Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Filosofia

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN FILOSOFIA

INDIRIZZO: FILOSOFIA TEORETICA

CICLO XXII

# I fondamenti della nuova scienza del moto:

## la cinematica di Galileo e la geometria di Torricelli.

**Direttore della Scuola :** Ch.mo Prof. Giovanni Fiaschi

**Coordinatore d'indirizzo:** Ch.ma Prof.[sa] Francesca Menegoni

**Supervisore**: Ch.mo Prof. Antonio M. Nunziante

**Dottorando**: Tiziana Bascelli

*"Non sono un matematico e quindi non sarò sorpreso da quel che hai scoperto. Infatti, non posso sapere che cosa intendi finché non so come ci sei arrivato."*

Ludwig Wittgenstein

# Abstract.

Questo lavoro di ricerca intende dare una diversa lettura alla *Nuova scienza del moto* elaborata da Galileo Galilei nei *Discorsi* (1638) e da Evangelista Torricelli nell'*Opera geometrica* (1644). L'attenzione è rivolta al processo di matematizzazione che subisce il moto locale nel momento in cui nasce la meccanica moderna, per analizzarne le condizioni di realizzazione e le caratteristiche principali. Il moto locale, una questione dibattuta all'interno della filosofia naturale, diventa cinematica, cioè scienza. Si mostrerà che la strutturazione di un nuovo concetto di velocità è l'evento decisivo che porta l'accezione ingenua e intuitiva della tradizione, ad assumere l'accezione tecnico-operativa di grandezza continua. La natura della continuità è inscindibile dalla nozione di infinito e l'analisi di questo legame è la chiave di lettura proposta.

This research presents in a different way the *new science of motion* described in Galileo's *Discourses* (1638) and in Evangelista Torricelli's *Geometrical Work* (1644). We will focus on how the local motion has been mathematized at the beginning of the modern mechanics in order to analyse its conditions and main features. The local motion, which had been a topic of natural philosophy, became a topic of modern kinematics that is a science. We will show that the new structure of speed has been a crucial event that led the naive notion of speed of the ancient tradition to the technical notion of continuous magnitude. The nature of continuity is closely connected to infinity and an analysis of this link is the peculiar way of reading those two texts.

# Ringraziamenti.

Questo lavoro di ricerca non sarebbe stato possibile senza il supporto di numerose persone e le risorse di alcune istituzioni.

Innanzitutto, vorrei ringraziare il Prof. Enrico Berti che, in qualità di Direttore della Scuola di Dottorato in Filosofia, mi ha permesso di iniziare questo percorso, insieme al Prof. Luca Illetterati e alla Prof.ssa Francesca Menegoni che hanno diretto le attività dell'indirizzo Filosofia Teoretica e Pratica e che fanno le veci dei numerosi docenti che hanno contribuito alla mia formazione.

Un ringraziamento speciale va al Dott. Antonio M. Nunziante, Supervisore del Dipartimento di Filosofia, per i preziosi consigli e la meticolosa cura con cui ha seguito il mio percorso di formazione e di ricerca.

Non ci sono parole sufficienti per ringraziare il Prof. William R. Shea, Supervisore esterno al Dipartimento e titolare della Cattedra Galileiana di Storia della Scienza, che ha reso possibile tutto questo. Quello che ho imparato sotto la Sua guida, grazie al Suo esempio e alla Sua esperienza, è impagabile. Lo ringrazio anche per la pazienza che mi ha dimostrato in moltissime occasioni e la fiducia che ha riposto nelle mie capacità.

Un sentito grazie va anche ai miei colleghi di dottorato, con cui ho condiviso emozioni, impegno e reciproco sostegno, e agli amici che hanno avuto la bontà di ascoltarmi, rincorrermi e aspettarmi.

Il più grande e sentito ringraziamento va alla mia famiglia, per essere stata partecipe di questa esperienza e per avermi sostenuto in tutti i modi possibili durante l'intero percorso.

# Indice.

*A chi mi ha insegnato a camminare, a leggere e a pensare.*

# Introduzione.

Il presente lavoro è un saggio che dà corpo alle tensioni latenti tra linguaggio e natura, filosofia e storia, matematica e fisica. L'analisi teoretica si propone di dipanare gli aspetti della filosofia naturale pertinenti a quei rami del sapere, per poi tornare a confonderne i confini e a riallacciarne i significati. Il tema specifico di questa ricerca afferisce ai primi studi di meccanica, disciplina che abbraccia sia la fisica che la matematica, in un periodo in cui stava nascendo la scienza del movimento locale. In particolare, mi riferirò a una sua parte, quella chiamata cinematica, altrimenti detta anche la premessa matematica alla dinamica del moto. Lo studio del moto nella sua fase iniziale è di per sé un tema di confine, poiché da questione filosofica diventa scienza. Per voler essere più precisi, questa ricerca si vuole occupare di alcuni problemi fondazionali della cinematica, tradizionale agone della filosofia della scienza, anche se una delle strategie d'indagine scelta si avvale dell'analisi storico-linguistica. Questo lavoro, dunque, appartiene di diritto al tempo presente, grazie al carattere interdisciplinare o, sarebbe meglio dire, di intersezione di saperi.[i] L'elemento unificante le diverse prospettive interne sarà la domanda portante: *di cosa ha bisogno la cinematica moderna per nascere?*

Una risposta di ordine generale è già stata data dagli storici e filosofi che si sono occupati della Rivoluzione Scientifica e la bibliografia è sterminata. I principali riferimenti bibliografici e di accesso alle fonti primarie non sono molte, se si

[i] L'esempio più recente di tale commistione di saperi è dato dalla *experimental philosophy*, disciplina nata dalla filosofia analitica anglosassone e sviluppatasi fino ad abbracciare la psicologia cognitivista, l'etica, l'antropologia culturale e la statistica. Si vedano a tal proposito i seguenti contributi: Jonathan M. Weinberg (Indiana University)-Shaun Nichols (University of Utah)-Stephen Stich (Rutgers University), "Normativity and Epistemic Intuitions." *Philosophical Topics* **29** 1&2 (2001), pp. 429-460; Edouard Machery-Ron Mallon-Shaun Nichols-Stephen P. Stich, "Semantics, cross-cultural style." *Cognition* 92 (2004), B1–B12; Ernest Sosa, "A Defense of the Use of Intuitions in Philosophy." In Michael Bishop and Dominic Murphy (eds.), *Stich and His Critics*, Blackwell Publishers, 2005; Ernest Sosa, "Experimental philosophy and philosophical intuition." *Philosophical Studies* 132 (2007), pp. 99–107.

escludono le opere a stampa originali, eccezion fatta per qualche autore.[ii] Per quanto riguarda le monografie e gli articoli dedicati alla Rivoluzione Scientifica e agli studi attinenti il moto, il periodo 1930-1950 vede alcune pubblicazioni di rilievo. Ma è durante gli Anni Settanta e Ottanta che gli studi si moltiplicano vertiginosamente e l'interesse per la nascita della meccanica moderna si estende alla teoria della materia, agli esperimenti, alla filosofia meccanicista e agli altri aspetti coinvolti nella trasformazione, dando un ruolo primario alla figura di Galileo Galilei.[iii]

In Italia, Paolo Rossi ha studiato la Rivoluzione Scientifica sul versante storico e filosofico e Ludovico Geymonat su quello filosofico e scientifico; mentre Paolo Galluzzi si è entrato nell'analisi critica del lavoro di Galileo e ha prodotto l'unico lavoro sul concetto di momento. Per quanto riguarda il panorama internazionale, invece, dopo i lavori di vasto respiro di Ernst Mach, Pierre Duhem, Alexandre Koyré e Thomas S. Kuhn sulla Rivoluzione Scientifica e sull'epistemologia della scienza moderna, si sono moltiplicati gli studi sulla nascita della meccanica, quali ad esempio quelli di Anneliese Maier, Marie Boas-Hall e A. Rupert Hall, E.J. Dijksterhuis solo per citarne alcuni. Dopo la pubblicazione degli *Etudes galiléenne* di Alexandre Koyré nel 1939, sono aumentati esponenzialmente i lavori dedicati al pensiero e all'opera di Galileo. Tra i primissimi, si ricordano il *Galileo Galilei* di Ludovico Geymonat del 1957; *The School of Padua and the Emergence of Modern Science* di J.E. Randall del 1961; e il *Galilei und die scholastische Impetustheorie* di Annaliese Maier del 1967. Dopo di loro, hanno fatto la storia di questo campo di studi A.C. Crombie, I.E. Drabkin e William A. Wallace ma, soprattutto, Stillman Drake, Richard S. Westfall e William R. Shea.

C'è accordo nell'affermare che l'inizio del cambiamento epocale che porta alla fondazione della fisica moderna dipende da due fattori principali, la

[ii] Si veda la bibliografia alla Sezione 1a.

[iii] Per i principali studi di filosofia e meccanica, si veda la bibliografia alla Sezione 2a e 2b.

matematizzazione della filosofia naturale e il valore dato alla pratica sperimentale. Se da un punto di osservazione generale è evidente la differenza tra il fare scientifico rinascimentale e quello post-newtoniano, a mano a mano che ci si immerge nel pieno del periodo di trasformazione i riferimenti diventano labili e le differenze sempre meno evidenti. La domanda che mi pongo, a questo punto, è: ma *cosa vuol dire matematizzazione?*

Matematizzare un fenomeno naturale come il moto locale di un corpo significa tradurre nel linguaggio della matematica, che può essere di tipo geometrico, numerico o algebrico, quello che sembra caratterizzare il fenomeno. Il ruolo che ho attribuito alla matematica nel corso della mia analisi è essenzialmente linguistico. Pertanto, l'indagine dovrà tener conto sia della struttura sintattica, sia della semantica. Nella prima rientreranno le regole di calcolo, le procedure consolidate e le simbologie utilizzate; nella seconda, invece, mi dovrò confrontare con il significato attribuito agli oggetti matematici, come i numeri e gli enti geometrici, e alle categorie interpretative di appartenenza di ascendenza aristotelica che contengono assunzioni implicite da analizzare. La matematizzazione è, da questo punto di vista, un processo di traduzione che è prima di tutto un'interpretazione. A volte, potrà capitare che la sovrapposizione del linguaggio matematico al libro della natura introduca delle forzature o comporti delle deformazioni. Tutto questo sarà sottolineato a tempo debito nel corso dell'analisi., Per poter dare risultati efficaci, la matematizzazione si deve accompagnare a una critica serrata del fenomeno naturale, selezionandone le proprietà dominanti. Inoltre, la precisazione teoretica dei risultati dell'osservazione comporta una specializzazione della terminologia che diventa tecnica, cioè convenzionale. Le parole di nuovo conio non sono "nuove" nel senso dei neologismi, ma nei significati attribuiti a termini solitamente già in uso. L'affermarsi di una terminologia tecnica è, quindi, un sintomo chiarissimo del passaggio alla scienza moderna. Non c'è concetto che non passi attraverso le parole che, a loro volta, aiutano la ragione a selezionarne le accezioni appropriate al concetto.

