Nello specifico egli considera il panorama scolastico nella sua complessità, focalizzando le proprie osservazioni e riflessioni non solo all'interno delle aule, ma contestualizzandole rispetto all'organizzazione della più ampia comunità scolastica. Cobb individua più ambiti di studio. Un primo legato al microclima della classe, descritto da un lato attraverso una riflessione di matrice psicologica su credenze, concezioni ed attività individuali di studenti ed insegnanti e dall'altro connettendo tali osservazioni per mezzo della prospettiva interazionista. In questo senso lo sviluppo della conoscenza matematica da parte degli alunni è descritto in termini di norme e pratiche sociali e sociomatematiche, che la definiscono come ciò che si verifica all'interno del contesto sociale in cui si attua (Cobb & Yackel, 1996). All'interno di questa prima cornice possiamo riconoscere tre livelli di concettualizzazione: cognitivo, epistemologico e relazionale, che gradatamente illustrano come gli studenti elaborino le proprie conoscenze, le formalizzino infine riorganizzino interagendo con i compagni e l'insegnante.

Evidenziando inoltre come le singole attività degli studenti siano da localizzarsi all'interno di una cornice più ampia di quella della semplice classe, Cobb apre la propria analisi alla prospettiva socioculturale. In primo luogo considera come l'istituzione scolastica di appartenenza, intesa come livello e tipo di scuola, ma anche come la programmazione e l'organizzazione interna da cui insegnanti, dirigente e operatori sono orientati, giochi un ruolo determinante rispetto all'organizzazione dei saperi e delle attività. Successivamente sottolinea l'importanza di guardare alla scuola rispetto a ciò che questa rappresenta all'interno della società: vagliando quindi la normativa di riferimento, le politiche attuate, le norme e le credenze che regolano la strutturazione dei processi di apprendimento ed insegnamento.

Per le caratteristiche sopra descritte il modello che ne emerge appare completo e funzionale, perché permette di intervenire con consapevolezza e tempestività, anche sul lungo periodo, attraverso un processo interattivo in una situazione di insegnamento-apprendimento, cogliendone determinati aspetti e modificandola sia nel confronto con le pratiche usuali sia nel riflettere e verificare le procedure utilizzate (Cobb, Confrey, Lehrer & Schauble, 2003).

5.4 La Videoripresa

Il modello di indagine del design experiment che attraverso delle conoscenze pregresse sceglie di entrare in un contesto che si rileva problematico o interessante o di verificare l'attendibilità di determinate elaborazioni teoriche ben si concilia con la videoricerca educativa. L'uso della videoripresa in contesti di apprendimento appare come una pratica innovativa, ma non del tutto nuova. Inizialmente impiegata in percorsi formativi indirizzati alla correzione di gesti o all'acquisizione di abilità didattiche, trova un antecedente significativo nel microteaching (Allen & Clark, 1967): tecnica nata in America intorno agli anni Sessanta e che mira all' "addestramento di specifiche abilità didattiche" (Calvani, Bonaiuti & Andreocci, 2011). Prevede la videoregistrazione di brevi lezioni e la successiva revisione dei filmati da parte del docente-protagonista insieme a uno o più supervisori che hanno il compito di aiutarlo a ristrutturare il suo intervento. Nel corso degli anni la videoripresa ha iniziato ad essere utilizzata con una più ampia prospettiva formativa che vuole facilitare la presa di coscienza (Perrenoud, 1996/2006) e la promozione di consapevolezza (Braga, 2009) di educatori e insegnanti rispetto al proprio lavoro. Il suo impiego permette di andare al di là dello scopo performativo e di guardare ai vissuti, ai presupposti e alle premesse socio-culturali che stanno dietro l'agire educativo. (Bove, Braga & Cescato, 2015). Da un utilizzo mirato e volto per lo più a dare attenzione ai soli atteggiamenti dell'insegnante per una valutazione delle pratiche d'insegnamento, si è passati a considerarla un approccio valevole ed interpretabile agl'occhi dei vari attori del settore educativo.

5.4.1 Tecniche e modalità

Ogni incontro del design experiment è stato videoregistrato. Il processo che ha portato ad un'analisi consapevole, critica ed oggettiva dei filmati non è stato immediato: metodi e procedure sono stati inseriti all'interno di un più ampio contesto d'indagine che ha tenuto conto del pre- e del post- ripresa. Nello specifico si sono stabiliti (a) le modalità di videoripresa e (b) i protocolli di analisi dei filmati. (a) La telecamera ha occupato un luogo fisso che non ha ostacolato il normale svolgersi delle azioni in quanto lo scopo per cui è stata posta è proprio quello di "fermare" una realtà senza alterarla e "rendendola fruibile" in un secondo momento. Non sono avvenuti tagli o aggiustamenti d'immagine in loco. La ripresa è sempre stata più lunga delle azioni (Erickson, 2006), protraendosi per tutto il tempo che l'insegnante ricercatore è stato presente in aula. Non ci sono stati cosiddetti "fuori onda". È solo in un momento successivo, quando si è preso visione dei filmati che sono avvenuti dei tagli. O meglio, si sono presi in considerazione sequenze più brevi, passaggi che sono apparsi più interessanti o che fanno emergere dinamiche chiave. In questo senso uno stesso filmato è stato rivisto più volte in funzione dei diversi modello d'analisi. (b) Attraverso i filmati l'insegnante-ricercatore ha avuto l'opportunità di riflettere a partire da se stesso, dai bambini e dai contenuti trattati. Tale scelta è stata presa con la consapevolezza che la prospettiva emergente è sempre limitata, perché è impossibile mantenere la complessità dei contesti di apprendimento.

5.4.2 Riflessione sulle pratiche

Le indicazioni o direttive date per rendere il lavoro di videoricerca scientificamente valido hanno aperto due sfide per il ricercatore. La prima è stata quella che lo ha portato a vestire contemporaneamente più abiti e la seconda è derivata proprio dall'essere abile nel gestire i diversi ruoli di ricercatore, insegnante, produttore e tecnico dell'immagine. La video-ripresa ha permesso di "lasciare una traccia" della dimensione verbale dei discorsi, di quella visiva dei comportamenti, del contesto fisico e della direzione degli sguardi dell'insegnante-ricercatore (Tochon, 2006). Il video ha permesso di tornare non solo sui comportamenti dell'insegnante con la relativa valutazione delle pratiche d'insegnamento o delle competenze organizzative e relazionali, ma di lavorare anche sugli aspetti cognitivi impliciti (Jensen, Shepston, Connor & Killmer, 1994) e sulla dimensione affettivo-emotiva. Quest'ultimo aspetto, molto spesso sottovalutato, si è rivelato invece essere chiave nel percorso di ricerca e per la crescita dello spirito critico del ricercatore. Il primo impatto alla visione dei filmati ha fatto emergere un senso di inadeguatezza da parte del ricercatore nella sua veste di insegnante che ha disorientato e momentaneamente distolto la sua attenzione dagli scopi iniziali. L'immagine offerta dai filmati ha dato un ritorno amplificato sia di quanto avvenuto (i dialoghi, i tempi, le azioni sembrano più lunghi) sia della stessa percezione che il ricercatore ha avuto di sé. Tuttavia la possibilità di poter rivedere le immagini e la possibilità di ritornare su di esse hanno aiutato e stimolato il percorso di analisi arricchendolo di una dimensione riflessiva sulle pratiche che ha permesso al ricercatore imparare a muoversi in modo creativo ed indipendente all'interno del contesto di ricerca, per non rimanere intrappolato negli aspetti organizzativi che conferiscono validità scientifica alla tecnica della videoripresa (Derry, 2006), e di affinare la propria capacità critica e il relativo spirito di oggettivizzazione durante il successivo processo di analisi.

5.4.3 Potere narrativo

Il grande potenziale della videoripresa è stato quello di mostrare le esperienze educative così come si sono svolte e di far sì che queste diventassero fruibili anche in tempi e luoghi diversi. Proprio perché non sono stati visti come dati in se stessi quanto piuttosto come fonti da cui i dati sono visti, ascoltati, letti ed interpretati, i video hanno rivelato un grande potenziale narrativo. Il vedere ha conferito significato al fare in quanto si è configurato come una sorta di racconto collettivo che ha generato comprensione. Nello specifico i filmati hanno permesso di chiarire l'impostazione pedagogico-didattica, delineare l'articolarsi della discussione e descrivere il processo di comprensione matematica.

Dal punto di vista dei contenuti pedagogico-didattici si è guardato a come nel corso degli incontri si sono modificati sia le modalità espositive da parte dell'insegnante-ricercatore sia l'approccio dei bambini ai materiali presentati. La riflessione emersa dai video, in linea con le caratteristiche di empiricità, non sistematicità e non generabilità che la caratterizza, ha acquistato valore e validità in virtù di quella che Russell & Munby (1992) definiscono autorità dell'esperienza.

Per quanto concerne la discussione matematica dalla prima immagine caotica e complessa, quale realmente era, delle interazioni della classe (Miller & Zhou, 2006) si sono costruiti e trascritti i dialoghi che hanno permesso di analizzare, secondo il modello di Pirie e Kieren (1989), come i bambini di volta in volta siano arrivati a trovare la soluzione numerica delle storie problema e a formalizzare le proprie argomentazioni.

Rispetto al come i bambini abbiano elaborato le proprie concezioni matematiche i video hanno consentito di guardare ai momenti dedicati alla rielaborazione individuale da un occhio privilegiato. Si sono potuti cogliere particolari relativi al come i bambini abbiano strutturato il proprio disegno (es: tempo di esecuzione, modalità di lavoro, livello di concentrazione), si siano avvalsi dell'aiuto dei compagni, abbiano fatto riferimento ai materiali presentati nel corso dell'incontro o presenti in classe e abbiano verbalizzato le proprie rappresentazioni.

6. LA RICERCA

6.1 Il contesto

Lo studio proposto vuole evidenziare come i bambini possano approcciarsi alla matematica sin dalla scuola dell'infanzia. La particolarità della proposta formativa vuole sottolineare come, affinché l'incontro con la matematica sia efficace, questo non debba essere ridotto alla scrittura delle cifre simboliche attorno ai 6 anni o essere presentato come un'anticipazione del far di conto, ma basarsi su attività coerenti con l'organizzazione e la metodologia didattica. La riflessione sui numeri può essere proposta fin dal primo anno della scuola dell'infanzia con attività di tipo trasversale attraverso filastrocche, enumerazioni, situazioni di gioco, attività di routine. Tuttavia i bambini che non dimostrano un adeguato livello di padronanza nell'eseguire tali operazioni o che "non contano mai" o non hanno altre esperienze occasionali oltre a quelle scolastiche, rischiano di trovarsi in una situazione di imparità rispetto a chi invece nel corso delle proprie giornate vive ricchezza di opportunità e di stimoli. Millán Gasca (2016) sottolinea come sia importante che la scuola dell'infanzia offra quindi, oltre ad occasioni informali, l'incontro con i concetti base della matematica in modo sistematico secondo un lavoro progettato, organizzato e condotto dall'insegnante. Il lavoro sistematico fa sì che la matematica non venga lasciata all'improvvisazione, ma sia proposta in modo equilibrato rispetto l'età dei bambini e dei contenuti affrontati. In questo non solo possono essere affrontati argomenti considerati apparentemente non adatti o non essenziali, ma in realtà sufficientemente ambiziosi e alla portata dei bambini.

6.2 La domanda di ricerca

A partire da quanto approfondito dal punto di vista teorico si è scelto di indagare come i bambini della scuola dell'infanzia elaborino strategie risolutive di fronte a situazioni numericamente problematiche, coinvolgenti il concetto di sottrazione, attraverso l'attivazione di modalità di apprendimento innovative secondo il modello del design experiment (Cobb & Yackel, 1996).

6.3 IL PERCORSO DI RICERCA

Il percorso di ricerca si è articolo da un'approfondita documentazione sul panorama scientifico di riferimento, documentata nei capitoli precedenti, e dall'individuazione dei destinatari del design experiment. La scelta dei destinatari, la definizione del contenuto disciplinare specifico e l'articolazione degli incontri secondo tempi e modalità si sono svolte con una continua influenza che trova giustificazione nella definizione stessa di experimental design (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, Schauble, 2003).

<u>Fasi</u>

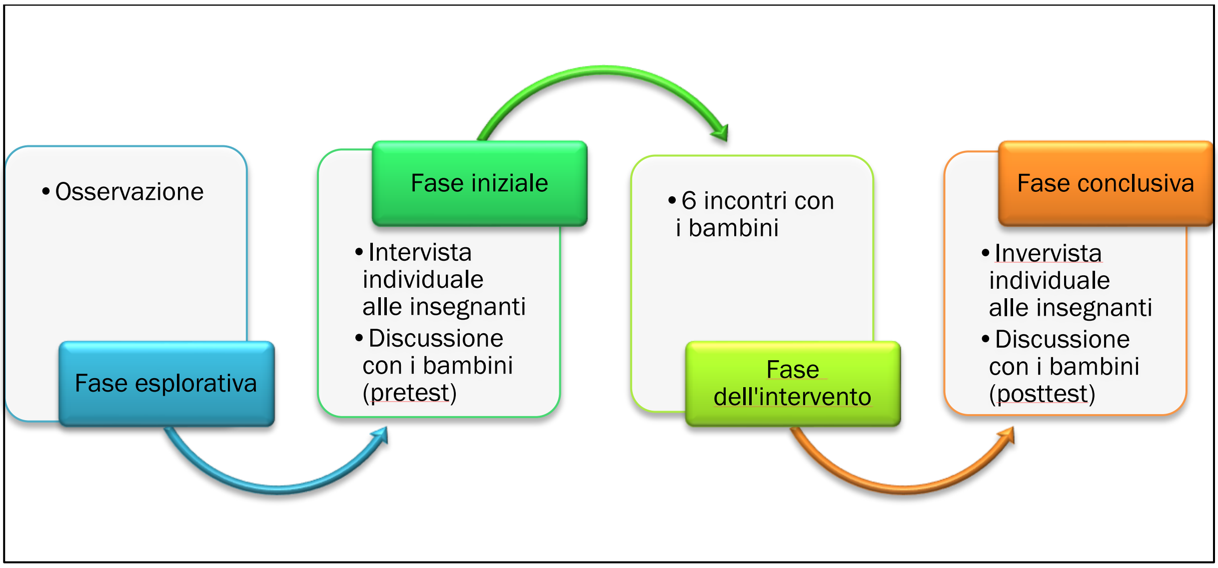


Fig. 1: Fasi del design experiment

L'intero percorso si è svolto in arco temporale che è durato complessivamente 5 mesi e può essere suddiviso in quattro fasi (fig. 1).

- <u>Fase esplorativa</u>: ha contemplato l'osservazione dei due gruppi di bambini durante i momenti di lezione e la loro interazione con le insegnanti. Attraverso delle note[1] si sono trascritti momenti salienti e caratterizzanti la situazione scolastica.

[1] Si è cercato di prendere delle note di tipo etnografico. Tuttavia la libertà utilizzata dal ricercatore nello scegliere, a seconda dei momenti, di dare maggiore attenzione ai bambini o alle azioni dell'insegnante nonché lo stesso stile di annotazione non permette di parlare propriamente di note etnografiche. Per la stesse ragioni non è possibile parlare di osservazione etnografica. Si è scelto così di definire l'osservazione solo come tale e le note come appunti e riflessioni presi dal ricercatore all'interno del più ampio panorama di definizione del design experiment.

- Fase iniziale: le due insegnanti di riferimento più una terza[2] sono state intervistate rispetto la loro concezioni e le loro modalità sull'insegnamento della didattica della matematica attraverso un traccia guida.

  Con i bambini si è scelto di condurre una breve chiacchierata volta a verificare la conoscenza sui numeri, le strategie ingenue di operazioni su di esse e la conoscenze dei termini della disciplina anche sul semplice piano narrativo. Durante i momenti di chiacchierata sono stati utilizzati dei cubi colorati che hanno permesso al ricercatore di concretizzare le proprie richieste e ai bambini di disporre di un supporto su cui agire, sperimentare, dimostrare e giustificare il proprio pensiero.
- Fase dell'intervento: ha visto il ricercatore impegnato come insegnante esperto nella conduzione di 6 incontri della durata di un'ora circa ciascuno costruiti con un'organizzazione delle attività sulla falsariga di quella consueta di insegnanti e bambini.
- Fase conclusiva: le insegnanti sono state intervistate nuovamente per cogliere le influenze che l'intervento didattico aveva avuto sia sulle loro concezioni sia come insegnanti rispetto i saperi dei bambini.

  Ai bambini è stata riproposta una chiacchierata che riprendesse quella iniziale per verificare le conoscenze acquisite. Come materiale sono stati proposti pennarelli di diversi colori e grossezze.

[2] Si tratta dell'insegnante della seconda sezione dei bambini che formavano il gruppo che ha lavorato in modalità laboratoriale. Poiché al di fuori del laboratorio le due sezioni seguivano programmazioni simili, ma non uguali perché fortemente influenzate dalle scelte delle insegnanti stesse, si è ritenuto utile conoscere anche concezioni e modalità di questa docente.

	Gruppo sezione	Gruppo laboratorio	
Osservazione	18 febbraio 2014	25 febbraio 2014 (laboratorio)	
Osservazione	26 febbraio 2014	13 marzo 2014 (1^sezione)	
Osservazione	13 marzo 2014	14 marzo 2014 (2^sezione)	
Osservazione		25 marzo 2014 (2^sezione)	
Intervista insegnanti iniziale	25 marzo 2014	27 marzo 2014	14 marzo 2014
Chiacchierata iniziale	1 aprile 2014	31 marzo 2014	
1° incontro	9 aprile 2014	7 aprile 2014	
2° incontro	16 aprile 2014	14 aprile 2014	
3° incontro	23 aprile 2014	28 aprile 2014	
4° incontro	2 maggio 2014	5 maggio 2014	
5° incontro	9 maggio 2014	12 maggio 2014	
Riepilogo	15 maggio 2014	19 maggio 2014	
Chiacchierata finale	11 giugno 2014	9 giugno 2014	
Intervista insegnanti finale	24 giugno 2014	27 maggio 2014	27 maggio 2014

Tab.1: Calendario delle attività.

6.4 I DESTINATARI

I partecipanti sono stati individuati – in coerenza con il modello di indagine – non con l'intento di effettuare un campionamento, ma a partire da una strategia teoretica orientata allo scopo e alla scoperta (Sorzio, 2005). Tale processo di individuazione è stato condotto attraverso un canale di conoscenze che ha fatto emergere l'interesse da parte di due insegnanti del territorio di sviluppare dei percorsi di approfondimento inerenti la didattica della matematica alla scuola dell'infanzia. Ad un primo contatto informale con le insegnanti è seguita una richiesta ufficiale ai rispetti dirigenti scolastici. Entrambi i dirigenti sono stati incontrati da parte del ricercatore in un colloquio individuale in cui sono state spiegate le modalità del progetto di ricerca e le implicazioni didattico-educative ed è stata presentata loro una lettera esplicativa del tutto firmata dal supervisore della tesi di dottorato. La proposta è stata poi presentata a tutti i docenti delle due scuole dell'infanzia interessate all'interno di un incontro di plesso. Una volta approvata ne è stata data comunicazione formale ai genitori dei bambini partecipanti in un incontro dedicato. I genitori sono invitati a firmare un modulo[3] per il consenso al trattamento dei dati del/la figlio/a che richiedeva a ciascuno l'autorizzazione per l'uso dei materiali registrati e dei disegni prodotti per fini scientifici, di pubblicazione o di presentazione del lavoro.

6.5 I BAMBINI

Per la ricerca sono stati individuati due gruppi di bambini di 5 anni appartenenti a due scuole del territorio. Entrambi i gruppi coinvolti erano formati da bambini italiani di prima o seconda generazione. La famiglie di appartenenza erano di ceto medio. Non sono da segnalare situazioni problematiche di difficoltà o disagio. Il primo gruppo era formato da 11 bambini di 5 anni della stessa sezione. L'altra parte dei bambini della classe era di bambini di 3 anni (sezione a due età). Con questo primo gruppo si è lavorato in classe durante le attività del mattino mentre i compagni di 3 anni erano impegnati con l'insegnante di sezione. Il secondo gruppo di bambini era invece composto da 17 bambini di 5 anni frequentanti due diverse sezioni della stessa scuola. Le sezioni erano le sole due della scuola dell'infanzia ed erano formate per il rimanente da bambini di 3 e 4 anni (sezioni a tre età). Questo secondo gruppo ha partecipato alle attività in uno spazio dedicato, definito laboratorio, con la presenza fissa dell'insegnante di laboratorio, che per una parte del gruppo era anche l'insegnante di sezione, in qualità di osservatore partecipante. Entrambi i gruppi hanno conosciuto l'insegnante-ricercatore durante le osservazioni. L'attuazione del design experiment è stata preceduta e succeduta da un momento di chiacchierata[4], considerata come pretest e posttest in cui l'insegnante-ricercatore ha indagato le preconoscenze dei bambini sul numero[5]. La chiacchierata è stata condotta dall'insegnante-ricercatore seguendo in modo libero una traccia volta a far emergere

- Conoscenza dei numeri (quali sono - a cosa servono - quando vengono usati)
- Conteggio (in avanti - all'indietro – fino a che numero – da che numero)

[3] Vedi allegato.
[4] Si è scelto volontariamente di non riferirsi ai due momenti di pretest e posttest come focus group date le modalità con cui i bambini sono stati intervistati e il carattere puramente esplorativo della chiacchierata.
[5] Dalle interviste con le insegnanti era emerso che il gruppo di laboratorio, anche nelle attività in classe, non aveva mai svolto attività specifiche sui numeri, se non quelle legate alla routine scolastica, mentre quello di sezione aveva partecipato a qualche gioco sulle quantità o la seriazione a cui però non era mai succeduta una riflessione specifica.

- Confronto tra due insiemi numericamente differenti (quale è il più numeroso – quale è il meno numeroso)
- Togliere ed aggiungere quantità (quanto manca per raggiungere un certo numero – quanto togliere per ottenere un certo risultato)
- Differenza (conoscenza del significato del termine e suo uso nella quotidianità)
- Resto (conoscenza del significato del termine e suo uso nella quotidianità)

Per quanto concerne le operazioni sui numeri ai bambini sono stati dati prima dei mattoncini colorati nel numero di 7 rossi e 5 gialli, utilizzati per indagare il confronto e far emergere il concetto di differenza, e poi 8 mattoncini blu, utilizzati per far emergere il concetto di resto.

Dato il numero totale dei bambini presenti (13) con gruppo di laboratorio si è scelto di condurre due chiacchierate separate. I due sottogruppi sono stati formati sulla base delle due sezioni da cui era formato il gruppo di laboratorio. Poiché non sono emerse differenze sostanziali tra i due sottogruppi, ma al contrario i bambini si sono espressi e hanno agito in modo molto simile, per la descrizione di quanto emerso durante la chiacchierata iniziale si farà riferimento al solo gruppo di laboratorio comprendendoli entrambi.

Durante la chiacchierata è emerso subito che i bambini in generale conoscevano la sequenza numerica in avanti fino al numero 30 e all'indietro contando dal 10. Le idee che i bambini avevano sui numeri erano legate al contare, al fare i conti (es: la spesa) o all'utilizzo dei numeri per telefonare o per leggere l'ora sull'orologio. I bambini con fratelli più grandi hanno inoltre detto che i numeri servano per fare i compiti e hanno portato come esempi 1 + 1 = 2 ; 2 + 2 = 4 ; 10 + 10 = 20 ; 20 + 20 = 40. Curioso l'intervento di una bambina del gruppo di laboratorio

> Marian Sara: "I numeri si trovano sui fogli. Su dei fogli colorati. I fogli dei numeri vivono in edicola."

che fa probabilmente riferimento alle banconote e le descrive come "fogli colorati che vivono in edicola".

Di fronte ai cubetti di colore rosso e giallo entrambi i gruppi hanno constatato subito che i cubetti rossi erano più numerosi di quelli gialli. Chiamati a spiegarne il motivo i bambini hanno contato. Prima semplicemente enumerando i rossi e i gialli, poi distinguendo i due gruppi ed infine formando due righe. Interessante notare che, benché fossero mattoncini con cui i bambini fossero soliti costruire torri, edifici… da parte di nessuno vi sia stata l'idea di metterli uno sopra l'altro. I mattoncini sono stati disposti in righe lineari sul tavolo. Una volta formate le due righe, è stata controllata la corrispondenza del primo cubetto dei due colori e la differenza è stata subito quantificata in due cubetti che i rossi avevano in più dei gialli. I gialli avevano due "buchi" o "spazi". Anche per quanto riguarda i mattoncini blu i due gruppi di bambini si sono comportati in modo analogo: hanno formato una riga di 8 cubetti che hanno disposto di fianco a quella di rossi e gialli, conteggiati in 12 totali, ed evidenziando che ne mancavano 4 o che 4 "rimanevano fuori". Da parte di entrambi i gruppi inoltre è stata fatta una seriazione delle tre file individuando la più lunga (blu), la media (rossa) e la più corta (gialla).

Una grande differenza tra i due gruppi però è stata rilevata rispetto la conoscenza dei termini "differenza" e "resto". Nessun bambino è stato in grado di riconoscere i due termini. Nel gruppo di laboratorio non sono emersi esempi sul loro utilizzo; al contrario alcuni bambini hanno continuato o a contare o descrivere situazioni in cui i numeri vengono utilizzati, quali l'identificare la data o il giorno. I bambini del gruppo di sezione invece hanno descritto numerose situazioni che hanno evidenziato una riflessione consapevole sul significato dei termini. Sulla differenza:

> Siria: "Quando mangio perché mia mamma sgrida mia sorella e la mette su un altro tavolo."
>
> Insegnante: "E i numeri a cosa servono?"
>
> S.: "Mia sorella è sul tavolo da sola e noi siamo sull'altro e siamo di più."

oppure

> Matteo: "Io ho 3 pupazzi. Cavallino, cavallino, cavallino, orsetto e una gallina."
>
> I.: "E quindi quanti pupazzi hai in tutto?"
>
> M.: "5"
>
> I.: "E perché prima avevi detto 3?"
>
> M.: "Perché ho 3 pony con un orsetto e una gallina."

o anche

> Rebecca: "Quando ci sono i miei angioletti. Ce ne sono 2 con le alette e 2 senza."

Sul resto inteso come "qualcosa che manca"

> Francesco.: "Io certe volte mi dimentico le mie figurine."
>
> I.: "Ma in queste situazioni usate i numeri per vedere che vi siete dimenticati qualcosa?"
>
> F.: "Sì, perché ne vedo solo 2 e invece ne ho centinaia."

oppure

> Lisa: "A me mancava un astuccio"
>
> I.: "Un astuccio? Perché quanti ne hai?"
>
> L. : "Io 4 e quando sono andata a prendermi degli astucci per mettermi dei colori ne trovavo solo tre."

o anche

I.: “Situazioni in cui vedete che manca?”

S.: “Come mancano le luci in cielo.”

I.: “Ci sono delle volte in cui con i numeri vi accorgete che avete dimenticato dei pezzi?”

L.: “Maestra io mi dimentico 2 bambolotti.”

I.: “E come fai a vedere che te ne dimentichi 2?”

L.: “Perché me li ricordo come si chiamano.”

In conclusione risulta chiaro che il livello di conoscenza numerico dei bambini componenti i due gruppi fosse omogeneo con consolidate abilità di conteggio e stima delle quantità. Anche l’approccio alle operazioni del confronto, del togliere e dell’aggiungere è stato attuato con procedimenti analoghi. I bambini preferivano riferirsi ai numeri sempre in senso crescente citando sempre la quantità minore e muovendosi verso quella maggiore o individuando quello che manca. Tuttavia nel gruppo di sezione i bambini hanno dimostrato di essere abituati ad una riflessione più ampia sulla realtà, che ha permesso loro di ragionare su termini e concetti coinvolti individuando analogie e differenze con episodi del proprio quotidiano.

6.6 Le insegnanti

Prima di realizzare l’intervento si è tenuto un colloquio individuale con le tre insegnanti di riferimento: l’insegnante del gruppo di bambini che ha lavorato come gruppo di sezione e le insegnanti delle due sezioni che componevano il gruppo di laboratorio. Di queste ultime due una è stata presente durante tutti gli incontri del gruppo di laboratorio come osservatore partecipante. Inizialmente si era scelto di fare riferimento a sole due insegnanti, quella del gruppo di sezione e quella di laboratorio. Si è deciso in seguito di considerare anche la terza insegnante perché nella fase di progettazione del design experiment e di osservazione nelle classi si è reputato importante avere una panoramica completa del contesto scolastico dei bambini e dei diversi approcci ai processi di insegnamento-apprendimento. L’intervista alle insegnanti si è svolta secondo una traccia guida, alla quale si è aderito in modo libero lasciando che fossero i racconti delle stesse insegnanti a guidare il ricercatore. Gli argomenti della traccia hanno contemplato

- *Idea di sviluppo del pensiero matematico* nei bambini che frequentano la scuola dell’infanzia (l’evoluzione che si evidenzia dai 3 ai 6 anni – le attività o i discorsi dei bambini che lo caratterizzano – i livelli di autonomia e consapevolezza).
- *Attività* proposte nell’*ambito logico-matematico* (specifiche – trasversali - di routine).

- Strategie e/o materiali per la *documentazione dello sviluppo della competenza matematica* dei bambini: elaborazione e uso degli strumenti (con i colleghi - qualche modello - qualche rivista), difficoltà incontrate nel rilevare, osservare, tenere traccia.
- *Organizzazione della sezione*: modalità di lavoro del gruppo dei bambini grandi (insieme ai compagni delle altre età – come supporto a chi è più giovane – con giochi, attività, momenti dedicati – in un contesto laboratoriale – con altri coetanei delle altre classi della scuola).
- Attività mirate a far manipolare una prima forma di *operazione aritmetica* ai bambini (di che tipo – quali sono le operazioni su cui i bambini vengono invitati a riflettere in modo specifico).
- *Difficoltà* incontrate affrontando "contenuti matematici" generali e nello specifico delle operazioni (concettualizzazione – rappresentazione – descrizione – come insegnante – da parte dei bambini – scelta – trasversalità).

Dai tre colloqui, condotti in condizioni confortevoli che simulassero una tranquilla chiacchierata, non sono si individuate forti differenze nei vari approcci all'attività didattica e ai bambini. Sono emerse però esperienze lavorative pregresse diverse che hanno delineato alcune peculiarità individuali. Nello specifico un'insegnante aveva più anni di esperienza delle altre e vantava un bagaglio molto ricco di materiali ed esempi a cui attingere; una seconda aveva insegnato anche alla scuola primaria e vi si riferiva spesso facendo scelte didattiche in uno stile di continuità tra ordini di scuola e l'ultima era da poco diventata insegnante di scuola dell'infanzia, ma aveva collaborato in percorsi di approfondimento sull'attenzione e lavorato per molto tempo negli asili nido: emergeva una certa cura al coinvolgimento del bambini in termini cognitivi ed emotivi.

Da parte di tutte e tre è emersa la convinzione che i bambini giungano alla scuola dell'infanzia con la percezione del numero anche se non ne sono consapevoli e non riescono ad esplicitarne correttamente il significato. Lo sviluppo della conoscenza numerica evolve in modo abbastanza spontaneo con l'età e attraverso la routine che caratterizza la giornata scolastica. Tale sviluppo non è isolato, ma avviene in relazione a quello cognitivo e del linguaggio. La scuola dell'infanzia agisce come ambiente privilegiato che porta i bambini a riflettere ed esperire, ma un contesto familiare stimolante è fondamentale per fare la differenza e permettere che quanto appreso a scuola possa essere riconosciuto anche all'esterno.

Per quanto concerne le attività tutte e tre hanno distinto le attività svolte in sezione, intendendo questa come eterogenea dal punto di vista dell'età, da attività dedicate ai soli bambini grandi, che nei migliori casi possono usufruire di un spazio dedicato in cui lavorare in modalità laboratoriale. Le prime sono caratterizzate da una proposta unica che viene adattata, di solito in termini dispensativi, rispetto le tre età e concerne principalmente la programmazione didattica o argomenti di tipo trasversale quali le stagioni, il tempo, gli eventi… Nello specifico considerano il fare matematica attraverso il calendario del mattino, in cui spesso la linea dei giorni del mese diventa la linea della successione numerica, il conteggio dei presenti assenti, la riflessione sul tanto e poco o il far notare corrisponde (es: "contiamo i bicchieri in bagno per vedere se ogni bambino ha il suo") e mancanze (es: "quanti bambini non hanno ricevuto il foglio?"). Le attività specifiche sono volte allo studio di concetti considerati propedeutici per il passaggio alla scuola primaria, quali il pregrafismo, il precalcolo, l'insiemistica, i concetti spaziali, la consapevolezza numerica attraverso esercizi su la classificazione, il conteggio, la seriazione, la corrispondenza, il confronto, le forme.
È interessante sottolineare che da parte di tutte le insegnanti è stato esplicitata la mancanza di strumenti specifici per verifica e il monitoraggio della competenza matematica. Tutte hanno infatti detto che viene data molta attenzione alle competenze linguistiche e cognitive ma, anche nelle cosiddette schede di passaggio scolastico, non sono presenti riguardanti la competenza matematica. Viene tenuta traccia di quanto fatto dai bambini per lo più attraverso le schede che rappresentano la modalità privilegiata di verifica e, come matrici, creano una sorta di quadernone dell'insegnante. In questo senso le insegnanti hanno riconosciuto inoltre la mancanza di materiali, al di là dei noti quaderni operativi o delle schede che solitamente compongono il quadernone, che invitino le stesse insegnanti di scuola dell'infanzia ad una riflessione sul come sviluppare i concetti matematici.
Sulle operazioni mentre le due maestre del gruppo laboratoriale con meno anni di esperienza dicono di non proporre mai attività che portino i bambini a riflettere sul togliere o aggiungere, la maestra con molti anni di esperienza dice di coinvolgerli spesso in giochi sulla costruzione di insiemi più o meno numerosi attraverso spostamento di oggetti (es: "per costruire il castello prendo più o meno mattoncini della casa?"). Se tutte sono convinte che fino ai quattro anni un bambino possa contare correttamente fino a 5, quest'ultima dice che a partire dai cinque anni un bambino può arrivare a contare non

solo fino a 10, come sostenuto dalle colleghe, ma anche oltre raggiungendo il 20 o il 30. Sempre quest'ultima insegnante dice di cercare di far superare le difficoltà che vede emergere intorno al numero facendo riflettere i bambini sul significato che tale numero porta e sul linguaggio che viene utilizzato per esprimerlo (es: "maggiore. Perché si dice fratello maggiore? Il fratello maggiore è più vecchio di te? Come sarà il numero maggiore?"). Tuttavia le sue attività si attuano sempre come gioco che trova una eventuale momento di riflessione finale solo attraverso una scheda strutturata.
Vengono percepite da tutte come difficoltà l'abbinamento corretto dell'etichetta numerica alla quantità, la simbologia numerica, il ragionamento sul numero senza una concreta azione esemplificativa. A tal riguardo la maestra con un passato da insegnante di scuola primaria precisa che notava che anche nell'azione pratica il togliere risultava più difficoltoso dell'aggiungere e che la maggior parte delle difficoltà emergeva dopo la terza classe soprattutto in relazione ad una mancata riflessione sulla presenza dei concetti matematici nella realtà e ad un loro insegnamento standardizzato.
In generale emerge come le insegnanti fossero convinte di una certa consapevolezza da parte del bambino del numero e della quantità all'entrata alla scuola dell'infanzia. Tale conoscenza spontanea trova possibilità di crescita attraverso la riflessione avviata dalla stessa scuola dell'infanzia, anche in modo involontario o traversale, su tali concetti ma al contempo da un contesto esterno all'ambiente scolastico stimolante. Tutte hanno inoltre riconosciuto come a scuola la competenza matematica non venga monitorata in modo dedicato sia per carenza di strumenti sia per una generale trattazione della disciplina secondo procedure standardizzate e poco approfondite.

6.7 Procedure e materiali

Il design experiment è stato strutturato in cinque incontri di attività più uno di riepilogo in cui è stato rivisto con i bambini quanto svolto nelle giornate precedenti. L'ultimo incontro è stato concepito sia (a) in linea di continuità con il modo di lavorare delle insegnanti sia (b) con l'intendo di offrire ai bambini un momento in cui poter scegliere cosa raccontare.
(a) Dalla fase esplorativa e dallo studio della didattica alla scuola dell'infanzia era emerso come sia usuale per le insegnanti proporre un momento di "verifica" o quantomeno di ritorno sul "cosa fatto" al fine di consolidare un percorso affrontato all'interno di un quadro che unisca le diverse attività proposte. (b) Inoltre data la peculiarità dell'intervento didattico, il riproporre i materiali presentati durante gli incontri, rievocando

le storie raccontate ed i loro protagonisti, voleva stimolare i bambini a scegliere quale storia raccontare o a inventare una nuova storia che traesse ispirazione da quelle ascoltate. L'unica consegna data era che i protagonisti dei racconti fossero coinvolti in situazioni matematiche simili a quelle affrontate nelle discussioni.

Le attività di tutti gli incontri sono state articolate in tre momenti (fig. 3): 1) racconto della storia con presentazione del problema da parte dell'insegnante-ricercatore, 2) ragionamento collettivo dei bambini con discussione moderata dall'insegnante, 3) disegno individuale del bambino con verbalizzazione di quanto rappresentato all'insegnante. Questa "struttura" di tre momenti è stata ripresa dalle modalità con solitamente le insegnanti organizzavano sia il lavoro in sezione che quello in classe.

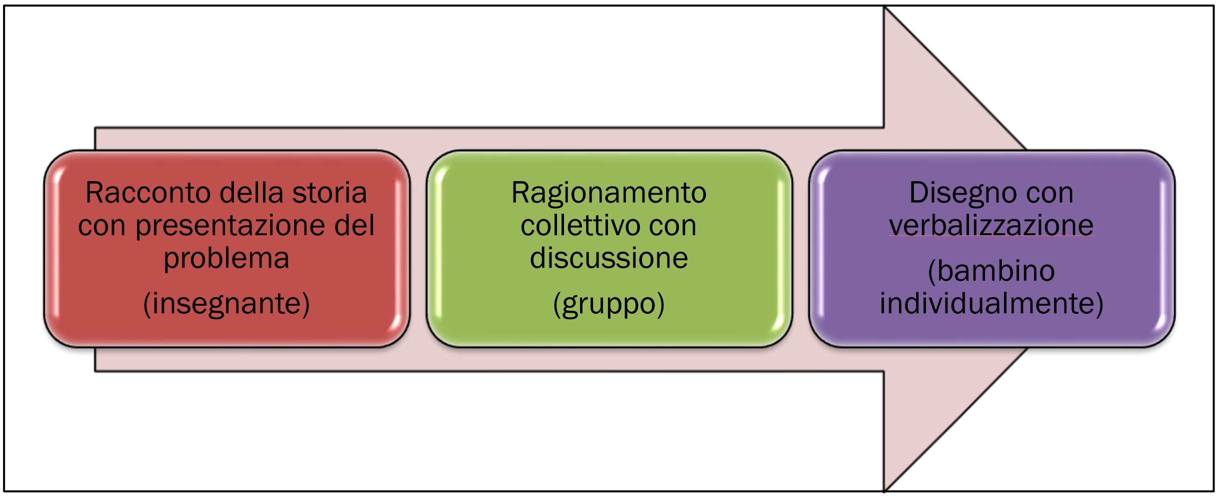


Fig. 2: Sequenza dei momenti caratterizzanti gli incontri didattici con indicazione del attore principale

Ogni incontro si è svolto a partire dalla presentazione di una storia problema a cui i bambini assieme all'insegnante ricercatore hanno cercato di trovare una soluzione numerica ragionata e giustificata. I bambini sono stati coinvolti o come aiutanti dei protagonista o come attori in prima persona della vicenda. La loro partecipazione nonché la loro interazione è stata sostenuta con l'impiego di materiali specifici. Come dimostrato dalle ricerche[6] l'impiego di materiali non solo permette ai bambini di agire concretamente sui principi matematici, ma diviene fondamentale per creare un'immagine mentale su cui tali concetti verranno formalizzati nei livelli di scolarizzazione secondaria. Per ogni incontro sono stati creati o impiegati materiali di diverse tipologie. La scelta di non utilizzare strumenti già disponibili in commercio è stata dettata dal non voler fare

[6] Si veda il capitolo 4 del presente lavoro.