Porsi una domanda sulle caratteristiche o le modalità con cui avviene la matematizzazione comporta di necessità una precisa demarcazione non tanto temporale, poiché c'è accordo unanime nel circoscrivere la nascita della cinematica al Seicento, quanto degli autori o delle opere. Il declino del modello aristotelico di spiegazione del moto era eclatante e irreversibile e durante tutto il secolo fiorirono in Europa *sistemi del mondo* e *nuove scienze* che osavano una proposta alternativa. La mia scelta è di analizzare la giornata quarta e la giornata quinta dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) di Galileo Galilei e il *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum* (1644) di Evangelista Torricelli, per diverse ragioni. La prima è che i due lavori sono uno il prolungamento dell'altro a detta di Torricelli, che scrive il proprio trattato sulla scia di entusiasmo nata dalla lettura dell'opera di Galileo. Il secondo motivo è legato a una difficoltà di ordine teorico: come si fa a leggere i testi senza introdurre significati estranei? Un tentativo di limitare i danni di un'interpretazione anacronistica e retrospettiva potrebbe essere di osservare come i due autori si confrontano sul terreno del moto locale. I significati di termini e procedure di Galileo sono ripresi da Torricelli, che ne produce un commento e, talvolta, un'analisi che aiuta il lettore contemporaneo a ridurre il rischio di fraintendimenti. Altre volte, il pensiero di Galileo risulta più comprensibile, guardando come Torricelli lo applica. Una terza difficoltà che il confronto dei due testi aiuta a risolvere è di colmare le enormi lacune lasciate dagli appunti pervenutoci di Torricelli, che altrimenti ne renderebbero criptica la lettura. Le dimensioni modeste degli scritti, dovute anche alla sua morte precoce, e il suo stile secco e contratto per addetti ai lavori possono così trovare un valido sostegno all'interpretazione dell'opera di uno dei maggiori talenti matematici dell'epoca. Il numero limitato dei documenti sarà certamente un fattore che renderà il percorso di analisi teoretica inevitabilmente un po' squilibrato.[iv]

[iv] Gli autori che mi hanno fatto da guida nella comprensione dei dettagli tecnici del lavoro di Galileo sono stati Winifred L. Wisan, William R. Shea, Jurgen Renn, Paolo Palmieri ed Enrico Giusti, oltre ai loro predecessori Ronald H. Naylor, David K. Hill e Stillman Drake. Per i riferimenti, si veda la bibliografia alla

La cinematica moderna parla di tempo, spazio, velocità e accelerazione. Il mio obiettivo sarà quindi dedicato a rintracciare il significato che Galileo e Torricelli hanno attribuito a quei termini. Sono sin da ora consapevole che l'obiettivo è molto ambizioso, ma mi accontenterò di fare un tentativo poiché "il concetto di velocità di Galileo non ci sembra abbia ricevuto dalla ricerca storica un'attenzione paragonabile [a quella che è stata data al termine momento]."[v] Nonostante i lavori che studiano i principali teoremi del moto di Galileo e Torricelli, non mi risulta ce ne sia uno che presenti una visione d'insieme dei concetti della cinematica, soprattutto per quello di velocità e accelerazione. Alla difficoltà di recuperare il significato originario dei termini se ne aggiunge un'altra, dovuta al fatto che il significato di una parola dipende anche dalle relazioni che essa stabilisce con le altre. Il contesto, come puntualizzato da Wittgenstein, è parte integrante dell'attribuzione di significati. È impossibile, quindi, esaminare un termine scollegandolo dalla mappa concettuale cui appartiene, pena la perdita d'informazione e la corretta prospettiva in cui inserirlo. L'analisi linguistica avrà due assi di riferimento: l'asse temporale, che tiene in ordine il materiale testuale e permette una lettura dei cambiamenti delle accezioni; l'asse concettuale, che tiene la parola-concetto in equilibrio con gli altri elementi della teoria.

Il tema della mia ricerca rientra di diritto nell'ambito della filosofia teoretica, poiché la questione centrale vuole studiare la concettualizzazione della prima scienza moderna. Il problema di che cos'è, e di come avviene il moto dei corpi era un tema portante nella visione del mondo antico ed era un elemento cardine della filosofia naturale. Il passaggio dalla filosofia naturale alla fondazione del pensiero scientifico è lento e graduale e coinvolse l'intero sistema concettuale o paradigma di pensiero: si dovettero modificare categorie interpretative e le loro gerarchie, e

---

Sezione 2c. Per Torricelli, invece, la bibliografia critica è quasi inesistente, eccezion fatta per alcuni saggi di François de Gandt.

[v] J.-L. Gautero e P. Souffrin, "Note sur la démonstration 'mécanique' du théorème de l'isochronisme des cordes du cercle dans les *Discorsi* de Galilée." In *Revue d'histoire des sciences*, **45** 2/3 (1992) pp. 269-280; p. 269.

forgiare nuove parole per esprimere quanto di nuovo si andava scoprendo. In questa ricerca, il taglio interpretativo dell'elaborazione teoretica è rivolto alla cinematica, disciplina considerata oggi fisico-matematica, perciò sarà impossibile non coinvolgere nozioni di matematica e di fisica. In questo senso, sarà mia cura accompagnare il lettore non specialista, chiarendo assunzioni oggi standard e utilizzando l'odierno punto di vista per valutare appieno la distanza di quell'orizzonte culturale.

Il tema appena descritto è di dimensione piuttosto ampia. Mi è quindi sembrato proporzionato alle risorse disponibili scegliere un unico punto di riferimento da seguire durante l'intera indagine. La mia scelta è caduta sul concetto di velocità perché è un elemento base della meccanica; perché è legato ad altri concetti chiave come quello di quantità di moto, di forza, di impulso e di energia; perché nessuno sembra essersi dedicato all'analisi della sua struttura, al contrario di quanto è avvenuto con le nozioni di tempo e spazio, ad esempio.[vi] La pista tracciata dalla velocità mi permetterà di ricostruirne la struttura interna del concetto e di osservare da un punto di vista inusuale gli altri elementi della teoria del moto di Galileo e Torricelli. Dinanzi al lavoro dei due autori scelti, le questioni di partenza saranno legate ai problemi che essi dovettero affrontare, di che natura e quali nello specifico. In un secondo momento, ci si occuperà delle scelte alla base delle loro proposte di soluzione. Si passerà all'ambito più strettamente matematico, quando si affronterà il tema della matematizzazione e dei concetti che fanno da ponte tra speculazione filosofica e geometria che la renderanno possibile, primo tra tutti il concetto di continuità.

[vi] Si vedano, ad esempio, Massimo Parodi, *Tempo e spazio nel Medioevo*. Torino: Loescher, 1981; John E. McTaggart, *L'irrealtà del tempo*. A cura di Luigi Cimmino, Milano: BUR, 2006; Moritz Schlick, *Spazio e tempo nella fisica contemporanea*. Napoli: Bibliopolis, 1979 [Springer Verlag, 1922]; Fernando de Felice, *L'intreccio spazio-temporale*. Torino: Bollati-Boringhieri, 2006; Stephen Hawking, *La grande storia del tempo*. Milano: Rizzoli, 2005; Stephen Hawking-Roger Penrose, *La natura dello spazio e del tempo*. Milano: RCS, 1996 [Princeton University Press, 1996].

Il Capitolo 1 ripercorrerà brevemente le tappe che, dalla pubblicazione dei *Discorsi* di Galileo, hanno portato Torricelli all'elaborazione del proprio *De motu* e all'incontro con il maestro. Alla breve apertura, seguirà l'analisi dei due testi alla luce della particolare linea interpretativa della dissertazione. Il Capitolo 2 si occuperà delle questioni fisiche sollevate dalla nuova scienza del moto, prima fra tutte l'evoluzione della semantica del termine "velocità" e le relazioni che la legano alle altre grandezze fisiche. Da questo lavoro di ricostruzione concettuale emergerà la chiave di volta della proposta di Galileo, cioè la coincidenza tra momento statico e momento dinamico che, però, egli non riuscì a completare. L'insufficienza della dimostrazione galileiana sarà, invece, risolta da Torricelli, ma solo a patto di fondare la disciplina sulla meccanica, dando un significato diverso ad alcuni elementi. I due capitoli successivi si concentreranno sulle questioni di ordine matematico. In particolare, il Capitolo 3 farà l'analisi del concetto di continuità in diversi contesti interpretativi. Dall'accezione ingenua si passerà al concetto numerico di continuità, poi a quello geometrico per poi cercare le contaminazioni possibili e le irriducibili incongruenze. Dopodiché, verranno presentati i quadri teorici di entrambi gli autori. Il Capitolo 4 analizzerà le modellistiche di Galileo e Torricelli necessarie alla matematizzazione del moto locale. Questo sarà il momento in cui si comprenderanno le trame teoretiche che hanno trasformato questo tema della filosofia naturale in una descrizione scientifica.

# Capitolo 1.

## *La nuova scienza del moto: sfide e soluzioni.*

### *Par. 1 Storia di un libro e di un incontro.*

Nella lettera di Mario Guiducci a Galileo del 16 Luglio 1633,[7] si ricava l'intenzione di Galileo di "tirare a fine quelli studi e quelle fatiche che aveva per le mani, non attinenti alle materie già dannate", che saranno pubblicati a Leida dagli Elzeviri con il titolo di *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* nel 1638. Il libro è suddiviso in quattro *Giornate*. Le prime due sono dedicate alla *nuova scienza* "intorno alla resistenza che fanno i corpi solidi all'essere per violenza spezzati;" le ultime due, alla *nuova scienza* del moto locale che era "un suggetto eterno, principalissimo in natura."[8] Come indicato anche dall'editore, la novità consisteva nell'aver posto a loro fondamento nuovi principi da cui si procede geometricamente con la deduzione delle proprietà osservate in natura. L'opera è in forma di dialogo, con gli stessi tre personaggi protagonisti del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, vale a dire Salviati, Simplicio e Sagredo. Il primo è il portavoce di Galileo; il secondo è il filosofo aristotelico portavoce della filosofia naturale ortodossa; e il terzo è una figura d'intermediazione tra le due opposte prospettive, che incarna le caratteristiche positive di chi amava studiare la natura sulla base del proprio ragionamento, anziché dell'autorità ricevuta. Alle quattro giornate segue un'*Appendice* contenente teoremi e dimostrazioni intorno al centro di gravità dei solidi.[9]

---

[7] Galileo Galilei, *Opere di Galileo*, a cura di Antonio Favaro (Firenze: G. Barbèra, 1890-1919), Vol. XV, p. 181. Questo testo sarà successivamente citato come *Opere di Galileo*, seguito dal numero romano del volume.

[8] Dalla "Lettera dello stampatore ai lettori" (*Opere di Galileo* VIII, p. 46).

[9] Sono i *Theoremata circa centrum gravitatis*, composti da Galileo tra il 1585 ed il 1586 (*Opere di Galileo* I, pp. 187-208).

L'elaborazione del materiale, che era stato in buona parte ricavato dagli studi compiuti tra il 1585 e la fine del periodo padovano (1610) anche se in una forma non definitiva, si sviluppa durante l'intero arco della sua vita. La lettera di ringraziamento, che Niccolò Aggiunti invia a Galileo il 10 settembre 1633,[10] testimonia dell'avvenuta stesura delle prime due giornate dei *Discorsi*, che si dicevano di argomento meccanico,[11] ma è in quella di Galileo a Diodati del 25 luglio 1634 che si ha la testimonianza della volontà di "pubblicare i libri del moto et altre mie fatiche, cose tutte nuove e da me anteposte alle altre cose mie si ora mandate in luce."[12] In una successiva, Galileo informa l'amico che "[i]n breve comincerò a mandare a Venezia quel che mi resta delle mie fatiche, che è quello che da me è più stimato per esser tutto nuovo e tutto mio, e quivi si procurerà che sia stampato."[13] A Fulgenzio Micanzio i primi tre fogli per la stampa arrivano in gennaio, a marzo ne ha dieci e ad aprile quasi tutta la *prima giornata*.[14] Ma le trattative con l'inquisitore per l'*imprimatur* si arenano per l'ingerenza "in opere che hanno tanto a che fare con la religione come io nel dominio del Perù," come afferma spazientito nella sua a Galileo del 14 Aprile, mentre Francesco Stelluti ha avuto notizia da Benedetto

---

[10] *Opere di Galileo* XV, p. 257.

[11] Nell'edizione di Leida dei Discorsi, compare una *Tavola delle materie principali che si trattano nella presente opera* che elenca nell'ordine: "I. Scienzia nuova prima, intorno alla resistenza de i corpi solidi all'essere spezzati. *Giornata prima, pag. 49*. / II. Qual potesse essere la causa di tal coerenza. *Giornata seconda, pag. 151*. / III. Scienzia nuova altra, de i movimenti locali. *Giornata terza, pag. 190*. Cioè dell'equabile, pag. 191. Del naturalmente accelerato, pag. 197. / IV. Del violento, o vero de i proietti. *Giornata quarta, pag. 268*. / V. Appendice di alcune proposizioni e dimostrazioni attenenti al centro di gravità de i solidi, *pag. 313*." (*Opere di Galileo* VIII, p. 17). Nell'*Avvertimento* che precede i *Discorsi*, Antonio Favaro riconosce che i contenuti corrispondenti ai titoli I. e II. Sono invertiti (*Opere di Galileo* VIII, pp. 11-38).

[12] *Opere di Galileo* XVI, pp. 115-119.

[13] Lettera di Galileo a Elia Diodati del 21 dicembre 1634, in *Opere di Galileo* XVI, p. 177.

[14] Lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo del 27 gennaio 1635 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 200-201); lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo del 17 marzo 1635 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 236-237); lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo del 7 Aprile 1635 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 254-255).

Castelli che Galileo aveva terminato il trattato dei proietti, palese riferimento alla *quarta giornata* dei *Discorsi* che si occupa del moto parabolico.[15]

Dopo alcuni tentativi falliti di pubblicare il suo libro con altri editori, Galileo decide di prendere accordi con gli Elzeviri in Olanda, che gli avevano più volte proposto di stampare un volume con tutte le sue opere, certi della forte richiesta del mercato. Richiede a Fulgenzio Micanzio la copia delle pagine in suo possesso e le invia al nuovo editore.[16] Mentre Lodovico Elzeviro è a Venezia, Galileo si impegna incessantemente nella copia del manoscritto dei *Discorsi* che intende consegnare all'editore per il tramite del Micanzio prima della sua partenza, che avviene intorno alla metà di settembre.[17] Anche se Galileo scrive a Diodati di aver consegnato alle stampe i due trattati, quello del moto e quello delle resistenze dei solidi all'essere spezzati, in una successiva precisa che in realtà non aveva fatto in tempo a copiare il trattato sui proietti.[18] Ma è probabile che nel frattempo la consistenza dei contenuti sia venuta aumentando, procrastinandone la stesura definitiva, se è vero che Galileo intende "por termine al trattato de' proietti, e mandarlo quanto prima al S. Elzevirio; e dico por termine, perché nel rivederlo e riordinarlo mi vengono continuamente proposizioni bellissime alle mani."[19] Lodovico Elzeviro rientra a Leida a metà marzo, applicandosi immediatamente alla stampa e avverte dell'inizio dell'intaglio delle figure.[20] La correzione delle bozze inizia a maggio, mentre Galileo

---

15 *Opere di Galileo* XVI, pp. 256-257; lettera di Francesco Stelluti a Galileo del 3 novembre 1635 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 337-338).

16 Lettera di Galileo a Fulgenzio Micanzio del 21 giugno 1636, in *Opere di Galileo* XVI, pp. 441-442.

17 Lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo del 5 luglioo 1636 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 446-447); lettera di Galileo a Elia Diodati del 15 agosto 1636 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 473-474); lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo del 20 settembre 1636 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 486-487).

18 Lettera di Galileo a Elia Diodati del 27 ottobre 1636 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 510-511); lettera di Galileo a Elia Diodati del 6 dicembre 1636 (*Opere di Galileo* XVI, pp. 523-524).

19 Lettera di Galileo a Elia Diodati del 7 marzo 1637 (*Opere di Galileo* XVII, pp. 41-42).

20 Lettera di Lodovico Elzevier a Fulgenzio Micanzio del 16 marzo 1637 (*Opere di Galileo* XVII, p. 45); lettera di Lodovico Elzevier a Fulgenzio Micanzio del 4 aprile 1637 (*Opere di Galileo* XVII, p. 57); lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo dell'11 aprile 1637 (*Opere di Galileo* XVII, p. 59).

prosegue nell'invio delle ultime pagine della *quarta giornata*, che viene terminata a giugno.[21] A settembre, l'editore chiede a Galileo se ha intenzione di aggiungere una *quinta giornata*, dati i riferimenti presenti nel testo in suo possesso e l'inizio della stampa della terza.[22] Con tutta probabilità, Galileo risponde in modo positivo, vista l'insistenza dell'editore per avere le pagine sulla percossa a distanza di qualche mese.[23] La stampa dei *Discorsi* termina tra febbraio e luglio del 1638 e le prime copie prendono il mare sul finire dell'anno, anche se a Galileo arriveranno molto tardi.[24]

Intanto, i *Discorsi* cominciano a circolare in Europa, mentre a Roma ne arrivano poco più di cinquanta copie subito esaurite.[25] Castelli riesce ad averne una solo a febbraio; a Milano, Antonio Santini ne acquista una con molta fatica e ne ordina altre a Parigi; a Padova, Gio. Michele Pierucci manda i propri studenti a Venezia affinché gliene procurassero una.[26] Fulgenzio Micanzio se ne trattiene due dal pacco diretto a Galileo, una per sé e l'altra per Alfonso Antonini.[27] Nel frattempo, Galileo riceve il primo collo con i *Discorsi* e invia una copia a

---

[21] Lettera di Galileo a Benedetto Guerrini del 9 maggio 1637 (*Opere di Galileo* XVII, pp. 75-76); lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo del 9 maggio 1637 (*Opere di Galileo* XVII, pp. 76-77); lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo del 20 giugno 1637 (*Opere di Galileo* XVII, p. 114).

[22] Lettera di Giusto Wiffeldich a Galileo del 26 settembre 1637 (*Opere di Galileo* XVII, pp. 187-188).

[23] Lettera di Giusto Wiffeldich a Galileo del 17 ottobre 1637 (*Opere di Galileo* XVII, p. 201); lettera di Lodovico Elzevier a Galileo del 25 gennaio 1638 (*Opere di Galileo* XVII, p. 265).

[24] Lettera di Lodovico Elzevier a Galileo del 9 marzo 1638 (*Opere di Galileo* XVII, p. 311); lettera di Giusto Wiffeldich a Galileo del maggio 1638 (*Opere di Galileo* XVII, pp. 337-338) e lettera di René Descartes a Marin Mersenne del 27 luglio 1638 (*Opere di Galileo* XVII, pp. 361-363).

[25] Lettera di Pierre de Fermat a Marin Mersenne del 22 ottobre 1638 (*Opere di Galileo* XVII, pp. 394-395); lettera di Benedetto Castelli a Galileo dell'8 gennaio 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, p. 14); lettera di Benedetto Castelli a Galileo del 29 gennaio 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, p. 23).

[26] Lettera di Benedetto Castelli a Galileo del 12 febbraio 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, p. 26); lettera di Antonio Santini a Galileo del 23 marzo 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, p. 34); lettera di Gio. Michele Pierucci a Galileo del 3 giugno 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 53-54).

[27] Lettera di Fulgenzio Micanzio a Galileo del 4 giugno 1639, in *Opere di Galileo* XVIII, pp. 55-56.

Bonaventura Cavalieri, Giovan Battista Baliani, Alessandro Marsili e Daniele Spinola.[28] Vincenzo Renieri, invece, riceve il libro direttamente da Amsterdam.[29]

Il trattato ha un'immediata e vasta eco a livello europeo, dove si apre subito un serrato dibattito sui princìpi, sui contenuti e sull'organizzazione della nuova scienza del moto.[30] Ma ben presto a Galileo comincia a sorgere qualche dubbio sulla solidità della premessa, essenziale a tutta la dottrina del moto accelerato, dovuta anche al confronto d'idee che egli ebbe con il diciassettenne Vincenzo Viviani, suo insostituibile assistente e scrupoloso studente. Non si dimentichi che la malattia agli occhi di Galileo era iniziata nella primavera del 1637, per lasciarlo nella completa oscurità già a dicembre di quello stesso anno. È Galileo stesso a testimoniare del ruolo cruciale che ebbe Vincenzo Viviani nell'approfondire il principio del moto di caduta libera dei corpi pesanti:

> L'oppositioni fattemi, son già molti mesi, da questo giovane, al presente mio ospite et discepolo, contro a quel principio da me supposto nel mio trattato del moto accelerato, ch'egli con molta applicatione andava allora studiando, mi necessitarono in tal maniera a pensarvi sopra, a fine di persuadergli tal principio per concedibile e vero, che mi sortì finalmente, con suo e mio gran diletto, d'incontrarne, s'io non erro, la dimostratione concludente, che da me

---

[28] Lettera di Bonaventura Cavalieri a Galileo del 28 giugno 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 67-68); lettera di Gio. Battista Baliani a Galileo del 1° luglio 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 68-71); lettera di Alessandro Marsili a Galileo del 16 luglio 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, p. 73); lettera di Daniele Spinola a Galileo del 3 agosto 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 79-80).