Fig. 3: Materiali presentati durante i cinque incontri e tipologia di appartenenza

riferimento a nessuna specifica sperimentazione o teoria né tantomeno a volerla adattare rischiando di alterarne la validità scientifica. La progettazione e la costruzione dei materiali è stata operata dopo un'attenta riflessione sui concetti matematici in relazione alla cosiddette situazioni sottrattive e al racconto ideato come situazione problema. La classificazione e l'analisi della tipologia di appartenenza è stata condotta con la supervisione della professoressa Chrysanthi Skoumpourdi - Department of Sciences of Preschool Education and of Educational Planning, University of the Aegean, Greece.[7] Si è voluto accogliere una didattica aperta alla personalizzazione dell'insegnante, sottolineando l'importanza dell'essere insegnanti flessibili nello scegliere e fare proposte differenti che assecondino le conoscenze pregresse dei bambini, che non siano limitate dal tipo di materiale disponibile in commercio o a scuola, ma al contrario lo impieghino in modo creativo, che

[7] Durante il secondo anno corso del dottorato, ho trascorso un periodo di tre mesi presso il Department of Sciences of Preschool Education and of Educational Planning, University of the Aegean, Greece, come visiting student sotto la supervisione della prof.ssa Chrysanthi Skoumpourdi, esperta di *Teaching Mathematics at Early Childhood: Designing Educational Material*.

dimostrino una certa conoscenza non solo pedagogico-didattica, ma anche approfondita dal punto di vista disciplinare (Backman & Attorps, 2012).

6.8 Gli incontri

I cinque incontri di attività si sono articolati a partire dal racconto di una storia o dalla presentazione di un problema o come gioco in cui i bambini erano invitati a dare il proprio contributo. In tutti i casi vi era un dato mancante che i bambini avrebbero dovuto trovare. La soluzione numerica da trovare era identificabile sempre come differenza o resto tra due numeri, poiché il concetto matematico su cui si è lavorato è stato quello della sottrazione. Una volta identificato il concetto ed elaborato il contesto narrativo si è considerato il tipo di sottrazione proposta secondo il modello di Haylock & Cockburn (2008) e la situazione sottrattiva creata secondo quello di Nesher, Greeno & Riley (1982). Si è scelto di non proporre mai dati numericamente superiori a 12. Il numero 12 è stato scelto perché individua una quantità di elementi tale da poter essere facilmente contata e conosciuta da bambini di 5 anni, quali i destinatari dello studio, è leggermente superiore alla consueta decina, considerata un traguardo oltre il quale si accede durante la scuola primaria, e, quando scomposto in due parti, almeno una delle due rappresenta una quantità che può essere riconosciuta attraverso il *subitizing*[8].

1. *La rana nello stagno*: il problema presentato è quello di una rana che deve passare da una sponda all'altra di uno stagno. Per attraversare può saltare sulle foglie delle ninfee. Se con un salto arriva fino alla 6^ foglia, quante foglie le mancano per poter giungere dall'altra parte dello stagno?
   I bambini avevano a disposizione un tabellone da tavolo con disegnate le due sponde dello stagno e le dodici foglie disposte tra le due lungo una linea ideale. Avevano inoltre una rana-pedina che potevano muovere e 12 tessere numeriche con scritti i numeri da 1 a 12 da usare o come dadi o come etichette per le foglie a loro discrezione e idea.
2. *La collana di Nonna Procione*: in questo racconto Nonna Procione si reca al fiume per lavare alcuni vestiti. Purtroppo le si rompe la collana e delle 12 perle che la compongono ne rimangono solo 5 sul laccio. Quante perle sono cadute?

[8] Il termine *subitizing* è stato coniato nel 1949 da E.L. Kaufman e si riferisce alla capacità di distinguere in modo rapido e accurato la quantità di un ridotto numero di oggetti o elementi.

Questo secondo incontro non era inizialmente previsto. In seguito al primo incontro in cui soprattutto in un gruppo erano sorte delle difficoltà nel distinguere i salti dalle foglie saltate, si è scelto di introdurre questo nuovo racconto. La situazione sottrattiva proposta infatti è la stessa di quella del precedente incontro, ma si è offerto ai bambini un materiale manipolatorio puro che evitasse l'insorgere di elementi di dubbio. La storia è stata raccontata con un pupazzo a forma di procione vestito con uno scialle per farlo sembrare la nonna e con al collo una collana con 12 perle di legno. I bambini potevano prendere in mano la collana e combinare le perle, infilandole o sfilandole, a loro discrezione.

3. *I birilli*: in questo incontro i bambini hanno giocato con 9 birilli. Uno alla volta ognuno ha lanciato la palla tentando di abbattere il maggior numero di birilli possibili. Ad ogni bambino è stato chiesto di determinare il numero di birilli abbattuti e quello dei birilli rimasti in piedi annotandolo su un tabellone. Nel gruppo composto da bambini appartenenti alla stessa sezione si è stilata una classifica al cui vertice vi era chi aveva abbattuto più birilli e poi in senso decrescente. Nel gruppo di laboratorio invece i bambini hanno giocato divisi nella due squadre che riprendevano le due sezioni di provenienza e si è decretata la squadra vincitrice sommando il numero di birilli abbattuti e verificando il più alto.
4. *Il cane e l'albero di mele*: in questo incontro è stata raccontata la storia di un cane narrando ai bambini che mentre stava giocando in giardino sull'albero vi erano inizialmente 10 mele, mentre più tardi solo 7. Quante mele il cane ha fatto cadere sull'erba?

   La storia è stata animata attraverso un pupazzo a forma di cane e due cartelloni: uno con incollate 10 mele di carta e uno con incollate 7 mele di carta. Solo una volta calcolato il numero delle mele mancanti (3) sono state mostrate ai bambini ed incollate sotto al secondo albero per riavere il totale di 10.
5. *La gabbia degli uccellini*: in questo ultimo incontro i bambini sono stati invitati ad aiutare la nonna con i suoi uccellini. Gli uccellini nella gabbia della nonna sono di due tipi: alcuni con il piumaggio giallo e gli altri con il piumaggio rosso. Per mantenere lucente il colore di entrambi compra del mangime differenziato in giallo e rosso a seconda del colore delle piume. Si chiedeva ai bambini quali e di quanto fossero gli uccellini meno numerosi per riempire in modo adeguato le due vaschette presenti nella gabbia.

I bambini avevano un grande cartellone con disegnata la gabbia e 11 uccellini, 6 rossi e 5 gialli, che potevano spostare a piacere perché attaccati con materiale rimovibile.

Incontro	Numero bambini presenti		
	Gruppo sezione	Gruppo laboratorio	
Chiacchierata iniziale	10	7	6
1 La rana nello stagno	8	14	
2 La collana di Nonna Procione	11	14	
3 I birilli	9	14	
4 Il cane e l'albero di mele	8	12	
5 La gabbia con gli uccellini	9	14	
Riepilogo	11	14	
Chiacchierata finale	8	8	

Tab. 2.: Numero di bambini presenti per gruppo e per incontro.

INCONTRO	CONTESTO	CONCETTO MATEMATICO	NESHER, GREENO & RILEY (1982)	HAYLOCK & COCKBURN (2008)
La rana nello stagno	Una rana deve passare da una sponda all'altra di uno stagno. Per attraversare può saltare sulle foglie delle ninfee. Se con un salto arriva fino alla 6^ foglia, quante foglie le mancano per poter giungere dall'altra parte dello stagno?	Resto	Cambio 2 (Diminuzione con domanda sul numero finale degli elementi)	Addizione inversa
La collana di Nonna Procione	Nonna Procione si reca al fiume per lavare alcuni vestiti. Purtroppo le si rompe la collana e delle 12 perle che la compongono ne rimangono solo 5 sul laccio. Quante perle sono cadute?	Resto	Cambio 2 (Diminuzione con domanda sul numero finale degli elementi)	Completamento di un insieme
I birilli	Ogni bambino deve cercare di abbattere i birilli. Partendo da 9 birilli, una volta lanciata la palla deve determinare il numero dei birilli caduti e di quelli rimasti in piedi.	Differenza	Combinazione 2 (Domanda sul numero di elementi di un sottoinsieme o di una parte di un insieme)	Completamento di un insieme
Il cane e l'albero di mele	Il cane sta giocando in giardino vicino all'albero di mele. Sull'albero ci sono 10 mele, ma lui fa cadere alcune lasciandone appese ancora solo 7. Quante mele dovrebbero esserci sull'erba?	Differenza	Cambio 4 (Diminuzione con domanda sul cambio)	Partizione
La gabbia degli uccellini	La nonna ha comprato il cibo per gli uccellini della sua gabbietta differenziandolo in mangime giallo e rosso a seconda del colore delle piume. Quali sono gli uccellini meno numerosi? Quanti ce ne sono in meno?	Differenza	Confronto 2 (Domandare la differenza tra il numero di elementi di un insieme attraverso il termine «meno»)	Confronto

Tab. 3: Classificazione delle situazioni problematiche presentate negli incontri rispetto al concetto matematico coinvolti

7. DISCUSSIONE

Le ricerche nel campo della didattica della matematica esprimono un generale consenso sull'influenza positiva che la discussione in classe ha sullo sviluppo della comprensione matematica anche a livello individuale. Bartolini-Bussi (1996) dice che

> "Una discussione matematica può essere descritta metaforicamente come una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, procedura, teoria..) che costruisce uno dei motivi dell'attività di insegnamento-apprendimento."

sottolineando due aspetti fondamentali dell'attività dialogica in classe. Il primo è il riferirsi ai processi di insegnamento-apprendimento che si articolano sul lungo tempo e il secondo l'orchestrare prospettive diverse intorno ad un problema matematico. Attraverso la discussione i bambini hanno l'opportunità di esprimere le proprie idee, confrontarle con gli altri, integrarle, appropriarsi e utilizzare con senso proprio il linguaggio matematico. Lo sforzo intellettuale che i bambini compiono per comunicare il proprio pensiero migliora non solo la loro capacità di riflettere matematicamente, ma anche la loro comprensione concettuale. La discussione matematica diventa quindi una ricerca collaborativa del significato dei simboli e delle espressioni matematiche (Sorzio, 1999). L'insegnante in questo contesto non si limita a veicolare il sapere, ma accetta i vari contributi personali dei bambini riformulandoli più estesamente ed in profondità. In questo modo fa sì che ogni intervento sia espressione di un significato, anche parziale, di una certa concezione matematica e che tale significato si connetta a quello che si sta definendo attraverso il ragionamento condiviso.

Nello specifico della ricerca dai video sono state estrapolate e trascritte le conversazioni dei primi cinque incontri dei due gruppi. Si è scelto di non descrivere quanto detto nell'incontro riassuntivo, il sesto, perché non si è attuata una vera e propria discussione matematica. L'insegnante-ricercatore ha ripercorso attraverso i materiali le storie-problema raccontate e risolte con i bambini dando loro la possibilità di scegliere o creare la propria attraverso il disegno. L'analisi degli incontri è stata condotta separatamente per i due gruppi delineando l'evoluzione delle dinamiche conversazionali. I dialoghi sono stati ricostruiti guardando alle dimensioni dello sviluppo narrativo e della comprensione dei concetti matematici coinvolti. I livelli narrativi della concettualizzazione matematica sono stati analizzati secondo il modello di Pirie e Kieran (1989)[1]. La descrizione è stata arricchita dalla trascrizione letterale di alcuni stralci di conversazione. I pezzi di conversazione inseriti nell'analisi delle discussioni sono stati scelti perché isolano e mettono in chiaro uno specifico livello narrativo indicante un livello di comprensione. Si è scelto di focalizzarsi sulla funzione che il discorso ha nella co-costruzione del significato piuttosto che sull'analisi della funzione che la conversazione ha avuto sulle forme di partecipazione dei bambini. I segni diacritici utilizzati per la trascrizione del parlato si basano sulla semantica anziché sull'andamento del discorso secondo un modello semplificato (Mercer, 2004).

7.1 Il gruppo di sezione

7.1.1 La rana nello stagno

La ricerca della soluzione numerica al problema della rana non è avvenuta come presentazione di una storia, ma è stata introdotta dopo un primo momento in cui i bambini sono stati liberi di interagire con i materiali. Quando all'inizio l'insegnante-ricercatore mostra il cartellone con disegnate le due sponde dello stagno, le dodici foglie e presenta la ranocchia ai bambini chiedendo ai bambini come possa la rana giungere da una riva all'altra,

> Lisa: "Basta salire sulle foglioline per arrivare dall'altra parte dello stagno"
> Insegnante: "Se io volessi sapere quanto ha saltato?"
> Siria: "Contiamo le foglie!" (min. 4,30)

emergono le preconoscenze che i bambini hanno sui numeri riconosciute sia nelle osservazioni sia nelle interviste. Tali conoscenze non sono però omogenee. Mentre alcuni bambini dimostrano fin da subito di esprimere le proprie concettualizzazioni numeriche con una certa intenzionalità altri hanno uno stile legato più alla all'azione e all'esplorazione che li porta ad agire in funzione di un obiettivo solo in un secondo momento e sotto lo stimolo dell'insegnante.

> I: "Come può fare la rana per tornare indietro?"
> Bambini: "Deve risaltare!"
> I: "Quante foglie?"
> L: "Bisogna ricontare!"
> [Rebecca: impugna la rana e la fa saltare all'indietro contando nuova mente le 12 foglie une ad una]

[1] I vari livelli del modello, descritto nel capitolo 3, del presente lavoro sono indicati tra parenti quadre e in carattere grassetto.

Davide(sottovoce): “12” (min. 5)

I bambini esercitano un’azione fisica muovendo la rana, contando e ricontando le foglie **[fare - 1°]**. La narrazione si articola come una sorta di drammatizzazione in cui i bambini muovono la rana di foglia in foglia e ne descrivono il come si muove spostandola da una parte all’altra del cartellone. I bambini sono disposti in modo circolare intorno al cartellone. Questo fa si che alcuni lo vedano all’inverso. Tuttavia la verbalizzazione a voce alta non crea dubbi sulla sponda che viene considerata di partenza e su quella che invece rappresenta l’arrivo, anche se queste si alternano perché la rana viene spostata in avanti ed indietro. Proprio in relazione a questo Lisa ad un certo punto fa una riflessione a voce alta che può essere considerata una prima forma di ragionamento

L.: “Ma questa ranocchietta se ha fatto due giri non ha saltato 20-40?” (min. 5,50)

La bambina, constatato che la rana tornando a quella che è stata la riva di partenza dopo essere giunta sull’altra, intuisce che il numero di foglie saltato è il doppio di quelle della sola andata **[elaborare immagini - 2°]** e crea il doppio del numero 12 raddoppiando le singole cifre “venti quaranta” e dandone una lettura mentale personalizzata **[possedere una forma – 3°]**.

A partire da una domanda stimolo in cui l’insegnante-ricercatore chiede se sia possibile far muovere la rana, i bambini le fanno compiere salti più ampi. Quando Rebecca fa atterrare la rana sulla foglia numero 3 e l’insegnante chiede quanto sia lungo il salto alcuni bambini sostengono 2 foglie, altri 3 foglie. Vi è un intersecarsi dei livelli di comprensione in cui il primo gruppo motiva la propria risposta indicando le 2 foglie prima di quella su cui si trova la rana **[fare - 1°]** mentre il secondo sostiene che la foglia su cui si trovi la rana sia già stata saltata e rappresenti ora il punto di partenza del nuovo salto **[elaborare immagini - 2°]**. Interessante far notare che tra quelli che sostenevano che la rana avesse saltato 2 foglie ci fosse anche Lisa. La bambina, benché avesse precedentemente iniziato ad elaborare una prima forma di immagine (il doppio) è ancora fortemente legata al piano dell’azione nel motivare le proprie concettualizzazioni **[volgersi all’indietro]**. Ulteriore prova di questo viene data successivamente:

I: “Come possiamo ricordare il punto di partenza della foglia?”

L: “Possiamo ricordarci la forma!”

L: “Basta ricordarsi il numero”

L: “Non so come spiegarlo!” (min. 8)

Mentre la maggior parte dei bambini si trova in difficoltà nel trovare una strategia che risponda alla domanda dell'insegnante-ricercatore e tenda a dare risposte simili a quelle di Lisa, Matteo ad esempio torna sul conteggio, Davide suggerisce di scriverlo. Dimostra quindi di conoscere la simbologia numerica e di volerla usare con consapevolezza **[possedere una forma – 3°]**. Alla richiesta dell'insegnante sul come e dove scrivere i numeri, i bambini suggeriscono di usare un foglio e Lisa con il dito scrive i numeri 1, 2, 3, 4 sopra le foglie ordinando una linea, ancora immaginaria, dei numeri, sulla quale l'insegnante-ricercatore dispone poi delle tessere con scritti i simboli numerici[2]. Alla rana fatto compiere un secondo salto che la porta ad atterrare sulla sesta foglia. È in questo momento che l'insegnante-ricercatore coglie l'occasione per lanciare la domanda del problema:

> I:" Quante foglie mancano alla rana per arrivare dall'altra parte dello stagno?" (min. 12)

Le varie soluzioni numeriche proposte dei bambini dimostrano livelli di comprensione diversa che però si influenzano tra loro in un susseguirsi di ipotesi che trovano sempre risposta finale nel riferimento al cartellone **[volgersi indietro / fare - 1°]**

> [L: indica le 6 foglie a destra rana che devono essere ancora superate prima dell'arrivo sull'altra sponda]
>
> D: "Altre 6" [Indica le ultime 6 foglie del cartellone] (min. 13)

Alla richiesta dell'insegnante-ricercatore di come sia stato determinato il numero 6, Lisa indica i numeri sopra le foglie **[possedere una forma – 3°]** mentre Davide elabora una strategia. Indica le linea di congiunzione del cartellone che divide, casualmente, le 12 foglie totali proprio sul numero 6 in due parti composte dallo stesso numero di elementi. Fa notare all'insegnante e ai compagni, attraverso il subitizing, come "le due parti dello stagno" siano uguali. Se la rana quindi ha già saltato 6 foglie ed è arrivata a metà le mancano altre 6 foglie, ovvero sia l'altra metà del numero 12. **[notare proprietà – 4°]**.

Concludendo possiamo dire che durante il primo incontro la maggior parte della discussione matematica si è articolata intorno alla dimensione del fare. Questo può essere riconducibile sia all'inesperienza dei bambini rispetto al tipo di compito proposto, considerato una novità, sia alle poche indicazioni iniziali date dall'insegnante-ricercatore. L'evolversi della storia è stato frutto del susseguirsi delle azioni dei bambini sulle quali l'insegnante-ricercatore poneva domande stimolo che richiedevano uno sforzo cognitivo sempre maggiore. La dimensione

[2] I primi 6 numeri sono di colore verde, dal sei al dodici invece di colore rosa.

della narrazione e quella della comprensione matematica si sono sviluppate in parallelo supportandosi. Alla narrazione-drammatizzazione è corrisposto il continuo oscillare tra il livello del fare e quello dell'elaborazione di immagini. Il livello del fare è stato quello che tutti i bambini hanno dimostrato di conoscere. La stessa domanda chiave del problema "Se con un salto la rana arriva fino alla 6^ foglia, quante foglie le mancano per poter giungere dall'altra parte dello stagno?" è stata introdotta a partire dalle azioni dei bambini. Alcuni di loro non solo sono riusciti a passare dalla riga delle foglie alla linea dei numeri, elaborandone un'immagine a cui fare riferimento, ma hanno anche dimostrato di conoscerla distinguendo i numeri alla sinistra di uno dato come precedenti e quelli alla destra come successivi e quindi mancanti rispetto all'arrivo su un determinato traguardo. Nel tentativo di dimostrare la correttezza del risultato numerico calcolato un bambino è stato in grado di evidenziare una proprietà: la metà di un numero come composizione di parti numericamente uguali. I bambini inoltre hanno dimostrato di aver considerato la sottrazione prevalentemente come un'addizione inversa in cui a partire dal 6 sono giunti al numero 12. Tale affermazione porta al comprendere una nuova proprietà: se una quantità viene suddivisa in due parti al crescere dell'una diminuisce l'altra. Questo emerge da un'osservazione di Lisa durante un momento di riepilogo finale

> L: "A 6 ne mancano 6. A 7 ne mancano 5." (min. 51,53)

ed in una in un momento di gioco all'inizio del secondo incontro

> L: "Se la rana ha fatto 1 foglia gliene mancano 11." (min. 4,35)

in cui i bambini dimostrano la padronanza delle due proprietà rilevate. Nello mostrare infatti come nel corso dei giorni tra primo e secondo incontro si erano allenati giocando ad indovinare il numero di foglie mancanti una volta fatta saltare la rana su una certa foglia, i bambini suddividono il numero 12 in due parti correttamente (11-1, 8-4, 9-3), calcolando velocemente il secondo numero dato il primo, e riconoscono che più alto è il numero iniziale più basso è quello che rappresenta il mancante.

7.1.2 La collana di Nonna Procione

Durante il secondo incontro l'insegnante-ricercatore racconta ai bambini di quanto accaduto a Nonna Procione mentre lavava i panni al lago: le si è sfilata la collana ed alcune perle sono cadute. A differenza della volta scorsa, in cui l'insegnante-ricercatore aveva fatto emergere la domanda come una conseguenza delle azioni dei bambini, qui la domanda emerge dalla drammatizzazione. Quando fatta vedere la collana alcune perle rimangono sul filo, altre invece rotolano sul tappetto (min. 16,42). E' importante precisare che al momento dell'introduzione della storia il numero delle 12 perle totali presenti sulla collana non vien né detto dall'insegnante-ricercatore né determinato attraverso il conteggio dei bambini. Questo porta ad una conseguenza fondamentale: la situazione sottrattiva si trasforma in un'addizione in cui i bambini si ritrovano a verificare e dimostrare la correttezza della somma del numero di perle cadute con quello delle perle rimaste sul filo come 7 + 5 =12.

Nel determinare il numero il numero delle 5 perle rimaste sul filo i bambini utilizzano due tecniche: attraverso il subitizing

> L.: "5" (min. 16,50)

oppure, come Rebecca, le contano **[fare - 1°]**.

Una volta che tutti i bambini, come prova, hanno contato le perle rimaste sul filo, l'insegnante chiede quante quelle cadute.

> Francesco:"7. Ho provato a dire così."
>
> L.: "Ce ne sono 5. Ne aggiungi 2 e fa 7"
>
> D.:"5+2 fa 7 perché dopo di 5 viene 6 e poi 7" [Mentre spiega allinea le 7 perle in 2 file da 3 ciascuna e lascia fuori la settima] (min. 17)

Nel tentare di spiegare in che modo abbiano determinato il numero 7 delle perle cadute i bambini fanno ragionamenti che sono validi anche al di là dell'esperienza relativa alla storia **[formalizzare – 5°]**. Dicendo che la somma tra 2 e 5 è 7 fanno riferimento alla cardinalità dei numeri, mentre riconoscendo il 7 come di 2 numeri successivi al 5 il riferimento è all'aspetto ordinale e nel parlare non guardano o toccano mai le perle. Invitati a spiegare Davide prende in mano le perle, ritornando quindi all'esperienza **[volgersi indietro]**, ma lo fa scomponendo il 7 in 6, a sua volta come due volte 3, più 1 **[notare proprietà – 4°]**.

Quindi mentre Francesco si affida al subitizing, anche se non è in grado di spiegarne il funzionamento, guardando solo alle perle cadute, gli altri due bambini collegano il numero 7 al 5 delle perle del filo. Tale operazione mentale è sicuramente da attribuire alla mancata conoscenza iniziale del totale.

A questo punto è l'insegnante-ricercatore che invita i bambini a capire quante siano in totale le perle. L'intenzione è quella di far emergere il numero 12 come scomponibile in 5 e 7.

L.: “Secondo me in totale sono 11.”

I.: “Proviamo a contarle. Dunque le perle sul filo sono 5 mentre quelle che abbiamo trovato a terra 7 e secondo Lisa in tutto sono 11.”

F.: “In tutto sono 12.” (min.18,30)

Francesco determina il totale guardando alle perle cadute e a quelle ancora sul filo **[notare proprietà – 4°]**, mentre Lisa, messa in dubbio dall’affermazione di Francesco, infila le perle cadute una ad una sulle altre e comincia a contare da 6 riconoscendo il punto di partenza per il conteggio nel numero 5 **[possedere una forma – 3°]**. A quel punto si convince della correttezza del numero 12 come totale e somma di 5 e 7. Matteo e Rebecca, però, di fronte alla domanda posta dall’insegnante sul numero totale delle perle, non fanno riferimento egli elementi della storia: contano tutte le perle. Matteo per essere sicuro conta per un totale di 3 volte **[fare - 1°]**. Questo porta tutti i bambini a voler contare individualmente le 12 perle come prova della correttezza del numero calcolato.

Il processo di comprensione matematica anche in questo secondo incontro è stato strettamente connesso alla narrazione. L’imprevisto legato alla caduta della collana prima che ne venisse illustrata la struttura, ha influenzato l’articolarsi del processo comprensivo avvenuto secondo un andamento che possiamo definire a ritroso. I bambini hanno esordito manifestando un certo livello di conoscenza e di formalizzazione delle proprietà dei numeri, quali la cardinalità e l’ordinalità, ma nell’argomentare le proprie affermazioni sono tornati all’azione diretta sui materiali come dimostrazione. Tale azione è quella che probabilmente è mancata all’inizio. E’ interessante notare però che come nel primo incontro l’ascesa sui livelli era avvenuta in modo lineare, anche quella che possiamo definire come discesa è avvenuta a scalare. Si è passati dalla formalizzazione elaborata sulla base delle preconoscenze all’azione del conteggio. Anche il secondo livello, apparentemente non presente è stato invece conquistato dai bambini. Prova di questo è stata data durante il riepilogo finale

I.: “se prendo 5 perle e aggiungo le 2 in mano a Lisa a quanto arrivo?”

B.: “2”

S.: “Ne mancano 5”

I.: “Se aggiungo anche le 2 di Siria?”

L: “Ne mancano 3. E se ne unisco 2 ne manca 1. Se invece se ne unisce 1 ne mancano 2.” (min. 26)

In cui i vari passaggi del dialogo con l'insegnante sono stati illustrati dai bambini mostrando i cambi numerici con le dita **[elaborare immagini – 2°]** e svincolandosi dalle perle, alla quali invece hanno fatto riferimento per l'ultimo conteggio.

7.1.3 I BIRILLI

A partire da questo incontro si è scelto di non effettuare il riassunto di quanto trattato in quello precedente in quanto allungava i tempi della discussione e faceva calare il livello di attenzione dei bambini. L'insegnante-ricercatore propone ai bambini di essere loro stessi i protagonisti della storia attraverso il gioco dei birilli. Ognuno di loro deve lanciare la palla, far cadere più birilli possibili e determinarne il numero.

Prima di iniziare la sfida l'insegnante-ricercatore invita i bambini ad osservare i birilli e mostra loro di aver preparato un foglio su cui sono disegnate le basi sopra le quali porre i birilli. Chiede quindi come si possa verificare che il numero delle postazioni sia corretto e cioè in ugual numero a quello dei birilli.

> Rebecca: "Bisogna contare.
>
> [Lisa conta uno alla volta i birilli]
>
> I.: " Se sono giusti ogni spazio-bollino dovrebbe…
>
> L.: "… avere il proprio birillo!" (min.1)

Lisa passa quindi dal contare **[fare – 1°]** al rilevare la corrispondenza tra birilli e basi sul foglio **[elaborare immagini – 2°]**. I birilli sono 9 come gli spazi. Mentre Francesco è convinto del numero, Lisa probabilmente messa in dubbio dal contenitore circolare su cui sono disposti i birilli lo è meno. Rebecca si offre di aiutarla e conta 10 birilli. A questo punto è l'insegnante ricercatore ad intervenire facendo notare che anche i bambini sono 9: se i birilli sono 9 vi deve essere corrispondenza non solo con il numero delle postazioni, ma anche con il numero dei bambini. Consegnando ad ogni bambino un birillo ed invitandolo a posizionarlo su una base si determina il numero finale di 9 **[fare – 1°]**.

Altra attiva propedeutica all'inizio del gioco su cui l'insegnante-ricercatore fa riflettere i bambini è il numero dei birilli da considerare per eleggere il vincitore

> F.: "Se ne cadono 2, ne restano 7" (min. 3,50)
>
> I.: "Vanno considerati quelli che rimangono in piedi o quelli che cadono? E come si può ricordarlo?" (min. 4)
>
> S.: "Disegniamo un birillo in piedi e vicino un birillo caduto."

I. [prendendo un foglio di carta ed un pennarello]: "Qui segniamo i birilli in piedi. Qui quelli del numero di quanti ce ne mancano per buttarli giù tutti quindi quelli che sono caduti." (min. 4,56)

L'articolarsi delle risposte fa emergere diversi punti di vista: chi vuole considerare i birilli caduti, chi quelli in piedi. La soluzione di Siria non solo permette di annotare entrambi i dati, ma li relaziona l'uno all'altro come scomposizione del numero 9. Come si legge, tale proprietà era stata evidenziata all'inizio da Francesco, ma non era stata considerata dai compagni tanto che prima di iniziare il gioco alcuni bambini hanno bisogno di ricontare i birilli per confermare il numero 9 totale. Qui è nuovamente Francesco ad intervenire a sostegno di Rebecca e Jessica che nell'indicarli non ne toccano uno e contano 8. Il bambino mostra invece che toccandoli tutti sono sempre 9.

Dopo che ogni bambino ha lanciato la palla, l'insegnante lo invita a guardare e a determinare il numero di birilli caduti e quello di birilli rimasti in piedi.

	In piedi	Caduti
Omaima	9	0
Francesco	7	2
Davide	5	4
Gloria	1	8
Siria	2	7
Lisa	3	6
Rebecca	1	8
Jessica	5	4
Ajdin	4	5
Silvia	1	8

Tab. 1: punteggi ottenuti nel gioco dei birilli differenziati in numero di caduti e numero di rimasti in piedi per partecipante.

Quello che emerge in generale è che la maggior parte dei bambini nel calcolare il proprio punteggio rimane legata ai birilli **[fare – 1°]**. La dimensione della narrazione diventa quindi quella della descrizione dell'agire e i numeri rappresentano il linguaggio simbolico attraverso cui esprimerla. Una volta lanciata la palla nel dire quanti birilli sono rimasti in piedi alcuni bambini utilizzano il riconoscimento visivo altri invece li contano. Jessica, ad esempio, una volta abbattuti i birilli ha bisogno di ricontare sia quelli che ha fatto cadere (5) sia quelli rimasti in piedi (5). Omaima non ne abbatte uno. Oltre alle difficoltà personali legate alla cognizione numerica si trova ancor più in difficoltà nel distinguere tra caduti ed in piedi. Sono i compagni che le dicono che i birilli in piedi sono tutti, quindi 9, mentre quelli caduti 0, riconoscendo lo zero come rappresentante di "nessuno" **[elaborare immagini – 2°]**.

Un discorso a parte va fatto però per Davide. Per tutta la durata del gioco il bambino è stato seduto vicino ai birilli e ha anticipato le risposte dei compagni. Sono gli stessi bambini che alla domanda

I.: “Come hai fatto a dirmi il numero dei birilli rimasti in piedi?”

rispondono di aver ripetuto la risposta di Davide. Davide tuttavia non dice mai come fa a determinare i risultati. Si giustifica dicendo che ha provato ad indovinare o che ha pensato. Se inizialmente questo pensare è legato ad un veloce conteggio visivo intuitivo che dal suo punto di vista privilegiato lo porta ad anticipare i compagni **[elaborare immagini – 2°]**, successivamente diventa una vera e propria strategia di azione che lo porta a memorizzare le coppie complementari del 9 **[possedere una forma – 3°]**. In questo viene seguito da Francesco. Entrambi infatti di fronte di Rebecca (1 in piedi – 9 caduti) rispondono 8

F.:” era già accaduto prima.” (min. 16,40)

Subito dopo è lo stesso Davide che di fronte al punteggio di Jessica (5 in piedi – 4 caduti) fa notare che la compagna ha fatto come lui in precedenza.
Al termine del gioco i bambini e la maestra si siedono in cerchio intorno il tabellone del punteggio e riflettono sul fatto che l’obiettivo del gioco era quello di abbattere più birilli. Vince quindi il bambino che il più alto numero di birilli caduti. È arrivato primo Francesco a pari merito con Siria (7 a terra – 2 in piedi). Poi viene Lisa (6 a terra – 3 in piedi). Dopo Davide, Jessica, Ajdin (4 a terra – 5 in piedi). È la maestra a far notare i tre punteggi nella sequenzialità. Poi ci sono la maestra, Rebecca e Gloria (1 a terra – 8 in piedi). Ultima, come fa notare Lisa, Omaima con 0 birilli abbattuti. Elaborando la classifica i bambini fanno emergere di aver capito che maggiore è il numero dei birilli caduti più alta è la posizione in classifica **[notare una proprietà - 4°]**.

7.1.4 IL CANE E L’ALBERO DI MELE

La storia presentata in questo incontro ha portato i bambini a calcolare il resto. Va precisato fin da subito che questo è stato l’unico incontro in cui, a differenza degli altri, il materiale presentato per la narrazione non ha permesso ai bambini alcuna manipolazione. Ai bambini è stato raccontato che il cane[3] giocando in giardino aveva fatto cadere alcune mele dall’albero. I bambini dovevano aiutare l’insegnante-ricercatore a capire quante mele si sarebbero dovute trovare a terra conoscendo il numero delle mele presenti sull’albero prima e dopo il gioco del cane in giardino. La storia è stata introdotta mostrando ai bambini la rappresentazione dell’albero con le 10 mele. Successivamente è stato mostrato loro anche il secondo

[3] Per cane l’insegnante ricercatore parla in prima persona intendendo il proprio cane.

cartellone con disegnato un albero uguale al primo ma con sole 7 mele tra le foglie. Per catturare la loro attenzione e mantenere alto l'interesse con gli alberi è stato presentato anche un pupazzo a forma di cane a rappresentazione dell'originale.

Appena viene mostrato il primo albero Francesco riconosce subito che vi sono 10 mele. Dice di averlo determinato contando sottovoce **[fare – 1° / elaborare immagini – 2°]** e invitato a mostrare ai compagni indica le mele una ad una e le enumera a voce alta **[volgersi indietro / fare - 1°].** Rebecca e Davide contano anche loro come ulteriore prova, ma indicano le mele in un ordine diverso da quello di Francesco.

I.: "Come possiamo fare a ricordarci che sono 10?"

R.: "Fare un numero."

I.: "Un numero? Come lo faccio?"

F.: "Lo scrivi. Su un foglio." (min. 3)

Il voler scrivere su un foglio il numero 10 mostra che i bambini considerano le dimostrazioni dei compagni come prove valide. Riconoscono nel linguaggio simbolico la traduzione di quanto fatto **[elaborare immagini – 2°]**: il numero etichetta rappresenta la cardinalità dell'insieme. **[possedere una forma – 3°].**

Quando l'insegnante mostra il secondo albero è Davide che determina immediatamente il numero 7 delle mele tra le foglie. Invitato dall'insegnante-ricercatore a mostrare come le ha calcolate

D.: "Perché 3 + 3 fa 6 e altre 2, un'altra una fa 7."

I.: "Quali sono le 3 scusami?"

D.: "Queste [traccia una riga con il dito] e queste [traccia una riga con il dito]."

I.: "E questa fa 7?"

D.: ""Sì. (min. 4,51)

Mostra non solo di aver visualizzato il numero 7 attraverso la composizione di parti **[elaborare immagini – 2°]**, ma anche di essere in grado esprimere il proprio ragionamento **[possedere una forma – 3°].**

I.: "Tu hai contato così. Ci sono altri modi di contare?"

F.: "Più 4 più 3 fa 7" (min. 5)

Francesco va oltre la spiegazione di Davide perché dà un'altra scomposizione del 7 **[notare una proprietà- 4°]** che può essere considerata sia un suo schema mentale sia un'elaborazione di quella di Davide.

I.: "Dove sono + 4 e + 3?"

F.: "Queste qua." [indica 4 mele e poi 3 mele]

Anche in questo caso i bambini vogliono che il numero 7 venga trascritto in linguaggio simbolico su un foglio e che tale foglio venga apposto vicino all'albero **[possedere una forma – 3°]**.

Francesco a questo punto anticipa l'insegnante-ricercatore

F.: "Ho capito perchè. Ho capito perchè! Lo so perchè! Li ha mangiati lui!"

facendo notare di riconoscere la differenza tra le quantità. Lo sfondo narrativo gli permette di esprimere questa sua osservazione e di darne una ragione plausibile: nel secondo albero ci sono meno mele del primo perché il cane ha mangiato le mancanti **[possedere una forma – 3°]**. L'insegnante-ricercatore a questo punto precisa che le mele non sono state mangiate, ma fatte cadere. I bambini devono aiutarla a capire quanto sono le mele che dovrebbero essere messe a terra per completare il racconto.

F.: "Son cadute 3!"

I.: "Come hai fatto a dire che ne son cadute 3?"

F.: "Perché ho provato a dirlo."

I.: "No, dai."

F.: "Ho pensato."

I.: "È ma quello volevo capire. Che cosa hai pensato per dire 3?"

F.: "Prima ho pensato che ne son cadute 2, dopo ho pensato che ne son cadute 3."

I.: "No, ma dai. Come hai fatto a dire 3? Spiegami che cosa hai pensato. Che numeri hai pensato?"

F.: "Prima ho pensato che son cadute 2, dopo ho pensato che erano cadute 3."

I.: "Ma come fai a dire che sono cadute proprio 3? Come facciamo a sapere che sono 3?"

D.: "Perché se sono 10 e 7 c'è l'8, il 9, e il 10." (min. 7,58)

Francesco è in grado di determinare subito il numero delle 3 mele mancanti, tuttavia la sua spiegazione mostra che il bambino non l'ha elaborata in funzione al totale, ma attraverso dei tentativi dei quali però è fermamente convinto **[possedere una forma – 3°]**. Davide invece non solo mette in relazione i due numeri, ma nota anche come posso essere legati tra loro **[notare una proprietà – 4°]**. Inoltre il modo in cui esprime il proprio pensiero, facendo riferimento alla successione numerica permette di ritenerlo una prima forma di concettualizzazione **[formalizzare – 5°]**.

I.: "Secondo te quante ne sono cadute Rebecca?"

R.: "3. Sono cadute 3."

I.: "Ma come fai a dire 3?"

R.: Perché… perché prima là c'erano." (min.8,42)

La spiegazione che invece dà Rebecca fa un passo indietro rispetto a quella di Davide perché, benché metta in relazione il 7 e il 10 ed individui un termine di confronto, il fattore temporale, fa riferimento a quanto visibile dal cartellone [volgersi indietro / notare una proprietà – 4°].

Una volta calcolato il numero 3, l'insegnante-ricercatore li stimola a riflettere sul come sia possibile renderlo visibile. Mentre i bambini propongono, probabilmente sulla scia di quanto fatto in precedenza di scrivere il numero, l'insegnante fa emergere che le mele non state sparite, ma fatte cadere a terra. I due alberi devono mostrare quindi lo stesso numero di mele: in uno le 10 mele sono già tutte presenti sulla chioma, mentre nel secondo le mele sono in parte tra le foglie ed in parte a terra.

> I.: "Come fai a dire che mancano 3?"
>
> F.: ""Perché ci sono degli spazi liberi.
>
> I.: "Come facciamo a vedere che ne sono cadute 3 e che quindi quelle sopra e quelle cadute fanno 10? Come facciamo a far vedere che sono 3 quelle cadute?"
>
> F.: ""Io ho provato a dire.
>
> I.: "Sì. Tu l'hai detto giusto, ma sul foglio come facciamo a far vedere... come si potrebbe fare a far vedere che quelle cadute sono 3?"
>
> F.: "Prendiamo un foglietto di nuovo."
>
> Jessica: "Sì, ecco qui il foglio."
>
> I.: "Ecco mettiamolo così si vede bene. Ma se sono cadute cosa vuol dire? Che sono andate dove? In cielo?"
>
> R.: "No! Per terra! Sono cadute per terra."
>
> F:.: "Per terra sull'erba."
>
> R.: "Perché il cane ha mosso l'albero e le 3 mele sono cadute per terra."
>
> I.: "Ok, ma io... forse sono... e come facciamo a far vedere alla gente che sono per terra?
>
> R.: "Dirlo agl'altri."
>
> F.: "Questo bisogna disegnarlo." (min.9,40)

Il disegnare le mele mancanti diventa quindi una vera e propria forma dimostrativa che porta a pensare il 10 come 7 e 3 [possedere una forma - 3°] e rende esplicita l'uguaglianza quantitativa tra i due alberi [notare una proprietà – 4°]. Inoltre nel disegnare le 3 mele mancanti l'insegnante-ricercatore si fa guidare dai bambini che man mano che le mele ad una vengono aggiunte sul tappetto erboso del secondo albero riconoscono l'aumentare delle mele totali ed il diminuire delle mancanti: ad 8 ne mancano 2, a 9 ne manca 1.

Riepilogando possiamo dire che i bambini hanno saputo rispondere alla domanda del problema, calcolando la soluzione numerica di 3, attuando principalmente due strategie. La prima è stata quella spontanea del trattare la sottrazione 10 meno 7 come addizione inversa che li ha portati dal 7 a muoversi in avanti verso il 10. La seconda invece è stata quella, probabilmente indotta dal tipo di materiale con cui avevano a che fare, di guardare al 3 come quantità che permette al 7 di diventare 10. Il mostrare i due alberi in contemporanea li ha portati a considerarli come termini di confronto l'uno per l'altro. Tuttavia una volta giunti ad essere certi delle quantità coinvolte sono riusciti ad elaborare il concetto di resto come quantità mancante **[formalizzare – 5°]**. Fondamentale è stato lo sfondo narrativo che ha permesso ai bambini di interagire, anche se non concretamente, con il racconto e di esprimere le proprie congetture mentali fino a formalizzarle all'interno dello schema successione numerica.

7.1.5 La gabbia con gli uccellini

In questo ultimo incontro i bambini sono chiamati a confrontarsi con il concetto di differenza. Il racconto, come nell'incontro precedente inizia a partire dalla domanda. L'insegnante-ricercatore racconta che la nonna[4] all'interno della gabbietta con i propri uccellini gialli e rossi, si è accorta che ne sono nati di nuovi. Nel loro continuo svolazzare però non riesce a capire quanti siano. È molto importante per lei non solo capire quanti siano gli uccellini rossi e quelli gialli, ma soprattutto quale sia il gruppo più numeroso e quello meno numeroso e quanta sia la differenza tra i due. Il diverso piumaggio infatti fa sì che gli uccellini si cibino con due mangimi diversi, di colore rosso per le piume rosse e di colore giallo per le piume gialle e ne deve essere dato di più al gruppo con più uccellini e meno al gruppo con meno uccellini. Conoscere inoltre la differenza tra i due gruppi permetterà alla nonna di darne in più o in meno nella giusta misura. Mentre l'insegnante sta spiegando il tutto i bambini, probabilmente ormai avvezzi alla metodologia, intervengono.

> L.: "Ho già capito cosa volevi dire. I gialli vanno qua [indica la mangiatoia gialla] ed i rossi di qua [indica la mangiatoia rossa]."
>
> I.: "Ci sei quasi Lisa."
>
> D.: "Perché non ci stanno quelli rossi." [fa riferimento alla mangiatoia rossa]
>
> F.: "Perché sono un po' troppi. Non ci stanno sulla casetta."
>
> L.: "No. I gialli sono pochi e i rossi sono di più." (min. 4)

L'insegnante continua a spiegare facendo notare che gli uccellini sono di due diversi colori, gialli e rossi, e che, per questo motivo, necessitano di mangimi di colore diverso indicati dalle due mangiatoie di colore diverso.

[4] Si riferisce alla nonna come la propria nonna.

L.: “Devi contarli.”

S.: “I gialli sono 5.”

I.: “ Come fai a dirlo?”

F.: “I rossi sono sei.”

[Insegnante si stupisce della velocità con cui i bambini hanno dato le loro risposte]

F.: “Io ho contato sottovoce.” (min. 5)

Nel motivare le proprie risposte Francesco si alza e conta indicando gli uccellini con il dito **[fare – 1°]** tornando **[volgersi indietro]** quindi dal piano del conteggio visivo **[elaborare immagini – 2°]** a quello del riferimento alla realtà. Nello spiegare aggiunge però un osservazione

F.: “4 più un altro 1, arrivi a 5.” [Indica i 4 uccellini disposti come ai vertici di un quadrato e il quinto in alto a destra.]

elabora quindi una strategia che lo porta a riconoscere il numero 5 come composizione di 4 con 1 **[possedere una forma – 3°]**. I gesti che accompagnano le sue parole dimostrano un’ulteriore conquista del bambino: riconosce il 4 creando un sorta di quadrato che congiunge gli uccellini tra loro **[notare una proprietà- 4°]**. Siria invece rimane legata alla discriminazione della quantità superando il gesto dell’indicare, ma non riuscendo a spiegarlo **[elaborare immagini – 2°]**.

I.: “Quanti sono quelli di meno e quanti sono di meno?”

B.: “I gialli.”

D.: “Di 1 di meno. Perché il 5 e dopo del 5 hai il 6.”

S.: “Ne togli 1 e fa 5.” (min. 6)

Stabilito il numero di 6 uccellini rossi, i bambini riconoscono come meno numeroso il gruppo degli uccellini gialli. Davide riesce a darne subito una spiegazione che dimostranza una certa padronanza delle caratteristiche dei numeri, in particolare l’essere ordinati, riconoscendo il 6 come successivo del 5 e quindi il 5 come meno numeroso di un’unita del 6 **[notare una proprietà- 4°]**. Siria formalizza l’osservazione del compagno riformulandola all’interno della sottrazione e utilizzando il termine “togliere” che la caratterizza **[formalizzare – 5°]**.

È lo stesso insegnante-ricercatore che a questo punto chiede ai bambini di dare una dimostrazione immediatamente visibile. Fa vedere che gli uccellini possono essere staccati e rincollati sul foglio.

I.: “Sapendo che si possono staccare c’è un modo per mostrare agli uccellini per mostrare alla mia nonna che sono di più…”

S.: “Li metti in fila” (min. 7)

L’ipotesi di Siria dimostra che il ragionamento formulato è stato concettualizzato pienamente con la proposta di una strategia dimostrativa corretta. Tuttavia la bambina si rifiuta di mostrarlo in prima persona e sono i compagni che tentano di esplicitarlo. Formano così una prima riga di uccellini gialli nell'angolo in basso a sinistra.

> I.: "Come si possano mettere gli uccellini rossi per far vedere che sono di più dei gialli?" (min. 8)

Lisa inizia a metterli nell'angolo in basso a destra e sul foglio sono visibili due righe di uccellini. Sotto la mangiatoia gialla di sinistra i 5 uccellini gialli mentre sotto la mangiatoia di destra rossa, che è leggermente più in alto dell'altra, i 6 uccellini gialli. È importante sottolineare che su questa disposizione vengono formulate tutte le ipotesi sul come confrontare uccellini rossi e gialli facendo emergere la differenza di un uccellino tra i due gruppi e che non verrà più variata, se non dall'insegnante e solo in forma minima. Il disporre gli uccellini in modo ordinato e distinto per colore può essere quindi considerata la prima strategia argomentativa condivisa **[elaborare immagini – 2°]** sulla quale i bambini elaborano le successive idee

> L.: "Mettiamo insieme tutti gli uccellini."
>
> F.: "Facciamo una fila qui." [traccia una linea con il dito davanti la mangiatoia rossa]
>
> L.: "Facciamo i numeri sopra"
>
> F: " Tutti dritti così" [traccia di nuovo una linea con il dito davanti la mangiatoia rossa]
>
> L. [accorgendosi che le due righe, sebbene ai lati opposti del foglio, non sono allineate tra loro]: "Quella dei gialli è più bassa di quella dei rossi. Gli uccellini gialli sono 5 e sono più bassi. Gli uccellini rossi sono 6 e sono più alti." (min 12)

La proposta di Lisa appare interessante: mostra come la bambina non solo riconosca l'aspetto ordinale dei numeri **[possedere una forma – 3°]**, ma lo traduca sul piano visivo facendo corrispondere ad un'altezza più bassa il numero più basso **[notare una proprietà – 4°]**. L'insegnante ricercatore sposta la riga degli uccellini gialli più in alto facendo notare che gli uccellini non sono aumentati

> F.: "Sono ancora uguali" (min. 13,30)

È possibile distinguere tre tipi di ragionamenti formulati dai bambini in riferimento all'immagine costruita sul cartellone. Il primo è quello appena descritto in cui si cerca darne una giustificazione visiva **[elaborare immagini – 2°]**, il secondo li porta invece a identificare l'uccellino di differenza come un elemento che impedisce ai due gruppi di essere numericamente uguali: è la differenza che va eliminata **[possedere una forma – 3°]**.

> F.: "Puoi farne volare uno via così si vede che quelli che rimangono sono uguali."
>
> S.: "Fai una croce su uno rosso."

Nel terzo, e ultimo, invece i bambini "escono" dalla dimensione dell'immagine:

L.: “Prendiamo un foglio e scriviamo -Uno in più!-” (min. 14,20)

e riconoscono il linguaggio simbolismo dei numeri come una strategia per indicare le quantità **[notare una proprietà – 4°]**. Scrivono il numero 6 e lo pongono sopra la riga degli uccellini rossi e il numero 5 sopra quella degli uccellini gialli.

A questo punto cercano un modo per evidenziare che la differenza tra i due numeri è 1

S.: “Mettiamo un altro 5.”

D.: “Così sono 10.”

L.: “Allora prendi un altro uccello giallo così sono 6 e 6.” (min. 18,21)

S.: “Allora mettiamo un 1 sopra qui.” [indica l’ultimo uccellino rosso] (min. 19,21)

D.: “Ma allora adesso è 16.” (min. 20,05)

B. [rivolti all’insegnante]: “Scrivi 1 in +”

Le soluzioni proposte mostrano che i bambini non solo riconoscono i numeri scomponendoli e ri-assemblandoli, ma che si interrogano su un uso significativo della loro scrittura **[formalizzare – 5°]**. Non a caso infatti, in ultima battuta i bambini allineati sul numero 1 per indicare la differenza, convincono Davide è preferibile scrivere 1 sopra l’ultimo uccellino dei rossi invece che “1 in +”. Tale scelta è probabilmente riconducibile al fatto mentre 1 era il numero che loro avevano scritto, “1 in +” viene fatto scrivere all’insegnante-ricercatore e probabilmente non tutti riconoscono la simbologia utilizzata.

Riassumendo possiamo dire che l’ultimo incontro è suddivisibile in due parti. Mentre la prima è stata rivolta al risolvere la storia-problema determinandone il risultato numerico, la seconda invece si è interessata alla dimostrazione e alla giustificazione di quanto calcolato. In entrambi i casi, anche se in momenti diversi, i bambini hanno raggiunto il livello di concettualizzazione che li ha portati a svincolarsi dall’esperienza elaborando e perfezionando le proprie preconoscenze scrittura **[formalizzare – 5°]**. La narrazione si è tradotta in vera e propria descrizione del ragionamento facendo emergere anche una certa proprietà di linguaggio. Da ultimo è interessante far notare che mentre nel determinare il risultato solo dal punto di vista numerico i bambini si sono mossi all’interno dello schema della sottrazione introdotto dall’insegnante, nel giustificare il proprio ragionamento hanno invece fatto ricorso all’addizione inversa procedendo in senso crescente sulla linea ordinata dei numeri.

7.2 Il gruppo di laboratorio

7.2.1 La rana nello stagno

L'insegnante-ricercatore per introdurre mostra il cartellone con rappresentato lo stagno.

> I.: "C'è questa rana che vive..."
>
> B.: "... nello stagno."
>
> I.: "Lei vive qui [pone la rana sulla riva di partenza] da questa parte dello stagno e deve andare dall'altra parte dello stagno. È vicina o lontano dall'altra parte?"
>
> B.: "Lontano."
>
> I.: "Lontano. Si accorge che da una parte all'altra dello stagno... cosa ci sono in mezzo all'acqua?"
>
> Al.: "Delle foglie."
>
> I.: "Delle foglie e come potrebbero aiutarla queste foglie ad arrivare dall'altra parte dello stagno?"
>
> Al.: "Sì perché può saltarci sopra." (min. 4,30)

Dal punto di vista narrativo i bambini entrano subito nel vivo della storia, cogliendo subito che la rana si trova di fronte ad un ostacolo, il passare da una parte all'altra dello stagno, e che le foglie che sono sull'acqua sono un elemento di aiuto perché le permettono di avere un punto di appoggio **[fare – 1°]**. È solo quando l'insegnante-ricercatore chiede quante foglie la rana debba superare che i bambini iniziano a contarle. Il conteggio rimane però legato ad un dimensione puramente esecutiva. I bambini contano le foglie mescolando modi diversi e sovrapponendosi l'uno con l'altro: alcuni le enumerano a voce alta senza toccarle, altri le indicano ma considerano punti di inizio differenti, altri proseguono la numerazione dei compagni toccando foglie diverse. La disposizione lineare delle foglie sembra non aiutare i bambini: non viene nemmeno presa in considerazione come elemento guida. Il risultato finale porta a numeri diversi: 9, 10, 11 e 12. A questo punto interviene Tosca che prende l'iniziativa e conta le foglie una alla volta a voce alta toccandole a partire da una delle due rive dello stagno. La bambina conta da sinistra a destra in sequenza lineare senza guardare al fatto che è disposta dalla parte opposta al senso orientato del cartellone. Non guarda alle foglie come al percorso che deve compiere la rana, ma sono alla loro disposizione. Quando l'insegnante-ricercatore chiede conferma ai bambini del numero 12, loro le ricontano **[fare – 1°]**.

> I.: "Può fare solo un salto di 12 per arrivare là?"
>
> D.: "No. Uno alla volta."

I.: “Uno alla volta. Come?”

MS.: “Così. [prende la rana in mano e partendo dalla riva di partenza porta la rana dall’altra parte. Conta il numero dei salti a voce alta.] 13.”

I.: “13 e arriva là. Ma ha saltato quante foglie?”

MS.: “12” (min. 6,30)

L’insegnante-ricercatore, date le difficoltà dei bambini nel passare dalla foglia al suo rappresentare un numero, cerca di far emergere la domanda del problema proprio dall’azione sui materiali. Marian Sara fa eseguire correttamente il passaggio della rana da una riva all’altra, ma conta i salti in numero di 13 e non le foglie che questa tocca. Quando l’insegnante-ricercatore le chiede conferma del numero, lei risponde che la rana ha saltato 12 foglie, ricordando il numero contato in precedenza e non interrogandosi sulla discordanza tra i due numeri **[fare – 1°]**.

Una volta che la rana è giunta alla sponda di arrivo l’insegnante-ricercatore fa notare ai bambini che potrebbe tornare indietro compiendo un unico grande salto tale da superare tutte e 12 le foglie. Nel far fare questo alla rana, la fa atterrare sulla sesta foglia per far emergere la domanda del problema

I.: “Cosa è successo?”

MS.: “È atterrata sulla foglia.”

I.: “È ma dove doveva arrivare?”

MS.: “Qua.” [indica l’erba della sponda opposta]

I.: “E come facciamo adesso?”

D.: “Salta un altro salto.” (min. 7,53)

I bambini rimangono però ancora molto legati allo sviluppo narrativo del racconto e alla risoluzione pratica del problema della rana.

I.: “Come facciamo a sapere quanto lungo dev’essere?”

Andrea: “Forse deve prendere la rincorsa come ha fatto prima.”

I.: “È ho capito io, ma io voglio sapere quanto lungo dev’essere questo salto!”

MS.: “Con i numeri!” (min. 8,16)

Solo Marian Sara coglie l’esigenza di usare i numeri per determinare la lunghezza in foglie del salto che deve compiere la rana per giungere dall’altra parte **[elaborare immagini – 2°]**. I bambini però all’azione del contare cominciano a enumerare indistintamente le foglie precedenti e successive a quella su cui si trova la rana. L’insegnante-ricercatore cerca quindi di aiutarli a strutturare la propria azione facendo un riepilogo. Denise interviene dicendo che la rana ha fatto un salto e che ora deve farne un altro per giungere dall’altra parte **[volgersi indietro / fare -1°]**. I bambini contano le foglie già saltate e ne enumerano 6. L’insegnante-ricercatore chiede conferma del numero di 6 foglie saltate

D.: "Perché c'è sopra e quindi deve continuare fino che... deve continuare." (min. 9,29)

Questo intervento che Denise esprime in modo confuso viene ripreso in seguito dalla stessa bambina

I.: "Come avete fatto a dirmi che ha saltato 6 foglie?"

D.: "Perché se abbiamo contato e la rana è sopra di quella vuol dire che... [viene interrotta da una compagna che chiede di andare al bagno] .. che abbiamo contato. Se la rana è in quel punto, ricomincia e se la togli vuol dire che è 6." (min. 12,19)

evidenziando che la bambina è passata dal guardare al totale delle foglie alla sua composizione in due parti **[elaborare immagini – 2°]** e che nel contare le due parti riconosce la foglia su cui si trova la rana come già saltata. Dalla foglia successiva va ricominciato il conteggio **[possedere una forma – 3°]**. Nessun bambino però ne elabora ulteriormente il pensiero e lei stessa non riesce a rileggere la propria idea in termini numerici **[volgersi indietro]**.

In generale il primo incontro può essere suddiviso in due parti. La prima parte è stata quella dedicata alla discussione collettiva mentre nella seconda i bambini hanno avuto modo di riflettere in piccoli gruppi sui materiali presentati. Il momento di recupero dell'attività nel piccolo gruppo è stato fondamentale. Ha permesso ai bambini di ri-elaborare la co-costruzione del racconto, giungendo poi a rappresentarla, ma soprattutto di riflettere sugli aspetti matematici coinvolti. La dimensione della comprensione matematica per tutta la durata dell'incontro si è sviluppata in modo confuso e quasi sempre forzata dall'insegnante-ricercatore. I bambini hanno argomentato maggiormente quella della narrazione rimanendo molto legati alla descrizione del cosa accadeva alla rana. Anche quando vi è stato il tentativo da parte di qualcuno di guardare all'aspetto numerico questo o non è stato argomentato correttamente (es.: il contare senza punti di riferimento) o è diventato un elemento di dubbio (es.: il contare i salti della rana facendo però riferimento alle foglie). La struttura sottrattiva non è praticamente emersa poiché l'atto del contare si è connotato maggiormente come descrizione del parlato e i bambini sono giunti solo ad una prima forma di rappresentazione mentale legata al guardare alle foglie come elemento numerico **[elaborare immagini – 2°]**. Le difficoltà incontrate sono probabilmente legate al fatto che i bambini non avevano mai svolto, come emerso dalle interviste alle insegnanti di riferimento, attività specifiche per l'ambito logico-matematico in sezione e che solo raramente erano stati invitati a riflettere in modo trasversale sugli aspetti numerici, e matematici in generale, presenti nella quotidianità scolastica ed extra-scolastica. Si pensi ad esempio al fatto che i bambini hanno contato le foglie sul cartellone in base al come erano seduti[5] e non guardando al senso del disegno. I bambini non avevano tanto una scarsa conoscenza numerica, con relativa confusa concettualizzazione dei processi, quanto una disabitudine ad operare con i numeri. La ricerca della soluzione numerica si è tradotta nello sviluppare una strategia di conteggio efficace e corretta. "L'imparare a contare" si è articolato anche grazie ai continui tentativi dell'insegnante-ricercatore di far focalizzare l'attenzione dei bambini sugli aspetti numerici. Se da un lato questo ha portato a ridurre i tempi di manipolazione ed esplorazione del materiale, che avrebbero potuto aiutare i bambini ad agire con maggiore consapevolezza, dall'altro ha permesso ai bambini di elaborare una prima riflessione matematica proprio all'interno del contesto narrativo.

7.2.2 La collana di Nonna Procione

Dopo un momento iniziale di ritorno sull'esperienza del precedente incontro, volto a far recuperare ai bambini gli aspetti numerici, l'insegnante-ricercatore presenta la nuova storia-problema. I bambini di fronte al pupazzo di Nonna Procione iniziano subito a descriverlo minuziosamente e l'insegnante-ricercatore cerca di far emergere la dimensione della comprensione matematica a partire da quella narrativa.

> Insegnante: "Nonne Procione è molto molto legata alla sua collana. Vedete? Perchè gliel'ha regalate Nonno Procione per chiederle di sposarlo. Succede... vogliamo prendere la collana di Nonna Procione?"
> Sara: "Wow!"
> I.: "Vedete che lunga che è! Da cosa è formata la collana?"
> S.: "Da palline di tutti i colori."
> I.: "Secondo voi i numeri ci possono aiutare a capire?"
> S.: "Sì!"
> I.: "Come?"
> S.: "Dobbiamo contarle." (min. 8,30)

Sara coglie subito l'utilità dei numeri nella descrizione della collana: i numeri permettono di contare le perle da cui è composta **[fare – 1°]**. La bambina conta le 12 perle della collana ponendo il filo di fronte a sé. Anche gli altri bambini vogliono contarle e l'insegnante-ricercatore lascia loro il tempo di farlo. Questo momento esplorativo permette ai bambini di prendere confidenza con il materiale e di

[5] I bambini erano seduti a cerchio intorno al cartellone. Alcuni di loro guardavano quindi ai gesti dell'insegnante in modo speculare.

affinare le abilità di conteggio. I bambini infatti contano individualmente disponendo la collana davanti a sé, toccando le perle una alla volta ed enumerandole a voce alta partendo da sinistra e muovendosi verso destra.

Dopo che tutti i bambini si sono sincerati della quantità, l'insegnante-ricercatore continua il racconto e nella drammatizzazione fa cadere alcune perle dalla collana di Nonna Procione.

> I.: "Cosa è successo?"
>
> S.: "Si è rotta."
>
> I.: "Si è rotta la collana di Nonna Procione e quante perle ha perso?"
>
> Alessio: "Basta contarle!" (min. 13,14)
>
> I.: "Quali vuoi contare?"
>
> Al.: "5"
>
> I.: "Ma 5 quali sono?"
>
> S.: "Queste." [Sara indica quelle rimaste sul laccio]
>
> I.: "E come facciamo a sapere quante sono quelle che sono cadute?"
>
> S.: "Queste! [indica il mucchietto di perle cadute] Basta contare quante ne ha perse di queste!" (min. 13, 28)

Alessio non solo individua subito cosa fare, ma attraverso il subitizing anticipa quasi la domanda dell'insegnante-ricercatore dicendo che le perle rimaste sul filo sono 5 **[elaborare immagini – 2°]**. Sara riconosce, probabilmente anche lei attraverso il subitizing **[elaborare immagini – 2°]** il numero 5, ma alla domanda dell'insegnante-ricercatore di cosa rappresenti 5 risponde indicando le perle sul filo **[volgersi indietro / fare -1°]**. L'azione sui numeri attraverso il conteggio diretto viene sostenuta anche dagli altri bambini: per determinare il numero delle perle a terra decidono di contarle **[fare – 1°]**. In un primo momento procedono in modo confuso contando 6 perle. Quando l'insegnante-ricercatore chiede loro se sono sicuri del risultato, i bambini decidono di contare singolarmente a voce alta le perle uno dopo l'altro e nel farlo organizzano le perle in modo ordinato **[elaborare immagini – 2°]**.

> S.: "Bisogna metterle in fila!"
>
> I.: "Allora ogni bambino propone la sua soluzione. Lei propone questa soluzione qua. Vediamo."
>
> S.: "Io dicevo di metterle in fila così." [allinea le perle una dopo l'altra]
>
> I.: "E perché dici di metterle in fila?"
>
> S.: "Così si va meglio a contarle." (min. 16,53)

Alcuni bambini allineano le perle formando una riga come Sara, altri le mettono in fila in senso verticale; Andrea le organizza su due righe, una da 4 ed una da 3. Il dare un ordine permette ai bambini di essere sicuri del proprio contare. Tutti infatti contano 7 perle.

> I.: "E tu dicevi che per vedere se erano tutte... cosa dicevi di fare?"
>
> S.: "Proviamo a rimetterle qua."
>
> Marian Sara: "Io, io! Posso fare? Sono brava a filare!"
>
> Tosca: "Anch'io!"
>
> I.: "Tu le metti e qualcuno le conta. [Mentre Marian Sara infila le perle gli altri contano a voce alta] Quindi sono 7. Come facciamo a vedere se sono tutti e 12?"
>
> S.: "Contare." (min. 21,50)

Quando l'insegnante-ricercatore chiede ai bambini come possono essere sicuri di non aver perso nessuna perla, i bambini rispondono che è necessario rimetterle insieme e contarle verificando che il numero totale corrisponda a quello iniziale. Perle cadute e perle rimaste sul filo rappresentano le due parti in cui un insieme di elementi, le perle, è stato diviso. La loro unione deve ridare l'insieme di partenza **[elaborare immagini – 2°]**. Per dimostrare la correttezza del proprio conteggio però hanno bisogno di ricreare l'insieme iniziale re-infilando le perle nel filo **[volgersi indietro / fare -1°]**. Solo una volta che tutte le perle sono state riunite in un insieme unico, i bambini le contano in modo sequenziale. Il numero 12 delle perle totali diventa la prova della correttezza del proprio calcolo eseguito attraverso il conteggio. Quando l'insegnante-ricercatore cerca di far emergere nuove strategie per il calcolo del risultato i bambini dicono di poter contare più velocemente. A questa idea corrisponde una scansione più veloce delle parole-numero che conferma il loro riferirsi alla realtà come dimostrazione matematica **[fare – 1°]**.

Riassumendo si può dire che nel corso del secondo incontro i bambini hanno dimostrato di aver sviluppato fin da subito un'immagine del numero a partire dal conteggio delle perle **[elaborare immagini – 2°]**. Tuttavia il processo di dimostrazione matematica è rimasto strettamente legato all'azione diretta **[fare – 1°]**. La dimensione narrativa si è articolata in contemporanea a quella della comprensione matematica in un processo di andirivieni continuo in cui i numeri servivano a descrivere l'accaduto e il racconto permetteva ai bambini di dare significato al proprio contare. La situazione sottrattiva si è capovolta in una di combinazione di parti volte a ricreare l'intero, che ha rappresentato un punto di riferimento numerico ed è stato inteso come insieme ordinato di elementi.

7.2.3 I BIRILLI

La dimensione prevalentemente ludica dell'incontro ha permesso ai bambini di manipolare i numeri attraverso l'azione sui birilli. Il gioco attivo ha inoltre fatto si che individualmente ogni bambino abbia (ri)elaborato le proprie modalità di calcolo e conteggio prendendone consapevolezza. La riflessione sui numeri non è stata forzata, come nell'incontro con protagonista la rana, o strettamente legata al contare, come per la collana, ma resa centrale fin dall'inizio. Il momento introduttivo, in cui l'insegnante-ricercatore ha presentato il gioco e le modalità con cui partecipare, ad esempio, ha portato all'emergere di due questioni interessanti sulle quali i bambini si sono confrontati. Anche se non strettamente legati al calcolo sottrattivo, i ragionamenti hanno espresso concettualizzazioni inerenti l'operare sui e con i numeri. Prima si sono interrogati sul (a) come contare correttamente i birilli e poi sul (a) come annotare il punteggio al fine di decretare la squadra vincitrice[6].
(a) Rispetto al primo punto all'inizio del gioco l'insegnante-ricercatore mostra i 9 birilli all'interno della propria griglia-contenitore circolare

> Sara: "Bisogna lanciare la palla e far cadere i birilli."
>
> Insegnante: "C'entrano i birilli con i numeri?"
>
> Bambini: "Sì!"
>
> Marian Sara: "Basta contarli! (min. 00,35)

I bambini collegano il gioco al suo scopo e fanno emergere l'esigenza di conoscere il numero[7]. Se da un lato il contare si connota come procedura che i bambini hanno assodato nel corso degli incontri precedenti **[fare – 1°]** qui denota anche il guardare ai birilli rispetto al cosa rappresentano **[elaborare immagini – 2°]**. Marian Sara nel contare enumera, toccando, 10 birilli invece di 9. Dopo di lei anche altri bambini vogliono contare i birilli, ma non tutti contano lo stesso numero: alcuni 9 altri 10.

> Alessio: "Ma perché ho visto che Marian Sara ha contato quelli che aveva già contato all'inizio. Ha contato due volte."
>
> I.: "Come fai a dire questo?"
>
> Al: "È partita da qua e poi è arrivata fino a qua alla fine." (min. 2,39)

I bambini hanno preso consapevolezza del fatto che il contare non è un atto casuale: segue un ordine e il compiere gesti "errati" porta ad un risultato non veritiero **[possedere una forma – 3°]**.

---

[6] I bambini sono stati divisi in due squadre in cui ognuno di loro a turno ha lanciato la palla e abbattuto i birilli.

[7] Questo concetto verrà ripreso in seguito in relazione al calcolo del punteggio.

I.: “C’è un modo per essere sicuri di non toccare due volte un birillo?”

Al.: “Basta ricordarsi il punto da dove si è partiti.” (min. 3,05)

Tra le varie soluzioni proposte quelle di Denise e Sara mostrano i tentativi delle bambine di (ri)elaborare una strategia di conteggio.

Denise: “Se tu conti 2 birilli uguali perché si contano due volte, sono 7 perché c’è questo [indicando un birillo]. I gialli perché sono 3. Quindi 1 [con le mani tocca due birilli], 2 [con le mani tocca due birilli], 3 [con le mani tocca due birilli], 4 [con le mani tocca due birilli] e 5 [tocca l’ultimo birillo].” (min. 3,19)

Anche se i procedimenti proposti non si traducono correttamente in termini numerici, le due bambine vogliono calcolare il numero totale dei birilli come composizione di più parti tra loro identificabili secondo una caratteristica **[notare una proprietà – 4°]**. Un primo tentativo di Denise è quello legato ai colori: i birilli sono 3 gialli, 2 verdi, 2 blu e 2 arancioni. Questo probabilmente porta la bambina a vedere il ripetersi del numero 2. Precisa che di colore giallo ce ne sono 3: c’è un “1” in più che andrà aggiunto separatamente. Nel contare però considera le coppie come unità e quindi il suo risultato è di soli 5 birilli. Sara, comprendendo il ragionamento della compagna e la discordanza del risultato con quello dei compagni, prova a spiegare il conteggio per due supportando le proprie parole con i gesti, ma non riesce ad esprimere verbalmente quanto fa con le mani.

Alessio non si unisce al ragionamento delle compagne ma, riprendendo il discorso sul come organizzare il conteggio, suggerisce di togliere i birilli dal contenitore e contarli man mano **[volgersi indietro / elaborare immagini – 2°]**. Forma una lunga riga e conta un totale di 9 birilli **[fare -1°]**. Quando la maestra mostra come si gioca, lanciando la palla, cadono tutti i birilli.

I.: “Quanti birilli sono caduti?”

B.: “Tutti!” “9”

MS.: “Perché sono 9 i birilli.” (min. 8,30)

I bambini rispondono così alla domanda iniziale sul numero dei birilli e, analogamente a quanto fatto da Alessio, danno prova della correttezza di quanto trovato con uno specifico riferimento ai materiali coinvolti **[volgersi indietro / fare - 1°]**.

(b) In merito alla seconda questione i bambini vengono divisi nella squadra dei gialli ed in quella dei blu. I nomi delle squadre vengono scelti sulla base dei colori delle due palline che dovranno lanciare. Aiutati dall’insegnante-ricercatore e dall’insegnante di laboratorio, scrivono i propri nomi uno sotto l’altro su due fogli.

Alessio recupera il legame birilli-numeri e lo collega ad un vissuto: i due fogli rappresentano i tabelloni dove riportare il punteggio **[elaborare immagini – 2°]**

Al.: “Come i punti?” (min. 15,20)

Una volta che i due fogli per annotare i punteggi sono pronti con i bambini si è cercato di capire cosa andasse annotato ricollegandosi all’intervento di Alessio

I.: “Cosa vuol dire segnare i punti?”

D.: “Che ha fatto vedere che se è 1 scrivi 1.”

I.: “1 cosa?”

D.: “I birilli.”

I.: “È ma i birilli che sono rimasti in piedi o quello che è caduto?”

MS.: “Quello che è caduto.” (min. 19,51)

A partire dalla dimostrazione dell’insegnante-ricercatore quindi i bambini hanno recuperato non solo il legame birilli-numeri **[elaborare immagini – 2°]**, ma lo hanno pure considerato in funzione di uno scopo: l’annotazione del punteggio. Vince chi fa cadere più birilli quindi va annotato solo il numero dei birilli caduti **[possedere una forma – 3°]**.

Prima di dare il via al gioco delle due squadre, l’insegnante-ricercatore mostra il foglio con le postazioni

I.: “Sapete a cosa servono i cerchi?”

B.: ”Ai birilli.”

I.: “E allora quanti devono essere i cerchi?”

B.: “9”

S.: “Basta contarli bene.” (min. 10)

Sara con la sua risposta mostra di aver interiorizzato quanto dimostrato fino a quel momento con i compagni: non basta contare. Bisogna contare “bene”. Il numero dei birilli deve quindi corrispondere a quello dei cerchi **[elaborare immagini – 2°]**. L’insegnante-ricercatore mette i birilli sulle postazioni, i bambini li contano uno alla volta e verificano che le postazioni sono 9. Lancia la palla e restano in piedi 3 birilli

I.: “Senza contare sapete dirmi quanti birilli ci sono a terra?”

Andrea: “6”

I.: “Come fai a dirlo?”

An.: “Perché l’ho saputo.”

MS.: “6” [conta indicando con il dito da distante] (min. 12,15)

D.: Perché si vede che se sono 3 e i 3, i 6 sono questi.

Corrado: “3 più 3 fa 6.”

I.: ”Come avete fatto a dire che in tutto erano 9?”

D.: “Perché erano 6.” (min. 13,15)

Dalla domanda stimolo dell'insegnante-ricercatore i bambini mostrano diverse strategie per calcolare il numero dei birilli caduti: dal conteggio a distanza di Marian Sara **[fare -1°]** al subitizing di Andrea **[elaborare immagini – 2°]**, che non riesce però a spiegare, alla discriminazione per parti di Denise e Corrado. Denise infatti organizza visivamente il 6 come due volte 3 **[possedere una forma – 3°]**, e Corrado ne esprime il legame con il linguaggio corretto. Quando l'insegnante-ricercatore chiede a Denise conferma del risultato, il suo riferire il numero 9 dei birilli totali in modo inferenziale al 6 dei birilli caduti fa capire come la bambina ne abbia elaborato l'aspetto cardinale come composizione di due parti **[notare una proprietà – 4°]**.

Gialli	
Martina	1
Izabella	5
Marian Sara	6
Sara	1
Corrado	9
Andrea	5
Alessio	3
	30

Blu	
Angela	1
Tosca	4
Elisa	6
Denise	3
Aissatou	4
Omar	6
Massimiliano	3
	27

In generale i ragionamenti che con i bambini sono stati condivisi durante il momento iniziale hanno portato ad uno svolgimento del gioco veloce e lineare e ad una minore difficoltà nel calcolo del punteggio finale. La maggior parte di loro, una volta guardato ai birilli rimasti in piedi, per determinare il numero dei birilli caduti ha contato quelli a terra o avvicinandosi e toccandoli o attraverso la discriminazione visiva, che a sua volta è avvenuta per mezzo del subitizing o con il conteggio sottovoce. Nessuno di loro ha fatto riferimento al numero totale dei birilli o a quello dei birilli in piedi. Tali dati erano infatti stati consolidati stabilendo che la squadra vincitrice fosse quella i cui giocatori avesse abbattuto il maggior numero di birilli.

Il contesto ludico ha permesso ai bambini di riflettere sul numero imparando ad interpretarne il significato. Lo scopo e l'organizzazione del gioco hanno portato a superare la dimensione fisica dell'oggetto birillo **[fare -1°]**, rileggendolo invece come elemento numerico **[elaborare immagini – 2°]** riconosciuto come composizione di parti **[possedere una forma – 3°]** espresse una in funzione dell'altra **[notare una proprietà – 4°]**. La dimensione della comprensione è stata prevalente rispetto a quella narrativa. I bambini si sono rapportati alle azioni di conteggio e calcolo in modo corretto, ma hanno avuto difficoltà in alcuni momenti ad argomentare le proprie idee o descrivere le proprie azioni.

7.2.4 Il cane e l'albero di mele

Questo incontro è stato il primo in cui i bambini hanno elaborato delle vere e proprie strategie di calcolo per rispondere alla domanda della storia-problema. I momenti di confusione sono stati limitati e sono stati gli stessi bambini a porvi risoluzione (ri)organizzando la propria azione sui materiali per poter leggere questi attraverso il linguaggio numerico. Il bisogno di interagire attivamente con i materiali da parte dei bambini, dandone quindi una organizzazione personale, ha fatto sì che, analogamente a quanto avvenuto nei due incontri precedenti, ognuno di loro "abbia provato" contando singolarmente e a voce alta le mele dell'albero protagonista del racconto. La storia è stata introdotta dall'insegnante-ricercatore mostrando il pupazzo del cane e il disegno dell'albero con le 10 mele.

> Insegnante: "Questo sapete cos'è?"
>
> Bambini: "Un albero."
>
> I.: "Un albero. Per la precisione è un albero di mele. È un albero di mele che io ho in giardino. Con tante mele. Quante mele ci sono su quest'albero?"
>
> Alessio: "Le contiamo." [più bambini cominciano a contare in contemporanea, ma in modo disordinato]
>
> I.: "Cosa abbiamo visto le volte scorse? Che se contiamo tutti insieme alla fine troviamo un numero giusto o sbagliato?"
>
> B.: "Sbagliato."
>
> Tosca: "Giusto."
>
> I.: "Giusto? Se contiamo tutti insieme ognuno per conto suo?"
>
> B.: "Nooo."
>
> I.: "Bisogna che facciamo come?"
>
> Marian Sara: "Uno alla volta." (min. 3,20)

Ogni bambino conta 10 mele **[fare -1°]**. Angela conta 8 mele e dice di essere sicura di aver toccato tutte le mele. Quando però i compagni finiscono di contare e tutti dicono che le mele sono 10, lei riconta e dice di aver sbagliato: le mele sono 10 e tutti concordano. È solo l'azione diretta a dare conferma ai bambini del loro fare matematica.

> I.: "C'è un modo che possiamo fare per poter essere sicuri di ricordarci che erano 10?"
>
> Sara: "Sì!"
>
> I.: "Come?"

MS.: "Ricontarle."

I.: "È ma ce lo ricordiamo sicuri senza bisogno di ricontarle o possiamo fare qualcosa per ricordarci che erano 10?"

Elisa: "Fare qualcosa."

I.: "E cosa possiamo fare per ricordarci che erano 10?"

E.: "Il numero."

I.: "Il numero dove?"

E.: "Su un foglio!" (min. 6,20)

Alla richiesta dell'insegnante-ricercatore di come sia possibile ricordare il numero delle mele sull'albero, Marian Sara propone di ricontarle dimostrando ancora un forte legame con l'azione diretta **[fare -1°]**. Elisa invece non solo dice di utilizzare i numeri **[elaborare immagini – 2°]**, ma propone di scrivere il numero 10 attraverso il linguaggio simbolico **[possedere una forma – 3°]**. Dimostra di aver acquisito consapevolezza del concetto di cardinalità utilizzando il numero come etichetta della quantità. È interessante però notare che all'atto dello scrivere il numero, la bambina si fa aiutare da una compagna in quanto non ricorda come si scrive. Quando Izabella scrive il numero 10 tutti lo riconoscono e decidono di posizionare il foglio sul tronco dell'albero. Questa dinamica ricorrerà anche in altri momenti dell'incontro. I bambini riconoscono le quantità, associano loro il numero che le rappresenta ma hanno difficoltà nello scrivere il simbolo numerico. Ragione di questo può essere vista nella scarsa esperienza con i numeri, ma anche nel contesto in cui si è svolto l'incontro. L'aula era spoglia alle pareti e dalle osservazioni avvenute in sezione era emerso che i bambini come riferimento ai numeri utilizzavano spesso la linea del calendario.

Quando l'insegnante-ricercatore continua il racconto e mostra ai bambini il disegno con l'albero dopo il momento di gioco del cane, i bambini inizialmente pensano sia un altro albero. E' l'insegnante-ricercatore a precisare che quel secondo albero è lo stesso solo che rappresentato in un secondo momento, dopo che il cane vi ha giocato intorno.

I.: "7 quindi tutti avete detto 7. Perché tutti avete contato 7?"

S.: "Perché sono di meno!"

I.: "Perché sono di meno e tutti quanti hanno contato 7, siamo sicuri che sono 7?"

B.: "Sì!"

I.: "Ma come fate a dire che sono di meno?"

S.: "Perché si vede."

Al.: "Qua sono 10 e qua sono 7."

I.: "E quindi? Dimmi."

Denise: "Perché... perché... perché si vede che di qua ci sono... ci sono di meno."

S.: "Di più... di più... di più..."

D.: "Perché... perché si vedono." (min. 10,50)

I bambini dopo che tutti hanno contato individualmente le 7 mele **[fare -1°]** disegnate sul secondo cartellone, confrontano le due rappresentazioni. Dal conteggio diretto passano alla discriminazione visiva **[elaborare immagini – 2°]** e notano che le due quantità di mele sono diverse. Da una parte sono 10 e sono di più, dall'altra sono 7 e sono meno **[possedere una forma – 3°]**. Sono gli stessi numeri quindi a dare prova della diversa quantità che rappresentano. L'argomentazione espressa inizialmente da Denise e Sara con incertezza e titubanza viene poi recuperata e formulata correttamente.

D.: "Si vedono che ci sono 7 di meno e quindi si vedono di più tante." (min. 11)

S.: "Perché di là sono di più e di qua sono di meno." (min. 11,06)

I bambini chiedono poi, come avvenuto in precedenza per il 10, di scrivere il numero 7 **[elaborare immagini – 2°]** su un foglio di carta e di poggiare tale foglio sul secondo tronco **[possedere una forma – 3°]**. Le considerazioni dei bambini fanno però capire che risulta per loro difficile guardare ai due alberi disegnati come ad un unico albero prima e dopo. Il 7 non è percepito come il 10 privato di una parte di elementi, ma è confrontato con lo stesso 10 **[volgersi indietro / possedere una forma – 3°]**. 7 rappresenta una quantità inferiore a 10 perché al primo numero corrisponde un minor numero di elementi del secondo. La difficoltà dal punto di vista della comprensione matematica di cogliere che dal primo al secondo albero vi è una parte mancante trova un corrispondente a livello narrativo: i bambini non riescono ad immaginare il prosieguo della storia. È solo attraverso le domande dell'insegnante-ricercatore che i bambini ricostruiscono il contesto narrativo.

I.: "Io le ho trovate le mele che non c'erano più. Sapete dove erano?"