[29] Lettera di Vincenzo Renieri a Galileo del 19 agosto 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 88-89).

[30] Michele Camerota, *Galileo Galilei e la cultura scientifica nell'età della Controriforma.* Roma: Salerno Editrice srl, 2004, n. 175, p. 670.

> fin ora è stata qui conferita a più d'uno. Di questa egli
> ne ha fatto adesso un disteso per me.[31]

Ma era già dall'estate che Galileo aveva maturato questa insoddisfazione per la non proprio evidente validità dell'*assioma* del moto accelerato.[32]

Poiché Benedetto Castelli ricevette copia dei *Discorsi* a fine giugno, non è azzardato supporre che il suo assistente e segretario Evangelista Torricelli abbia avuto modo di studiarne i contenuti almeno da questo momento,[33] se si esclude che egli sia stato tra i pochi in grado di acquistare il nuovo libro con i primi arrivi in libreria dell'inizio del 1639. Stimolato dal testo galileiano, Torricelli in pochi mesi compone un trattato sul moto che nelle intenzioni della versione pubblicata nel 1644 doveva rappresentarne la prosecuzione e lo sviluppo.[34] Il *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum* è composto di due libri. Il primo, quello dedicato al moto di caduta libera, è inviato a Raffaello Magiotti all'inizio del nuovo anno.[35] A giugno ha intenzione di fare "presto d'alcune aggiunte o progressi, intorno alle materie de' moti del Galileo, che ho in ord.[ne] da molti mesi in quà. Le

---

[31] Lettera di Galileo a Benedetto Castelli del 3 dicembre 1639, in *Opere di Galileo* XVIII, pp. 125-126.

[32] Lettera di Galileo a Gio. Battista Baliani del 1° agosto 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 75-79). L'*assioma* recita: "Accipio, gradus velocitatis eiusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos tunc esse aequales, cum eorumdem planorum elevationes aequales sint" (*Opere di Galileo* VIII, p. 205). La definizione di *moto uniformemente accelerato* è la seguente: "Mutum aequabiliter, seu uniformiter, acceleratum dicimus eum, qui, a quiete recedens, temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit" (*Opere di Galileo* VIII, p. 205).

[33] Lettera di Benedetto Castelli a Galileo del 28 giugno 1639 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 67-68).

[34] "Principium quaedam de momentis gravium proponemus, ut aliqua suppleamus, quae quodammodo opportuna videbantur as scientiam. Deinde quaedam de parabola, quae nobis ad propagationem huius doctrinae utilia videbuntur, Reliquum libri primi propositiones erunt de motu accelerato; illarumque ordo ad fieri poterit in tam diversis rerum materijs, neglectus penitus non erit. Libellus alter de Motu proiectorum tractabit, ampliata Galilei doctrina, et demonstrationibus plerumque mutatis." In Evangelista Torricelli, *Opera geometrica*. Firenze: Amatoris Massae et Laurentijs de Landis, 1644, p. 97recto. In seguito, si farà riferimento a questa pubblicazione con il nome abbreviato di *Opera geometrica*. Si veda anche in *Opere di Evangelista Torricelli*, a cura di Gino Loria e Giuseppe Vassura. Faenza: G. Montanari, 1919, vol. II, p. 103. Questo testo sarà in seguito citato come *Opere di Torricelli*, seguito dal volume indicato con numeri romani.

[35] Lettera di Evangelista Torricelli a Raffaello Magiotti dell'8 gennaio 1640 (*Opere di Torricelli* III, pp. 37-40).

copierò quando habbia un poco di tempo."[36] Nel gennaio del 1641 dà testimonianza del punto in cui è giunta la sua riflessione sul moto dei proietti, che è la materia del secondo libro.[37] Il trattato sul moto di Torricelli è evidentemente importante anche per i contemporanei, se fu lo stesso Castelli a portare copia a Galileo del primo libro in versione definitiva e della brutta copia del secondo.[38] Galileo rimase talmente colpito dall'abilità di Torricelli a sviluppare la propria dottrina del moto, che gli chiese di raggiungerlo ad Arcetri per poterlo avere al suo servizio e lavorare con lui.[39]

Nell'agosto del 1641, Galileo invia a Roma ad Antonio Nardi la dimostrazione del principio del moto accelerato composta grazie all'aiuto di Viviani, chiedendo di passarne copia a Torricelli e di discuterla o emendarla anche con Magiotti.[40] Quando finalmente Torricelli si trasferì in casa di Galileo, dato il precario stato di salute del maestro nell'ottobre 1641, trovò in Vincenzo Viviani un interessante e pronto interlocutore in grado di sostenere e difendere il punto di vista galileiano.[41] L'8 gennaio 1642, Galileo morì e Torricelli gli successe nel prestigioso ruolo di *primo matematico* del granduca di Toscana. Solo nell'ottobre del 1644 riuscì a pubblicare il suo trattato sul moto, all'interno dell'*Opera geometrica*. Essa contiene la sua personale dimostrazione della validità del principio galileiano

[36] Lettera di Evangelista Torricelli a Benedetto Castelli dell'11 giugno 1640 (*Opere di Torricelli* III, pp. 40-42).

[37] Lettera di Evangelista Torricelli a Raffaello Magiotti del 5 gennaio 1641 (*Opere di Torricelli* III, pp. 43-45).

[38] Lettera di Benedetto Castelli a Galileo del 2 marzo 1641 (*Opere di Torricelli* III, p. 46) e lettera di Evangelista Torricelli a Galileo del 15 marzo 1641 (*Opere di Torricelli* III, pp. 48-49).

[39] Lettera di Torricelli a Galileo del 15 marzo 1641 (*Opere di Torricelli* III, pp.49-50).

[40] Lettera di Antonio Nardi a Galileo del 10 agosto 1641 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 342-344); lettera di Evangelista Torricelli a Galileo del 17 agosto 1641 (*Opere di Torricelli* III, pp. 58-59); lettera di Antonio Nardi a Galileo del 7 settembre 1641 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 350-352); lettera di Antonio Nardi a Galileo del 21 settembre 1641 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 354-355); lettera di Galileo a Evangelista Torricelli del 27 settembre 1641 (*Opere di Torricelli* III, pp. 60-61).

[41] Lettera di Pier Francesco Rinuccini a [Leopoldo de' Medici] del 15 novembre 1641 (*Opere di Galileo* XVIII, pp. 368).

del moto accelerato, la prima a essere pubblicata poiché la versione originale di Galilei emendata da Viviani fu inserita nell'edizione dei *Discorsi* solo nel 1656.[42]

## *Par. 2 Il 'De motu naturaliter accelerato' di Galileo.*

Gli storici della scienza che si sono occupati della cronologia degli studi galileiani del moto sono concordi nel far risalire la sua elaborazione, per lo meno nei suoi tratti essenziali, agli anni del soggiorno padovano (1592-1610).[43] La prima testimonianza diretta della completa comprensione della legge di caduta dei gravi è quella che è riferita dallo stesso Galileo nella sua lettera a Paolo Sarpi del 16 ottobre 1604:

> Ripensando circa le cose del moto, nelle quali, per dimostrare li accidenti da me osservati, mi mancava

[42] Galileo Galilei, *Discorsi intorno a due nuove scienze*, a cura di Vincenzo Viviani. Bologna: Dozza, 1655-56. Vol. II, pp. 132-136.

[43] I lavori che hanno preso in esame il problema di come Galileo sia giunto alla formulazione della scienza del moto sono numerosi. Gli studi più importanti per completezza dell'analisi o per il ruolo che hanno avuto nella storia della scienza sono riportati qui di seguito, in ordine cronologico. Ludovico Geymonat, *Galileo Galilei*. Torino: Einaudi, 1957; Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, a cura di Antonio Carugo e Ludovico Geymonat. Torino: Boringhieri, 1958; Stillman Drake, *Galileo Gleanings V. The earliest version of Galileo's 'Mechanics'*, in "Osiris", 13 (1958), pp. 262-290; William R. Shea, *Galileo's Intellectual Revolution*. Londra: MacMillan, 1972 [traduzione italiana di Paolo Galluzzi. Firenze: Sansoni, 1974]; Winifred L. Wisan, "The New Science of Motion: A Study of Galileo's 'De motu locali'," in *Archive for History of Exact Sciences*, **13** 2/3 (1974), pp. 103-306; Alexandre Koyré, *Etudes galiléennes*. Parigi: Hermann, 1939 [traduzione italiana di Maurizio Torrini. Torino: Einaudi, 1976]; Ronald H. Naylor, "Galileo's Theory of Motion: Processes of Conceptual Change in the Period 1604-1610," in *Annals of Science*, 34 (1977), pp. 365-392; William A. Wallace, *Galileo's Early Notebooks: The Physical Questions*. Notre Dame-Londra: Notre Dame University Press, 1977; Stillman Drake, *Galileo at Work. His Scientific Biography*. Chicago-Londra: Chicago University Press, 1978 [traduzione italiana di Luca Ciancio. Bologna: Il Mulino, 1988]; Stillman Drake, *Galileo's Notes on Motion*. Firenze: Istituto e Museo di Storia della Scienza, 1979; Paolo Galluzzi, *Momento*. Roma: Edizioni dell'Ateneo & Bizzarri, 1979; Stillman Drake, *Galileo: Pioneer Scientist*. Toronto: University of Toronto Press, 1990 [traduzione italiana di Girolamo Mancuso. Padova: Franco Muzzio, 1992]; Enrico Giusti, "Galilei e le leggi del moto", in *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla mecanica ed i movimenti locali*, a cura di Enrico Giusti. Torino: Einaudi, 1990, pp. ix-lx; Michele Camerota, *Gli scritti 'Demotu antiquiora' di Galileo Galilei. Il ms. Gal. 71. Un'analisi storico-critica*. Cagliari: CUEC, 1992; Peter Damerow e Jürgen Renn, "Galileo at Work: his Complete Notes on Motion in an Electronic Representation", in *Nuncius*, **13** 2 (1998), pp. 781-789; Jürgen Renn ed altri, "Hunting the White Elephant: When and How did Galileo Discover the Law of Fall?" in *Science in Context*, 13 (2000), pp. 299-419.

> principio totalmente indubitabile da poter porlo per assioma, mi son ridotto ad una proposizione la quale ha molto del naturale et dell'evidente; et questa supposta, dimostro poi il resto, cioè gli spazzii passati dal moto naturale esser in proporzione doppia dei tempi, et per conseguenza gli spazii passati in tempi eguali esser come i numeri impari *ab unitate*, et altre cose. Et il principio è questo: che il mobile naturale vadia crescendo di velocità con quella proporzione che si discosta dal principio del suo moto.[44]

Qualche anno più tardi, parlando al segretario di Stato del Granducato di Toscana delle attività che lo volevano impegnato di lì a poco, Galileo fa riferimento alla stesura di un trattato sul moto locale, la cui struttura complessivamente tratteggiata corrisponde molto bene al *De motu locali* che verrà inserito nella *terza* e *quarta giornata* dei *Discorsi*.[45]

In questo lavoro di ricerca non è tanto importante analizzare le singole tappe del percorso di scoperta,[46] che faranno comunque da sfondo a questa analisi, quanto comprendere le scelte essenziali e i criteri utilizzati, come emergono dalla stesura definitiva della prima edizione dell'opera (1638). Ed è su questo punto che si baserà il confronto con la soluzione alternativa di Evangelista Torricelli, composta tra il 1639 e il 1641 e da lui data alle stampe nel 1644.

La *terza giornata* dei *Discorsi* si apre con l'*incipit* del *De motu locali*, uno scritto composto in latino da un certo Accademico, il cui nome non viene mai indicato ma che altri non è che Galileo stesso. La giornata è dedicata alla discussione del

[44] Lettera di Galileo a Paolo Sarpi del 16 ottobre 1610 (*Opere di Galileo* X, pp. 115-116).

[45] Lettera di Galileo a Belisario Vinta del 7 maggio 1610 (*Opere di Galileo* X, pp. 351-352).

[46] La prima spiegazione di come Galileo fosse giunto alla formulazione corretta della legge di caduta dei gravi, che stabilisce che lo spazio di caduta è proporzionale al quadrato dei tempi di caduta corrispondenti (sinteticamente $s \propto t^2$), fu pubblicata da Stillman Drake nel 1986.

problema del moto locale e i tre amici convenuti a colloquio alternano la lettura del trattato con la riflessione e il commento dei punti più importanti. Galileo utilizza questo stratagemma retorico per accompagnare e sostenere il lettore, non troppo avvezzo a tali ragionamenti o poco familiare con il procedere rigorosamente deduttivo e geometrico. L'apertura presenta i principali risultati ottenuti da questa nuova scienza del moto, che si andava a fondare, visti con gli occhi di Galileo e dei suoi contemporanei. Essi sono: la prova che il moto di caduta di un corpo grave è accelerato;[47] la scoperta della proporzione che sussiste tra intervalli uguali di tempo e spazi percorsi in quegli intervalli durante un tale moto; la dimostrazione che la curva tracciata da un proiettile ha forma parabolica.[48] Il trattato è quindi diviso in tre parti, la prima dedicata al moto uniforme, la seconda al moto accelerato e la terza al moto violento, esposto nel corso della *quarta giornata*. I tre protagonisti leggono il *De motu equabili* senza soluzione di continuità. Il trattato riassume le proprietà del moto uniforme, presentandole con una veste squisitamente geometrica: alla definizione[49] con commento[50] seguono quattro assiomi[51] che

---

[47] Domenico Soto (1494-1560), docente di teologia dell'università di Salamanca, fu il primo a descrivere la caduta libera e il moto dei proietti come moto uniformemente accelerato nel suo commento alla *Fisica* aristotelica, intitolato *Super octo libri Physicorum Aristotelis quaestiones*, senza averne però dimostrato la validità. La maggior parte dei filosofi naturali dell'epoca erano ancora convinti che la spiegazione aristotelica fosse la più corretta. La caduta libera era quindi un moto uniforme in cui il corpo raggiungeva la sua velocità, naturalmente propria, in un brevissimo istante dalla quiete. In questa prospettiva è facile comprendere quanto fosse problematico e cruciale allo stesso tempo chiarire come la velocità venisse incrementata con continuità dal valore minimo nullo, nello stato di quiete, a quello massimo corrispondente al momento dell'urto con il suolo. La lunga digressione galileiana, che descrive come l'impatto al suolo sia crescente in proporzione all'altezza della caduta, è indispensabile per convincere il lettore della bontà del modello accelerato.

[48] La convinzione generale era quella che l'ultimo tratto della curva descritta dal moto di un proiettile fosse con buona approssimazione verticale.

[49] "DEFINITIO. Aequalem, seu uniformem, motum intelligo eum, cuius partes quibuscunque temporibus aequalibus a mobili peractae, sunt inter se aequales" (*Opere di Galileo* VIII, p. 191).

[50] È l' "ADMONITIO", in cui Galileo sottolinea che la proporzione tra i rapporti dei tempi e i corrispondenti rapporti degli spazi percorsi deve mantenersi costante, qualunque sia l'ampiezza degli intervalli temporali considerati. La precisazione prova che Galileo aveva ben chiara la differenza ontologica tra quella che noi oggi chiameremo *velocità media* e quella che indicheremo con *velocità istantanea*, se non altro per il *moto uniforme*, cioè quello a velocità costante. Il moto uniforme che Galileo vuole descrivere è quindi il moto di un corpo che procede istante dopo istante con la medesima velocità istantanea costante. L'unico moto in natura ad avere una tale proprietà è il moto circolare dei pianeti in rotazione attorno al centro del mondo o, come

reggono le dimostrazioni dei sei teoremi.[52] Questa scelta è perfettamente in linea con la tradizione archimedea che descrive alcuni fenomeni naturali tramite rapporti

aveva già affermato Galileo nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (Firenze: Pier Gio. Batista Landini, 1632, p. 141; si veda anche *Opere di Galileo* VII, p. 174), il moto uniforme di una nave attorno alla circonferenza terrestre con centro nel centro della Terra. Questo è in accordo con quanto dimostra Aristotele della perfetta sfericità della superficie dell'acqua (*ΠΕΡΙ ΟΥΡΑΝΟΥ*, II, 287a30-287b14): "SALV. Adunque una nave, che vadia movendosi per la bonaccia del Mare, è un di quei mobili, che scorrono per una di quelle superficie, che non sono né declivi, né acclivi, è però disposta, quando le fusser rimossi tutti gli ostacoli accidentarij, et esterni, a muoversi, con l'impulso concepito una volta, incessabilmente, e uniformemente." Questo tipo di moto esemplifica il concetto galileiano di *inerzia circolare*:

> SALV. […] ma il moto per la linea orizzontale, che non è declive, né elevata, è moto circolare intorno al centro, dunque il moto circolare non s'acquisterà mai naturalmente senza il moto retto precedente; ma bene acquistato che è si sia, si continuerà egli perpetuamente con velocità uniforme. […] il moto per linea retta non può esser di uso alcuno nelle parti del Mondo bene ordinate; […] così non avviene de i movimenti circolari; de i quali quello, che è fatto dal mobile in se stesso, già lo ritien sempre nel medesimo luogo, e quello che conduce il mobile per la circonferenza d'un cerchio intorno al suo centro stabile, e fisso, non mette in disordine né sé, né i circonvicini. […] nel moto circolare il mobile sempre si parte da termine naturale, e sempre si muove verso il medesimo, dunque in lui la ripugnanza, e l'inclinazione son sempre di eguali forze, dalla quale egualità ne risulta una non ritardata, ne accelerata velocità, cioè l'uniformità del moto. Da questa uniformità, e dall'esser terminato, ne può seguire la continuazion perpetua col reiterar sempre le circolazioni […] Concludo per tanto il solo movimento circolare poter naturalmente convenire a i corpi naturali integranti l'universo.

(*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Firenze: Pier Gio. Batista Landini, 1632, pp. 21-24). Si veda anche *Opere di Galileo* VII, pp. 52-57.

[51] "AXIOMA I. Spatium transactum tempore longiori in eodem motu aequabili maius esse spatio transacto tempore breviori. AXIOMA II. Tempus quo maius spatium conficitur in eodem motu aequabili, longius est tempore quo conficitur spatium minus. AXIOMA III. Spatium a maiori velocitate confectum tempore eodem, maius est spatio confecto a minori velocitate. AXIOMA IV. Velocitas qua tempore eodem conficitur maius spatium, maior est velocitate qua conficitur spatium minus" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 191-192).

[52] "THEOREMA I. Si mobile aequabiliter latum eademque cum velocitate duo per transeat spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta. THEOREMA II. Si mobile temporibus aequalibus duo per transeat spatia, erunt ipsa spatia inter se ut velocitates. Et si spatia sint ut velocitates, tempora erunt aequalia. THEOREMA III. Inaequalibus velocitatibus per idem spatium latorum tempora, velocitatibus e contrario respondent. THEOREMA IV. Si duo mobilia ferantur motu aequabili, inaequali tamen velocitate, spatia temporibus inaequalibus ab ipsis peracta habebunt rationem compositam ex ratione velocitatum et ex ratione temporum. THEOREMA V. Si duo mobilia aequabili motu ferantur, sint tamen velocitates inaequales, et inaequalia spatia peracta, ratio temporum composita erit ex ratione spatiorum et ex ratione velocitatum contrarie sumptarum. THEOREMA VI. Si duo mobilia aequabili motu ferantur, ratio velocitatum ipsorum

aritmetici, e alcune curve geometriche tramite l'analisi del movimento di un punto con opportune proprietà. Gli assiomi pongono a fondamento del moto uniforme alcune relazioni tra tempo, spazio e velocità. In particolare, a parità di velocità, a tempo maggiore corrisponde spazio percorso maggiore e viceversa:

se $v_1 = v_2$ allora vale la relazione $t_1 < t_2 \Leftrightarrow s_1 < s_2$ (Assioma I e II);

a parità di tempo, a velocità maggiore corrisponde spazio percorso maggiore e viceversa:

se $t_1 = t_2$ allora vale la relazione $v_1 < v_2 \Leftrightarrow s_1 < s_2$ (Assioma III e IV).