B.: "No."

I.: "Le aveva fatte..."

S.: "Cadere!" (min. 13,05)

È proprio dall'immagine delle mele cadute che i bambini cominciano ad interrogarsi sulle mele mancanti.

MS.: "Ma perché non ci sono mele per terra?" (min.13,35)

Aissatou in un primo momento dice che le mele mancanti sono zero leggendo la mancanza di mele sull'erba attraverso il linguaggio numerico **[possedere una forma – 3°]**. L'attenzione dei bambini in generale si focalizza ora su un unico albero, quello da 7 mele, e l'insegnante-ricercatore cerca di guidarli nelle susseguirsi di ipotesi volte a capire quante mele abbia fatto cadere il cane. I bambini ora guardano al 7 come numero “derivato” dal 10 e intendono il 10 come un intero formato da due parti: una da 7 elementi ed un’altra, il cui numero di elementi deve essere stabilito **[notare una proprietà – 4°]**.

I.: “Poi se volete le possiamo mettere. Le ho portate per metterle.”

MS.: “È… prendiamole! (min.13,46)

I.: “Però prima dobbiamo capire quante metterne!”

L’insegnante ricercatore spiega ai bambini di aver portato con sé le mele che il cane ha fatto cadere, ma di voler prima capire con loro quante sono effettivamente le mele che devono essere poste sull’erba. La prima idea che i bambini propongono per stabilire il numero di mele da mettere a terra è quella di prenderle e contarle **[fare -1°]**. L’invito dell’insegnante-ricercatore a calcolarne prima il numero li stimola a riflettere.

S.: “Dobbiamo contare quelle che sono rimaste che così capiamo anche quelle che son cadute!” (min. 13,58)

Sara propone di contare le mele rimaste perché comprende che il numero di quelle cadute ne è una conseguenza **[elaborare immagini – 2°]**. Una volta contate le 7 mele sull’albero dice che le mele cadute sono altrettante. Si limita quindi a dare una risposta legata a quanto ha fatto senza collegare il numero conteggiato a quello dell’intero di riferimento **[volgersi indietro / fare - 1°]**. Sarà però lei stessa che, a partire da un intervento di una compagna, recupererà questo dato facendo sì che il ragionamento ricominci a definirsi.

MS.: “7 + 7 vuol dire che sono cadute 70.”

I.: “Non vuol dire che sono cadute 70 però mi sa che sono un po’ troppe.”

S.: “Ma se erano 10.” (min. 14,43)

L’intervento di Marian Sara, anche se scorretto nei termini e dal punto di vista del risultato numerico, fa capire che la bambina ha elaborato l’idea di unione delle due parti **[elaborare immagini – 2°]** e compreso che il numero proposto da Sara non può essere attendibile **[possedere una forma – 3°]**. Conferma di questo viene data subito dopo sull’intervento di Denise, Marian Sara elabora il 9 come unione di 7 e 2.

D.: “Se sono 10 e se hai detto che sono cadute 7…”

I.: “No, non sono cadute! Sono rimaste sull’albero. Quante ne sono cadute? Quante ne mancano a 7 per arrivare a 10?”

D.: “Se… 2 volte credo.”

I.: “Come 2 volte?”

MS.: “Vuol dire 9!”

S.: “9”

I.: “È 9! Ma quante ce n’erano qua?” [indica l’albero con 10 mele]

B.: “10”

I.: “E quindi? 9 non è 10!”

S.: “Ne sono cadute 9 e sono rimaste sull’albero 7.”

I.: “Vuol dire che se io metto 9 mele [indica l’erba dell’albero con disegnate 7 mele] arrivo a 10? O di più o di meno?”

D.: “9 e arriva a 10.” (min. 15,48)

Sara, Marian Sara e Denise conducono un ragionamento collettivo in cui l’intervento di una viene concluso da un’altra. Le bambine arrivano a molto vicine alla risposta comprendendo che le mele cadute sono una quantità che sta il 7 e il 10 e che tale quantità corrisponde alle “volte” in da 7 ci si muove verso 10 sulla linea dei numeri **[possedere una forma – 3°]**. Il numero che rappresenta la differenza viene inteso sia dal punto di vista cardinale che da quello ordinale **[notare una proprietà – 4°]**. Tuttavia confondono i numeri coinvolti e non riescono né a formalizzare né a calcolare correttamente la risposta perché il ragionamento non è adeguatamente sostenuto dalla consapevolezza numerica dei dati della storia-problema**[volgersi indietro]**. (a) Marian Sara e (b) Sara propongono a questo punto due strategie diverse che integrano alla riflessione numerica le pre-conoscenze **[possedere una forma – 3°]**. (a) La prima bambina utilizza la canzone del gioco de “la campana”: enumera i numeri in sequenza utilizzando il ritmo della canzone **[possedere una forma – 3°]**, ma si ferma al 7 dicendo di non ricordare come continuare. La canzone diventa quindi un’immagine del disegno che si trova di fronte **[volgersi indietro / elaborare immagini – 2°]**. (b) La seconda invece propone una strategia visiva **[possedere una forma – 3°]**: guardare alla mele mancanti del secondo albero. Mette i due disegni vicini e cerca di cogliere gli spazi bianchi visibili dal disegno del post rispetto al disegno del pre gioco del cane. Anche lei però rimane molto legata all’immagine del disegno e conta 4 spazi quindi 4 mele mancanti. Una terza strategia viene proposta da Martina. La bambina dopo aver contato sottovoce dice che le mele cadute sono 17. Come le compagne elabora correttamente un ragionamento dal punto di vista concettuale **[possedere una forma – 3°]**, ma lo traduce in un risultato errato perché non rielabora l’immagine già presente. **[volgersi indietro / elaborare immagini – 2°]**.

Izabella: “Queste che sono 10 sono più tante.”

I.: “Sono tante. E 7 sono di meno, ma quante di meno?”

MS.: “Dobbiamo contare tutte insieme.”

I.: “Ma se le contiamo tutte insieme non troviamo quelle che sono cadute. Troviamo quelle che erano prima sopra e quelle che sono rimaste.”

D.: “Perché… perché… come ha detto Sara… perché… queste qua… [indica le mele dell’albero da 7] quelle che son cadute erano al suo posto quindi sono cadute e… dobbiamo contare quelle che son cadute e anche queste qua.”

I.: “Quelle che son cadute e anche queste qua quanto deve fare in tutto?”

MS.: “7”

I.: “7 sono quelle là. Se io metto insieme quelle che son rimaste sull’albero più quelle che ho trovato per terra quanto deve farmi in tutto?”

D.: “Deve farti… deve farti… 7 e quelle in borsa.” (min. 19,55)

Il calcolo del risultato e la relativa concettualizzazione si sviluppano durante la discussione in un continuo crescendo e decrescendo dei processi di formalizzazione dove all’avvicinarsi graduale alla soluzione corrisponde un altrettanto graduale ritorno sui materiali, che porta più volte i bambini a chiedere all’insegnante-ricercatore di prendere le mele dalla borsa e contarle per poterne stabilire il numero esatto. Ripartendo proprio dalla riflessione sulle immagini dell’albero **[elaborare immagini – 2°]** i bambini dimostrano però di aver consolidato l’immagine del 10 come unione del 7 con un’altra quantità **[possedere una forma – 3°]**.

MS.: “Basta contare.”

I.: “È ma cosa contiamo?”

MS.: “Queste qua.” [indica l’albero con 7 mele]

I.: “È queste le abbiamo contate che sono…”

MS.: “7”

MS.: “Se facciamo un altro numero vicino al 7 possiamo contare un misto…”

I.: “Un misto di cosa?”

MS.: “Un misto.”

I.: “Che cos’è un misto numero?”

MS.: “Cioè che dobbiamo fare un numero, dopo vicino un altro numero e dobbiamo farli diventare tutti insieme.”

I.: “Dobbiamo farli diventare tutti insieme. Che numero mettiamo vicino?”

MS.: “10” (min. 22,15)

Marian Sara definisce l’unione delle mele cadute con quelle ancora sull’albero un “numero misto” concettualizzando la somma come un numero che è composto da due numeri **[notare una proprietà – 4°]**, anche se ancora non riesce ad esprimerlo attraverso il linguaggio dei numeri.

MS. “Forse è il numero 98!”

I.: “E 98! Mi sembra un po’ troppo 98 perché non erano così tante neanche prima.”

S.: “Erano 10 prima.” (min. 25,22)

Nel cercare di calcolare il numero ipotizza “98”, che Sara riconosce come errato perché troppo grande. Subito dopo interviene Denise

D.: “Forse sono… perché da 10 si… perché da 10… da 1… perché se facciamo…”

I.: “10”

D.: “10… facciamo… facciamo… da 9.”

I.: “Da 9 quindi 10 se ne togliamo 1 si arriva a 9, ma noi a quante dobbiamo arrivare?”

D.: “Da 10 quindi… se… se… se sono 9… poi se arriva un altro…”

I.: “Arrivi a cosa?”

D.: “A 10.” (min. 26,29)

Intuendo che il 98 di Marian Sara probabilmente non va letto come numero, ma come 9 e 8. La bambina partendo dall’idea di numero composto e non riuscendo a formularla torna alla sequenza numerica e la legge da 10 all’indietro individuando i numeri che si trovano tra 10 e 7: appunto 9 e 8. **[volgersi indietro / possedere una forma – 3°]**. Nel rielaborare l’idea di Marian Sara, Denise formula il principio di inversione comprendendo che togliendo e aggiungendo la stessa quantità, in questo caso 1 da 10, si ritorna ad avere la quantità iniziale **[notare una proprietà – 4°]**.

I.: “Da 7. Da 7 arrivare a 10 che numero ci manca?”

MS.: “8, 9, 10”

I.: “E quindi quanti?”

Al.: “2”

MS.: “3”

I.: “Perché 3? Prova a dirmi?”

MS.: “Perché c’è l’8, 9, 10 vuol dire che sono cadute 3.” [mentre parla solleva una alla volta 3 dita] (min. 26,56)

Riformulando la domanda a partire dal 7, Marian Sara riesce non solo a calcolare la risposta correttamente, ma argomenta la sua risposta formalizzando la relazione tra i due numeri sia dal punto di vista cardinale, 3 mele, che ordinale, proseguendo la numerazione dopo il 7 fino al 10 **[formalizzare – 5°]**. A questo punto i bambini si trovano di fronte tre ipotesi: Sara dice 4, Alessio dice 4 e Marian Sara 3. Propongono di verificare quale sia quella corretta aggiungendo una alla volta fino a 4 mele.

I.: “ Allora adesso a quante mele siamo arrivati?” [dopo aver incollato la prima mela sotto l’albero da 7]

S.: “8”

I.: “Perché 8?”

D.: “Perché… perché… perché… hai messo quella che era caduta e siamo arrivati a 8.”

I.: “E lui dice che dopo il 7 viene l’8.”

S.: “Perché a 7… dopo il 7 arriva l’8.”

MS.: “Perché è 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.” [mostra con le dita]

I.: “Ok! Adesso ne metto un’altra?”

B.: “Sì!”

I.: “E a quanto arrivo?”

S.: “9”

I.: “9 e secondo voi quante ne mancano per arrivare a 10?”

MS.: “1”

I.: “E quindi quante ne erano cadute?”

S.: “3”

Riassumendo possiamo notare che durante l’incontro la discussione si è prolungata per un periodo di tempo quasi raddoppiato rispetto a quanto accaduto negli altri incontri. Tale durata è stata dovuta in parte al bisogno di ogni bambino di contare individualmente gli elementi oggetto della storia-problema[8] e in parte all’andamento della stessa discussione. Il susseguirsi di ipotesi è stato infatti molto instabile con momenti di avanzamento nei livelli di comprensione matematica e momenti di ritorno all’azione diretta sui materiali. Il calcolo del risultato è però emerso attraverso un vero e proprio ragionamento formale [formalizzare – 5°] che ha inteso la sottrazione come addizione inversa e ha portato a guardare al numero sia dal suo aspetto cardinale che a quello ordinale. Due annotazioni risultano fondamentali. La prima riguarda il fatto che le modalità e il tipo di materiali proposti hanno probabilmente influenzato la procedura attuata dai bambini per la risoluzione ed il calcolo. L’aver presentato l’albero attraverso due immagini ha portato a ragionare su di esso confrontandone le due rappresentazioni e guardando al risultato come alla differenza tra la situazione iniziale e quella finale. Inoltre il non poter concretamente togliere le mele non ha supportato un’immagine di intero come scomposizione in due sottoinsiemi ma, viceversa, ha favorito quella di unione di due parti. La seconda invece concerne la relazione tra dimensione narrativa e dimensione della comprensione matematica. Il contesto narrativo è stato fondamentale per l’articolarsi della riflessione numerica. Fino a quando i bambini non sono riusciti ad entrare nel vivo del racconto immaginando il susseguirsi delle azioni del cane e le conseguenze del suo giocare sulla conformazione dell’albero,

[8] In questo caso il tempo impiegato per il conteggio delle mele è stato molto di più perché i bambini hanno contato sia la rappresentazione dell’albero con 10 mele sia quella con l’albero con 7 mele.

non sono riusciti neppure a rapportarsi con i numeri se non contando quanto avevano di fronte.

7.2.5 La gabbia con gli uccellini

In questo incontro la discussione con i bambini si è svolta in un arco di tempo molto breve rispetto a quello dei precedenti. I bambini hanno dimostrato di aver consolidato un modus operandi e di aver sviluppato delle vere e proprie strategie di problem solving. Il loro agire sui materiali non è stato per tentativi ed errori, ma legato ad una riflessione consapevole sugli aspetti numerici coinvolti. Quanto l'insegnante-ricercatore introduce la storia, racconta ai bambini che la nonna deve comprare il mangime per i propri uccellini, ma non sa quanto comprarne. Gli uccellini sono di due colori, giallo e rosso come le sezioni a cui loro appartengono, e per questo motivo si cibano ognuno di un mangime specifico per il colore delle piume. Tra gli uccellini ne sono nati di nuovi che volano da una parte all'altra e lei non riesce a contarli. I bambini accettano di aiutare la nonna.

> Izabella: "Basta contare. Basta contarli uno con l'altro. [indica uno alla volta tutti gli uccellini e li enumera a voce a alta] Sono 11." (min. 5,42)
>
> <u>Tosca: "Bisogna contarli tutti."</u>
>
> Sara: "Bisogna contare tutti i gialli e poi tutti i rossi. [indica uno alla volta gli uccellini rossi e li enumera a voce alta] 5 gialli. [indica uno alla volta gli uccellini gialli e li enumera a voce alta] 6 rossi." (min. 6,27)
>
> Alessio: "Sono di più i rossi."
>
> Insegnante: "Siete sicuri?"
>
> Massimiliano: "Perché sono 6 i rossi" (min. 6,50)

Izabella contando gli uccellini **[fare -1°]** dà subito una risposta sul come aiutare la nonna nell'acquisto del mangime. Passa quindi dagli uccellini al dato numerico che occorre alla nonna **[elaborare immagini – 2°]**. L'intervento successivo di Sara riporta il ragionamento ad un livello inferiore, facendo riferimento alla rappresentazione **[volgersi indietro]**, ma in realtà è funzionale ad una riflessione più ampia. Alla nonna interessa il numero degli uccellini, ma questo deve essere distinto in due parti **[possedere una forma – 3°]**: quella degli uccelli rossi e quella degli uccellini gialli. I due colori simboleggiano quindi due insiemi che devono essere considerati separatamente **[notare una proprietà – 4°]**. Il conteggio dei due gruppi porta a determinare il più numeroso nei rossi. Nel dare conferma della risposta, Massimiliano si limita a ripetere il numero che rappresenta il risultato. Concettualizza quindi la sua risposta attraverso quel che quel numero rappresenta:

6 è maggiore di 5 (aspetto ordinale) o anche 6 più numeroso di 5 (aspetto cardinale) **[formalizza – 5°]**.

L'insegnante-ricercatore cerca di far emergere il concetto di differenza e nello spiegare mostra ai bambini che gli uccellini possono essere staccati e spostati.

> I.: "La nonna però si chiede sempre -Ma l'ho contato o no?-"
>
> <u>T.: "Basta metterli in fila." (min. 7,35)</u>
>
> S.: "Secondo me bisogna metterli in fila, ma staccati." (min. 8,06)

Tosca allinea tutti gli uccellini, prima i gialli e poi i rossi, lungo un'unica riga a metà foglio. Mettere in fila gli uccellini significa ordinarli e quindi poterli contare e con sicurezza **[elaborare immagini – 2°]**. Nell'illustrare la sua idea ha però bisogno di riprendere in mano gli uccellini e spostarli fisicamente **[volgersi indietro / fare -1°]**. Il modo in cui li dispone, lungo un'unica linea, conferma che la strategia da lei articolata si riferisca al solo conteggio e non confronto tra le due quantità. È Sara che recupera il concetto di fila come distribuzione ordinata **[elaborare immagini – 2°]** e lo connette all'atto del confrontare disponendo i due gruppi di uccellini su due file dalle parti opposte del foglio **[possedere una forma – 3°]**.

> An.: "Li volevo contare da giù e sopra" [con le mani mostra di voler metter i rossi sopra] perché così e più lungo."
>
> I.: "Perché dici che così è più lungo?"
>
> S.: "Perché così se li metti in fila 1, 2 su capisci quale è più lunga e quale più corta." (min. 9)

Il voler spostare gli uccellini per far vedere che una fila sarà più lunga dell'altra fa capire che i bambini non solo hanno consolidato il rapporto tra i due numeri, come uno maggiore di un altro, ma lo sanno esprimere attraverso la loro stessa immagine **[notare una proprietà – 4°]**.

> I.: "Quindi quale è la fila più lunga?"
>
> B.: "I rossi."
>
> I.: "Quanti sono la differenza tra i rossi e i gialli? Cioè quanti uccellini ci sono di meno di quelli rossi?"
>
> An.: "1"
>
> <u>D.: "5" [Tosca conta a voce alta i 5 uccellini gialli].</u>
>
> I.: "Andrea perché dici 1?"
>
> An.: "Perché ne manca 1"
>
> I.: "Ne manca 1 cosa?"
>
> An.: "Dei gialli." (min. 10)
>
> I.: "Quanti uccellini gialli mancano affinché gli uccellini gialli diventino tanti quanti i rossi?"
>
> B.: "1"
>
> D.: "Lo vedo." (min. 10,50)

L'immagine del confronto come lunghezze di file diverse viene consolidata da quella del concepire la differenza tra queste come spazi mancanti in una fila per essere lunga quanto l'altra **[notare una proprietà – 4°]**. In questo risulta fondamentale il come è stata posta la domanda da parte dell'adulto.

I.: "Facciamo così. Qual è la differenza tra i gialli e i rossi se io prendo questo uccellino giallo e faccio finta che sia rosso? [sposta un uccellino rosso sulla fila dei gialli]

D.: "7"

<u>T.: "4"</u>

I.: "7 cos'è?"

D.: "Questi." [indica i rossi]

I.: "4 cos'è?"

D.: "Questo." [indica i gialli] (min. 12)

I.: "Quanti ne mancano dei gialli per diventare più lunghi.

An.: "2" [guarda con gli occhi]

I.: "2?"

D.: "3 [indica gli spazi vuoti] Perché ci sono il buco." (min. 13,35)

Quando infatti nella frase erano presenti entrambi i termini di paragone i bambini hanno fatto riferimento o all'uno o all'altro, non riuscendo ad elaborare un terzo dato numerico. Il farli focalizzare invece sull'elemento di differenza (ciò che rende due file diverse o, al contrario, permette loro di essere uguali dal punto di vista quantitativo) li ha portati a calcolare la risposta numerica corretta. Tale calcolo è inoltre avvenuto come spostamento in senso crescente sulla linea dei numeri

I:. "Per quanti uccellini in meno di gialli dovrà comprare il mangime la nonna?"

B.: "5"

Al.: "1" (min. 15,12)

Solo Alessio infatti è stato in grado di rispondere correttamente alla domanda dell'insegnante-ricercatore quando questa è stata posta in riferimento al gruppo con il minor numero di uccellini.

Un discorso a parte merita Tosca[9]. La bambina nel corso dei suoi interventi formula sempre una risposta errata rispetto alle domande. Al termine dell'incontro precisa

<u>T.: "Io avevo fatto la fila lunga perché così li contavamo." (min. 14)</u>

dimostrando di aver sì risposto in modo sconnesso rispetto alle domande del ragionamento collettivo, ma al contempo di averne coerentemente portato avanti uno proprio. Spiegazione di questo può essere data da un lato dal non aver avuto abbastanza tempo di esprimere il proprio pensiero all'inizio e dall'altro dall'essersi

[9] Nei vari stralci di conversazione riferiti a questo incontro i suoi interventi compaiono sottolineati.

avvalsa anche degli interventi dei compagni per arrivare a consolidare la propria strategia **[elaborare immagini – 2°]**.

Riassumendo si può dire che i bambini hanno dimostrato di saper leggere i numeri **[elaborare immagini – 2°]** a partire dai materiali che li rappresentavano e di saperli utilizzare poi **[possedere una forma – 3°]** come elementi dimostrativi della propria comprensione **[notare una proprietà – 4°]**. La componente narrativa si è espressa in termini descrittivi di quella della comprensione matematica facendo sì che una fosse di supporto all'altra. Dal raccontare si è passati ad un linguaggio figurato, ma specifico che ha portato ad una prima forma di formalizzazione legata alla consapevolezza del valore numerico **[formalizza – 5°]**. Proprio attraverso una riflessione consapevole sul significato dei numeri i bambini hanno calcolato la differenza. Il risultato è stato determinato sia attraverso l'addizione inversa, passando dal numero minore al maggiore (aspetto ordinale) sia come quantità che impedisce a due gruppi di essere equivalenti (aspetto cardinale).

7.3 Linee conclusive comuni

La lettura della sequenza delle discussioni dei due gruppi illustra due dinamiche molto diverse, ma con forti analogie nel processo di concettualizzazione matematica. Questo si è articolato come una graduale ascesa dei livelli individuati dal modello di Pirie e Kieran (1989), contraddistinta però da momenti di instabilità. Tali momenti sono stati caratterizzati da ritorni a livelli precedentemente conquistati e successivi avanzamenti a livelli che in un primo momento erano stati non pienamente raggiunti.

Rispetto al come i bambini si sono rapportati ai materiali è emersa fin da subito la maggiore confidenza dei bambini del gruppo di sezione a leggere e riflettere da un punto di vista numerico rispetto al gruppo di laboratorio. Appare chiaro fin da subito come i bambini del primo gruppo non solo spontaneamente abbiano utilizzato i numeri per dare una risposta alle domande delle storie-problema, ma l'abbiano fatto con senso di causa. Il secondo gruppo, come rilevato dalle interviste alle insegnanti e dalle osservazioni precedenti l'attuazione dell'intervento didattico, non era mai stato interessato da attività che coinvolgessero i numeri come principale obiettivo. Questo ha portato all'emergere di difficoltà iniziali legate al come contare e come interpretare i valori numerici, ma più semplicemente anche allo stesso uso dei numeri per l'organizzazione dei procedimenti risolutivi. Questi due diversi approcci hanno avuto due importanti conseguenze. La prima è legata alla riflessione di tipo trasversale e la seconda all'andamento degli incontri. I bambini del gruppo di sezione si sono avvalsi più volte delle pre-conoscenze per argomentare le proprie risposte. Se da un lato questa è stata una risorsa perché ha permesso ai nuovi contenuti di essere ancorati a esperienze esterne significative, dall'altro ha portato i bambini ad avere un andamento molto altalenante nelle formulazione delle proprie ipotesi. Vi è stata una continua commistione tra le conoscenze pregresse e quelle in divenire. I bambini del gruppo di laboratorio a fronte delle difficoltà iniziale hanno invece elaborato pian piano una strategia risolutiva graduale e coerente. Il solo riferirsi alle esperienze in aula li ha condotti a sviluppare prima strategie di conteggio e di riflessione sugli aspetti del numero coerenti con i materiali presentati e poi ad elaborare un crescente e mirato percorso di attribuzione di significato rispetto i contenuti matematici affrontati. Di contro la fase di esplorazione dei materiali ha sempre occupato un tempo abbastanza lungo nel corso degli incontri perché espressione del bisogno dei bambini di una manipolazione da svolgersi quasi a livello individuale.

Per quanto concerne i singoli incontri mentre durante i primi due i bambini hanno raggiunto livelli di concettualizzazione diversi, per le motivazioni sopra descritte, a partire dal terzo è possibile dire che siano stati raggiunti gli stessi di formalizzazione anche se con modalità ed espressioni diverse. Procedendo con una sintesi più dettagliata, durante l'episodio della rana i bambini del gruppo di sezione sono arrivati a riconoscere un intero come composizione di due parti e a porre in relazione queste due parti **[notare una proprietà – 4°]** mentre quelli del gruppo di laboratorio sono giunti solo ad una prima forma di rappresentazione mentale legata al guardare alle foglie come elemento numerico **[elaborare immagini – 2°]**. Entrambi i gruppi sono occorsi in uno scoglio cognitivo legato alla relazione salti-foglie. Proprio a partire da questo è stato introdotto il secondo incontro, che ha presentato lo stesso problema da un punto di vista matematico, ma ha permesso ai bambini di utilizzare un materiale completamente manipolatorio e discreto Entrambi i gruppi hanno confermato i livelli di concettualizzazione raggiunti nel primo anche se il momento introduttivo ha fatto sì che la storia-problema si delineasse sulla base di due costrutti matematici differenti. Nel gioco dei birilli entrambi i due gruppi sono arrivati a porre in relazione il numero dei birilli abbattuti con quello totale **[notare una proprietà – 4°]** e porre poi questo in relazione con lo

scopo del gioco. Nel gruppo di sezione i bambini hanno creato una classifica dei giocatori partendo da quello con il maggior numero di birilli abbattuti per giungere a quello con il minore. Nel gruppo di laboratorio i bambini hanno decretato la squadra vincitrice come quella in cui la somma di tutti i birilli abbattuti era quella maggiore. Gli ultimi due incontri hanno visto entrambi i gruppi giungere al primo livello di giungere di concettualizzazione simbolica **[formalizza – 5°]**. In entrambi il gruppo di sezione è giunto velocemente alla soluzione numerica, ma ha impiegato maggior tempo nell'argomentare la propria strategia risolutiva e dimostrare la validità del risultato trovato. Il gruppo di laboratorio ha visto invece proseguire di pari passo il calcolo del risultato numerico con il processo argomentativo. Durante l'incontro su il cane e l'albero di mele sia il gruppo di sezione sia il gruppo di laboratorio si sono rapportati alle due rappresentazioni grafiche confrontandole e non considerandole una come l'evoluzione dell'altra in seguito ad un azione esterna. Nello specifico dell'incontro sulla gabbietta con gli uccellini il gruppo di sezione ha dimostrato una certa padronanza linguistica e quello di laboratorio di saper attuare una strategia risolutiva ragionata.
Rispetto alle due dimensioni coinvolte nella discussione, quella della comprensione matematica e quella narrativa, da parte di entrambi i gruppi ed in tutti gli incontri è emerso quanto queste fossero strettamente legate tra loro. I bambini hanno espresso le proprie concezioni matematiche dapprima descrivendo cosa stesse accadendo ai protagonisti dei racconti e poi attraverso una sempre maggiore formalizzazione sostenuta da un linguaggio appropriato. È interessante inoltre sottolineare che oltre dal punto di vista espositivo il contesto narrativo ha sostenuto la comprensione matematica nel suo articolarsi. Fino a quando i bambini infatti non sono riusciti ad entrare nel vivo delle narrazioni cogliendo le relazioni temporali e causali, nonché le problematiche emergenti non sono riusciti neppure a rapportarsi con i numeri se non contando quanto avevano di fronte. Quando una delle due dimensioni ha prevalso sull'altra o i livelli di concettualizzazione raggiunti sono stati molto bassi o il racconto collettivo è mancato di coesione e coerenza interne. Esempi di questo sono stati i primi due incontri del gruppo di laboratorio, in cui l'attenzione al contesto narrativo è stata prevalente e più che ad una soluzione numerica si è giunti ad una descrizione dei materiali secondo gli aspetti numerici, ed in quello dei birilli dove da parte di entrambi i gruppi la partecipazione al gioco

ha permesso una forte manipolazione numerica dal punto di vista esperienziale, ma l'argomentazione è stata limitata ai momenti iniziale e finale.
Infine dal punto di vista dei concetti matematici coinvolti si è vista una prevalenza da parte di entrambi i gruppi a rapportarsi alle situazioni sottrattive come addizioni inverse ("Quanto manca a…"). Ragione e conseguenza di questo possono essere ritrovate in riferimento alla linea dei numeri. Se la sequenzialità numerica ha orientato la lettura delle situazioni proposte dal punto di vista matematico, dall'altro ha portato i bambini a trovarvi una soluzione. L'aspetto cardinale dei numeri è emerso prevalentemente durante le operazioni di confronto tra quantità e ha sostenuto soprattutto il concetto di differenza. Tale concetto è stato meglio interiorizzato da parte di entrambi i gruppi. A tal proposito il gruppo di laboratorio, in seguito all'incontro di pre-test[10], aveva dimostrato non solo di averne memorizzato il termine, ma di averne elaborato anche un significato, anche se fortemente legato all'attività, che è stato consolidato durante i successivi incontri dell'intervento didattico. Il gruppo di sezione durante gli ultimi due incontri ha dimostrato anche una prima appropriazione del concetto di resto, inteso come quantità mancante, testimoniato dall'uso di un linguaggio specifico (nella fattispecie il verbo "togliere") e dalla lettura della linea dei numeri in senso decrescente.

.

[10] Lo stralcio è tratto dall'incontro de "La rana nello stagno" del gruppo di laboratorio.

Insegnante: "Vi ricordate… chi c'era si ricorda cosa abbiamo fatto la volta scorsa?"

Bambini: "Sì!"

I.: "Cosa?"

Denise: "Abbiamo fatto le costruzioni."

Marian Sara: "E le abbiamo contate."

I.: "Contate. E con cosa le abbiamo contate?"

Alessio: "Con i numeri."

I.: "E ci hanno aiutato i numeri a contarle?"

B.: "Sì!"

I.: "Cosa abbiamo visto di queste costruzioni?"

MS.: "La differenza era 2."

I.: "Di cosa era la differenza?"

D.: "Che se hai una riga… se è più alta quelli due sono quelli."

I.: "Ho capito. E poi cosa abbiamo visto?"

MS.: "Perché quando ci sono in più vuol dire differenza." (min. 3.05)

8. LA RAPPRESENTAZIONE

8.1 La narrazione non verbale

Al termine di ogni momento di attività e discussione matematica si è chiesto ai bambini di fare un disegno. Una volta concluso il disegno i bambini erano invitati dall'insegnante-ricercatore a verbalizzare quanto rappresentato. L'insegnante-ricercatore annotava quanto detto dai bambini sul disegno su indicazione dei bambini stessi. La scelta del disegno finale è stata dettata da due ragioni. In primo luogo, in linea con la metodologia del design experiment, si è cercato di mantenere una struttura della lezione simile a quella abituale. Da osservazione ed interviste era emerso che i bambini erano abituati a "fissare" l'esperienza attraverso un'attività finale su carta. In secondo luogo si è cercato di proporre un momento di riflessione individuale che fosse coerente con l'intera proposta didattica e non attuato attraverso una scheda standardizzata. La rappresentazione grafica ha dato ai bambini l'opportunità di rielaborare individualmente quanto emerso dalla discussione in gruppo e di formalizzare l'esperienza raccontando la propria storia matematica. I bambini erano liberi di scegliere se raccontare la storia narrata in classe o se raccontarne un'altra che sottendesse però lo stesso costrutto matematico. Passare da una storia raccontata oralmente ad una rappresentata ha voluto guardare alla narrazione non solo come contesto, ma come vero e proprio approccio al processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Un *approccio narrativo* crea un contesto classe in cui i bambini sono (a) autori del proprio processo di apprendimento, (b) conferiscono significato a quanto viene elaborato, (c) collaborano e (d) utilizzano forme di narrazione non verbale (Burton, 2002). Nel confrontarsi tra loro o nel tentare di supportare le proprie affermazioni i bambini possono infatti "mettere per iscritto" i propri pensieri. Questo tentativo rende visibili i loro ragionamenti e dà enfasi a quanto affermato a voce (Krummheuer 2001). Se il disegno, soprattutto nei bambini piccoli che non sanno ancora scrivere, può essere considerato uno strumento di mediazione tra le prime rappresentazioni, il pensiero legato all'azione e il pensiero simbolico-astratto, il disegnare è un processo narrativo in quanto mostra, racconta, descrive. Il bambino infatti descrive la propria esperienza, racconta come l'ha interiorizzata e ne mostra la sua rappresentazione simbolica. Molto spesso il processo narrativo è integrato da quello verbale. I bambini sentono il bisogno di spiegare quanto hanno disegnato ed essere così sicuri che quello che gli altri, nella fattispecie l'adulto, comprendono sia corretto, o meglio, corrisponda a quanto da loro comunicato. Il parlato entra nella rappresentazione come un mezzo per rendere espliciti i significati impliciti. Non si tratta di una semplice descrizione, ma del tentativo di trasmettere la dinamicità del ragionamento alla sua immagine su carta. Il disegno legato alla descrizione parlata dello stesso sono uno stimolo che l'insegnante offre al bambino per passare dal piano esperienziale a quello simbolico comprendendolo. La rappresentazione, più o meno lasciata libera o indirizzata dall'insegnante ad evidenziare specifici aspetti di attività o esperienze, aiuta a fermare quanto fatto, a renderlo disponibile in un secondo momento, ma soprattutto osservabile da un'ottica privilegiata: la propria. La rappresentazione iconica lascia spazio a quella simbolica, talvolta passando o integrandosi attraverso quella schematica, denotando il graduale cambiamento nella attività semiotica che porta alla decodifica dell'esperienza e alla sua formalizzazione.

In riferimento alla ricerca viene ora presentata la descrizione dei disegni prodotti dai bambini nel corso degli incontri. Le analisi di tutti gli elaborati sono state condotte indipendentemente dalla dottoranda e dal suo supervisore con un accordo superiore al 95%. Laddove ci sono state, le divergenze si sono risolte attraverso il confronto e la discussione. Nello specifico per ogni incontro sono stati scelti i disegni considerati esemplificativi di una certa rielaborazione dei contenuti matematici. Discorso a parte è stato fatto per l'ultimo incontro, quello riepilogativo. In questo caso, poiché l'attività di rappresentazione è stata quella saliente, si è guardato non solo ai contenuti matematici, ma anche e soprattutto alla personalizzazione dal punto di vista degli aspetti numerici e dei protagonisti delle storie.

8.2 Il gruppo di sezione

8.2.1 La rana nello stagno

Durante la discussione con i bambini non sono comparsi particolari scogli cognitivi. Dalle rappresentazioni emergono però delle difficoltà da parte di qualche bambino. È possibile dividere i disegni in due gruppi: nel primo vi sono quelli dei bambini che sviluppato una concettualizzazione corretta, arricchita da una strutturazione definita ed una argomentazione descrittiva, mentre nel secondo quelli che invece mostrano una notevole confusione. Le imprecisioni di questo secondo gruppo non sono però da attribuire a dinamiche legate all'andamento della discussione, quanto piuttosto a vere e proprie difficoltà nella comprensione degli aspetti numerici.

Fig. 1

Omaima (fig. 1) ad esempio comprende la storia della rana e nel raccontarla attraverso il disegno riporta tutti gli elementi: lo stagno, le due rive, le foglie di ninfea e la rana che salta. Guardando però con attenzione i particolari disegna 7 foglie, conta da destra verso sinistra ma inverte quelle già saltate con quelle da saltare. Inoltre nel determinare le foglie ancora da superare prosegue a partire da 7. Si legge chiaramente una difficoltà della bambina nel comprendere gli aspetti di cardinalità ed ordinalità.

In modo analogo si comporta anche Matteo (fig. 2): mostra di aver compreso la dinamica del racconto, ma ha difficoltà nel conteggio. Nel disegnare e verbalizzare la sua storia non è coerente e ogni volta aggiunge o nuovi elementi o particolari che cercano di giustificare l'argomentazione, ma alterano i rapporti numerici. Conta sempre da destra verso sinistra. In un primo momento disegna infatti

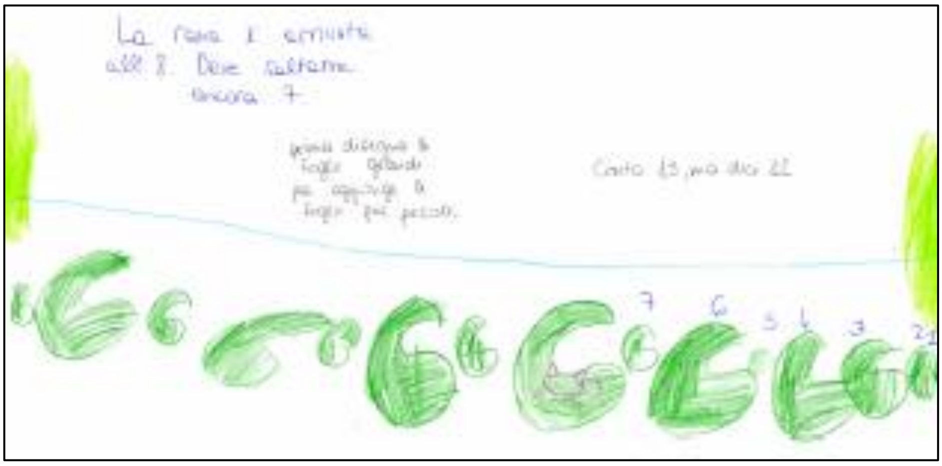


Fig. 2

solo le 7 foglie più grandi e pone la rana sulla quarta. Durante la verbalizzazione, benché fosse stato più volte detto che le storie erano libere e che ogni bambino poteva scegliere il numero di foglie del proprio stagno, Matteo probabilmente si rende conto di avere un numero di foglie inferiore alle 12 del racconto in classe e ne aggiunge altre che nel disegno vediamo essere più piccole. Nel ricontare le foglie ne salta qualcuna arrivando ad un totale di 13. Alla domanda di conferma di quante siano le foglie in tutto però dice 12. Come si vede dall'immagine la foglia 5 è più chiara perché Matteo tenta di cancellarla proprio per fare in modo che le foglie siano 12. Quando su richiesta dell'adulto gli viene chiesto di raccontare cosa faccia la rana della sua storia, Matteo dimentica il riferimento al totale delle foglie e sul foglio mostra come la rana sia arrivata alla foglia numero 8 e debba saltare ancora 7 foglie per giungere all'altra riva. Matteo mostra quindi delle difficoltà legate al contare sia per quanto riguarda la cardinalità che l'ordinalità, ma a differenza di Omaima riesce a gestire i numeri piccoli, entro l'8, e riconosce un punto di partenza per il conteggio.

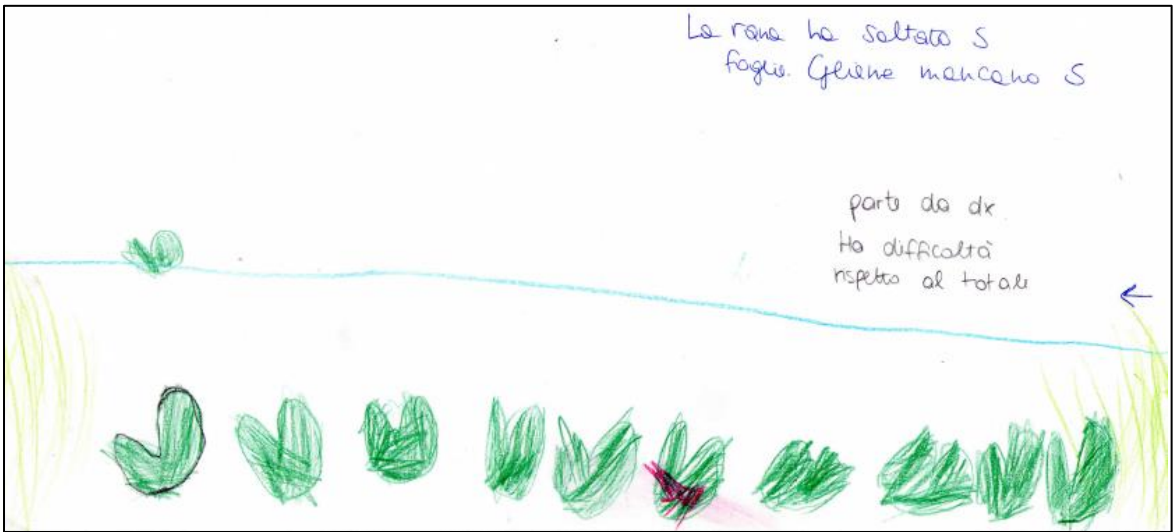


Fig. 3

Anche Jessica (fig. 3) mostra difficoltà nel contare, parte da destra e va verso sinistra, ma riesce a superare le difficoltà personalizzando il disegno e raccontando di una rana che ha già saltato 5 foglie e ne deve saltare ulteriori 5.

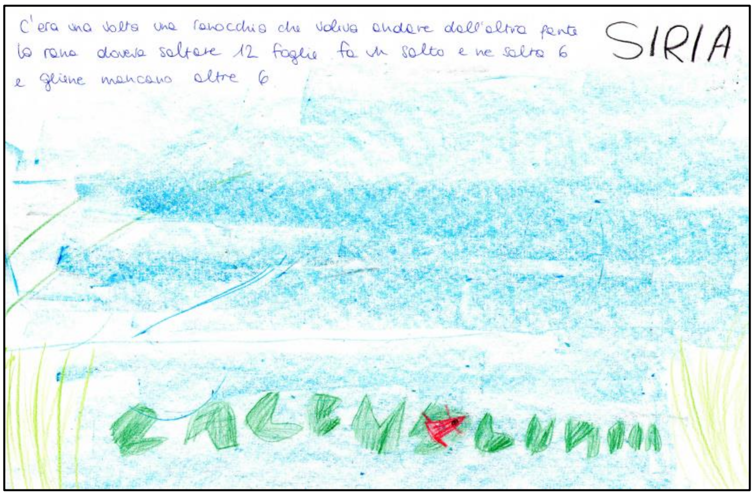


Fig. 4

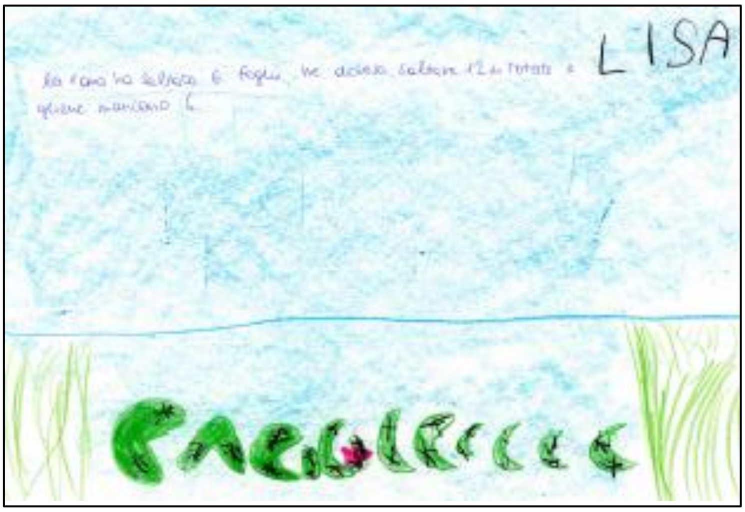


Fig. 5

Fig. 6

Una seconda parte di bambini arriva invece ad un pieno livello di verbalizzazione e concettualizzazione. Siria ad esempio (fig. 4) fa della verbalizzazione del suo disegno un vero e proprio racconto arricchito dagli elementi che caratterizzano le fiabe (es.: "C'era una volta"). Rispetto agli aspetti numerici ripropone le 12 foglie dell'attività in classe, ma percepisce chiaramente la scomposizione del numero in due parti entrambe composte da sei elementi.

Anche Lisa (fig. 5) propone un racconto che riprende i numeri dell'attività in classe, ma nel disegno è molto dettagliata.

Davide (fig. 6) infine aggiunge un ulteriore elemento di qualità dato dallo scomporre il numero 12 in 3 e 9.

8.2.2 La collana di Nonna Procione

I disegni del secondo incontro mostrano un'interpretazione personalizzata da parte dei bambini. Tutti hanno scelto di mantenere i dati numeri dell'attività in classe conteggiando le 12 perle totali divise in perle cadute e perle rimaste sul filo. Lisa (fig. 7) è l'unica che disegna anche Nonna Procione e che individua un spazio all'interno del quale distribuisce le perle. E' interessante notare che l'azzurro rappresenta sia il colore del tappetto su cui erano seduti i bambini, ma anche il lago al quale si era diretta Nonna Procione nel racconto.

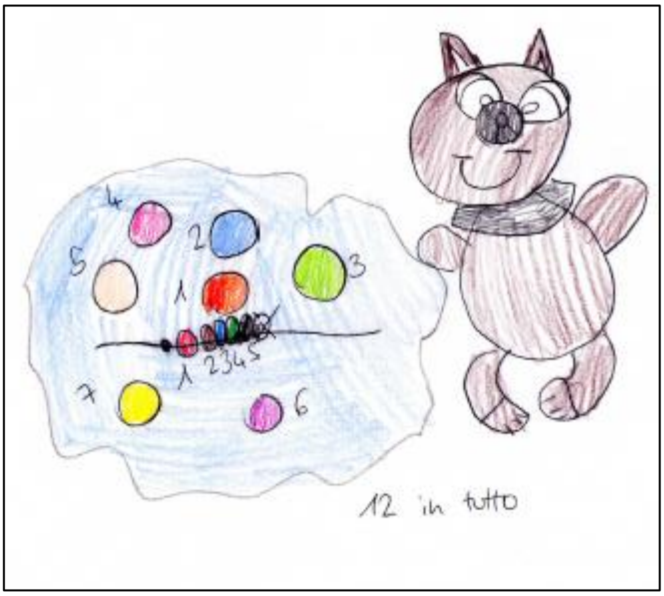


Fig. 7

Mentre le perle rimaste al collo sono bene ordinate sul filo, quelle cadute sono distribuite intorno in ordine sparso. Nella sua rappresentazione procede probabilmente affidandosi al subitizing poiché durante la verbalizzazione si accorge di aver disegnato 6 perle sul filo e ne cancella una. Anche Siria (fig. 8) propone una rappresentazione simile a quella di Lisa, ma si aiuta con i colori e attraverso questi scompone ulteriormente i numeri in parti più piccole. Precisa inoltre che il numero di perle cadute è maggiore di quello delle altre.

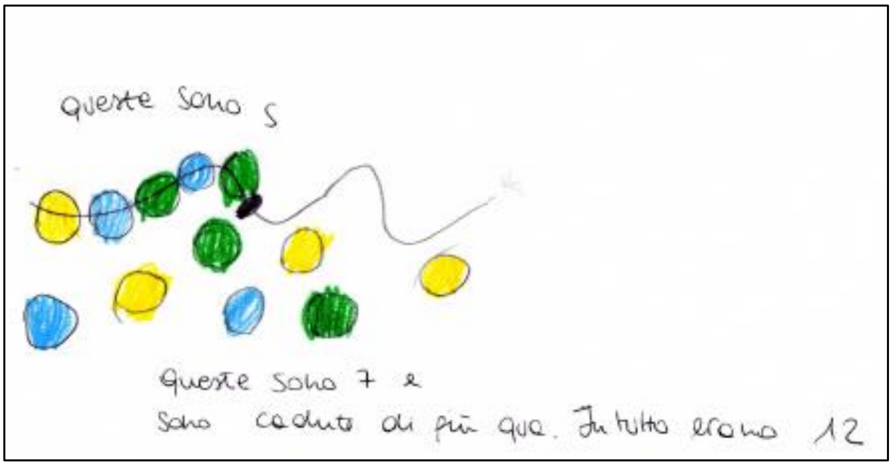


Fig. 8

Davide (fig. 9) come Siria usa l'alternanza dei colori: la disposizione delle perle tutte lungo il filo lo mette ancor più in evidenza. È da notare che mentre per le perle rimaste sulla collana si limita a dire che sono 5, quelle cadute vengono enumerate una ad una in quanto 7 non è una quantità per lui immediatamente visibile.

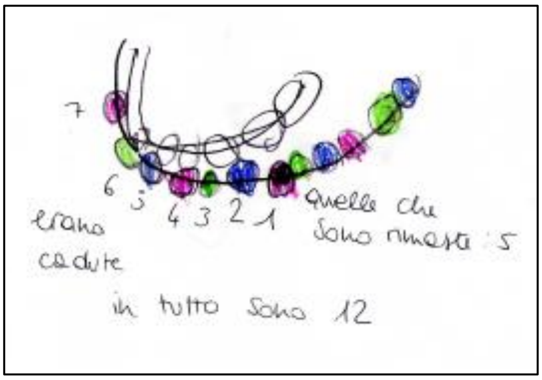


Fig. 9

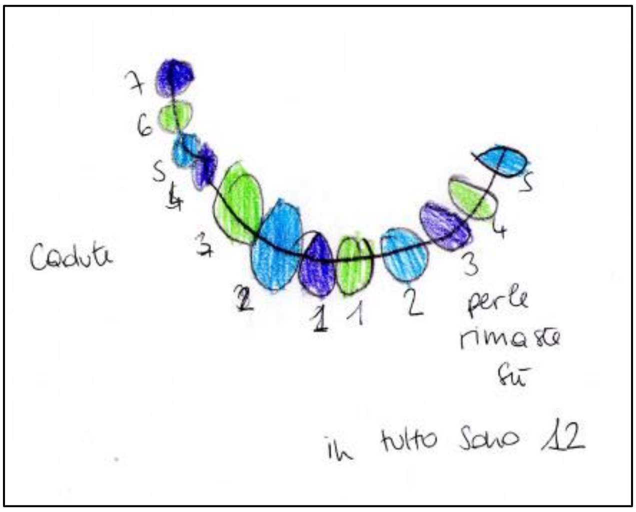


Fig. 10

Francesco (fig. 10) analogamente ai due compagni precedenti utilizza l'alternanza dei colori, ma nella sua verbalizzazione conta entrambi i due gruppi di perle. In riferimento a questi ultimi tre disegni si può dire che i bambini raccontano la storia della collana eseguendo l'addizione tra 7 e 5 per dire che in totale le perle sono 12, ma lo fanno con livelli di riconoscimento della quantità diversi: mentre Siria non ha bisogno di contare, Davide lo fa per il numero più grande e Francesco per entrambe le parti. Tutti e tre sono però consapevoli della quantità totale tanto da ridividerla in 3 parti tra loro equivalenti attraverso i colori.

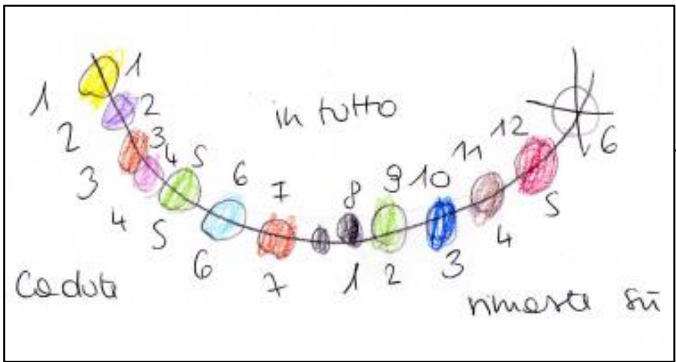


Fig. 11

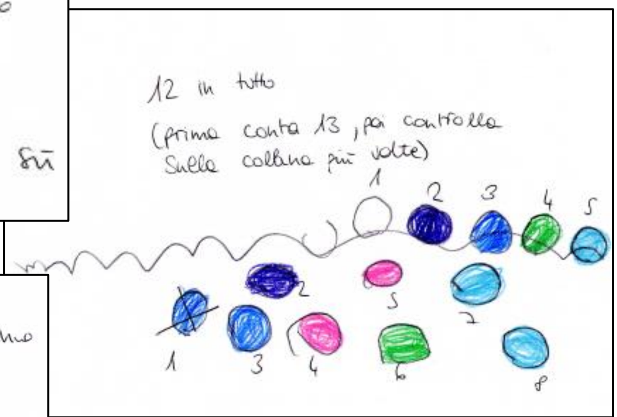


Fig. 12

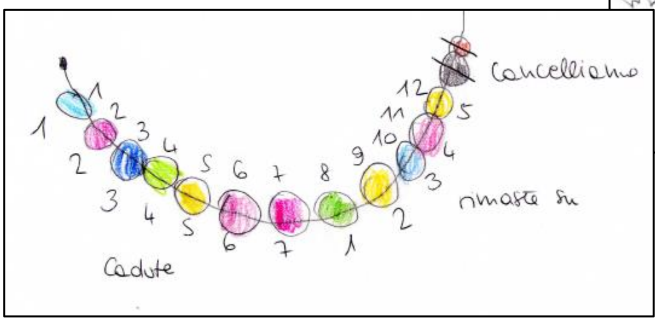


Fig. 13

Nei tre disegni qui riportati , in senso orario rispettivamente di Gloria (fig. 11), Rebecca (fig. 12) e Matteo (fig. 13) possiamo vedere che i bambini riconoscono le 7 perle cadute e le 5 rimaste sul filo, ma non riconoscono queste due quantità come complementari per il numero 12. È solo nel conteggio totale finale che si rendono conto di non aver disegnato 12 perle. Rebecca (fig. 12) prima indica una perla come eccedente e successivamente ne cancella un'altra.

Ajdin (fig. 14) e Jessica (fig. 15) mostrano invece delle difficoltà nell'affrontare la componente numerica del racconto e utilizzano una strategia simile. Disegnano molte perle e poi colorano solo quelle che considerano. Sembra quindi che inconsapevolmente creino una nuova storia in cui vi sono molte perle, ma solo alcune appartengono ad una collana. A conferma entrambi disegnano il filo a parte.

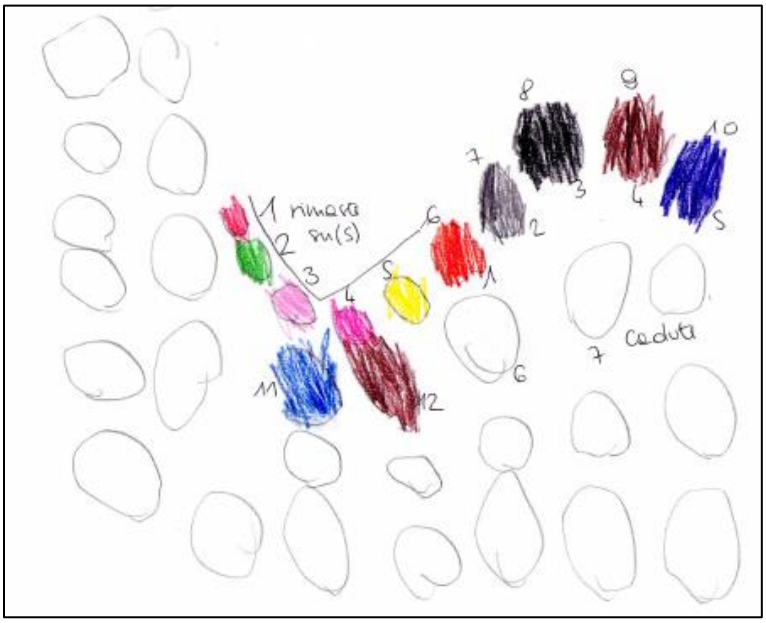


Fig. 14

Ajdin (fig. 14) conta prima le 12 perle e tra queste indica le prime 5 come quelle rimaste sul filo, che disegnato sembra quasi sottenderle. Nel contare però le 7 cadute ne indica due che però non appartengono alle 12 colorate. 6 e 7 sono infatti bianche.

Jessica (fig. 15) una volta individuate le 12 perle del racconto, complice forse anche la difficoltà che mostra nel contarle e ricontarle per più volte, cancella le eccedenti e indica solo 7 e 5:

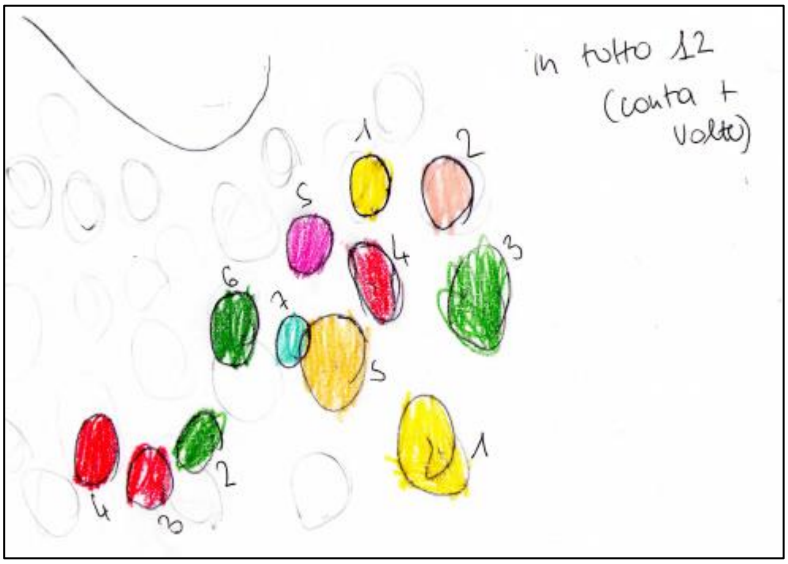


Fig. 15

non segue una strategia e individua un ordine sparso.

In generale quel che è chiaro in tutti i disegni è che i bambini calcolano il numero delle perle come un'addizione. Questo non va considerato un errore, ma al contrario una strategia legata all'andamento della discussione. Durante l'attività il numero totale di 12 perle era emerso solo dopo che i bambini avevano riconosciuto in 5 il numero di perle rimaste sul filo. In questo senso il contesto ha influenzato il ragionamento dei bambini portandoli a rielaborare la sottrazione come un'addizione inversa.

8.2.3 I BIRILLI

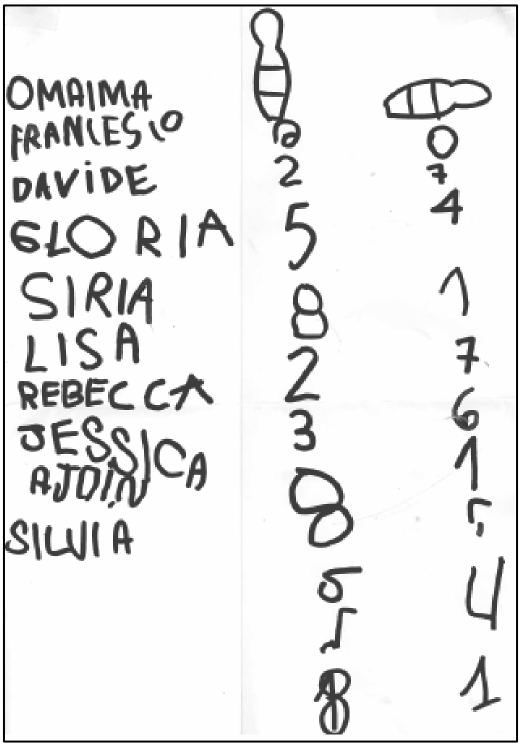


Fig. 16

Nell'incontro dei birilli i bambini sono stati molto partecipi. È interessante notare come nell'appuntare il punteggio i bambini scrivano i numeri arabi (fig. 16). Anche da parte dei bambini che visibilmente non sanno scriverli vi è il tentativo di riprodurre il simbolo; nessuno prova a trascrivere il proprio risultato attraverso altre strategie. Per quanto concerne le storie Lisa (fig. 17), come negli altri incontri, mostra un'ampia capacità argomentativa.

Disegna se stessa, la palla e i birilli. Le palline nere che si vedono disegnate rappresentano le postazioni dei birilli. Il fatto che queste non siano quasi visibili nella seconda fila partendo dall'alto, fa capire che quelli sono i 3 birilli non

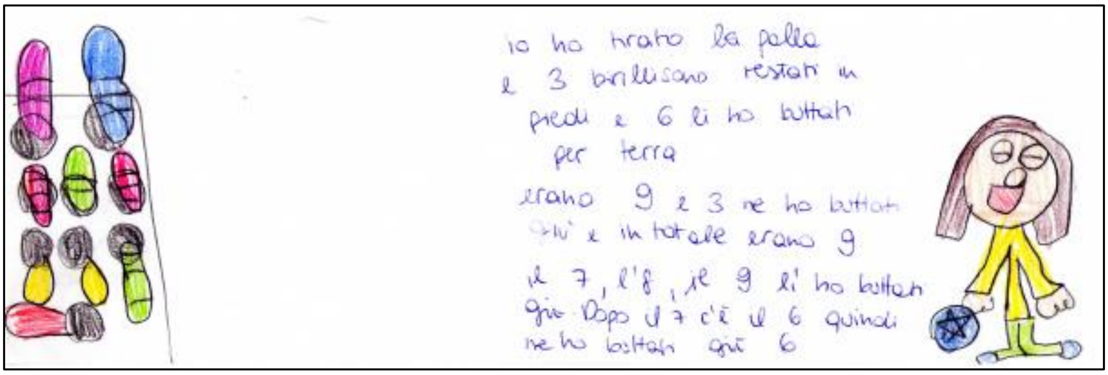


Fig. 17

caduti. La verbalizzazione del racconto viene ripetuta tre volte ed in ogni versione Lisa esprime un ragionamento diverso. La prima volta dice: “Io ho tirato la palla e 3 birilli sono restati in piedi e 6 li ho buttati per terra” cogliendo solo i due numeri dei birilli rimasti in piedi e di quelli caduti. Aggiunge poi una seconda parte in cui dice: “Erano 9 e 3 ne ho buttati giù e in totale erano 9”. In questo suo secondo intervento però si rende conto di non aver detto però quello che era nelle sue intenzioni o nel dirlo compie un salto di qualità e quindi formula il suo ragionamento ad alta voce “Il 7, l’8, il 9 li ho buttati giù. Dopo il 7 c’è il 6 quindi ne ho buttati giù 6”. Quest’ultima frase può sembrare un nonsense, ma probabilmente vi è stato un semplice errore di espressione da parte della bambina che il realtà esegue una vera e propria sottrazione. Se infatti si considera che Lisa mentre con la voce dice “Il 7, l’8, il 9 li ho buttati giù” indica i 3 birilli rimasti in piedi si capisce che molto probabilmente la bambina si confonde e dice: “buttati giù” invece di “rimasti su”. A conferma di ciò vi è il fatto che aggiunge “dopo il 7 vi è il 6 quindi ne ho buttati giù 6” numerando all’indietro. Non solo conta il numero 3 come quantità non partendo da uno, ma individua quindi il 6 come resto tra 9 e 3.

Fig. 18

Oltre a Lisa, solo Francesco (fig. 18) racconta la sua storia eseguendo una sottrazione. Parte infatti dal dire che ci sono 9 birilli, di cui lui ne butta giù 7 e ne rimangono in piedi 2. Individua il resto attraverso il subitizing e esplicita proprio la sua strategia dicendo che “ha guardato”. Nel disegno non si rappresenta: si focalizza sui birilli e ne dà un’immagine molto significativa. Disegna la proiezione dei birilli come cerchi neri. Ogni cerchio è tagliato da una linea azzurra, che indica il birillo. Vi sono 7 linee orizzontali che vanno dalla circonferenza verso l’esterno e sono i birilli abbattuti e due linee verticali che tagliano il cerchio a metà: i birilli rimasti in piedi. I cerchi che individuano le postazioni dei birilli sono inoltre allineati in due file rispettivamente da 4 e 5. Francesco dimostra quindi di aver raggiunto un livello di concettualizzazione molto elevato e di non dover ricorrere all’addizione inversa per il calcolo della sottrazione.

Diversamente fanno Siria (fig. 19) e Davide (fig. 20) che danno delle rappresentazioni ordinate e corrette, ma eseguono un'addizione inversa per determinare il risultato. La prima fa un disegno molto stilizzato. Dice che sono caduti 7 birilli e ne sono rimasti in piedi solo 2. Questi ultimi sono ben visibili nella

Fig. 19

sottolineare il bel risultato ottenuto nel gioco evidenziando il basso numero di birilli rimasti in piedi rispetto a quelli caduti. Anche la verbalizzazione è molto sintetica, però, anche se non in modo di

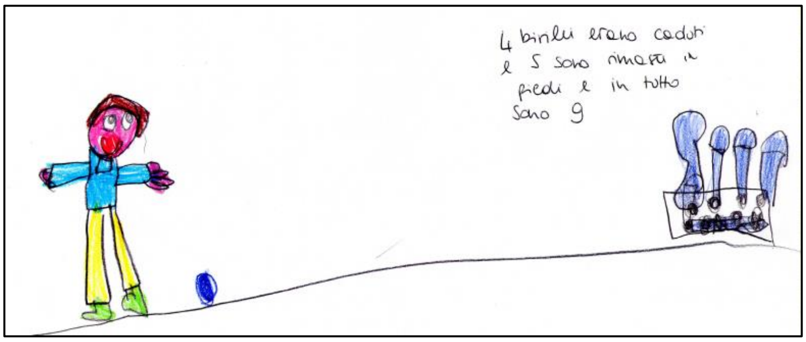


Fig. 20

immediata comprensione ha un forte riferimento alla realtà. Quando Siria spiega come sia giunta a determinare il numero dei birilli caduti e quelli rimasti in piedi dice: "Perché li abbiamo contati", ma durante la verbalizzazione o il disegno non vi è alcuna azione di conteggio né sul foglio né sul tabellone da parte sua. Inoltre nel dire il numero di 9 birilli totali si avvale del conteggio visivo, ma esprime la frase al tempo passato: "In tutto erano 9" dando conferma di fare riferimento all'esperienza vissuta.

Davide invece benché faccia un disegno più ricco di elementi dal punto di vista narrativo, presentando se stesso, la palla e la linea del pavimento, dà una verbalizzazione meno legata all'esperienza con l'utilizzo del tempo presente. Riporta i birilli separando i 4 rimasti in piedi ed i 5 caduti, che formano un'unica striscia blu sopra i 5 cerchi neri delle postazioni e rende immediatamente visibile il numero 9 del totale.

Al disegno di Davide è legato quello di Jessica (fig. 21) che riporta molto bene se stessa (si notino le mani grandi come ad evidenziare il suo coinvolgimento nel gioco) ma fa molta confusione nella parte riguardante i birilli. Sia durante il momento del disegno che in quello della verbalizzazione ha bisogno di tornare a controllare il cartellone del punteggio e quello su cui erano disposti i birilli. I birilli vengono rappresentati nel numero di 7 utilizzando la stessa stilizzazione di Francesco (fig. 18) anche se qui non ha alcun significato. Non fa alcun riferimento al numero 9. Tuttavia riesce a dire che il numero dei

birilli abbattuti da lei era in numero uguale a Davide, dando prova di aver riletto correttamente il tabellone del punteggio.
Anche Gloria e Rebecca mostrano difficoltà nella

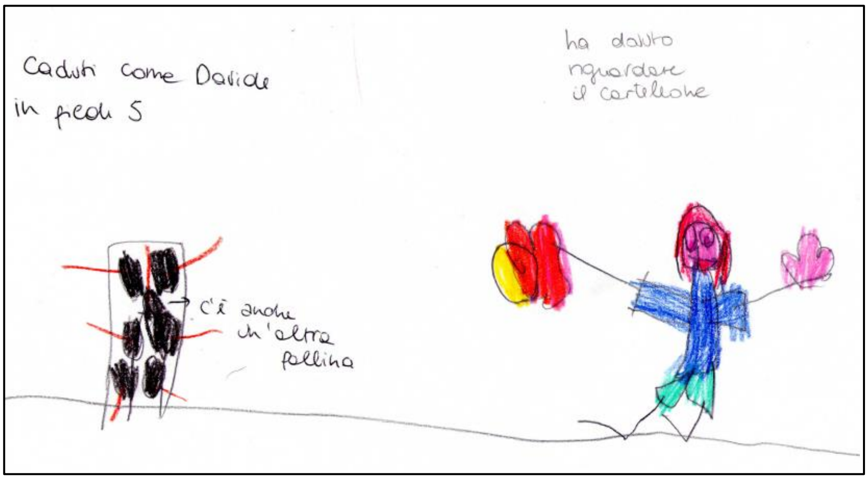


Fig. 21

concettualizzazione degli aspetti numerici del gioco. Durante l'attività avevano entrambe lasciato in piedi un solo birillo. Entrambe lo evidenziano nel disegno anche se in modo diverso. Ponendo i due disegni a confronto si

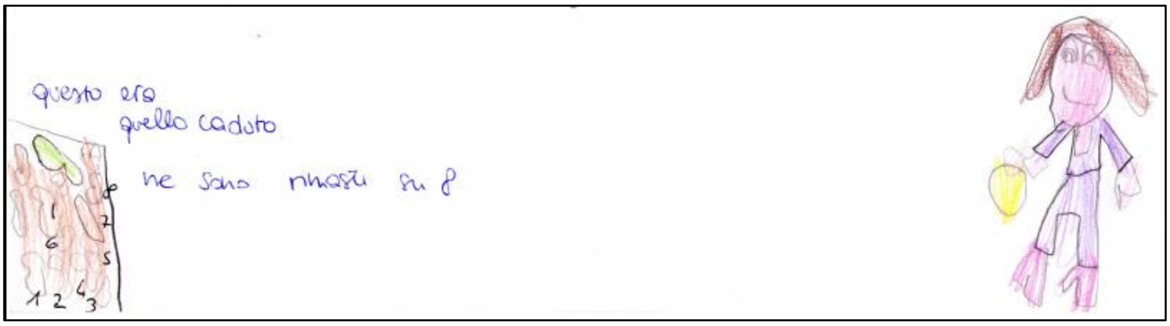


Fig. 22

può vedere come Gloria (fig. 22) rappresenti l'unico birillo caduto in colore verde. Gli altri 8 vengono individuati attraverso il conteggio durante la verbalizzazione. Inizialmente infatti, come vede, aveva disegnato più sagome che non vengono cancellate.

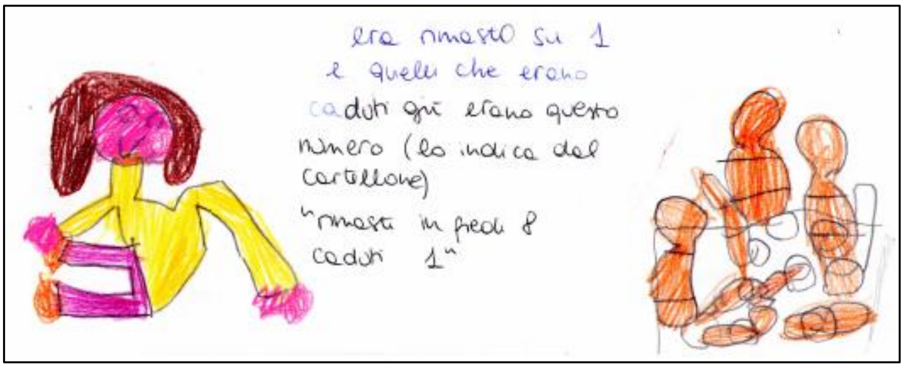


Fig. 23

Rebecca (fig. 23) disegna il birillo rimasto in piedi in primo piano di dimensioni più grandi rispetto agli altri 8, ma questi sono riprodotti non in modo ordinato. Guardando il disegno è anche difficile distinguerli. Fa una rappresentazione fedele della realtà con i birilli sovrapposti in seguito all'essere stati colpiti dalla palla. Probabilmente si avvale della corrispondenza uno ad uno tra disegno e birillo per rappresentarli in numero corretto perché non ne conosce il nome: lo indica dal cartellone del punteggio durante la verbalizzazione. Sia Rebecca che Gloria quindi non sono in grado di cogliere il legame tra il numero dei birilli caduti con quello dei birilli rimasti in piedi determinando il totale di 9. Nel rappresentare la propria esperienza utilizzano però due strategie diverse, legate probabilmente a diverse modalità di concettualizzazione. Gloria rappresenta un numero indeterminato di birilli e nella verbalizzazione ne indica e conta solo 8 dimostrando di conoscere i nomi dei numeri, mentre Rebecca fa una rappresentazione più fedele della realtà e benché non padroneggi il nome dei numeri riconosce le quantità.

Un discorso a parte merita Ajdin (fig. 24). Come avvenuto nell'incontro precedente rappresenta una quantità di birilli maggiore di quella coinvolta nell'esperienza. Questa volta però le sagome in più sono solo 2 e vengono colorate. Mentre verbalizza Ajdin non le conta, ma non vuole cancellarle. Non sa spiegare perché le ha rappresentate. Conta poi i 5 birilli rimasti in piedi e i 4 caduti a terra e riconosce il totale di 9. Data la correttezza del ragionamento viene da pensare che le due sagome in più potessero rappresentare le palle presenti nell'aula per abbattere i birilli e che la mancata verbalizzazione fosse un problema linguistico di non conoscenza dei termini.

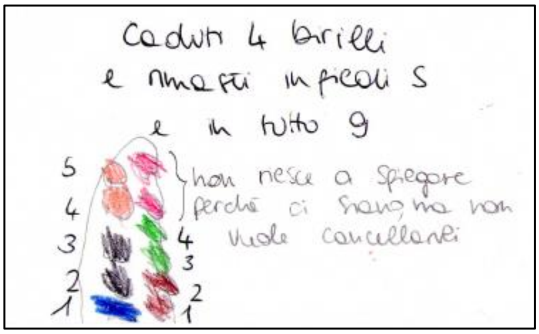


Fig. 24

8.2.4 IL CANE E L'ALBERO DI MELE

Durante la discussione nel determinare il numero di mele cadute un bambino è stato particolarmente veloce e ha fornito una spiegazione chiara ed esaustiva ai compagni. Questo probabilmente li ha aiutati nella successiva rappresentazione tanto che nella distinzione tra mele cadute e mele rimaste sull'albero nessun bambino riconta il totale. Tutti sia compiendo una sottrazione sia attraverso l'addizione inversa riconoscono la complementarità di 7 e 3 nel determinare 10. Inoltre benché durante la discussione ci fossero state diverse domande, anche fuorvianti, sul cane, nessun bambino lo rappresenta. Tutti descrivono l'albero e le mele.

Fig. 25

Francesco (fig. 25) inizia il proprio racconto dicendo che sull'albero c'erano 10 mele, ne sono cadute 3 e quindi ne sono rimaste 7. Formula il racconto seguendo la stessa impostazione dell'attività in classe, ma da 10 sottrae 3 e calcola il 7 come resto. Precisa che quel 7 lo ha determinato attraverso il conteggio, che però non esplicita a voce alta. Come Francesco anche Davide (fig. 26) riprende la struttura del racconto in classe anche se nel verbalizzare il suo disegno esprime il 10 come dato finale. È interessante notare come inizi il suo racconto: "Quando le mele sono cadute, ne sono rimaste su 7". Il 3 viene espresso quasi come conseguenza. Si comprende quindi che mentalmente formula una ragionamento sottrattivo.

Fig. 26

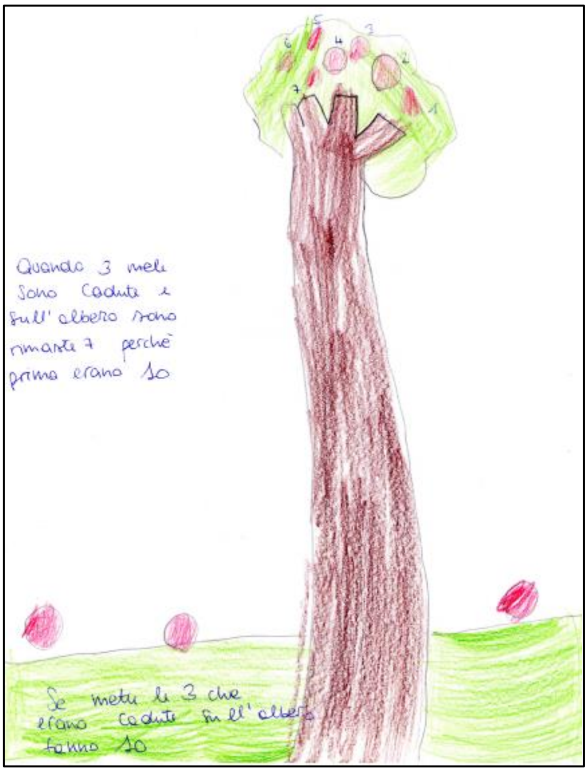


Fig. 27

Gloria (fig. 27) inizia la verbalizzazione del proprio disegno in modo simile a Davide: “Quando 3 mele sono cadute” però continua dicendo “e sull’albero ne sono rimaste 7”. Esegue quindi un’addizione, ma il come la esprime fa capire che padroneggia anche l’operazione inversa come scomposizione del numero 10 in 7 e 3. Ulteriore conferma è data dal fatto che guardando alle 3 mele sull’erba precisa aggiungendole a quelle sull’albero si ottengono le 10 mele iniziali.

Rebecca (fig. 28) e Ajdin (fig. 29) raccontano due storie praticamente uguali. Entrambi distinguono le 7 mele sull’albero, che contano nella verbalizzazione, e le 3 mele a terra precisando che il tutto le mele erano inizialmente 10.

Fig. 28

Fig. 29

Un discorso a parte va fatto verso Omaima (fig. 30), Asia (fig. 32) e Jessica (fig. 31). Tutte e tre le bambine presentano difficoltà nel comprendere gli aspetti matematici. Non rielaborano l’operazione aritmetica. Ognuna di loro tuttavia coglie il senso del racconto e si focalizza nella rappresentazione delle mele.

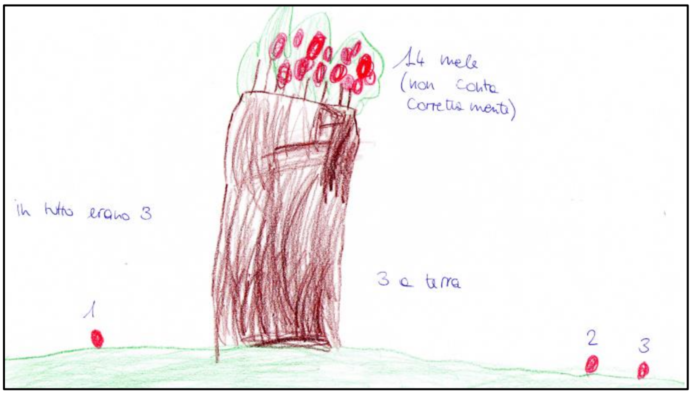


Fig. 30

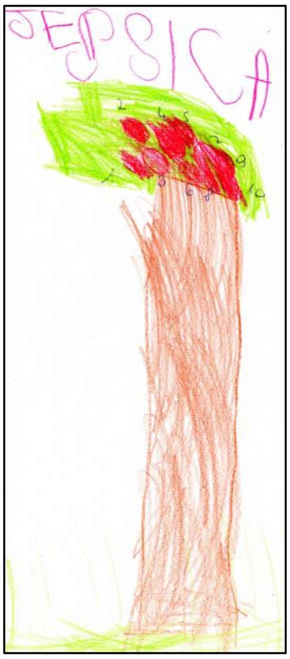


Fig. 31

Omaima (fig. 30) rappresenta 14 mele sull'albero e nel contarle sbaglia più volte. Però riproduce le 3 mele a terra in modo corretto e dimostra di aver colto la distinzione tra mele a terra e mele rimaste sull'albero.

Fig. 32

Asia e Jessica rappresentano invece le sole mele sull'albero. Jessica (fig. 31) rappresenta correttamente 10 mele e precisa che quelle sono tutte tenendo presente il totale. Asia (fig. 32) infine rappresenta le mele in modo sbagliato disegnandone 11 al posto di 10, ma ne conta solo 10 saltandone 1. Ciò può essere dovuto sia ad un errato conteggio sia, più probabilmente, al voler raccontare quanto esperito durante l'attività. Va precisato che benché presente fin dall'inizio Asia si fosse sempre rifiutata di disegnare e raccontare le proprie storie.

8.2.5 LA GABBIA CON GLI UCCELLINI

Le storie narrate nei disegni del quinto incontro mostrano una grande attenzione da parte dei bambini ed una loro maggior precisione nella descrizione degli aspetti sia narrativi sia matematici.