Se la velocità resta costante, il rapporto dei tempi equivale al rapporto degli spazi corrispondenti:

se $v_1 = v_2$ allora vale la relazione $\frac{t_1}{t_2} = \frac{s_1}{s_2}$ (Teorema I),

vale a dire che l'andamento delle due grandezze fisiche dello spazio e del tempo è identico, e gode di una proporzionalità diretta lineare ($t \propto s$). Se l'intervallo di tempo in cui si effettua l'osservazione è lo stesso oppure ha pari durata, il rapporto degli spazi equivale al rapporto delle velocità:

se $t_1 = t_2$ allora vale la relazione $\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2}$ (Teorema II).

In questo caso, sono gli spazi a essere direttamente proporzionali alle velocità ($s \propto v$). Questi criteri servono a stimare spazi, tempi o velocità di corpi in moto, sia quando i due oggetti sono osservati contemporaneamente, sia quando si studia uno stesso oggetto durante moti successivi.[53] Essi corrispondono ai criteri di confronto

composita erit ex ratione spatiorum peractorum et ex ratione temporum contrarie sumptorum" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 192-196).

[53] Qui sorge un problema. Come scriveva Vincenzo Renieri a Galileo: "So che è verissimo che due gravi differenti in specie, benché eguali in mole, non servano proportione alcuna di gravità nello scendere […]: ma che due gravi ineguali di peso, ma della stessa materia, cadendo dall'istessa altezza a perpendicolo, habbiano ad arrivar con diversa velocità et in diverso tempo al centro, mi pareva d'haver da lei udito o letto, ché ben

dei movimenti che anche Aristotele aveva descritto nella *Fisica*.[54] I sei teoremi successivi non sono commentati, né ulteriormente sviluppati, come accade quando c'è completo accordo di vedute tra i tre protagonisti del dialogo, il che si verifica quando si trovano d'accordo la spiegazione aristotelica tradizionale e quella della scienza nuova galileiana.[55]

non mi ricordo, non poter essere" (*Opere di Galileo* XVIII, lettera del 20 marzo 1641, p. 310). Detto in altri termini, quando si vogliono studiare i moti di caduta di due corpi, questi possono essere: a) composti della stessa materia, avere lo stesso volume e la stessa forma; b) composti della stessa materia, avere lo stesso volume e forma diversa; c) composti della stessa materia, avere volume diverso; d) composti di diverse materie, avere lo stesso volume e la stessa forma; e) composti di diverse materie, avere lo stesso volume e forma diversa; f) composti di diverse materie, avere volume diverso. Nel processo di generalizzazione che parte dall'esame di un singolo fenomeno (il moto di caduta di un particolare oggetto fatto con un determinato materiale, di un dato volume e con una forma peculiare) e che approda all'enunciazione della legge universale che descrive il fenomeno-tipo a prescindere dalle peculiari caratteristiche dell'oggetto, ci sono alcuni nodi cruciali. Il primo è riconoscere che, nella caduta libera con partenza dalla quiete, la velocità di caduta non è sostanzialmente modificata dalla forma dell'oggetto. Il secondo problema consiste nel provare che anche il volume o *mole* non ne altera il comportamento. Il terzo e ultimo passaggio è legato alla dimostrazione che anche una diversa composizione, cioè materiali diversi, non influisce. Solo allora, tutti i corpi che cadono hanno lo stesso comportamento. In altri termini, Galileo dimostra che la velocità di caduta è indipendente dal *peso*. Nel risolvere il primo nodo, Galileo deve capire che il comportamento dei corpi che galleggiano, il cosiddetto *modello idrostatico*, o che si muovono nei liquidi grazie alla *spinta di Archimede* non è applicabile al caso della caduta libera in aria. Per essere più precisi, si ha che le condizioni del moto o della quiete di corpi immersi nell'acqua non corrispondono alle condizioni che si riscontrano nella caduta libera in aria.

[54] Nel Libro IV dedicato allo studio dei concetti di *luogo* e di *spazio*, Aristotele descrive le relazioni tra tempo e velocità quando un corpo deve attraversare un mezzo di un certo spessore, oppure coprendo una data distanza in esso. Nel caso di corpi che si muovono nello stesso mezzo, si ottengono le relazioni tra spazi percorsi e tempi che corrispondono ai primi due assiomi (*ΦΥΣΙΚΗΣ ΑΚΡΟΑΣΕΩΣ*, IV 8, 215b1-215b10). Ma la trattazione completa delle relazioni tra spazi, tempi e velocità che corrisponde compiutamente alle relazioni descritte da Galileo si ha solo nel Libro VI, quando viene affrontata l'analisi del concetto di *continuo* (*ΦΥΣΙΚΗΣ ΑΚΡΟΑΣΕΩΣ*, VI 2, 231a23-232b20).

[55] In termini moderni e con l'aiuto della rappresentazione sintetica in uso oggi, i teoremi possono essere tradotti nel seguente modo:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| THEOREMA | I. | $v_1 = v_2 \Rightarrow t_1 : t_2 = s_1 : s_2$; | THEOREMA | II. | $t_1 = t_2 \Rightarrow s_1 : s_2 = v_1 : v_2$; |
| THEOREMA | III. | $s_1 = s_2 \Rightarrow t_1 : t_2 = v_2 : v_1$; | THEOREMA | IV. | $s_1 : s_2 = (v_1 : v_2) \cdot (t_1 : t_2)$; |
| THEOREMA | V. | $t_1 : t_2 = (s_1 : s_2) \cdot (v_2 : v_1)$; | THEOREMA | VI. | $v_1 : v_2 = (s_1 : s_2) \cdot (t_2 : t_1)$. |

I teoremi I, II, III forniscono la proporzione di due grandezze, quando la terza è costante. I teoremi IV, V e VI descrivono il rapporto di una grandezza in funzione delle altre due, nel caso in cui tutte e tre siano variabili. In quest'ultimo caso, i teoremi V e VI sono oggi immediatamente deducibili dal teorema IV grazie alle regole di equivalenza delle equazioni. Il fatto che Galileo si sentisse obbligato a fornire tutte e tre le relazioni e a dimostrarle autonomamente fa capire come fossero ontologicamente scollegate. Esse, cioè, avevano una definizione autonoma e a se stante. Ad esempio, la velocità del moto non era assimilabile allo spazio, al tempo e neppure al loro rapporto come, invece, riconosciamo valido oggi. Infatti, spazio, tempo e velocità

Si passa poi rapidamente alla seconda parte della giornata, quella dedicata alla lettura del *De motu naturaliter accelerato*. La dichiarazione d'intenti dell'Accademico fa subito presente un presupposto epistemologico fondamentale per Galileo, quello cioè che la natura si serve della forma più semplice di accelerazione per i gravi naturalmente cadenti dalla quiete, cioè quella che produce incrementi di velocità uguali per intervalli di tempo uguali.[56] La bontà di tale criterio sarà corroborata dalla validità delle proprietà ricavate per via deduttiva, ma corrispondenti all'*apparenza* dei fenomeni.[57] A questo punto, si definisce il moto uniformemente accelerato di un grave che inizia dalla quiete, come quel moto che in tempi uguali aggiunge uguali *momenti*[58] alla velocità.[59] Per stabilirne l'intensità, si

---

appartenevano a categorie diverse ed erano *attributi* ontologicamente diversi del corpo in moto. È per questo motivo che quando Galileo ha bisogno di studiare la velocità di un *grave*, cioè di un corpo pesante, a partire dalla quiete, egli descrive la partenza dalla quiete (*infinita tardità*) o il suo raggiungimento (*grande tardità*) nel caso del moto decelerato instaurando una relazione simmetrica tra velocità e tardità, che è squisitamente linguistica (*Opere di Galileo* VIII, p. 199). Si avverte il lettore che il simbolo "=" che serve a instaurare la proporzione dei due rapporti è moderno e al suo posto si utilizzava "::". In seguito, si ricorrerà all'originale ogni qual volta sarà importante sottolineare che non ci può essere un'*identità* tra rapporti di grandezze ontologicamente differenti. Per la loro definizione aristotelica, si veda il Libro IV della *Fisica* (*ΦΥΣΙΚΗΣ ΑΚΡΟΑΣΕΩΣ*, IV, 208a-224a17).

[56] "Dum igitur lapidem, ex sublimi a quiete descendentem, nova deinceps velocitatis acquifere incrementa animadverto, cur talia additamenta, semplicissima atque omnibus magis obvia ratione, fieri non credam? Quod si attente inspiciamus, nullum additamentum, nullum incrementum, magis simplex inveniemus, quam illud, quod semper eodem modo superaddit" (*Opere di Galileo* VIII, p. 197).

[57] "Eorundem speculari passiones decrevimus, si eam, quam allaturi sumus de nostro motu accelerato definitionem, cum essentia motus naturaliter accelerati congruere contigerit. Quod tandem, post diuturna mentis agitationes, repperisse confidimus; ea potissimum ducti rationr, quia symptomatis, deinceps a nobis demonstratis, apprime respondere atque congruere videntur ea, quae naturalia experimenta sensui repraesentant" (*Opere di Galileo* VIII, p. 197).

[58] Il termine "momentum velocitatis" è utilizzato da Galileo per indicare l'intensità della velocità raggiunta in un certo istante a seguito di una sua variazione o incremento/decremento. In quest'accezione è sinonimo di *grado*, fatto confermato dalla presenza di "gradum seu momentum velocitatis" poche righe prima della definizione (*Opere di Galileo* VIII, p. 198, riga 10). Qui il significato di *momento della velocità* non è da confondere con quello di *momento meccanico*. Questa grandezza appartiene al contesto legato allo studio delle macchine, nel quale veniva usata per indicare l'effetto dinamico della pesantezza di un corpo. Esso varia con la distanza della posizione del corpo dal centro di rotazione cui è collegato (meglio conosciuto come *principio della leva*). Sull'evoluzione del significato di *momento della velocità* si veda in particolare Paolo Galluzzi, *Momento* (Roma: Edizioni dell'Ateneo & Bizzarri, 1979), p. 364, nota 2.

[59] "Motum aequabiliter, seu uniformiter, acceleratum dico illum, qui, a quiete recedens, temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit" (*Opere di Galileo* VIII, p. 198).

deve prendere l'incremento misurato nel primo tratto di caduta, come unità di misura del momento. È il valore che corrisponde al primo intervallo temporale grande o piccolo a piacere, unità di misura del tempo, durante tutta l'osservazione di quel particolare moto. Così facendo, Galileo riesce a ricavare delle proprietà generali, senza rinunciare alla peculiarità di ciascun moto. Infatti, se ogni corpo in caduta libera segue la stessa legge, ogni moto uniformemente accelerato sarà individuato da quello che succede all'inizio del suo percorso. A questo punto, però, si sollevano subito alcune questioni, che sono rese palesi nel successivo scambio di battute tra i tre protagonisti del *Dialogo*, "se tal definizione [...] si adatti, convenga e si verifichi in quella sorte di moto accelerato che i gravi naturalmente descendenti vanno esercitando."[60]

Il primo *scrupolo* è legato al paradosso che nasce confrontando ciò che i sensi ci suggeriscono, con le conseguenze di un certo tipo di analisi del movimento. Se il grave passa dalla quiete al moto accelerato con una velocità proporzionale al tempo, esso deve poter assumere ogni valore numerico, da zero a quello massimo. Allora, quando si vogliono determinare i gradi di velocità corrispondenti a intervalli temporali sempre più piccoli, misurati dall'istante iniziale del moto, ci si accorge che il loro numero è infinito, mentre "il senso ci mostra, un grave cadente venir subito con gran velocità."[61] Il problema nasce nel poter pensare che gli infiniti incrementi di velocità, numericamente identici al numero degli infiniti istanti di tempo che si susseguono dall'inizio del moto a un suo termine dato, siano compatibili con la rapidità con cui il grave raggiunge una velocità sensibilmente consistente. Detto in termini matematici, il paradosso consiste nell'avere un valore finito per la velocità finale, quando essa è concepita come una somma d'infiniti gradi di velocità, cioè poter conciliare la finitezza del risultato numerico con l'infinità del numero degli incrementi che devono essere sommati tra di loro durante il processo di calcolo. Questo era un argomento molto in voga al tempo,

[60] *Opere di Galileo* VIII, p. 198.

[61] *Opere di Galileo* VIII, p. 199.

che apparteneva al dibattito sulla validità delle dimostrazioni geometriche effettuate tramite il *metodo di esaustione*.[62] Questo procedimento, appartenente all'ambito squisitamente matematico, aveva un corrispondente sul piano fisico legato al *problema degli indivisibili*.[63] Infatti, il paradosso si ripresenta in modo analogo quando si cerca di determinare come l'infinità degli elementi o particelle elementari che compongono la materia possa dar luogo alla finitezza dei corpi, come pure delle altre loro proprietà o attributi. Galileo aveva affrontato questi temi fin dall'inizio della sua carriera. È questa la ragione per cui il trattato giovanile intitolato *Theoremata circa centrum gravitatis* e la *nuova scienza* della resistenza dei materiali sono entrambi presenti nei *Discorsi*. Il primo è inserito come appendice alla fine dell'opera, mentre la seconda è il tema delle prime due giornate. In essi sono applicati procedimenti matematici che coinvolgono il concetto d'infinito per determinare alcune proprietà geometriche di corpi solidi tridimensionali, come quella di baricentro, oppure alcune proprietà fisiche, come la capacità di resistere a una sollecitazione esterna senza spezzarsi. La questione, come sollevata da Sagredo, prova che Galileo era consapevole di dove si annidassero le difficoltà. Infatti, se la velocità si comporta come il tempo al punto tale che il suo accrescimento è sancito aritmeticamente da una proporzione, essa deve aumentare con *continuità*, attraversando ogni valore intermedio. La continuità del tempo non era messa in discussione, poiché era stata dimostrata da Aristotele.[64] Se la definizione pone in

---

[62] Il *metodo di esaustione* fu applicato per la prima volta da Eudosso di Cnido (408aC-355aC circa), il più importante matematico dopo Archimede. Ci è pervenuto come Capitolo XII degli *Elementi* di Euclide, dov'è applicato al calcolo di aree di figure curvilinee. Il metodo consiste nell'esaurire la superficie da misurare con una serie di poligoni regolari di cui si conosce come calcolarne l'area. La serie deve approssimare l'area cercata dall'interno, dall'esterno o da entrambe le direzioni, come fa Archimede, finché la parte ancora scoperta è sufficientemente piccola. A quel punto, si utilizza una dimostrazione per assurdo per provare che l'area trovata grazie ai poligoni coincide con quella della figura curvilinea.

[63] Con *problema degli indivisibili* s'intende la questione relativa alla costituzione microscopica della materia, come diremmo oggi. Quando è possibile suddividere una certa grandezza *all'infinito*, si ha può supporre che alla "fine" del processo di divisione ci siano parti che non possono essere ulteriormente divise (posizione finitista); oppure si può negare che questo possa succedere, pensando sempre possibile un'ulteriore suddivisione (posizione continuista).

[64] Lo studio degli attributi del tempo e la discussione di alcune difficoltà logiche si trovano nella *Fisica* di Aristotele (*ΦΥΣΙΚΗΣ ΑΚΡΟΑΣΕΩΣ*, IV, 10-14, 217b29-224a17). In sintesi, tempo e movimento sono

relazione stretta le due grandezze del moto, allora dalla continuità del tempo si ricava necessariamente la continuità del grado di velocità. Salviati, che impersona Galileo stesso, a sostegno di tale comportamento descrive un caso concreto su cui l'accordo diventa spontaneo, quello della *percossa*.[65] Un corpo pesante, prima appoggiato al suolo e poi fatto cadere da altezze crescenti, produce un effetto tangibile a seguito dell'urto con il terreno, che è visibilmente più intenso in funzione della distanza verticale percorsa.[66] Se la percossa, intesa come un effetto, cresce con la durata e con la lunghezza del tragitto, la sua causa, cioè l'*impeto* del cadente, dovrà a sua volta seguire lo stesso andamento di crescita continua. Il caso di un corpo lanciato verso l'alto e lasciato poi ricadere offre a Sagredo l'opportunità di osare una spiegazione di tipo causale. Questo è l'unico riferimento esplicito del possibile legame tra l'*impeto*, che è quella virtù dinamica del moto sempre in relazione con la velocità del mobile,[67] e la *gravità*,[68] pensata come quella virtù

---

percepibili solo contemporaneamente, l'uno grazie all'altro e viceversa. Il tempo è un qualcosa del movimento che segue la grandezza durante il suo divenire. Pertanto, se la grandezza è continua, allora anche il movimento è continuo e, di conseguenza, lo è anche il tempo. Il tempo è una specie di numero ed è ciò che è numerato. È continuo grazie all'*ora*, l'istante che corrisponde al tempo presente, ed è divisibile in base all'*ora* nel senso del *prima* e del *dopo*.

[65] Che il problema sollevato dal fenomeno della percossa fosse di difficile comprensione e, nello stesso tempo, di estrema importanza nell'economia della nuova scienza del moto è avvalorato anche dal fatto che Galileo avrebbe voluto inserire una *giornata sesta* alla fine dei *Discorsi* interamente dedicata a esso. Vi è anche un altro indizio dello stretto legame tra il problema dei baricentri e il problema della velocità o impatto nella caduta. Esso è fornito dall'intrecciarsi dei due temi durante l'intera giornata (*Opere di Galileo* VIII, pp. 321-346).

[66] Si veda a tal proposito la nota 41.

[67] Testualmente: "virtù impressagli dal proiciente" (*Opere di Galileo* VIII, p. 201); "virtù impressa", "virtù del proiciente", "virtù impellente all'in su"(*Opere di Galileo* VIII, p. 202). È in questo contesto che Galileo instaura l'equivalenza dei modelli per lo studio del moto: "e questo sostentamento che vieta la scesa al sasso, che importa che sia fatto più dalla vostra mano, che da una tavola, o da una corda dalla quale ei sia sospeso? Certo niente." (*Opere di Galileo* VIII, p. 202). La *tavola* è presente sia nel caso dell'appoggio su un piano orizzontale, sia nel caso dell'uso di un piano inclinato. La *corda*, invece, agisce nello schema del pendolo e nel piano inclinato, dove due corpi, uno lungo la verticale e l'altro sull'inclinata, sono collegati in modo da farsi equilibrio.

[68] Il termine *gravità* può essere fuorviante. Per un lettore contemporaneo, la parola ricorda immediatamente la descrizione data da Newton, riguardo alla *forza* che si esprime mutuamente tra due corpi dotati di una certa quantità di materia, detta *massa*, quali sono la Terra e un oggetto in prossimità di essa. Galileo e i suoi contemporanei, invece, non avevano ancora distinto tra massa e *accelerazione di gravità*. Quindi, è preferibile

costante e intrinseca ai corpi in moto che determina la loro tendenza naturale alla caduta. Quando si getta un oggetto verso l'alto, invece, il prevalere dell'impeto sulla gravità o il loro farsi equilibrio determinano il moto violento decelerato verso l'alto, la quiete alla sommità del tragitto e la successiva caduta accelerata. È dalla loro differenza, variabile con continuità come il tempo e come l'insieme dei numeri, che si deduce la continuità dell'accelerazione.[69] È Sagredo a presentare questa spiegazione al posto di Salviati, perché non è dimostrabile in senso stretto. Quest'ultimo rimarca che il proprio interesse è solo per "le passioni degli effetti della caduta."[70] Per essi è sufficiente sapere che il momento della velocità e la velocità stanno nello stesso rapporto dei tempi corrispondenti. Se la percossa

---

utilizzare parole quali *gravezza* e *corpo grave*, che hanno il pregio di sottolineare che nel Seicento il moto era visto come il risultato dell'attività di un *motore*, esterno o interno al corpo stesso. È questo un tipico approccio filosofico, in cui la determinazione di una *spiegazione causale* è il fine ultimo della ricerca. In questo caso, si è scelto di mantenere il termine *gravità*, perché la sua accezione in questo contesto non è troppo lontana da quella post-newtoniana.