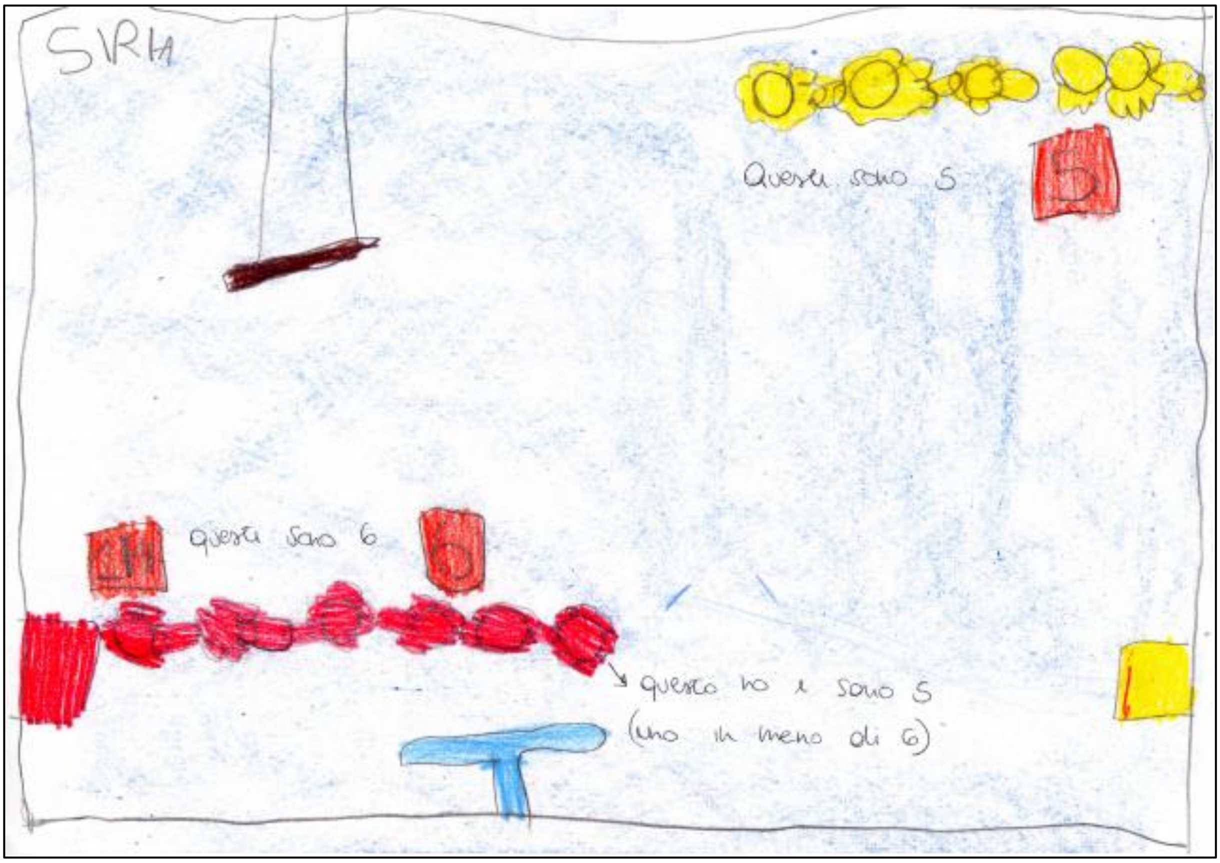


Fig. 33

Il disegno di Siria (fig. 33) appare completo e preciso. La bambina disegna, e mentre racconta indica, la gabbia, l'altalena, l'abbeveratoio e le due ciotole del cibo. Quest'ultimo particolare appare in tutti i disegni dei bambini, tranne uno, ed è molto significativo che venga rappresentato. La storia-problema raccontata in classe illustrava il bisogno della nonna di conoscere il numero degli uccellini per sapere quanto cibo, differenziato per il colore del piumaggio, dare loro. Il rappresentare la ciotoline porta-cibo dimostra come i bambini abbiano, nel corso degli incontri, imparato a cogliere i vari elementi del racconto come dati del problema. Siria dispone gli uccellini anche sui due rispettivi lati del foglio: i rossi allineati vicino la ciotola rossa e i gialli allineati sopra la ciotola gialla. Determina il numero degli uccellini attraverso il conteggio visivo e aggiunge anche delle etichette con il simbolo del numero. Nel verbalizzare il fatto che gli uccellinii rossi sono uno in più dei gialli aggiunge un'ulteriore etichetta in cui sono leggibili "1" e

"+", dando anche una rappresentazione simbolica. Non solo. La bambina si appropria del principio di inversione (n + 1 - 1 = n) perché spiega che non considerando l'ultimo uccellino dei 6, gli uccellini diventano 5. Il 5 viene determinato come numero di un'unità inferiore al 6.

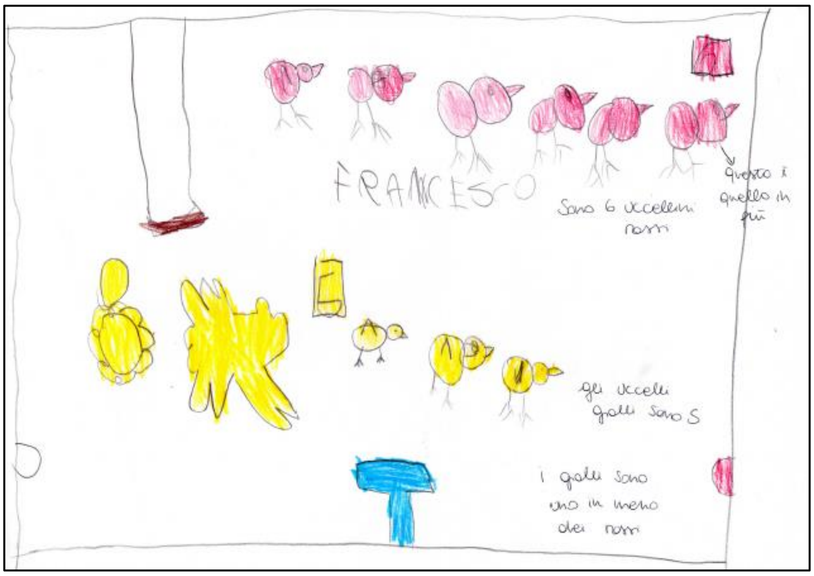


Fig. 34

Francesco (fig. 34) dà una rappresentazione simile a quella di Siria. Indica anche lui l'etichetta numerica, ma nella verbalizzazione formula una concettualizzazione diversa da quella di Siria. In modo indiretto confronta tra loro gli uccellini rossi con quelli gialli dicendo che i rossi essendo 6 ne hanno uno in più dei gialli, mentre i gialli in numero di 5 sono 1 in meno dei rossi. Individua quindi, in modo inconsapevole, la differenza tra i due numeri. Del disegno è interessante notare anche che uno degli uccellini gialli è raffigurato dall'alto mentre sta mangiando dalla sua ciotola come a rafforzare il racconto discusso durante l'attività.

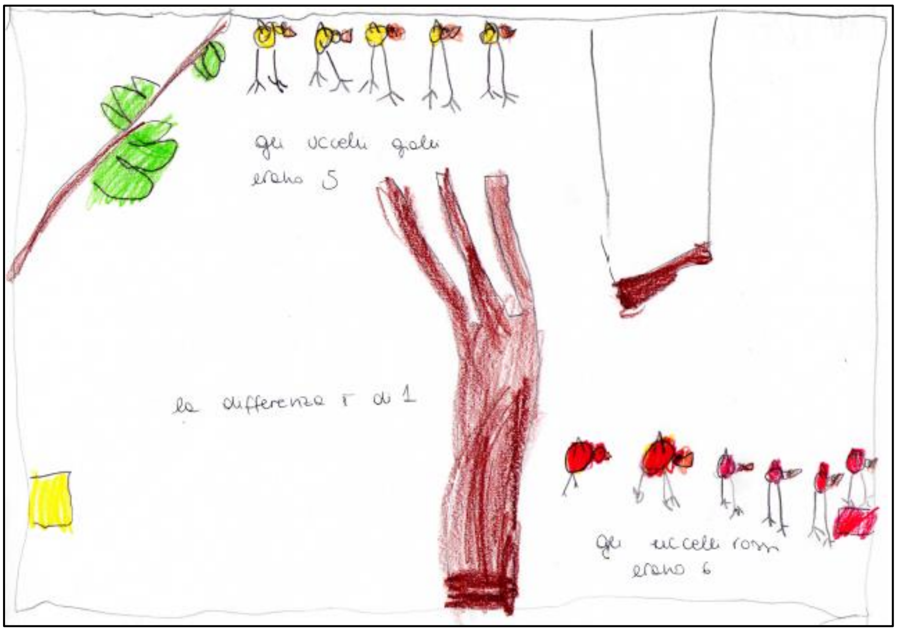


Fig. 35

Il concetto di differenza viene reso esplicito da Davide (fig. 35) che nella verbalizzazione non fa confronti tra il numero di uccellini, ma con proprietà di linguaggio identifica il numero 1 come differenza tra 5 e 6 e dimostra un alto livello di concettualizzazione con probabili recupero e rielaborazione dei termini affrontati nel corso degli incontri.

Ajdin (fig. 36) e Lisa (fig. 37) esprimono entrambi la differenza di 1 uccellino tra i due gruppi. Le loro verbalizzazioni però sono diverse perché Lisa compie un'addizione inversa

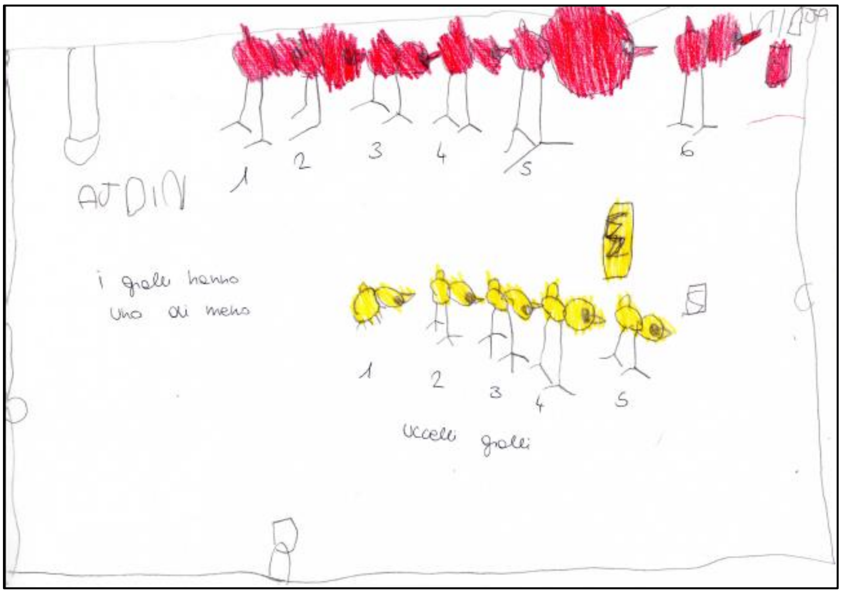


Fig. 36

che la porta a dire che i rossi sono 6 e sono uno in più dei gialli (6 = 5 + 1) mentre Ajdin compie un ragionamento sottrattivo nel dire che i gialli sono uno di meno dei rossi (5 = 6 – 1). Inoltre Ajdin inserisce le etichette numeriche che sono graficamente ancora non preciso, ma vengono rese facilmente identificabili dal lettore grazie al codice cromatico.

Da ultimo Lisa (fig. 37), solitamente molto analitica e ricca nel riportare i vari particolari

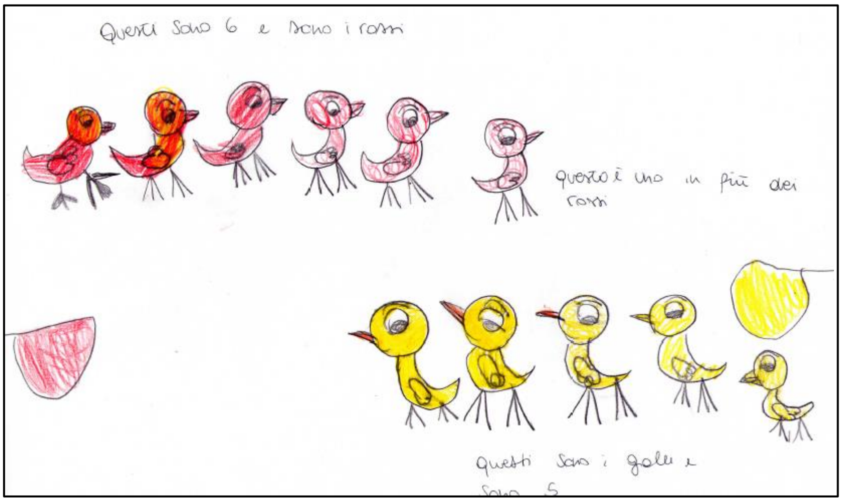


Fig. 37

della storia, dà questa volta una rappresentazione piuttosto schematica. Ad esempio non riporta neppure il contorno della gabbia, ma considera il bordo del foglio come tale. Questo può essere considerato un elemento che conferma la maggiore difficoltà della bambina nella rielaborazione del racconto e la scelta, più o meno volontaria, di concentrarsi ai soli elementi matematici.

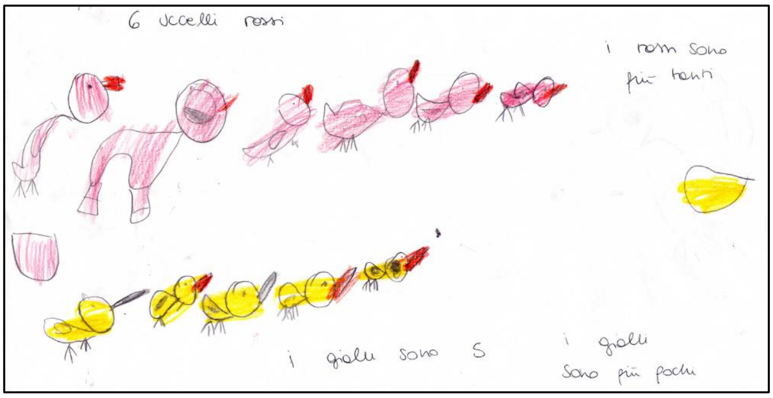


Fig. 38

Matteo (fig. 38) conta correttamente gli uccellini rossi e quelli gialli e dà un finale alla sua storia riconoscendo il primo gruppo come più numeroso mentre il secondo come meno numeroso ma non quantifica la differenza numerica tra i due.

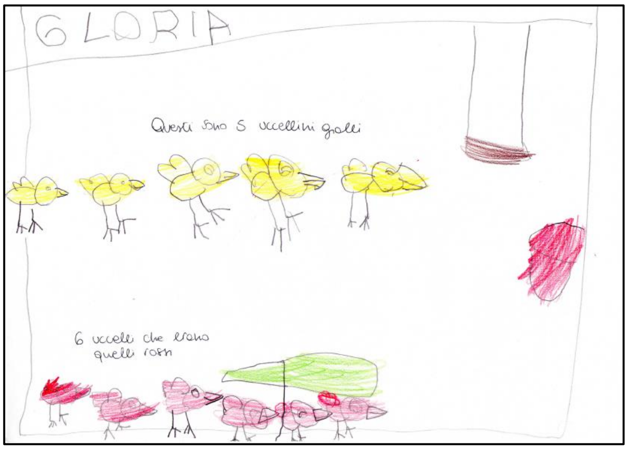


Fig. 39

Né Gloria (fig. 39) né Jessica (fig. 40) confrontano i due gruppi tra loro riconoscendo una differenza numerica tra i due o uno come più o meno numeroso dell’altro. Si limitano a descriverne la numerosità. I loro racconti appaiono senza finale: le bambine sembrano aver semplicemente eseguito il disegno dell’attività svolta con i compagni. Tuttavia Gloria (fig. 39) dimostra una maggiore organizzazione di Jessica perché nel suo disegno gli uccellini sono disposti in due file ben distanziate tra loro all’interno dello spazio che definisce la gabbia e sono gli uccellini gialli, a differenza di quanto presentato durante la discussione, ad essere i più numerosi. Jessica invece rappresenta tutti gli uccellini in modo confusionario mescolando i gialli con i rossi.

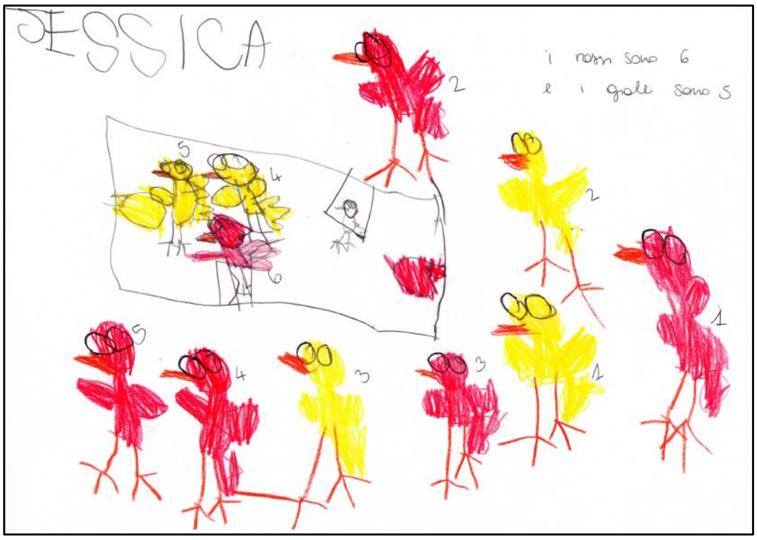


Fig. 40

È solo la verbalizzazione che le permette di esplicitare il numero. Inoltre la sua gabbia è un piccolo rettangolo al centro del foglio non adeguato ad accogliere tutti gli uccellini. Solo tre sono infatti gli uccellini rappresentati all'interno della gabbia: gli altri sono tutti intorno all'esterno. È presente un ulteriore uccellino che si sta dondolando sull'altalena, ma la bambina durante la verbalizzazione sceglie di non parlarne.

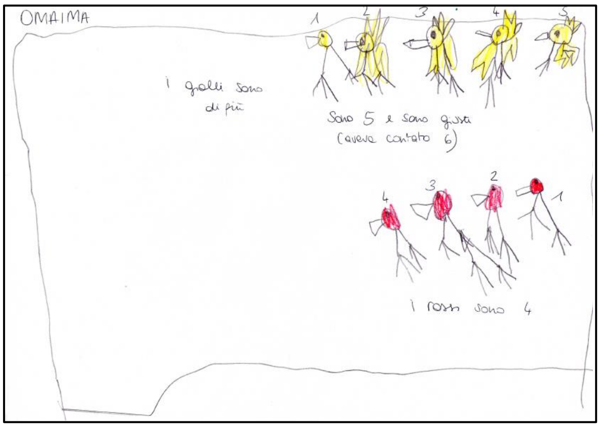


Fig. 41

Il racconto di Omaima (fig. 41) si discosta da tutti quelli dei compagni. La bambina infatti evidenzia come nei precedenti incontri una certa difficoltà nel conteggio e nella verbalizzazione. Tuttavia riesce a rielaborare la storia disegnando la gabbia con all'interno 5 uccellini gialli e 4 uccellini rossi. In un primo momento sbaglia il conteggio degli uccellini gialli dicendo che sono 6. Dopo una rilettura afferma che sono 5 e precisa che il numero che ha contato è corretto e che i gialli sono più dei rossi dando quindi una risposta alla richiesta della nonna protagonista della storia.

Si possono quindi identificare due gruppi di bambini: un primo con una maggiore consapevolezza numerica e un secondo che evidenzia invece difficoltà legate non tanto al conteggio quanto al confronto delle due quantità. È interessante però notare come, benché sia presente questa difficoltà, tutti i bambini di questo secondo gruppo abbiano rappresentato gli uccellini dei due colori sempre con una differenza di 1 tra loro. Probabilmente il numero basso li ha aiutati nella discriminazione delle quantità.

8.2.6 L'ULTIMO INCONTRO

Con i disegni dell'ultimo incontro i bambini hanno dimostrato un alto livello di personalizzazione ed evidenziato le proprie caratteristiche narrative. Dai racconti appare quasi il tentativo dei bambini di giocare con i numeri. Lisa (fig. 42) e Rebecca (fig. 43), ad esempio, rielaborano la storia della rana facendo fare a quest'ultima un salto talmente grande da superare quasi tutte le foglie. Entrambe le bambine concepiscono il numero non come partizione quanto piuttosto come prossimità tra numeri vicini. Nel primo caso

Lisa (fig. 42) riprende le 12 foglie del racconto, ma fa atterrare la rana sulla foglia 11 dicendo che gliene manca solo 1 da superare. 12 diventa quindi il successivo di 11.

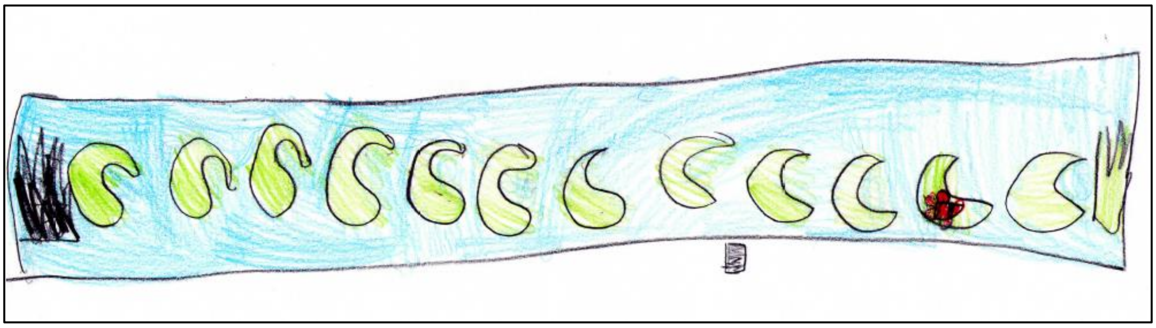


Fig. 42

Rebecca (fig. 43) invece racconta di uno stagno con 7 foglie in cui la rana ne salta 7, atterra sull'ultima e con un ultimo salto si ritroverà poi dall'altra parte. La bambina precisa che il numero di foglie mancanti è 0. Dà quindi una versione narrativa della legge di annullamento della somma (*n* - *n* = *0*). Inoltre dimostra di conoscere sia l'aspetto ordinale sia quello cardinale del numero perché volontariamente fa partire la rana dalla sponda di destra per farla arrivare su quella di sinistra.

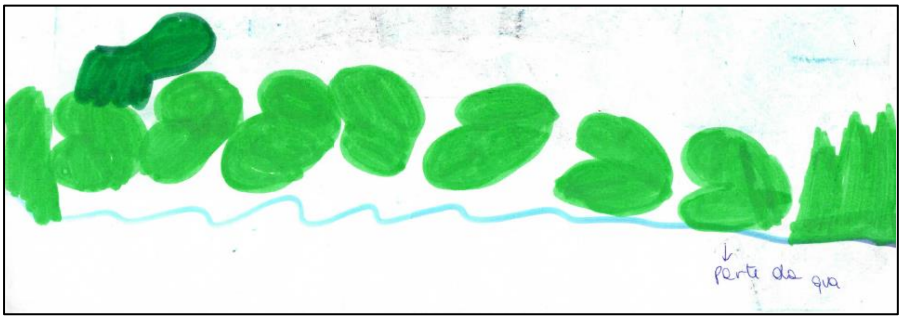


Fig. 43

Ajdin (fig. 44) racconta la storia dell'albero. Questa volta però le mele cadono non perché l'albero venga scosso dal cane ma perché semplicemente cadono. Per rendere la dinamicità della storia disegna prima le 10 mele sui rami, ne

Fig. 44

cancella 3 con una “x” e ne disegna 3 a terra. Mentre nel disegnare compie un ragionamento sottrattivo, nella verbalizzazione il numero 10 del totale delle mele viene esplicitato solo alla fine. Dal disegno appare chiaro che il bambino voglia esprimere la complementarità di 7 e 3 nel formare 10 perché tra i rami dell’albero si trova un’undicesima mela che il bambino si accorge di aver disegnato in più ed oscura come a cancellarla dal conteggio.

Davide (fig. 45) e Francesco (fig. 46) ripropongono i birilli. Entrambi in numero di 10. Il primo racconta di farne cadere 8 e lasciarne in piedi 2, mentre il secondo di farne cadere 7 e lasciarne in piedi 3. I due bambini lavorano praticamente assieme e ciò è visibile

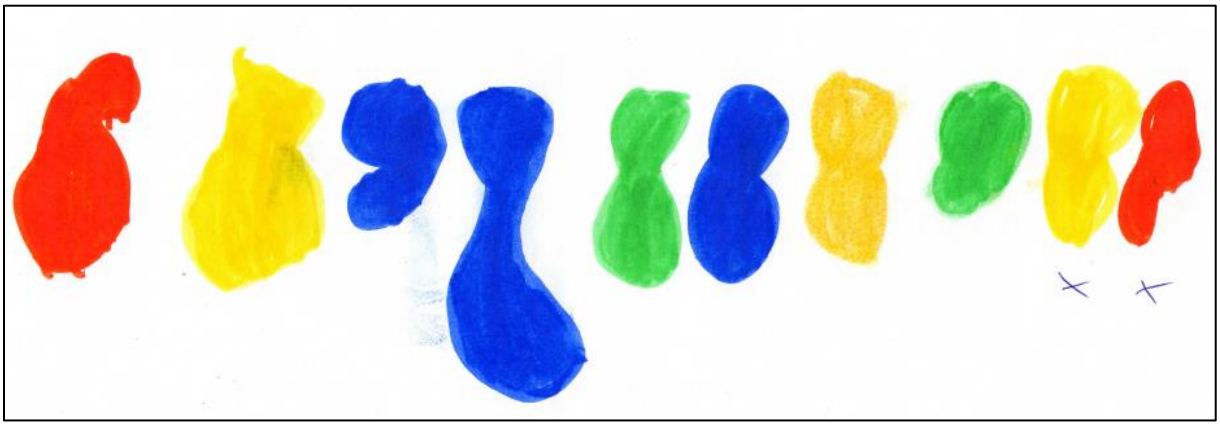


Fig. 45

anche dai disegni molto simili, ma dimostrano consapevolezza e indipendenza nel verbalizzare le proprie narrazioni. Entrambi compiono delle sottrazioni e giustificano il proprio calcolo dicendo che hanno pensato. Questa risposta testimonia sia la conoscenza dell’aspetto cardinale dei numeri sia la sicurezza data dal considerare il conteggio visivo come una dimostrazione valida di aver eseguito il calcolo correttamente.

Fig. 46

Anche Gloria (fig. 47) giustifica il risultato trovato come frutto del proprio pensiero. Compie come i propri compagni un calcolo mentale che trovo riscontro in quel che vede sul proprio disegno. Ripropone la storia della rana con le 12 foglie, ma a differenza di Lisa (fig. 42) e Rebecca (fig. 43) parte del numero totale per narrare il proprio racconto e calcola il numero di 5 foglie che mancano alla rana come resto dell'operazione di 12 meno 7.

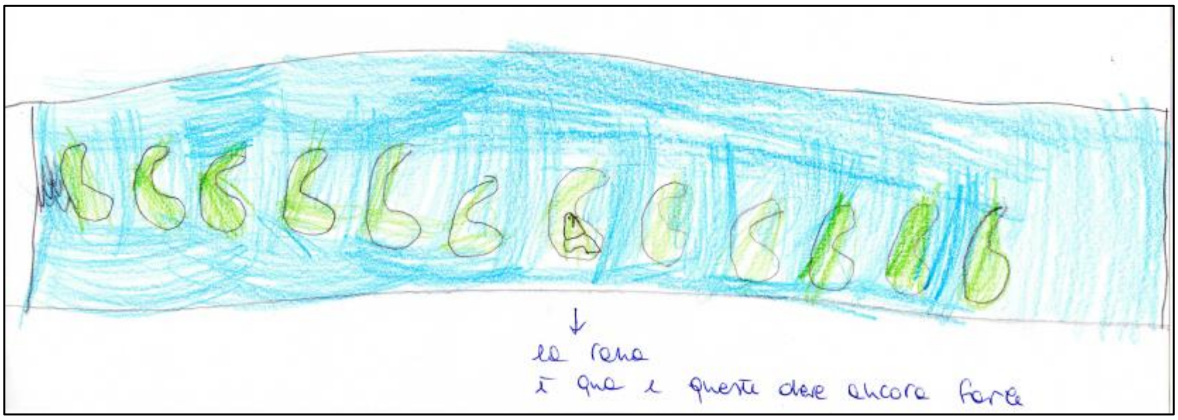


Fig. 47

Durante la verbalizzazione rafforza il concetto indicando quale sia la rana e quali siano le foglie ancora da saltare.

Il disegno di Siria (fig. 48) mostra una discordanza tra verbalizzazione e rappresentazione. La bambina è l'unica che ripropone la storia di Nonna Procione. Descrive molto accuratamente il contesto e cerca di renderne la dinamicità. La nonna, ad esempio, è raffigurata con gli occhiali e gli stessi occhiali sono rappresentati sull'acqua come a mostrare che le sono caduti. Durante la verbalizzazione compie un addizione inversa tra le 7 perle rimaste sulla collana e le 5 cadute, ma se si guarda con attenzione la collana si vede come la bambina avesse inizialmente concepito una diversa suddivisione del numero 12. Il nodo del filo, riconoscibile perché di colore rosso come il filo stesso, separa infatti il numero delle perle totali in 4 e 8.

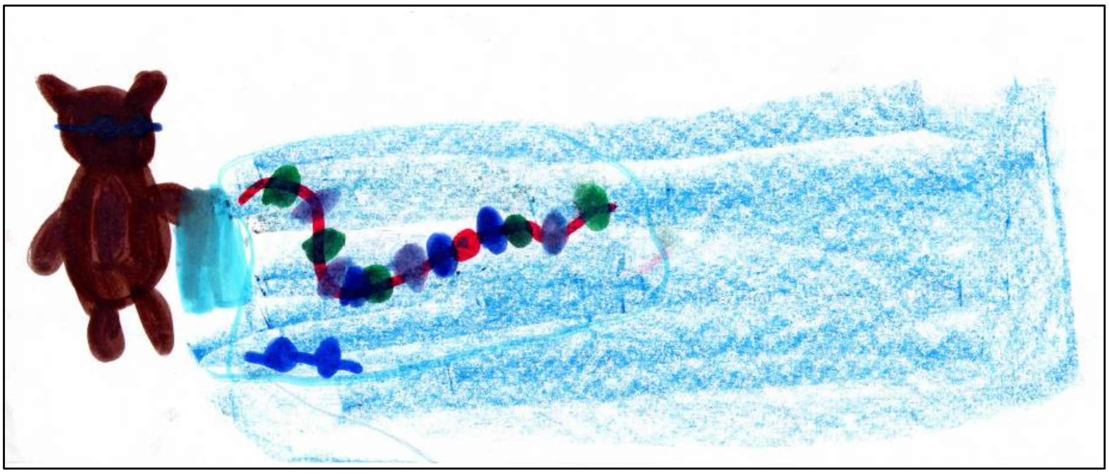


Fig. 48

Potrebbe essere che la bambina inizialmente volesse raccontare la propria storia variando i numeri coinvolti, ma durante la verbalizzazione in seguito o ad una distrazione o ad un'insicurezza abbia fatto riferimento all'esperienza svolta durante l'incontro in classe durante il secondo incontro. È interessante comunque notare che sia nella verbalizzazione che nel disegno il totale corrisponde sempre a 12 segno che la bambina ha compiuto un ragionamento sottrattivo nell'articolazione del proprio racconto.
Tra colori i quali hanno proposto la storia degli uccellini vi è Matteo (fig. 49), il quale nonostante le difficoltà legate al conteggio emerse più volte nel corso degli incontri dà una rielaborazione semplificata ma corretta del racconto.

Fig. 49

Egli rappresenta 2 uccellini gialli e 1 rosso precisando che i gialli sono di più dei rossi. Non dice che i gialli sono uno in più dei rossi, ma con la scelta di questi numeri conferma la sua maggiore abilità di lavoro con i numeri piccoli e di aver interiorizzato la differenza tra i due gruppi come quella di numeri matematici successivi che si ottengono aggiungendo uno al precedente.

8.3 Il gruppo di laboratorio

8.3.1 La rana nello stagno

Fig. 50

Quel che appare chiaro fin da una prima osservazione è che la rappresentazione ha permesso hai bambini di tornare sulla difficoltà emersa durante la discussione tra il numero delle foglie e il numero di salti. Il non dover muovere la rana ha permesso ai bambini di tornare sull'esperienza focalizzandosi sulle foglie. Ognuno di loro sembra aver trovato la

Fig. 51

Fig. 52

propria "soluzione". Il calcolo del numero di foglie mancanti non è stato "immediato": i bambini sono legati al conteggio e al bisogno di indicare le foglie. La maggior parte dei bambini considera le foglie disegnate prima di quella in cui si trova la rana e quest'ultima come saltate e le altre come mancanti e rappresenta 12 foglie (fig. 51). Alcuni, benché la riconoscano nel totale, non la conteggiano nella partizione del numero (fig. 50). Martina (fig. 52) non considera la foglia su cui si posa la rana e disegna un numero di foglie diverso da quelle dell'esperienza in classe. Inoltre nel suo contare non va da sinistra verso destra, ma da destra verso sinistra.

Un altro elemento ben visibile dal disegno di Martina è che sulla destra non è presente l'erba a bordo stagno. Sembra quindi che Martina consideri la foglia su cui la rana si trova non una foglia già saltata, ma un secondo punto di partenza. Nel guardare all'intero numero di foglie però la conteggia e determina il numero 23. Nel riprodurre un numero di foglie non corrispondenti alla realtà, crea una sua operazione in cui determina il numero di 17 foglie mancanti al punto di arrivo. È legata al conteggio e ha bisogno continuamente di toccare e contare. Il muoversi da destra a sinistra non è da vedersi come un errore, ma al come l'esperienza si è svolta. Il cartellone-gioco era infatti disposto a terra e i bambini vi erano seduti intorno. La rana è stata mossa indistintamente da una parte all'altra senza denominare una come la riva di partenza e l'altra come la riva di arrivo. Inoltre i

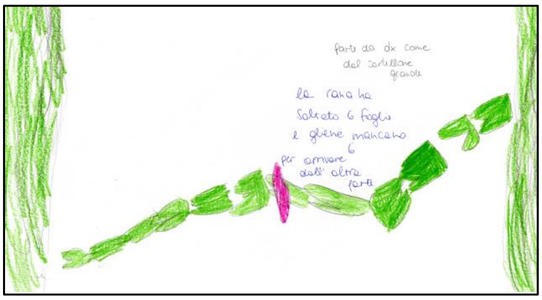


Fig. 53

Fig. 54

bambini che erano di fronte il ricercatore l'hanno vista muoversi appunto da destra verso sinistra. Questa particolarità viene infatti ritrovata in altri disegni (figg. 53 e 54).

Nel disegno di Denise (fig. 55), la bambina disegna inizialmente 20 foglie. Nel verbalizzare né cancella inizialmente 5, poi 2 e poi altre fino ad arrivare a 12. In questo caso la bambina non personalizza la storia matematica, ma cerca di dare una rappresentazione di quella che ha udito in classe. Nel determinare però il numero di foglie da riprodurre procede per tentativi: ne rappresenta prima tante e poi man mano le elimina, sempre in numero minore, non pensando al numero di foglie in sovrannumero rispetto a 12, ma fino a quando non conta 12.

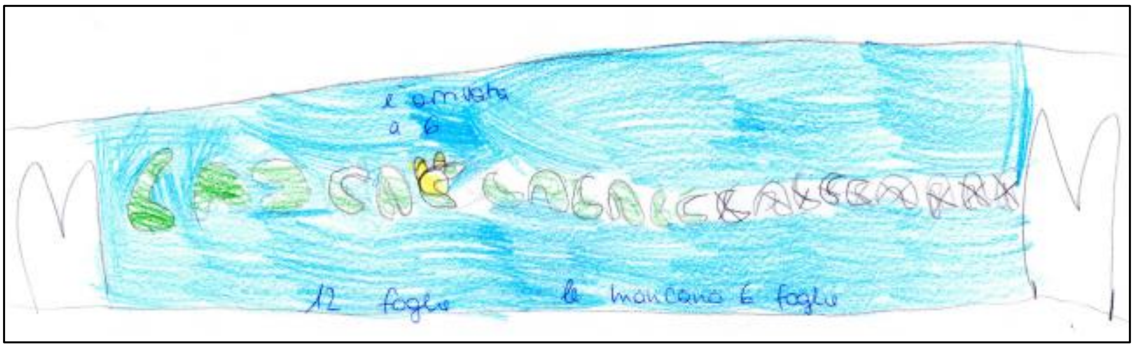


Fig. 55

Se da un lato la rappresentazione ha permesso alla maggior parte dei bambini di superare la confusione legata al binomio foglia-salto dall'altro emerge come nessuno di loro abbia "calcolato": tutti i bambini hanno contato le foglie e svolto l'operazione come un'addizione inversa che ha portato dall'altra parte della riva. In questo primo incontro non vi è consapevolezza dell'operazione di sottrazione. Ciò è confermato dall'incapacità dimostrata da molti bambini nel personalizzare la storia e nella confusione legata al muoversi da destra verso sinistra o da sinistra verso. I bambini hanno cercato semplicemente di riprodurre l'esperienza e hanno percepito le foglie come una sorta di linea dei numeri su cui poggiarsi.

8.3.2 La collana di Nonna Procione

Questo secondo incontro ripropone uno schema matematico analogo a quello del primo, ma la scelta dei materiali ha portato a svincolarsi alla linea dei numeri. Tutti i bambini danno una rappresentazione fedele dell'esperienza: sono infatti coinvolte 12 perle divise in 7 perle rimaste sul filo e 5 cadute a terra. Quel che risulta particolarmente interessante è come i bambini danno rappresentazione dell'operazione.

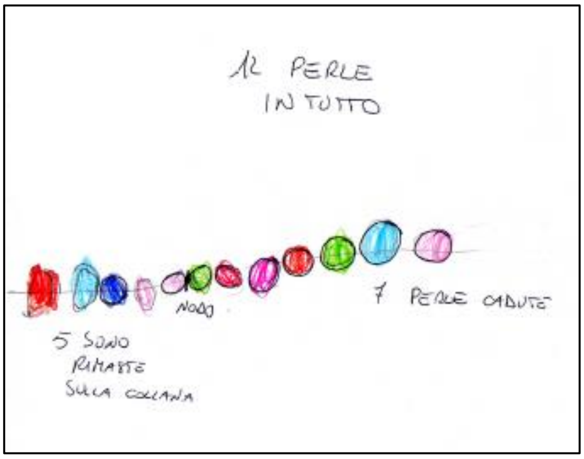


Fig. 56

Massimiliano (fig. 56) non conta le perle: riconosce, probabilmente attraverso il subitizing, il numero di 5 perle rimaste su e di 7 perle cadute e dice che in tutto le perle sono 12. In quest'ultimo caso probabilmente va a memoria del totale. Riproduce il piccolo nodo che ben separa il numero di perle cadute da quelle rimaste sul filo perché le rappresenta tutte assieme e non è legato ai colori: alcuni corrispondono altri vengono ripetuti.

Izabela (fig. 58) fornisce una rappresentazione simile a quella di Massimiliano perché (a) riproduce tutte le perle assieme sul filo, (b) le distingue in cadute e rimaste su e (c) dice che sono 12 in tutto

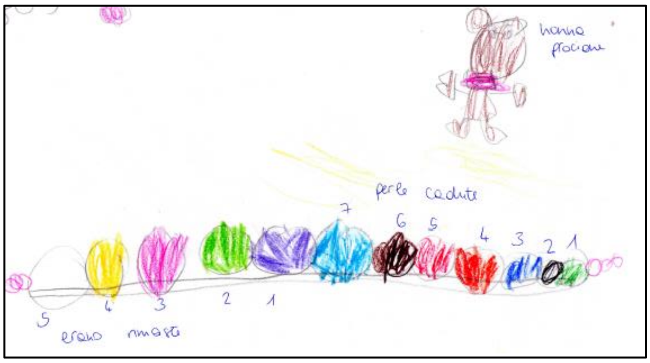


Fig. 57

Fig. 58

però per dimostrare il numero le conta. Individua nel nodo il punto di inizio del conteggio quindi riconosce la cardinalità e dà in modo personale il senso dell'ordinalità.

Tosca (fig. 57) descrive in modo simile ma nel contare individua il punto di inizio sempre a partire dalla destra e si muove verso sinistra.

Elisa (fig. 59) invece procede sempre da sinistra verso destra il conteggio e trova nella corrispondenza cromatica la conferma del numero.

Nel disegno di Tosca (fig. 57) compare in disparte anche il pupazzo protagonista della storia. Due bambine danno due rappresentazioni analoghe a quelle di Massimiliano (fig. 56) e Tosca (fig. 57), ma danno al pupazzo un ruolo centrale (figg. 60 e 61).

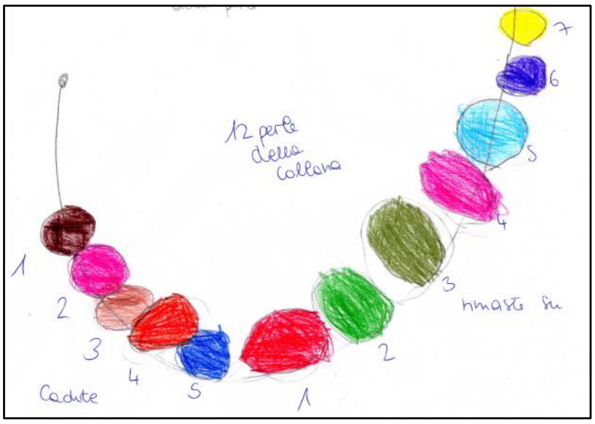


Fig. 59

Fig. 60

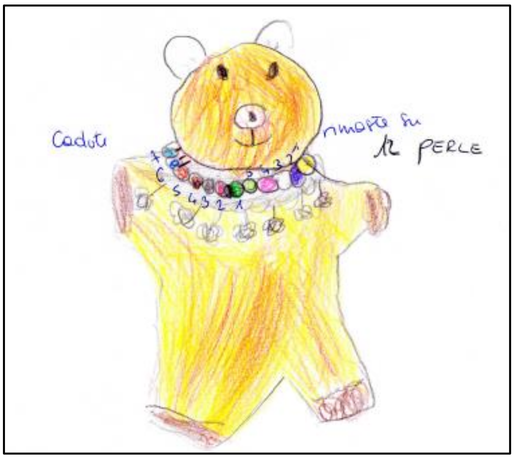


Fig. 61

La loro rappresentazione è più narrativa e contestuale. Notare che Mariam Sara (fig. 60) rappresenta anche il cesto dei panni sporchi con il quale Nonna Procione si era diretta al fiume.

Fig. 62

Angela e Omar a differenza dei compagni evidenziano una delle due componenti del numero. Mentre per Angela (fig. 62) le 5 perle rappresentate a parte sono l'espressione di una difficoltà nel riconoscerle nel totale e favoriscono il subitizing, in Omar (fig. 63) la rappresentazione assume l'aspetto di una narrazione in due fasi: la collana con tutte le perle e le perle cadute.

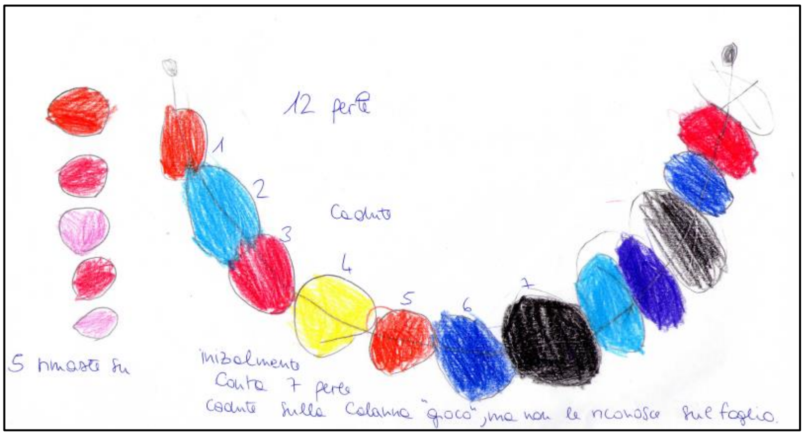


Fig. 63

In conclusione da queste rappresentazioni appare ancora un forte legame al racconto discusso in classe, soprattutto nei numeri coinvolti, ma comincia a delinearsi il riconoscimento della scomposizione del numero dimostrato attraverso o il conteggio diretto o il subitizing.

8.3.3 I BIRILLI

I birilli sono stati introdotti come gioco che ha permesso ai bambini in qualche modo di essere loro stessi i protagonisti della storia matematica. Divisi in due squadre i bambini hanno tenuto i vari punteggi su due fogli. E' interessante notare le due diverse tipologie di annotazione. Mentre nella squadra dei gialli (fig. 64), tranne Izabella, tutti hanno annotato il numero di birilli caduti tramite la simbologia numerica, in quella dei blu tutti, tranne Elisa, hanno fatto corrispondere ad ogni

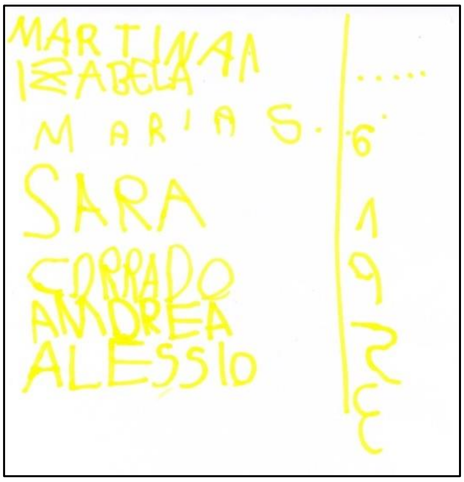


Fig. 64

Fig. 65

birillo caduto un disegno più o meno stilizzato (fig. 65).

Tutti i bambini hanno rappresentato se stessi: sono loro i protagonisti della storia. Nella rappresentazione dei birilli c'è chi distingue in modo visivamente netto i birilli abbattuti da quelli rimasti in piedi scomponendo il numero di 9 birilli totali in più di due parti (fig. 66) e chi invece dà una rappresentazione più fedele della realtà disegnando i birilli abbattuti tra quelli in piedi (fig. 67). Alessio (fig. 68) divide il numero 9 in tre parti da 3. Sono l'altezza dei birilli rappresentati e la verbalizzazione a far capire quali sono quelli abbattuti e quelli in piedi.

Fig. 66

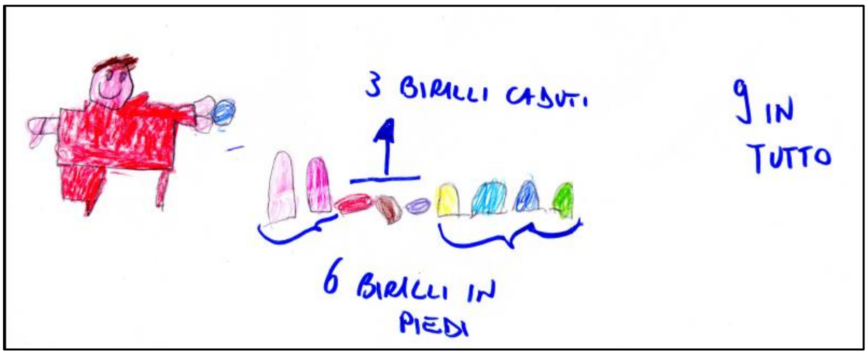


Fig. 67

Interessanti sono i casi di Elisa e Corrado. Elisa (figg. 69 e 70) nel momento del gioco abbatte solo 1 birillo mentre nel disegno separa il numero 9 in 3 e 6. Inizialmente disegna 3 birilli a terra e 6 in piedi, poi gira il foglio e disegna l'inverso: 6 a terra e 3 in piedi.

Fig. 68

Riferirendosi al tabello del risultato, riconosce il proprio errore e cambia. Nel rappresentare la bambina concettualizza un' importante nozioni: 9 è scomponibile in 6 e 3.

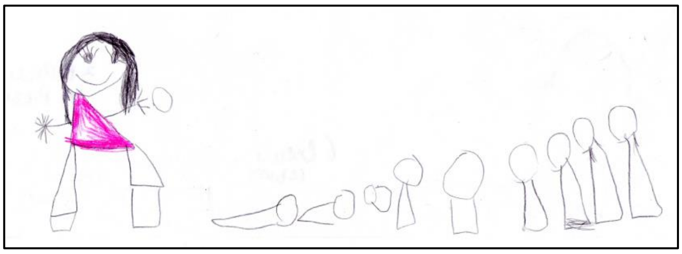


Fig. 69

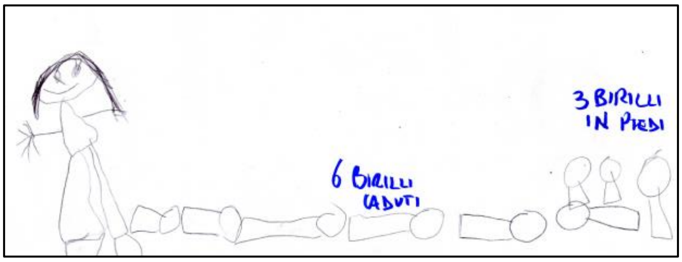


Fig. 70

Corrado (fig. 71) invece abbatte tutti e 9 i birilli, ma nella sua rappresentazione li divide in due parti: 4 blu e 5 rossi. Nel cercare una motivazione, poiché nella verbalizzazione non fa accenno a questa scelta, possono esserci due ragioni. Una prima legata al subitizing e all'immediatezza del riconoscere il numero 9 come composizione di 4 e 5 ed una seconda legata all'aver lavorato in gruppo ed aver trovato in un compagno, Andrea

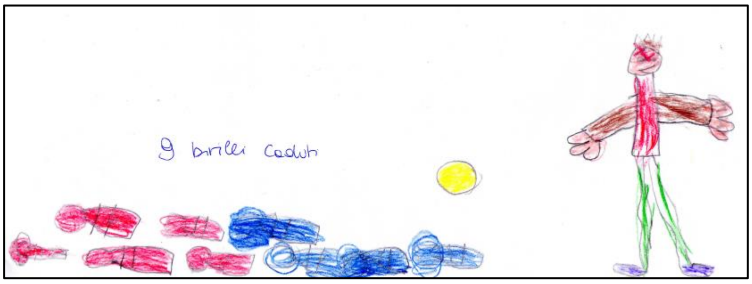


Fig. 71

(fig. 72) questa stessa suddivisione. Tuttavia, anche se vi fosse stato un confronto con Andrea, la rappresentazione di Corrado dimostra comunque una rielaborazione da parte del bambino. Nel disegno di Andrea vi è una discrepanza tra verbalizzazione e rappresentazione ed è presente un birillo con il corpo rosso e la testa blu.

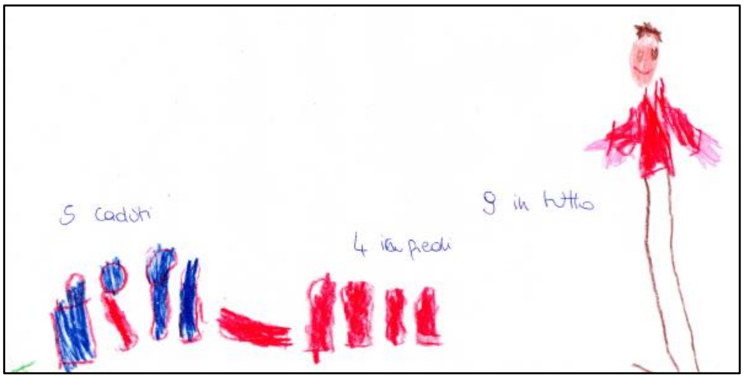


Fig. 72

8.3.4 IL CANE E L'ALBERO DI MELE

Durante il quarto incontro i bambini si sono ritrovati a trovare la soluzione ad una storia che nell'impostazione riprendeva l'impostazione della sottrazione classica. Dai disegni emerge che si possono delineare tre schemi risolutivi.

Nel primo (fig. 73) i bambini riconoscono le 7 mele sull'albero e le 3 a terra, dopo che questo numero era stato determinato durante la discussione, e per dimostrare la correttezza della loro rappresentazione si avvalgono del subitizing.

Fig. 73

Fig. 74

Nel secondo (fig. 74) 7 e 3 vengono ancora distinti, ma come dimostrazione i bambini contano le 3 mele a terra e 7 rimaste sull'albero.

Nell'ultimo (fig, 75) vi è un piccolo salto concettuale: 7 e 3 non vengono distinti nella verbalizzazione: i bambini continuano a contare da 7 a 10 dimostrando come le mele cadute a terra siano le 3 che prima si trovavano tra le foglie.

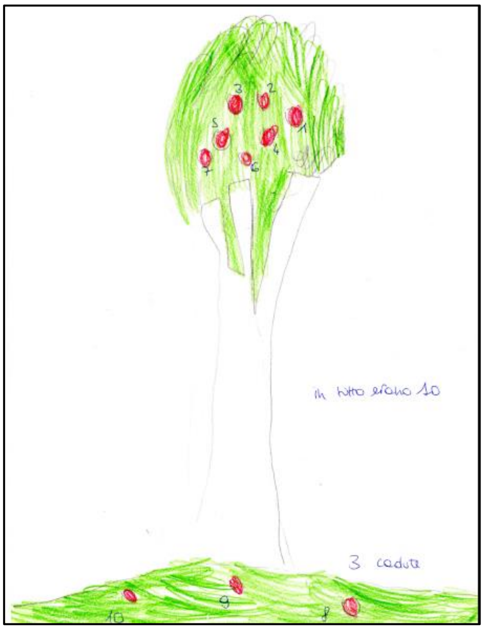


Fig. 75

8.3.5 LA GABBIA CON GLI UCCELLINI

Nell'incontro della gabbia degli uccellini i bambini durante la discussione avevano dimostrato una certa dimestichezza nel confronto dei due gruppi colorati. Il concetto di differenza, forse favorito anche dai molteplici usi che di questa parola si fanno nei contesti quotidiani, è stato facilmente interpretato e nessuno dei disegni evidenzia particolari dinamiche di concettualizzazione. E' da notare che alcuni bambini si sono limitati a riprodurre gli uccellini mentre altri hanno disegnato anche gli altri particolare della gabbia come le mangiatoie e le

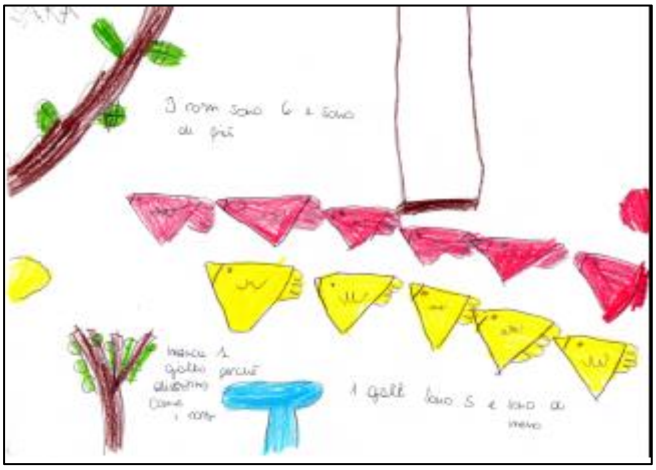


Fig. 76

ciotole con l'acqua. Rispetto ai canarini sono individuabili due generi di rappresentazione.

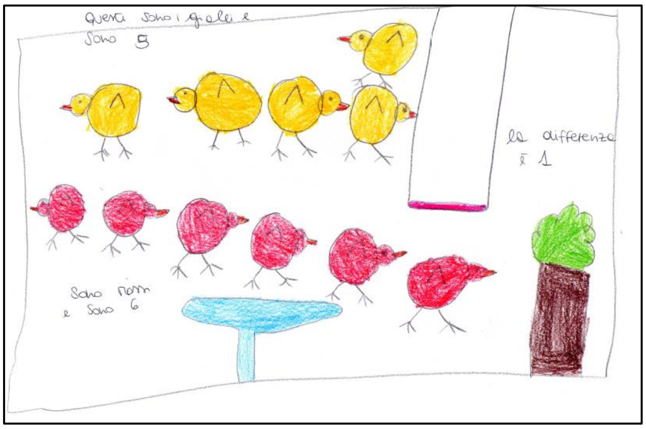


Fig. 77

Nella prima (fig. 76) i bambini, come avvenuto durante la discussione, allineano i canarini e rendono bene visibile come la differenza tra rossi e gialli sia 1. Non tutti però riescono ad avere la stessa precisione di Sara (fig. 76). Si guardi ad esempio il disegno di Angelica (fig. 77) in cui la bambina mette uno degli uccellini gialli sopra creando una seconda fila.

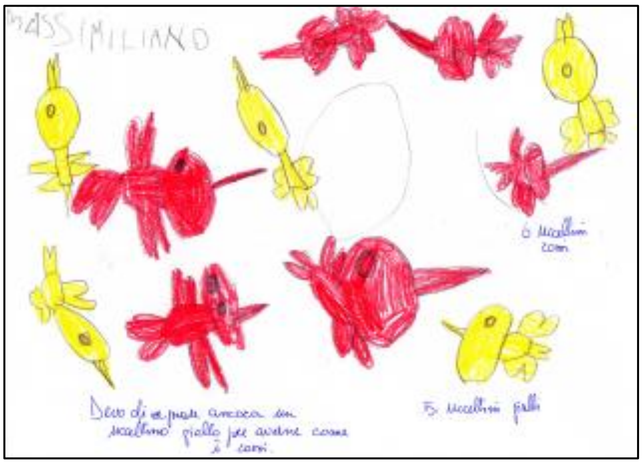


Fig. 78

La seconda modalità prevalente di rappresentazione è quella in cui i bambini hanno disegnato i canarini in ordine sparso e tramite e i colori e la verbalizzazione hanno dimostrato il valore della differenza (fig. 78).

Due disegni appaiono degni di nota. Nel primo, quello di Martina (fig. 79) la bambina introduce anche la mamma che non assume colore e precisa che non va conteggiata. La bambina quindi personalizza la storia non modificando i numeri, ma introducendo un personaggio che la rende "più familiare".

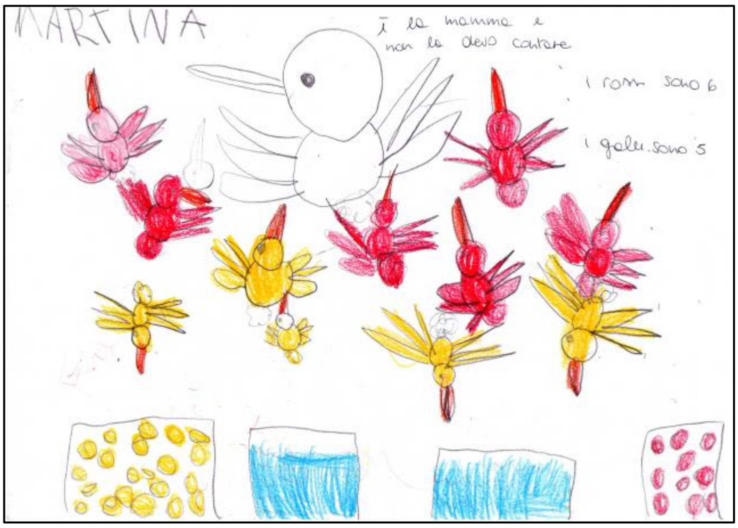


Fig. 79

Corrado invece (fig. 80) nel proprio disegno ha un uccellino che è mezzo rosso mazzo giallo. Si vede però che aveva iniziato con il rosso, si è accorto dell'errore e ha "ripassato" con il giallo. È interessante notare come sono disposti gli uccellini: due file cinque e un undicesimo posto sopra. Nella sua rappresentazione Corrado ha composto il 6

Fig. 80

come 5 e 1 formalizzando non solo la differenza tra canarini gialli e rossi, ma anche il numero sei come unione di due parti. Una volta però colorata la prima fila di uccellini da 5 ha ritenuto di doverne colorare un altro per ottenere i 6 totali di colore rosso. In un secondo momento ha visto di aver già colorato "il sesto" e ho corretto con il giallo.

8.3.6 L'ULTIMO INCONTRO

Nell'ultimo incontro i bambini erano liberi di raccontare la loro storia matematica. Per aiutarli si è scelto di introdurre l'incontro con un veloce ripasso di tutte le storie narrate e disegnate negli incontri precedenti. Questo ha sicuramente influenzato i bambini, che per la maggior parte hanno riprodotto quanto già visto. Vi sono stati però alcuni bambini che hanno personalizzato la loro storia.

Martina (fig. 81) ad esempio racconta di una rana che doveva passare da una parte

Fig. 81

all'altra dello stagno saltando 8 foglie. La rana ne ha già saltate 2 e deve superarne altre 6. Quello che è interessante notare di Martina è che la bambina anche durante il primo incontro (fig. 52) aveva personalizzato il numero di foglie, ma mentre in quel caso vi era stato probabilmente un errore di riproduzione, confermato dal fatto che la bambina aveva conteggiato nel totale delle foglie quella che su cui si trovava la rana, ma non nella partizione del numero, ora è stata una scelta. La bambina non solo varia il numero di foglie, ma considera anche la foglia su cui si posa la rana come saltata.

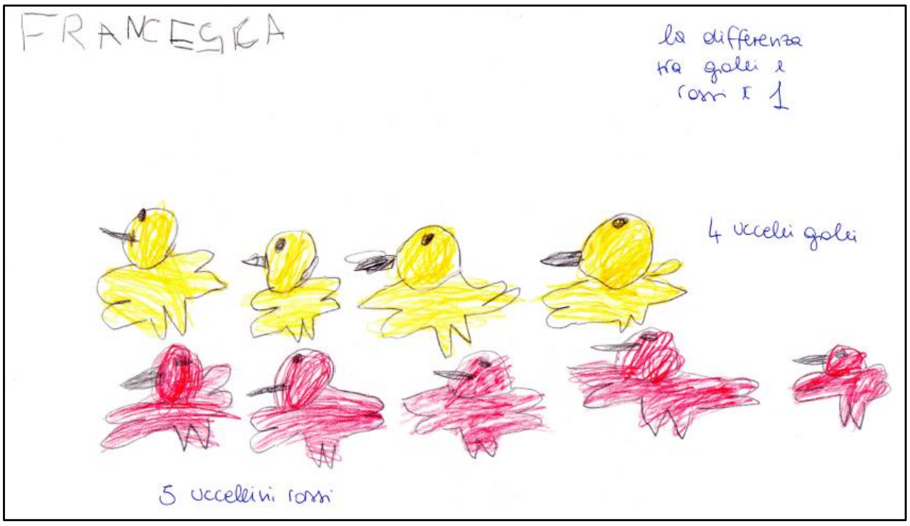


Fig. 82

Anche Francesca (fig. 82) fa una personalizzazione simile a quella di Martina perché varia il numero di uccellini presenti nella gabbia: 4 gialli e 5 rossi. Mantiene la differenza di uno tra i due gruppi.

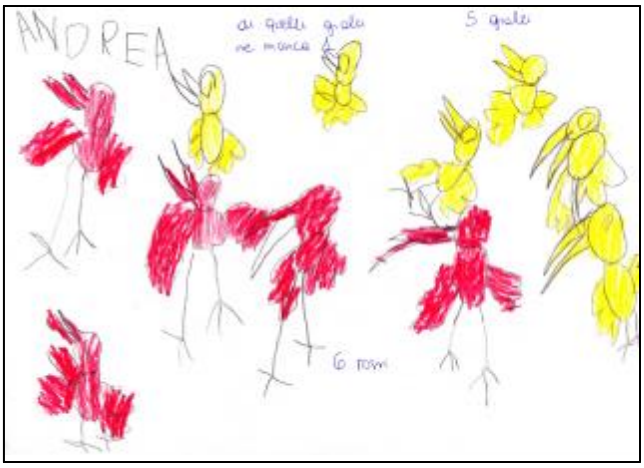


Fig. 83

Andrea (fig. 83) vuole proporre una variazione diversa invertendo la numerosità dei due gruppi: 6 gialli e 5 rossi. Nel verbalizzare il suo disegno si affida al subitizing visivo e attribuisce il numero 6 ai 5 uccellini rossi e il 5 ai 6 uccellini gialli dicendo che di quelli gialli ne manca uno.

Fig. 84

Anche Sara (fig. 84) cambia il numero delle perle della collana di Nonna Procione, ma non verbalizza il totale delle perle della collana.

Quel che si può osservare in generale è che i bambini hanno acquisito una certa sicurezza nel raccontare anche la componente numerica delle loro storie. Nessuno di loro infatti conta più indicando con le dita, ma si affida al conteggio visivo. Questo tuttavia porta a due importanti conseguenze: (a) non sempre la verbalizzazione corrisponde alla rappresentazione e (b) le quantità superiori a 7 non vengono determinate in modo immediato. Nel primo caso la spiegazione può essere ritrovata nella ritenzione della conoscenza: i bambini hanno imparato ad elaborare strategie di conteggio nuove, a leggere con gli occhi, a riconoscere le quantità dal punto di vista cardinale, ma in un compito complesso come quello del racconto della storia possono fare confusione tra quanto pensato inizialmente e quanto poi rappresentato. Nel secondo caso invece si può trovare risposta nella difficoltà legata al conteggio visivo di numeri superiori a 5 e soprattutto all'inesperienza dei bambini a gestire quantità grandi in raggruppamenti più piccoli che ne permettano il riconoscimento immediato.

La storia di Mariam Sara (fig. 85) rappresenta un esemplare unico. La bambina nel corso degli incontri ha sempre mostrato una spiccata fantasia che ha giocato un doppio ruolo nel corso di discussioni e rappresentazioni. Da un lato l'ha portata a trovare soluzioni creative alle varie situazioni e a superare abilmente gli scogli cognitivi, dall'altro se non guidata o invitata a tornare sul compito tendeva a divagare aggiungendo o narrando elementi non sempre pertinenti. Nel disegno libero questa sua fantasia l'ha portata a narrare una storia generata dall'unione di più storie affrontate in classe.

Nel suo racconto c'è un albero con 5 mele di cui un cane ne fa cadere 3 lasciandone tra le foglie solo 2. Come si vede però tra i rami di mele ne sono disegnate 3 perché una è la mela che Nonna Procione, disegnata in un primo momento per errore, vuole mangiarsi. Altro particolare è il tratto di suolo di colore azzurro che rappresenta un corso d'acqua che il cane ha dovuto saltare per raggiungere l'albero. La verbalizzazione[1] conferma la fantasia della bambina che, anche se in modo non lineare e su risposta alle domande dell'adulto, è riuscita però a dare unicità alla propria storia e a trovare una corretta giustificazione alla quantità di mele, che di fatto rappresentano la componente numerica e matematica.

[1] Ndr: la frase trascritta al centro del foglio è errata.

Fig. 85

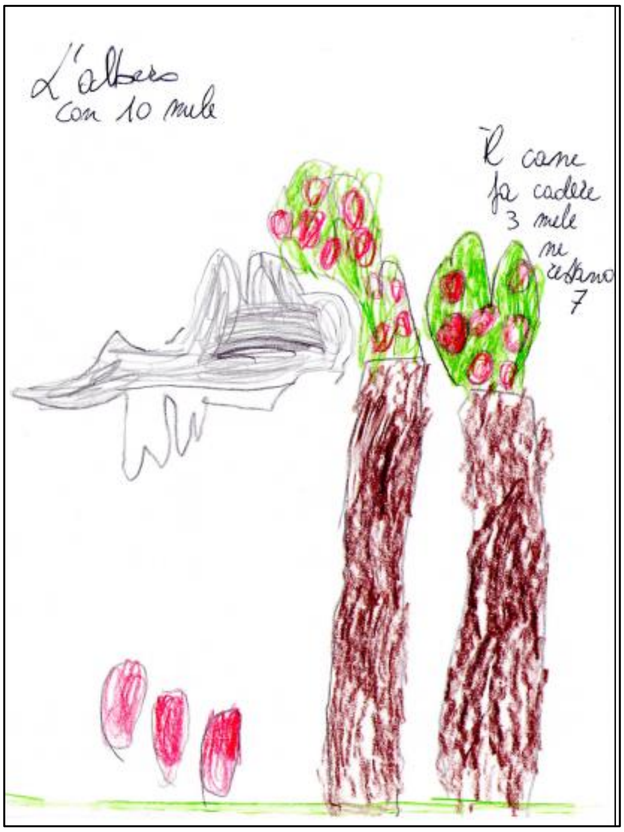


Fig. 86

Un elemento che è presente in questi disegni e che li differenzia da quelli precedenti è la dinamicità. Probabilmente guidati dai materiali, presenti in toto nell'aula, i bambini hanno raccontato storie che possiamo definire in sequenza. Prendendo ad esempio il disegno di Massimiliano (fig. 86) si vede come il bambino abbia rappresentato due alberi che in realtà sono lo stesso. Vicino all'albero con 10 mele si trova il cane che ne fa cadere 3. Sotto l'albero sono presenti quindi 3 mele e vicino si trova un albero con 7 mele appese.

Fig. 87

Izabela (fig. 87) rende la stessa dinamicità rappresentando un decimo birillo che si trova un po' più indietro rispetto agl'altri ed è toccato dalla palla gialla.
Inoltre rappresenta tutti i birilli in piedi e ne cancella 5 con una "x" come a confermare che questi prima erano in piedi, poi sono caduti e quindi ora non vanno conteggiati tra i rimasti.

8.4 Linee conclusive comuni

Attraverso le rappresentazioni i bambini sono diventati i nuovi narratori delle storie matematiche. Mentre durante la discussione i bambini avevano fatto riferimento alla propria esperienza o utilizzato espressioni che mettevano in evidenza una riflessione a livello personale, attraverso i disegni e le relative verbalizzazioni si percepisce un certo grado di oggettivizzazione. Le storie raccontante fanno emergere come la rielaborazione dei costrutti matematici affrontati risponda ai criteri di coesione e coerenza narrativa. Inoltre la descrizione orale nonché l'accuratezza e la ricchezza dei particolari descrittivi a livello grafico rende possibile distinguere stili narrativi più concisi da stili maggiormente argomentativi. Procedendo con la descrizione dei singoli incontri da parte dei due gruppi si notano differenze per quanto concerne l'organizzazione a livello spaziale del disegno, legate soprattutto alla diversa articolazione delle discussioni, e analogie nella concettualizzazione dei contenuti matematici.
Nell'incontro della rana da parte di entrambi i gruppi emergono anche a livello grafico le difficoltà che erano state di ostacolo al calcolo del risultato. Alcuni bambini nel verbalizzare fanno muovere la rana da destra verso sinistra o non considerano la foglia su cui la rana è posata. Mentre nel gruppo di sezione vi è però una difficoltà legata soprattutto al distinguere le foglie precedenti da quelle successive nel salto, in quello di laboratorio questo non compare. Alcuni bambini di

questo secondo gruppo però disegnano molte più foglie delle 12 della storia e o riformulano il racconto con il nuovo numero o cancellano quelle che considerano eccedenti. Dal punto di vista matematico nel gruppo di laboratorio i bambini principalmente, come emerso dalla discussione, contano le foglie senza cogliere nessi tra il numero di foglie totali ed una sua scomposizione in numero di foglie già saltate e numero di foglie da saltare, che è invece ben espresso nel gruppo di sezione.

Nell'incontro di Nonna Procione i modelli che è possibile identificare sono (a) la rappresentazione di 5 perle sul filo e 7 perle a terra e (b) tutte le perle disegnate sul filo ma contate come 5 e 7. Nel primo caso o (a-1) le perle vengono contate o (a-2) viene detta la quantità attraverso il subitizing. Nel secondo caso il totale delle 12 perle viene calcolato (b-1) ricontando tutte le perle o (b-2) dicendo che il tutto sono 12. È interessante notare che nel gruppo di laboratorio nessun bambino rappresenta le perle secondo il primo modello. Viene però introdotto un terzo modello in cui (c) vengono rappresentate sul filo le 12 perle e a parte viene riprodotto uno dei due gruppi di perle. Solo nel gruppo di sezione alcuni bambini rappresentano più perle delle 12 del racconto e nelle verbalizzazione cancellano le eccedenti. Da parte di tutti i bambini il 12 viene ottenuto scomposizione in due parti di 7 e 5.

Nell'incontro dei birilli da parte di tutti i bambini viene evidenziato il ruolo centrale del protagonista del racconto: tutti rappresentano se stessi. Questo elemento sottolinea il loro coinvolgimento in prima persona, che non compare per tutti i protagonisti delle storie. Se si guarda infatti alle rappresentazione delle storie di Nonna Procione o del cane e l'albero di mele i due protagonisti, il procione ed il cane, non sono presenti infatti in tutte le riproduzioni, ma solo in alcune. Dal punto di vista della rielaborazione matematica tutti i bambini non fanno riferimento al totale dei birilli se non dicendo alla fine che: "In tutto erano 9. I bambini intendono quindi il 9 secondo la sua scomposizione in due parti: il numero dei birilli caduti e quello dei birilli in piedi. Va fatta una distinzione da parte dei due gruppi. Nel gruppo di sezione i bambini utilizzano una simbologia che contempla il disegno dei birilli e delle postazioni circolari. Alcuni addirittura distinguono i birilli caduti da quelli rimasti in piedi utilizzando delle linee rispettivamente orizzontali o verticali proprio sopra i cerchi delle postazioni. Lo spazio dei birilli è delimitato all'interno di un rettangolo. Nel gruppo di laboratorio invece i birilli caduti vengono disegnati o con

un'altezza inferiore o distesi a terra rispetto a quelli in piedi e i birilli vengono disposti per lo più in linea.
L'incontro dell'albero di mele mostra tre modelli. (a) Nel primo i bambini dicono che ci sono 3 mele a terra, 7 sull'albero e 10 in tutto. (b) Nel secondo contano le 3 a terra e le 7 sull'albero separatamente dicendo che il tutto sono 10 e (c) nel terzo contano le mele a terra e quelle sull'albero in modo continuano evidenziando il totale di 10. Nella verbalizzazione emerge però la scomposizione del 10 in 7 e 3 avvengano o secondo un modello additivo o secondo un modello sottrattivo in cui o il 7 o il 3 rappresentano le mele rimaste.
Nell'incontro de la gabbia con gli uccellini il come si è articolata la discussione e soprattutto come i bambini sono intervenuti sui materiali ha influenzato poi la rappresentazione. Dal punto di vista grafico è possibile distinguere (a) coloro i quali rappresentano gli uccellini in modo disordinato e identificano i due gruppi di uccellini solo attraverso i colori da quelli che (b) li organizzano in righe. In questo caso mentre il gruppo di sezione (b-1), come avvenuto in classe, pone le due righe distanti tra loro, il gruppo di laboratorio (b-2) le disegna una sotto l'altra evidenziando l'uccellino di differenza. Dal punto di vista dei numeri quasi tutti i bambini decretano il 6 e il 5 attraverso il subitizing e nessuno fa riferimento al totale. Il dato che viene evidenziato è quello della differenza che viene stabilita o individuando "l'uno" o dicendo che vi è un uccellino rosso in più, o giallo in meno, o semplicemente notando che un gruppo è più o meno numeroso dell'altro.
Guardando ai disegni dal primo all'ultimo incontro si nota un'evoluzione nell'organizzazione dei racconti: da una riproduzione il quanto più fedele ai materiali si passa ad una che evidenzia la lettura matematica del contesto descritto e sottolinea la rielaborazione personale. A questo si accompagna una maggiore padronanza linguistica espressa nella verbalizzazione. La rappresentazione porta i bambini a ritornare su quanto fatto e discusso, fissandolo e superando molti elementi di difficoltà. L'ultimo incontro inoltre testimonia come i bambini abbiano raggiunto un certo grado di concettualizzazione. I disegni dell'incontro riepilogativo presentano infatti storie che appaiono tendenzialmente diverse da quelle raccontate in precedenza. I contesti narrativi e i costrutti matematici sottesi rimangono gli stessi, ma i bambini variano (a) i valori numerici coinvolti o (b) alcune caratteristiche narrative. I numeri coinvolti vengono scomposti in modo corretto e i particolari che descrivono i protagonisti e quel che accade loro lasciano spazio alla

fantasia dei bambini. Un elemento che appare soprattutto nel gruppo di laboratorio è il tentativo di riprodurre la dinamicità delle storie rappresentando ad esempio l'albero prima e dopo o una storia composita.

Infine dal punto di vista matematico i bambini passano gradatamente dal conteggio, fortemente legato all'aspetto ordinale del numero, all'organizzare una quantità secondo due o più sottoinsiemi complementari, appropriandosi sempre più anche dell'aspetto cardinale. In linea con questo emerge come dai primi incontri l'addizione inversa, che esprime con un linguaggio simbolico il muoversi sulla linea dei numeri da una valore verso un altro, sia la strategia più utilizzata per giungere al calcolo del risultato. Negli ultimi incontri invece i bambini esprimono il risultato come ciò che rimane, o manca, o quello che rende due quantità diverse, o uguali. Emerge quindi una prima consapevolezza della struttura sottrattiva come "nuova" lettura matematica che concettualizza matematicamente o, in altre parole, dà un significato matematico, ad una certa sequenzialità narrativa.

9. CONSIDERAZIONI FINALI

9.1 LE INSEGNANTI

Al termine dell'intervento didattico le tre insegnanti sono state nuovamente intervistate secondo la stessa traccia e le stesse modalità utilizzate durante il primo colloquio. Quel che ne è emerso è un generale entusiasmo riguardante l'interesse dei bambini per le attività proposte sottolineato dall'insegnante che vi aveva assistito in presenza, identificato dalle colleghe come una trepida attesa da parte dei bambini e una viva curiosità da parte delle stesse insegnanti. Tutte hanno riflettuto sul come sia possibile proporre ai bambini attività inerenti i concetti matematici, anche molto specifici e apparentemente appartenenti solo ai livelli scolastici superiori, anche alla scuola dell'infanzia. Hanno evidenziato il bisogno di dotare gli insegnanti di scuola dell'infanzia di strumenti adeguati per la trattazione della disciplina. In questo senso è emerso però come documentazione e valutazione non possano essere legate ad attività sporadiche, ma debbano essere relative e contestualizzate all'interno di un percorso. Tale percorso può essere destinato anche a bambini di tre o quattro anni negli adeguati termini concettuali e didattici. Condizione fondamentale è però il lavoro per età omogenee all'interno di un contesto laboratoriale o comunque specifico. La scelta dei materiali ha evidenziato da un lato come sia possibile fare matematica partendo da storie semplici, ma dall'altro l'esigenza dell'essere formati dal punto di vista disciplinare per dare una forma alla spontaneità. Le insegnanti non solo si convinte del come la competenza matematica possa essere guidata con percorsi dedicati fin dalla scuola dell'infanzia, ma hanno visto come l'aver fatto ragionare i bambini sul significato abbia portato a superare alcune difficoltà che erano solite rilevare. Il percorso si è svolto in contemporanea alle consuete attività in vista della scuola primaria. Sia nel gruppo che aveva avuto precedenti esperienze nell'ambito logico-matematico sia in quello che vi era digiuno, le insegnanti hanno rilevato un ragionamento più articolato e un maggior numero di riflessioni numeriche sulla realtà quotidiana (es: erano i bambini stessi a rilevare la mancanza di un qualche numero di oggetti o ad anticipare l'insegnante facendo notare corrispondenze e quantità). Rimane difficile la discriminazione quantitativa, ma sono state sviluppate strategie che permettono di calcolarla. Anche se i concetti di differenza e resto rimangono di difficile comprensione, il togliere si è consolidato come operazione che i bambini eseguivano con correttezza. Inoltre hanno notato una maggiore padronanza linguistica che ha portato i bambini a spiegare anche concetti e simboli di cui conoscevano il significato, ma non il nome (es: il minore come freccia senza gamba). Da ultimo l'insegnante che ha partecipato agli incontri ha sottolineato come il tipo di approccio narrativo (a) si ponga in linea con le modalità di insegnamento prevalentemente presenti alla scuola dell'infanzia, (b) risulti semplice, accattivante per i bambini ed efficace, (c) non risulti estraneo alla matematica, ma al contrario ne faciliti l'apprendimento e, da ultimo, (d) la modalità di verifica e concettualizzazione non debbano essere necessariamente vincolate ad un materiale strutturato o standardizzato.

9.2 I BAMBINI

La conversazione conclusiva è stata condotta al termine dell'intervento didattico con i due gruppi di bambini separatamente. Dato il basso numero dei bambini presenti il gruppo di laboratorio non è stato suddiviso in due sottogruppi, ma ha partecipato in un'unica trance. La chiacchierata si è articolata secondo la stessa traccia e le stesse modalità utilizzate durante il pre-test. Non sono emerse grandi differenze; al contrario è possibile indicare numerosi punti in comune tra i due gruppi. Nel caso del gruppo di laboratorio spontaneamente i bambini hanno iniziato a ricordare quanto fatto negli incontri precedenti, senza che vi fosse un'esplicita richiesta da parte dell'insegnante-ricercatore.

> Denise: "I numeri sono per contare."
> Andrea: "Anche per imparare."
> Insegnante: "Per imparare cosa?"
> An: "A contare
> D.: "Anche per leggere l'orologio."
> Marian Sara: "Possiamo fare il numero di telefono degli altri."
> Tosca: "Possiamo fare la cassa."
> MS.: "Del supermercato è ovvio."
> T.: "Anche della spesa." (min. 3,35)

Gli esempi che riportano i bambini sul cosa servano i numeri mostrano una riflessione sulla realtà che appare allargata e più consapevole di quella emersa durante il pre-test. I bambini nel descrivere l'utilizzo dei numeri confrontano quantità e spiegano come i numeri orientino la lettura di una situazione indicando, ad esempio, se si è perso qualcosa. Analogamente si esprimono i bambini del gruppo di sezione

Lisa: “Se io vado al mercato e mi dimentico... non lo so... se io compro 5 mele, allora le conto. Prendo 1 mela, 2 mele, 3 mele, 4 mele, 5 mele e dopo le porto a casa.” (min. 40,16)

Entrambi i gruppi affrontano il contare sia in senso crescente che in senso decrescente. A questo proposito sono interessanti due interventi: uno relativo allo zero e l’altro al confronto di quantità. Nel gruppo di laboratorio dopo che una bambina conta all’indietro da 10 a 0

Denise: “Sai che lo zero non c’entra. Si conta da 12 e da 1. Lo serve non ci serve.”

Alessio: “ Lo zero vuol dire niente.” (min. 11)

i commenti dei bambini fanno emergere che è stata maturata la consapevolezza dell’esistenza dello zero sulla linea dei numeri e che a questo numero viene riconosciuta una sua peculiarità. Nel loro contare all’indietro i bambini fanno infatti riferimento all’atto del contare oggetti fisici. L’enumerare lo zero non ha senso perché, dal loro punto di vista, corrisponde ad una quantità nulla che non può quindi essere contata.

Francesco: “Se dopo vengono tipo delle macchina uguali che se tipo uno delle macchine è uguali. 24 rosse, 10 viola.”

Insegnante: “Ce ne sono di più di rosse o di più di viola?”

Davide: “Rosse perché 24.”

I.: “E di viola?”

D.: “10. Basta che altre 10 e sono 20.”

I.: “E se diventano 20 diventano di più di quelle rosse?”

D.: “No, perché 25 sono di più di 24. Sono di più perché c’è 24, poi 25, poi 26.”

I.: “E quante ce ne sono di più di viola di quelle rosse allora?”

D.: “Di una.” (min. 46,30)

Il secondo esempio, esplicitato nel gruppo di sezione, mostra come i bambini siano in grado di discriminare quantità distinguendo tra maggiore e minore. In particolare il come vengano argomentate le risposte fa emergere come la consapevolezza dei valori numerici sia strettamente connessa al sapersi muovere sulla linea di numeri.

Per quanto concerne le operazioni sui numeri ai bambini è stata presentata una scatola di pennarelli. L’insegnante-ricercatore, come avvenuto durante l’intervento, ha coinvolto i bambini raccontando loro che la scatola dei pennarelli era personale. Aveva acquistato due confezioni di pennarelli, rispettivamente grossi e fini, entrambi da 12 pezzi ciascuno come quelle che erano presenti a scuola. In seguito all’aver prestato alle proprie sorelle la scatola, si è però accorta che non c’erano tutti i pennarelli da lei comprati. Con l’aiuto dei bambini vengono considerati prima i pennarelli grossi e poi quelli fini. Entrambi i gruppi contano i pennarelli grossi nel numero di 12. Lo fanno enumerando in modo corretto la sequenza dei numeri, toccando tutti i pennarelli e mettendoli in riga. Alcuni bambini man mano che li contano spostano i pennarelli sottolineando la distinzione tra già contati e da contare. Ci sono quindi maggiori padronanza ed organizzazione dell'azione del contare. I bambini contano poi i pennarelli con il tappo nel numero di 7 e quelli senza nel numero di 5. Quando l'insegnante-ricercatore chiede loro quale gruppo, e di quanto, sia il più numeroso i due gruppi di bambini attuano due diverse strategie, ma arrivano entrambi a quantificare la differenza nel numero di 2. Nel gruppo di sezione fanno corrispondere ad ogni pennarello con il tappo uno senza vedendo che 2 pennarelli con il tappo non hanno il corrispondente senza, mentre nel gruppo di laboratorio mettono i pennarelli vicini e, partendo dal presupposto che i pennarelli con il tappo sono di più, tolgono un pennarello alla volta fino a quando pennarelli con il tappo e senza sono in egual numero, cioè 5. Guardando al numero di pennarelli "tolti" decretano la differenza come 2. Quando l'insegnante mostra i pennarelli fini i bambini li contano e dicono che sono 8. Nel tentare di capire quanti pennarelli siano stati persi, anche in questo caso, gruppo di laboratorio e gruppo di sezione utilizzano due strategie diverse. Nel primo fanno corrispondere ad ogni pennarello grosso uno fino e dicono che 4 pennarelli grossi non hanno il "proprio" fino. Come prova della correttezza del risultato fanno un'ulteriore corrispondenza: allineano ad ogni colore grosso il colore fino confermando che i mancanti sono 4. Utilizzano la strategia che gruppo di sezione aveva messo in pratica per il confronto dei pennarelli grossi. Nel caso invece del gruppo di sezione i bambini decretano il numero di 4 senza contare. Dopo che un bambino conta gli 8 pennarelli fini

> Francesco: "Mancano 3. Mancano 4. Scusa." [...] Perché da 8 i numeri che mancavano a 12 erano 9, 10, 11, 12." (h. 1 min. 00,41)

il numero dei 4 mancanti viene calcolato facendo riferimento alla linea dei numeri. Alcuni bambini come seconda strategia provano a guardare ai colori mancanti, ma questa non sembra convincere tutti perché non tutti concordano sulle varie proposte cromatiche. Quando, una volta aggiunti i quattro colori su cui tutti sono d'accordo, vedono che i pennarelli sono 12, confermano che i mancanti erano 4.

Da ultimo l'insegnante-ricercatore chiede ai bambini quando si trovino ad utilizzare i numeri in modo analogo a quanto fatto a scuola. Gli esempi che i bambini riportano non fanno emergere l'uso di un linguaggio specifico che coinvolga i termini differenza, resto, aggiungere, togliere. Tuttavia vengono raccontanti episodi in cui le relazioni numeriche non esprimono dei semplici conteggi

> Denise: “Mia mamma ha delle tazzine però una si è rotta. Perché le ho contate e ho visto che erano 8 invece di [distoglie lo sguardo e pensa] 9.” (min. 32,46)
>
> Izabella: “La mia mamma quando fa il caffè si rotto un bicchiere quando metteva l’acqua dentro. E si è rotto e poi aveva 2 bicchieri e uno è caduto.” (min. 34)
>
> Davide: “Io ho perso 4 pentole. Ne sono rimaste 16. Prima ne avevo 20.” (h1 min. 10,32)

ma danno una descrizione della realtà di cui i bambini sono stati partecipi.

Riassumendo si può dire che i bambini, nel corso dell’intervento didattico, hanno sviluppato una competenza matematica che li ha portati a conoscere e riconoscere i numeri. In questo senso si sono evolute le abilità legate alle azioni non solo del contare, ma anche dell’aggiungere e del togliere. È interessante sottolineare che queste stesse azioni vengono attuate all’interno di una più ampia osservazione delle situazioni che hanno di fronte. Non si limitano a guardare e contare eventuali oggetti, ma cercano di cogliere le relazioni numeriche che li caratterizzano. Attraverso i numeri, il rilevare un gruppo come più o meno numeroso di un altro, il vedere che una quantità manca o deve essere aggiunta descrivono la realtà sottolineandone determinati aspetti che vogliono far notare. L’azione non è declinata al procedere per tentavi, ma è ragionata e volta ad ottenere un determinato risultato. Nello specifico del come i bambini operano sui numeri il modello prevalente all’interno del quale giustificano le proprie argomentazioni è quello partenza-spostamento-arrivo. Si muovono sulla linea dei numeri preferendo la direzione crescente. La sottrazione diventa un’addizione inversa. Rileggono una situazione in cui qualcosa è stato tolto come una nella quale qualcosa manca utilizzando il modello dello slittamento. Successivamente attuano un confronto non solo tra quantità che sono direttamente confrontabili, ma anche su uno stesso insieme che varia nel tempo. Tuttavia nel muoversi sulla linea dei numeri i bambini non guardano al numero solo secondo l’aspetto ordinale di sequenza ordinata, ma dimostrano padronanza anche del suo aspetto cardinale. Contano i valori numerici che costituiscono la differenza di un certo intervallo e la verificano o riferiscono agli eventuali oggetti della realtà in un primo ed inconsapevole approccio al modello parte-parte-tutto.

10. CONCLUSIONI

Lo scopo della ricerca era quello di indagare come i bambini della scuola dell'infanzia elaborino strategie risolutive di fronte a situazioni numericamente problematiche, coinvolgenti il concetto di sottrazione, attraverso l'attivazione di modalità di apprendimento innovative secondo il modello del design experiment (Cobb & Yackel, 1996).

Il percorso descritto nel presente lavoro di tesi risponde a questa domanda attraverso una riflessione che interessa due piani: quello dello sviluppo della comprensione matematica e quello del contesto, inteso come ambiente di apprendimento.

L'analisi delle discussioni e dei disegni mette in evidenza come la conoscenza matematica si sviluppi attraverso un processo di continua sistematizzazione che la rende sempre più elaborata e completa. I bambini in età prescolare sono in grado di padroneggiare un primo livello di concettualizzazione formale dei contenuti matematici. All'interno del modello di Pirie e Kieren questo livello è il quinto: quello della formalizzazione, in cui i bambini dimostrano di saper utilizzare il linguaggio simbolico senza riferirsi ad elementi concreti. Elaborano quindi una prima immagine della realtà svincolata dalla realtà stessa. Tuttavia la conoscenza che i bambini conquistano non è stabile e duratura. Lo stesso processo di apprendimento è caratterizzato da una certa dinamicità, che porta i bambini a tornare molto spesso all'esperienza come forma di dimostrazione della validità dei propri ragionamenti. L'esperienza viene presentata come riferimento sia alle attività a cui i bambini partecipano sia a situazioni che appartengono al loro vissuto. Quello che emerge è il bisogno di creare un'immagine che rappresenti il concetto astratto e lo renda visibile e fruibile. La formulazione di un procedimento matematico molte volte diventa la descrizione dello stesso. Nel percorso di ricerca le difficoltà, che i bambini hanno nel concettualizzare un concetto matematico, emergono nel loro confondere il calcolo del risultato numerico con lo spiegarne il processo risolutivo. Determinare un numero incognito a partire da quantità note viene descritto come facile. Quando però viene chiesto loro di descrivere come abbiano fatto, dicono di essersi sbagliati: è difficile trovare quello che manca. La difficoltà dell'esprimere i propri ragionamenti porta i bambini a mettere in dubbio le loro stesse conquiste numeriche. Ragione di questo può essere trovata non tanto in una effettiva difficoltà nell'operare con i numeri, quanto nella difficoltà di esprimere a parole i concetti matematici. In questo senso la narrativa, introdotta nel percorso di ricerca sia come strumento didattico che come strumento cognitivo, ha permesso ai bambini di superare questo ostacolo. I contesti narrativi hanno descritto i contenuti matematici all'interno di situazioni che fossero alla portata dei bambini e il poterli raccontare li ha resi maggiormente esprimibili. La narrativa ha quindi portato ad una ridefinizione delle attività didattiche, secondo una prospettiva innovativa, che ha caratterizzato l'ambiente di apprendimento.

Il contesto, all'interno del quale il percorso di ricerca si è svolto, rappresenta l'altro grande piano di indagine dello studio. Nello specifico della ricerca, questo va analizzato a partire dal modello emergentista elaborato da Cobb & Yackel. Come detto nell'introduzione, l'approccio emergentista guarda allo sviluppo di conoscenza come ad un processo che si articola su tre livelli tra loro interagenti. Nella ricerca questi livelli erano rappresentati rispettivamente dalle (a) attività in cui i bambini erano coinvolti, (b) dai gruppi rispettivamente di sezione e di laboratorio a cui appartenevano e (c) dal livello di scuola di riferimento. Il percorso didattico del design experiment si è inserito nel contesto scolastico dapprima guardando alla specificità della scuola dell'infanzia come ordine di scuola in linea di continuità con i successivi. La normativa di riferimento ha rappresentato il punto di partenza da cui delineare modalità e contenuti. Si è scelto di elaborare una proposta che fosse coerente con le linee di indirizzo, adeguata all'età dei bambini e si collocasse in continuità con il percorso scolastico. In secondo luogo si sono individuati i gruppi di sezione e di laboratorio che hanno costituito le comunità di appartenenza dei bambini. I gruppi, esclusa la figura dell'insegnante-ricercatore, erano quelli della quotidianità scolastica all'interno della quale le relazioni erano conosciute e consolidate. L'ultimo livello è rappresentato dalla proposta didattica. L'intervento a cui hanno partecipato i bambini si è posto in linea con una certa metodologia didattica, esplicitata ad esempio dalla struttura dei singoli incontri o dalla scelta di introdurne uno di riepilogo finale, ma ha cercato di innovarla. Ecco quindi la scelta di far ragionare i bambini attorno ad uno specifico contenuto disciplinare, di coinvolgerli attraverso l'implementazione di materiali ausiliari, simili a quelli solitamente presenti a scuola, ma che al contempo rendessero manipolabile un concetto astratto, e di proporre un approccio narrativo per l'elaborazione di significati matematici. La valenza del design experiment è data proprio dall'essere

stato articolato all'interno di un determinato ambiente di apprendimento e di aver contribuito ad una sua positiva evoluzione. Il contesto creato ha permesso ai bambini di sviluppare un ragionamento matematico altrimenti considerato difficile. Questo dimostra quanto un adeguato ambiente di apprendimento non solo sostenga, ma possa favorire i processi di apprendimento o, al contempo, possa renderli difficoltosi.
In questo quadro possono essere delineati alcuni limiti dello studio. Alcuni limiti sono legati alla breve durata dell'intervento didattico e alla sua proposta da parte di un'esperta esterna all'ambiente scolastico. Una proposta più ampia dal punto di vista dei contenuti e più lunga nel tempo avrebbe potuto portare i bambini ad un ragionamento matematico meno settoriale e più consolidato. Inoltre la figura dell'esperta ha fatto sì che parte degli incontri iniziali fosse destinata alla costruzione della relazione adulto-bambino ed insegnante-gruppo, nonché alla conoscenza delle varie caratteristiche di ognuno. Altri limiti possono essere individuati all'interno dello stesso design experiment. La scelta di strutturare la lezione in tre fasi, seguendo la struttura tipo delle ore di attività scolastica, ha fatto sì che i processi di apprendimento fossero legati ad una certa consuetudine didattica, in cui il punto di partenza era rappresentato dall'insegnante e quello conclusivo dall'alunno, chiamato a riflettere individualmente. Forse un'esplorazione libera dei materiali come momento introduttivo avrebbe portato i bambini ad elaborare fin da subito una propria immagine dei concetti, sulla quale l'azione dell'insegnante e del gruppo sarebbe stata di sistematizzazione. I materiali stessi hanno veicolato un certo approccio alla sottrazione. In nessun caso i bambini, ad esempio, si sono ritrovati a togliere. La prevalenza dell'utilizzo del modello partenza-spostamento-arrivo, come metodo d'indagine da parte dei bambini rispetto a quello parte-parte-tutto, potrebbe trovare in questo un'ulteriore giustificazione. Infine la scelta di proporre la narrativa sia come contesto delle situazioni problematiche sia come forma non verbale di espressione ne ha in qualche modo vincolato l'implementazione. La ricerca sull'uso della narrazione come forma di organizzazione di significati matematici è infatti agli albori. Il considerare separatamente il racconto orale e la rappresentazione grafica come forme espressive del pensiero matematico potrebbe farne emergere le potenzialità, nonché evidenziarne il legame con lo sviluppo linguistico.

Da ultimo va fatta una considerazione sulle ricadute didattiche che questo percorso di ricerca può avere. La peculiarità del design experiment, di rispondere all'esigenza di dare un maggiore contributo teorico alla pratica educativa, porta ad interrogarsi su come sia possibile da un lato favorire i processi di apprendimento e dall'altro sostenere gli insegnanti nella progettazione di contesti di insegnamento innovativi. Possono essere avviati percorsi di approfondimento dedicati alle insegnanti che trattino non solo i contenuti disciplinari, ma anche e soprattutto la didattica di tali contenuti. L'imparare a leggere la realtà secondo l'occhio del matematico deve essere accompagnato dal saperla rendere intellegibile anche ai propri alunni. Un esempio può essere il costruire materiali ausiliari validi sia dal punto di vista dei contenuti sui cui si vuol far riflettere sia dell'impostazione pedagogico-didattica. La grande potenzialità del percorso è stata quella di aver agito nella zona di sviluppo prossimo (Vygotskij, 1962). I bambini non solo hanno sviluppato una specifica competenza numerica, ma imparato a dare una lettura matematica della realtà e ad elaborare strategie di problem solving, a partire dalle loro preconoscenze. In questo senso il design experiment può essere implementato non solo come metodo d'indagine, ma come vero e proprio intervento sulla realtà. Le insegnanti possono diventare parte di un team di ricerca dove la ricercatrice esperta esterna diventa anche formatrice e regista, che aiuta le stesse docenti ad agire nel proprio contesto di riferimento. I punti di difficoltà possono aprire ad una riflessione che ridiscuta le pratiche didattiche non solo a livello locale, ma attraverso tutti e tre i livelli individuati dal modello emergentista, e che porti alla formulazione di teorie replicabili e adattabili ad altri contesti, poiché originate dal contesto stesso.

BIBLIOGRAFIA

Ahmed, A., Clark-Jeavons, A., & Oldknow, A. (2004). How can teaching aids improve the quality of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2-3), 313-328.

Allen, D.W., & Clark, R. (1967). Microteaching: its rationale. *High School Journa*l, 51(2), 75–79.

Angeli, A., D'Amore, B., Di Nunzio, M. & Fascinelli, E. (2011). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

Backman, K., & Attorps, I. (2012). *Teaching Mathematics in the Pre-School Context*. Online Submission.

Baldacci, M. (2004). Il Laboratorio come strategia didattica. Suggestioni deweyane. in N. Filograsso & R. Traviglini (Eds). *Dewey e l'educazione della mente*. Milano: Franco Angeli.

Baldacci, M. (2010). *Curricolo e competenze*. Milano: Mondadori.

Barab, S. & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The journal of the learning sciences*, 13(1), 1-14.

Baroody, A. J., Lai, M. L., & Mix, K. S. (2006). *The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education.* In Handbook of research on the education of young children, 2, 187-221.

Baroody, A. J., Eiland, M., & Thompson, B. (2009). Fostering at-risk preschoolers' number sense. *Early Education and Development*, *20*(1), 80-128.

Baroody, A. J., Lai, M. L., Li, X., & Baroody, A. E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 41-60.

Bartolini Bussi, M., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18(3), 221-256.

Bateson, G. & Longo, G. (2000). *Verso un'ecologia della mente* (Vol. 17). Adelphi.

Bertoldi, F. & Serio, N. (Eds.). (2001). *Un nuovo curricolo per la scuola dell'infanzia e di base*. Milano: Armando Editore.

Bobbio, A. (2006). *La pedagogia dell'infanzia oggi*.

Braga, P. (ed.). (2009). *Promuovere consapevolezza. Esperienze di formazione tra ricerca e pratica educativa*. Milano: Franco Angeli.

Brannon, E. M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition*, 83(3), 223-240.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The journal of the learning sciences*, 2(2), 141-178.

Bruner, J. S. (2000). *La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola* (Vol. 222). Feltrinelli Editore.

Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(3), 194-212.

Burkhardt, H. (2007). Improving educational design and pupil learning what can good educational design achieve, and how? *Proceedings of CIEAEM59, Mathematical activity in classroom practice and as research object in didactics: two complementary perspectives* (pp. 22-30). Hungary.

Burton, L. (2002). Children's mathematical narratives as learning stories. *European Early Childhood Education Research Journal*, 10(2), 5-18.

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, New York, 746-783.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46(1), 3-18.

Butterworth, B., & Capararo, C. (1999). *Intelligenza matematica: vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente*. Rizzoli.

Calvani, A., Bonaiuti, G., & Andreocci, B. (2011). Il microteaching rinascerà a nuova vita? Video annotazione e sviluppo della riflessività docente. *Giornale Italiano della Ricerca Educativa*, *5*(6), 29–42.

Carrada, G. (2005). Comunicare la scienza. *Kit di sopravvivenza per ricercatori*.

Catarsi, E. (1990). *Storia dei programmi della scuola elementare (1860-1985).* La Nuova Italia.

Catarsi, E. (1994). *L'asilo e la scuola dell'infanzia: storia della scuola materna e dei suoi programmi dall'Ottocento ai giorni nostri.* La Nuova Italia.

Cescato, S., Bove, C., & Braga, P. (2015). Video, formazione e consapevolezza. Intrecci metodologici. *Form@ re-Open Journal per la formazione in rete*, 15(2), 61-74.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La pensée sauvage.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives in mathematics education* (pp. 243–307). Reidel.

Cisotto, L. (2006). *Psicopedagogia e didattica: processi di insegnamento e di apprendimento*. Roma: Carocci.

Clements, D.H., Sarama, J. & DiBiase, A.M. (Eds.). (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Routledge.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2008). Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal*.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In *New directions in educational technology* (pp. 15-22). Springer Berlin Heidelberg.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the learning sciences*, 13(1), 15-42.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Psychology Press.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational psychologist*, 31(3-4), 175-190.

Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds.). (2012). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Routledge.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In Scanlon, E., & O'Shea, T. (Eds.). *New directions in educational technology*. Berlin: Springer-Verlag.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards For Mathematics. Common Core State Standards* (College-and Career-Readiness Standards and K-12 Standards in English Language Arts and Math). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Courant, R., Robbins, (2000). *Che cos' è la matematica?.* Bollati Boringhieri.

Cross, C. T., Woods, T. A., & Schweingruber, H. (2009). Mathematics Learning in Early Childhood: Paths toward Excellence and Equity. *National Academies Press*.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. In: Frabboni F. & Giovannini M. L. (Eds.) (2009). *Professione insegnante*. Milano: Franco Angeli. 145-153.

D'Amore, B., & Laborde, C. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

De Bartolomeis, F. (1978). *Sistema dei laboratori: per una scuola nuova necessaria e possibile*. Feltrinelli.

dell'Istruzione, M. M. dell'Università e della Ricerca (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica istruzione*.

della Pubblica Istruzione, M. (2007). *Indicazioni per il curricolo*. Roma, Luglio.

Denzin, N.K, Lincoln, Y.S. (Eds) (2005). *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks, California: Sage Publications.

DiSessa, A. A., & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *The journal of the learning sciences*, 13(1), 77-103.

Donaldson, M. (1978). *Children's minds.*

Egan, K. (1986). *Teaching as story telling: An alternative approach to teaching and curriculum in the elementary school*. University of Chicago Press.

Egan, K. (1999). *Children's minds, talking rabbits, and clockwork oranges*. (Selected articles. Solicited). Forward by Elliot W. Eisner. New York: Teachers College Press.

Egan, K. (2004). The Cognitive Tools of Children's Imagination. *Early Childhood Education*, 36(1), 4-10.

Egan, K. (2008). *Cognitive tools and imagination*.

Fiorin, I., Castoldi, M. & Previtali, D. (2013). *Dalle Indicazioni al curricolo scolastico*. La scuola.

Forman, E. A., Minick, N. E., & Stone, C. (1993). *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development.* Oxford University Press.

Frabboni, F. (1998). *Verso una scuola dell'infanzia maggiorenne: pedagogia e didattica dell'obbligo a cinque anni.* La nuova Italia.

Frabboni, F., & Pinto Minerva, F., (2008). *La scuola dell'infanzia*. Roma: Laterza.

Franceschini, G., & Borin, P., (2014). *Il curricolo nella scuola dell'infanzia. Prospettive di ricerca e modelli operativi*. Roma: Carocci.

Freudenthal, H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica: lezioni tenute in Cina*. C. F. Manara. (Ed.) La scuola.

Gelman, R. (81). Gallistel. CR (1978). *The child's understanding of number*.

Gilmore, C. K. (2006). Investigating children's understanding of inversion using the missing number paradigm. *Cognitive Development*, 21, 301–316.

Gilmore, C. K., & Spelke, E. S. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition*, 107(3), 932-945.

Ginsburg, S. (1975). *Algebraic and automata-theoretic properties of formal languag*es (Vol. 51). Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Ginsburg, H. P. (1997). Mathematics learning disabilities A view from developmental psychology. *Journal of learning disabilities*, 30(1), 20-33.

Ginsburg, H. P., Klein, A., & Starkey, P. (1998). *The Development of Children's Mathematical Thinking: Connecting Research with Practice*.

Giordania, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice*, 22(1), 36-46.

Goldman, R., Pea, R., Barron, B., & Derry, S. J. (2014). *Video research in the learning sciences*. Routledge.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for research in Mathematics Education*, 443-471.

Gravemeijer, K. (1998). *Developmental research as a research method. In Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 277-295). Springer Netherlands.

Green, M. C. (2004). Storytelling in teaching. *APS Observer*, *17*(4), 37-39.

Haven, K. F. (2000). *Super simple storytelling: A can-do guide for every classroom, every day*. Libraries Unlimited.

Haylock, D., & Cockburn, A. D. (2008). *Understanding mathematics for young children: A guide for foundation stage and lower primary teachers*. Sage.

Hughes, M. (1981). Can preschool children add and subtract?. *Educational Psychology*, 1(3), 207-219.

Israel, G. & Millàn Gasca, A. (2012). *Pensare in matematica*. Bologna: Zanichelli.

Istruzione, I. M. D. P. (1991). *Orientamenti dell'attività educativa nelle scuole materne statali*. Decreto Ministeriale del, 3.

Jensen, R.A., Shepston, T.J., Connor, K., & Killmer, N. (1994, February). *Fear of the known: Using audio visual technology as a tool for reflection in teacher education*. Paper presented at the 74th Annual Meeting of the Association of Teacher Educators, Atlanta, GA.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum.

Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational researcher*, *32*(1), 3-4.

Fuson, K. C. (1991). Children's early counting: Saying the number-word sequence, counting objects, and understanding cardinality. *Language in mathematical education: Research and practice*, 27-39.

Lai, M. L., Baroody, A. J., & Johnson, A. R. (2008). Fostering Taiwanese preschoolers' understanding of the addition–subtraction inverse principle. *Cognitive Development*, 23(1), 216-235.

LeCompte, M. D., Tesch, R., & Goetz, J. P. (1993). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Academic Press.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2005). Mathematics education as a design science. *ZDM*, 37(6), 490-505.

Longo, G. O. (2008). *Il senso e la narrazione*. Springer Science & Business Media.

Lonigan, C. J., Anthony, J. L., Phillips, B. M., Purpura, D. J., Wilson, S. B., & McQueen, J. D. (2009). The nature of preschool phonological processing abilities and their relations to vocabulary, general cognitive abilities, and print knowledge. *Journal of educational psychology*, *101*(2), 345.

Lucangeli, D., & Tressoldi, P. E. (2002). Lo sviluppo della conoscenza numerica: alle origini del" capire i numeri". *Giornale italiano di psicologia*, 29(4), 701-726.

Lucangeli, D., Poli, S., & Molin, A. (2003). *L'intelligenza numerica-Abilità cognitive e metacognitive nella costruzione della conoscenza numerica dai 3 ai 6 anni*. Trento: Centro Studi Erikson.

Margenau, H. (1987). *The miracle of existence*. Boston & London: New Science Library

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2014). Early construction of number as position with young children: a teaching experiment. *ZDM*, 46(1), 29-44.

Martini, B. (2000). *Didattiche disciplinari: aspetti teorici e metodologici*. Pitagora Editrice.

Maturana, H. & Tomm, K. (1986). *Languaging and the Emotion Flow*. Paper delivered at a conference of the Department of Psychiatry Calgary: University of Calgary

Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1987). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding*. New Science Library.

Mercer, N. (2004). Sociocultural discourse analysis. *Journal of applied linguistics*, 1(2), 137-168.

Mercer, N., & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the development of children's thinking: A sociocultural approach.* Routledge.

Millàn Gasca, A. (2016). *Numeri e forme: Didattica della matematica con i bambini*. Bologna: Zanichelli.

Moomaw, S. (2011). *Teaching Mathematics in Early Childhood*. Baltimore: Brookes Publishing Company.

Munby, H., & Russell, T. (1992). Frames of reflection: An introduction. *Teachers and teaching: From classroom to reflection*, 1-8.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13(4), 373-394.

Norman, D.A. (1993), *Things that make us smart*, Addison-Wesley Pub. Com (traduz ital. *Le cose che ci fanno intelligenti*, Feltrinelli, 1995)

Nunes, T., Bryant, P., & Dunn, J. (1996). *Children doing mathematics.* Oxford: Blackwell.

Nunes, T., Bryant, P., Hallett, D., Bell, D., & Evans, D. (2009). Teaching children about the inverse relation between addition and subtraction. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 61-78.

Oers, B. V. (1997). On the narrative nature of young children's iconic representations: Some evidence and implications. *International Journal of Early Year Education*, 5(3), 237-245.

Olteanu, C., & Olteanu, L. (2012). Improvement of effective communication – The case of subtraction. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(4), 803-826.

Perrenoud, P. (2006). Il lavoro sull‟habitus nella formazione degli insegnanti. In M. Altet, É. Charlier, L. Paquay & P. Perrenoud (eds.), *Formare gli insegnanti professionisti. Quali strategie? Quali competenze?* (R. Rigo, Trans.) (pp. 175-200). Roma: Armando (Original work published 1996).

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2012). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 335-349.

Piaget, J. (1952). *The child's concept of number.* New York.

Pimm, D. (2002). Symbols and meanings in school mathematics. *Routledge*.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics*, 9(3), 7-11.

Roberts, N., & Stylianides, A. J. (2013). Telling and illustrating stories of parity: A classroom-based design experiment on young children's use of narrative in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(3), 453-467.

Rossi, P. G., & Rivoltella, P. C. (2012). *L'agire didattico: Manuale per l'insegnante*. La scuola.

Sarama, J., Lange, A.A., Clements, D.H., Wolfe, C.B. (2012). The impacts of an early mathematics curriculum on oral language and literacy. *Early Childhood Research Quarterly*, 27(3), 489-502.

Scurati, C. (2006). *A scuola per l'infanzia*. Brescia: Editrice La Scuola.

Semeraro, R. (2014). L'analisi qualitativa dei dati di ricerca in educazione. *Italian Journal of Educational Research*, (7), 97-106.

Sherin, M., Jacobs, V., & Philipp, R. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. Routledge.

Sherman, J., & Bisanz, J. (2007). Evidence for use of mathematical inversion by three-year-old children. *Journal of Cognition and Development*, 8(3), 333-344.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental science*, 11(5), 655-661.

Simon, H. A. (1969). *The sciences of the artificial*. Cambridge, MA.

Sinclair, N., Healy, L., & Sales, C. O. R. (2009). Time for telling stories: Narrative thinking with dynamic geometry. *ZDM*, *41*(4), 441-452.

Skemp, R. R. (1977). Relational Mathematics and Instrumental Mathematics: Some Further Thoughts. University of Warwick.

Skoumpourdi, C. (2014). Early Childhood Mathematics: Designing Educational Material. In R. V. Nata (Ed), *Progress in Education* (pp. 117-160), New York: Nova Science Publisher, 7(31).

Skoumpourdi, C., Kafoussi, S. & Tatsis, K. (2009). Designing Probabilistic Tasks for kindergartners*. Journal of Early Childhood Research* 7(2), 153-172.

Sloane, F. C., & Gorard, S. (2003). Exploring modeling aspects of design experiments. *Educational Researcher*, 32(1), 29-31.

Sorzio, O. (1999). *Lo sviluppo della comprensione del numero nel bambino*. Milano: La Nuova Italia.

Sorzio, P. (2005). *La ricerca qualitativa in educazione: problemi e metodi*. Roma: Carocci editore.

Spagnolo, F. (2005). *Argomentare e Congetturare nella scuola primaria e dell'infanzia*. Palermo: Palumbo.

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210(4473), 1033-1035.

Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 99-120.

Steffe, L. P., & Gale, J. E. (Eds.). (1995). *Constructivism in education*.Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. In *International handbook of mathematics education* (pp. 411-434). Springer Netherlands.

Tatsis, K., Kafoussi, S. & Skoumpourdi, C. (2008). Kindergarten Children Discussing the Fairness of Probabilistic Games: The Creation of a Primary Discursive Community. *Early Childhood Education* 36(3), 221-226.

Tomm, K. (1989). *Consciousness and intentionality in the work of Humberto Maturana*. A presentation for the Faculty of Education. University of Alberta, Edmonton.

Usiskin, Z., Hallett, D., Prediger, S., Carbone, R. E., Eaton, P. T., Valdemoros, M. E. & Cheng, C. C. L. (2008). *Proceedings of ICME-11–Topic Study Group 10: Research and development in the teaching and learning of number systems and arithmetic*.

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.). (2006). *Educational design research*. London: Routledge.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Treffers, A. (2009). Mathe-didactical reflections on young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 102-112.

Varol, F., & Farran, D. C. (2006). Early mathematical growth: How to support young children's mathematical development. *Early Childhood Education Journal*, *33*(6), 381-387.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, 10(1), 77-101.

Verschaffel, L., Bryant, P., & Torbeyns, J. (2012). Mathematical inversion. Introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 327-334.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction?: Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, 17(3), 1365-1383.

Vitale, B. (1989). Elusive recursion: a trip in recursive land. *New Ideas in Psychology*, 7(3), 253-276.

Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio*, 1962.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

Yackel, E., Gravemeijer, K. & Sfard, A. (2010). *A Journey in Mathematics Education Research: Insights from the Work of Paul Cob.* Springer.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching mathematics as storytelling*. The Netherlands: Sense publishers.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 1169-1207.

ALLEGATO A

LETTERA AI DIRIGENTI

Alla Cortese attenzione del
Dirigente Scolastico
dell'Istituto Comprensivo
(omissis)

OGGETTO: richiesta autorizzazione per ricerca di dottorato

Il sottoscritto Paolo Sorzio, docente di Pedagogia generale presso il Dipartimento di Studi Umanistici dell'Università di Trieste e membro del Collegio Docenti della Scuola di Dottorato in Scienze Pedagogiche dell'Educazione e della Formazione del Dipartimento di Filosofia, Sociologia, Pedagogia e Psicologia Applicata (FISPPA) presso l'Università degli Studi di Padova

chiede

l'autorizzazione per svolgere una ricerca finalizzata ad attuare un intervento sperimentale nell'ambito dell'insegnamento della Matematica nella scuola dell'infanzia. La ricerca sarà svolta nella figura della dottoressa Silvia Mion, dottoranda in Scienze Pedagogiche dell'Educazione e della Formazione (FISPPA) e sarà oggetto della tesi conclusiva del suo percorso dottorale, di cui il sottoscritto è supervisore.

<u>Tema della tesi</u>

Il focus della tesi riguarda l'insegnamento della matematica nella scuola infanzia e, in particolare, indaga il concetto di differenza come primo approccio all'operazione di sottrazione con l'intento di far emergere le strategie che i bambini, in questo livello scolastico, utilizzano per svolgere questa operazione. L'argomento è di vivo interesse anche a livello europeo. Negli ultimi anni sono state infatti pubblicate numerose pubblicazioni che riguardano la comprensione e le strategie di risoluzione della sottrazione e le difficoltà ad essa legate. Si vedano ad esempio gli studi pubblicati da Verschaffel (2009).

Nello specifico della ricerca i bambini verranno coinvolti in attività ludico-didattiche volte ad approfondire il concetto di differenza sia come resto (es: se da un cesto di 10 mele ne tolgo 4 quante ne restano?) sia come quantità che distingue due numeri. (es: in un cesto di 10 mele 6 sono gialle e 4 rosse. Quante mele gialle ci sono in più rispetto a quelle rosse?)

All'interno del contesto di sezione i bambini grandi lavoreranno in piccolo gruppo sotto la guida della ricercatrice. Verrà creato un piccolo contesto laboratoriale in cui i bambini saranno invitati a partecipare attivamente. Giochi più o meno conosciuti, quali la battaglia navale o i birilli, saranno presentati non solo come attività ludica, ma costruiti con gli stessi bambini al fine di riflettere sugli aspetti numerici che vengono evocati.

I giochi vengono intesi secondo un duplice aspetto: artefatti culturali e materiali sperimentali. Nel primo caso ci si rifà al significato sviluppato dalla scuola olandese del matematico Freudenthal(1991) e ampliamente trattato in territorio nazionale da Bonotto (2007), che considera alcuni oggetti della nostra quotidianità come testimoni privilegiati della società in cui viviamo, della cultura a cui apparteniamo, di mezzi e modi di comunicare tipici della nostra epoca che i bambini incontrano e possono manipolare. Nel secondo caso il riferimento è alla recenti ricerche della studiosa greca Skoumpourdi (2008) che ha dimostrato come l'implementazione di materiali specifici, accompagnata ad una riflessione comunitaria guidata dall'adulto, porti i bambini a prendere consapevolezza di concetti matematici solitamente trattati a livelli di scuola più avanzati.

Le attività con i bambini verranno introdotte stimolando la curiosità costruttiva che li caratterizza a partire da storie in cui i protagonisti si ritrovano in situazioni critiche che impediscono loro di continuare. Secondo infatti una recente prospettiva delineata dall'americana Zazkis (2009), le storie possono favorire l'apprendimento dei concetti matematici perché possono essere viste come dei precursori di quei problemi a parole che i bambini svolgono dalla scuola primaria in poi. Inoltre, secondo un approfondimento sul campo attuato da Nicky Roberts (2013) in scuole inglese e africane, le storie favoriscono lo sviluppo di un linguaggio appropriato ed aiutano i bambini nell'esposizione dei concetti astratti.

I contenuti proposti e gli obiettivi didattici individuati fanno riferimento a quanto suggerito nelle Indicazioni per il curricolo del 2012. Il percorso intende infatti lavorare su competenze iniziali, che avranno molta rilevanza in una prospettiva di continuità verticale. Da un lato si trattano concetti caratterizzanti la disciplina matematica e specifici all'interno delle Competenze Europee. Dall'altro si vogliono rendere i bambini attori consapevoli del proprio sapere, maturando quelle competenze trasversali ritenute fondamentali nella prospettiva del LifeLong Learning.

Lo studio, delineato a partire dall' analisi della letteratura di riferimento, verrà condotto in un'ottica di internazionalizzazione, che porterà a confronti e collaborazioni, in sede di analisi dei risultati e di stesura del progetto, con ricercatori di università estere. Inoltre vi sarà una costante collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Padova, nella figura della prof.ssa Cinzia Bonotto, docente di Matematica e Didattica di Matematica nei corsi di laurea destinati ai futuri insegnanti di ogni ordine e grado.

L'intervento prevede incontri di circa un'ora ciascuno rivolti a bambini di 5 anni nel periodo che intercorrerà tra febbraio e maggio 2014. La cadenza degli incontri sarà concordata con le insegnanti, che la ricercatrice affiancherà nel consueto contesto di sezione.

La ricerca seguirà precise metodologie di indagine, documentate a livello scientifico, e prevede videoriprese e registrazioni orali a solo uso interno, che non verranno quindi divulgate esternamente.

I ricercatori, nel precisare che la ricerca non comporterà alcun tipo di costo per la scuola ed i suoi dipendenti, si rendono disponibili a presentare percorsi di chiarimento sugli scopi e i principi didattici della ricerca, oltre che a condurre, se richiesto, percorsi di formazione rivolti alle insegnanti.

<u>Protocollo etico</u>

Lo scopo della ricerca è puramente conoscitivo, finalizzato allo svolgimento della tesi e non vi sarà nessun altro tipo di raccolta e analisi dati oltre a ciò che è concordato con i partecipanti alla ricerca; nessun aspetto della pratica e delle persone coinvolte sarà oggetto di giudizio o valutazione; siamo disponibili a rispondere a qualunque domanda riguardante l'indagine della tesi.

La partecipazione è puramente volontaria e i partecipanti possono ritirarsi dalla ricerca in qualunque momento

La dottoranda, relatrice della tesi, ha la responsabilità di evitare che possano essere causati intenzionalmente danni fisici o emotivi alle persone.

Nessun nome o aspetto identificativo delle persone sarà mantenuto e pertanto la garanzia al diritto alla privacy è garantito. I nomi delle persone saranno sostituiti da pseudonimi; aspetti che possano guidare all'identificazione saranno omessi; il Nome dell'Istituto sarà mantenuto solo se richiesto, altrimenti sostituito da un nome di fantasia. I quaderni osservativi saranno mantenuti in forma privata e non avranno circolazione pubblica.

Siamo a disposizione per presentare i risultati dell'indagine ai partecipanti alla ricerca e se qualora se ne presenti l'opportunità per una eventuale disseminazione dei risultati, se ne chiederà previa autorizzazione all'Istituto, mantenendo nel contempo le garanzie di anonimato già descritte.

A disposizione per qualunque altra informazione o chiarimento richiesti.

Cordialmente.

Paolo Sorzio

ALLEGATO B

LIBERATORIA PER RICERCA DI DOTTORATO

__l__ sottocritto/a____, genitore dell'alunno/a____, frequentante la scuola dell'infanzia (omissis) con la presente,

PRENDE ATTO

che _l _ proprio/a figlio/a parteciperà alla ricerca della dottoressa Silvia Mion, iscritta al dottorato di ricerca in Scienze Pedagogiche presso il Dipartimento FISPPA dell'Università degli Studi di Padova.

Lo scopo della ricerca è puramente conoscitivo, finalizzato allo svolgimento della tesi e non vi sarà nessun altro tipo di raccolta e analisi dati oltre a quanto concordato con i partecipanti alla ricerca; nessun aspetto della pratica e delle persone coinvolte sarà oggetto di giudizio o valutazione.

La dottoranda è disponibile a rispondere a qualunque domanda riguardante l'indagine della tesi.

La partecipazione è puramente volontaria e i partecipanti possono ritirarsi dalla ricerca in qualunque momento.

La dottoranda, relatrice della tesi, ha la responsabilità di evitare che possano essere causati intenzionalmente danni fisici o emotivi alle persone.

Nessun nome o aspetto identificativo delle persone sarà mantenuto e pertanto è garantito il diritto alla privacy. I nomi delle persone saranno sostituiti da pseudonimi; aspetti che possano guidare all'identificazione saranno omessi; il nome dell'Istituto sarà mantenuto solo se richiesto, altrimenti sostituito da un nome di fantasia. I quaderni osservativi saranno tenuti in forma privata e non avranno circolazione pubblica nel massimo rispetto per le identità etniche, sociali e di genere dei bambini e le loro famiglie.

La dottoranda è a disposizione per presentare i risultati dell'indagine ai partecipanti alla ricerca e, qualora si presenti l'opportunità di un'eventuale disseminazione degli stessi, ne verrà chiesta prima autorizzazione, mantenendo al contempo le garanzie di anonimato già descritte.

In accordo con quanto scritto sopra

AUTORIZZA

la dottoressa Silvia Mion a riprendere e audio registrare l'alunno/a con registratori, fotocamere e/o videocamere nei vari momenti dell'attività da solo, con i compagni, con insegnanti ed operatori scolastici, ai soli fini di:

- analisi e documentazione dell'attività;

- divulgazione della ricerca didattica sotto forma di articoli, documenti in convegni e altri ambiti di studio e/o ricerca.

(omissis), lì___________________   Il genitore____________________________________