[69] Il testo si riferisce a un preciso passaggio, che è evidentemente errato. Nel corso della *seconda giornata* del *Dialogo* (*Opere di Galileo* VIII, p. 201), si legge "quindi nasce la continua *accelerazione* del moto." In realtà, è l'*intensità* della velocità istantanea a variare con continuità, mentre l'accelerazione è costante. Questo passo conferma alcuni fatti importanti. Innanzitutto, il concetto di *accelerazione*, collegato alla differenza tra *impeto* e *pesantezza* del mobile, è una grandezza variabile agli occhi di Galileo. Si potrebbe ipotizzare che per Galileo la parola *accelerazione* fosse sinonimo di *velocità variabile con continuità*, e non ancora di *rapporto costante* tra una variazione di velocità e la durata dell'intervallo di tempo in cui essa si verifica. Questo è coerente con l'affermazione che egli non era riuscito a cogliere l'esistenza di un collegamento tra l'*impeto* e la *mole* dei corpi, che per altro aveva ben definito nel trattato *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua* (si veda a tal proposito: *Opere di Galileo* IV, p. 67). Questo gli pregiudicò la capacità di riconoscere l'esistenza di un comportamento unico, se non di un comportamento *uniforme*, dei corpi in prossimità della Terra, ovvero della presenza di una stessa accelerazione uguale per tutti i corpi. In seconda battuta, la continuità attribuita all'accelerazione manifesta una comprensione parziale del suo significato. Infatti, Galileo concepiva *tempo*, *spazio*, *velocità* e *accelerazione* come proprietà separate e sostanzialmente diverse, in qualche modo autonome tra loro, anche se talvolta si potevano riscontrare delle uguaglianze nei rapporti delle loro variazioni corrispondenti. L'uso della *teoria delle proporzioni*, se pur modificata in alcuni aspetti marginali dalla versione comunemente accettata al tempo, era utilizzata in modo da permettere il rapporto solo tra *grandezze omogenee* tra loro. Per un'analisi dettagliata della teoria, si veda Enrico Giusti, *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, I ed. Torino: Bollati Boringhieri, 1993, pp. 57-82. Questo limite descrittivo diviene anche un limite teoretico, impedendo la comprensione della velocità (media), come rapporto tra spazio percorso e tempo impiegato, e dell'accelerazione (media), come rapporto tra variazione di velocità e intervallo corrispondente.

[70] *Opere di Galileo* VIII, p. 202.

permette di saggiare l'intensità della velocità, sembra più naturale collegarla allo spazio percorso piuttosto che alla durata della caduta.

Il secondo *scrupolo* rappresenta l'obiezione più forte alla legge del moto accelerato. In base al legame tra percossa o impeto dell'impatto e velocità di caduta nel momento dell'impatto, risulterebbe più intuitivo ritenere che la velocità cresca in proporzione allo spazio percorso.[71] La confutazione è sviluppata attraverso due esempi in cui viene applicata la *reductio ad absurdum*. Ricordando che gli intervalli temporali che si prendono in esame sono sempre uguali, dalla proporzione tra il rapporto delle velocità e il rapporto degli spazi percorsi, si ottiene che il medesimo oggetto percorre spazi crescenti nello stesso arco di tempo. Questa eventualità è possibile solo nel moto istantaneo, che non corrisponde a quello che si sta studiando. Invece, a parità di percuziente e in seguito alla proporzione tra distanza percorsa, *momento* e velocità, si avrebbe che "la doppia velocità passa il doppio spazio nell'istesso tempo",[72] mentre il tempo impiegato nella caduta è maggiore e

---

[71] Galileo era convinto di questo all'inizio della sua carriera. Nella lettera a Paolo Sarpi del 16 ottobre 1604, egli scrive:

> Ripensando circa le cose del moto, nelle quali, per dimostrare li accidenti da me osservati, mi mancava principio totalmente indubitabile da poter porlo per assioma, mi son ridotto ad una proposizione la quale ha molto del naturale et dell'evidente […]. Et il principio è questo: che il mobile naturale vadia crescendo di velocità con quella proportione che si discosta dal principio del suo moto; come, v.g., cadendo il grave dal termine *a* per la linea *abcd*, suppongo che il grado di velocità che ha in *c* al grado di velocità che hebbe in *b* esser come la distanza *ca* alla distanza *ba*, et così conseguentemente in *d* haver grado di velocità maggiore che in *c* secondo che la distanza *da* è maggiore della *ca*.

(*Opere di Galileo* X, p. 114). Una discussione molto simile si trova anche nei *Frammenti attinenti ai discorsi*"(*Opere di Galileo* VIII, pp. 373-374, p. 383) e nel foglio manoscritto 128 recto ("Galileo's Notes on Motion", a cura di Stillman Drake in *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza* **3** 2 (1979), p. 41). Come da questo principio errato egli sia riuscito a ricavare la corretta legge di caduta dei gravi (si veda nota 38) non è dato di sapere. Il problema è stato studiato da Winifred L. Wisan, nel suo "The New Science of Motion: A Study of Galileo's *De motu locali*" (in *Archive for History of Exact Sciences*, a cura di C. Truesdell **13** 2/3 (1974), pp. 103-306), e da Jürgen Renn, nel suo "Hunting the White Elephant: When and How Did Galileo Discover the Law of Fall?"(in *Science in Context* 13 (2000), pp. 299-419).

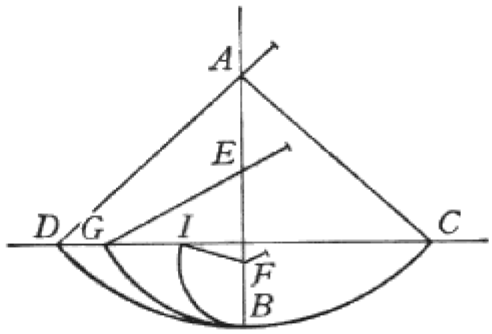
[72] *Opere di Galileo* VIII, p. 204.

non uguale. Pertanto, anche se la relazione più naturale sembra essere quella tra velocità e spazio percorso, esso si rivela logicamente inconsistente. A questo punto, la definizione di moto uniformemente accelerato è chiarita e da considerarsi valida, vale a dire fondata. Scelta obbligata resta pertanto quella del tempo.

Diventa ora comprensibile il motivo per cui l'assioma del moto accelerato descrive una proprietà della velocità e non fa minimamente riferimento all'accelerazione: il *grado di velocità* acquistato dallo stesso mobile su piani diversamente inclinati è sempre lo stesso, purché l'altezza di tali piani sia uguale.[73] Il principio a fondamento del moto naturalmente accelerato deve necessariamente descrivere il particolare comportamento della velocità, l'unica grandezza coinvolta nella definizione. Se la definizione dava luogo a incertezze e obiezioni, Galileo non poteva di certo sorvolare sulle difficoltà che nascevano dall'assioma, ancor meno evidente e intuitivo. È vero che esso è il dato di partenza, presupposto e fondamento di un edificio costruito per deduzione. Proprio per questo, una premessa poco convincente e contro-intuitiva che poteva minarlo alla base. Era quindi indispensabile dar spazio alla discussione tra i tre personaggi e permettere all'Accademico di palesare le proprie ragioni. Anche se, tecnicamente, l'assioma non poteva essere dimostrato, era indispensabile che esso sembrasse verosimile e molto probabile. Durante il dialogo precedente che ruotava attorno alla definizione di moto uniformemente accelerato, era stata istituita un'equivalenza tra altezze di caduta, percossa, impeto e velocità. In base ad essa, ora era immediato accettare che la velocità dell'oggetto alla fine di qualunque tragitto, sia esso verticale o inclinato di un qualsiasi angolo, dovesse essere sempre del medesimo valore, poiché l'altezza della caduta era sempre la stessa. Sagredo, infatti, non ha difficoltà ad accettare l'uguaglianza delle velocità finali, in virtù di quella relazione. Ma solo a patto che

[73] "Gradus velocitatis eiusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos tunc esse aequales, cum eorumdem planorum elevationes aequales sint" (*Opere di Galileo* VIII, p. 205). In questo caso, l'accelerazione è da identificarsi con il *grado di velocità*. Se l'accelerazione è costante, il grado di velocità è lo stesso ogni volta che la distanza dal suolo è la stessa. Pertanto, è giustificato l'uso del grado di velocità per indicare anche l'intensità della velocità finale d'impatto al suolo.

"si rimuovano tutti gl'impedimenti accidentarii ed esterni, e che i piani siano ben solidi e tersi ed il mobile di figura perfettissimamente rotonda, sì che ed il piano ed il mobile non abbiano scabrosità."[74] Solo allora si ha che la palla giunge al termine dei piani con "impeti uguali."[75] Il passaggio dalla velocità finale del mobile (l'effetto) all'impeto acquistato partendo dalla medesima altezza rispetto al suolo (la causa) è la chiave di volta per comprendere la *strategia dimostrativa* successiva di Salviati. Com'era stato affermato in precedenza da Galileo, la stima della velocità di un cadente era strettamente collegata all'intensità della *percossa*, con cui il grave in caduta libera andava a urtare contro il suolo con un certo *impeto*. L'*impeto* era dunque determinato dall'effetto riconducibile alla sua *gravezza* e dall'effetto dell'acquisito da una data velocità. Quando si impedisce a un grave di cadere, si deve fornirgli una *virtù*, *impressa* o *impellente*, che vada a contrastare la sua tendenza naturale alla caduta. In questo contesto, non ha alcuna importanza il tipo di mezzo che impedisce al grave di cadere, e Galileo sceglie la corda. Costruisce con essa un pendolo, libero di oscillare per la prima metà del tragitto, accorciato a piacere nella seconda parte. L'esperienza del *pendolo spezzato* (si veda la figura qui a fianco) è un esempio efficace, perché l'*impeto acquistato* dalla palla di piombo alla sua estremità (B nella figura) è indipendente dal percorso realmente effettuato dal mobile.[76] Pertanto, il corrispondente *momento della velocità* è comune a tutte le discese che coprono lo stesso dislivello, indipendentemente dalla forma della traiettoria. Anche se il




[74] *Opere di Galileo* VIII, p. 205.

[75] *Opere di Galileo* VIII, p. 205.

[76] Galileo sceglie un modello di comportamento che già presuppone la validità del principio che si vuole dimostrare, perché presuppone a sua volta la relazione tra *impeto*, *momento* della velocità e *altezza* della caduta che era stata esposta e presa a riferimento sin dall'inizio. Lo schema deduttivo precedente era: (equivalenza di impeto, momento e altezza) → (assioma del moto accelerato); quello applicato ora è: (equivalenza di impeto, momento e altezza) → (schema del pendolo). Per dare maggior evidenza all'assioma, Galileo avrebbe dovuto almeno dimostrare che (schema del pendolo) → (assioma del moto accelerato).

modello del pendolo porta un'altra evidenza a sostegno dell'indipendenza del momento dal particolare percorso, resta ancora un problema aperto. L'accelerazione (istantanea) che ha il pendolo in ciascun istante del moto ha un andamento diverso da quella del corpo in rotolamento su un piano inclinato. Galileo è consapevole dell'importanza del quesito, legato al possibile legame tra accelerazione e impeto. Non potendo risolvere il nodo, per il tramite di Salviati presenta la questione e la lascia cadere irrisolta. Quest'analisi della definizione e dell'assioma serviva a rimuovere i dubbi e a risolvere le obiezioni che i lettori contemporanei di Galileo potevano sollevare ed è importante per ricostruire l'originale ambiente culturale in cui si muoveva Galileo.

Conclusa questa parentesi, il testo procede con la lettura dei teoremi del moto. La *legge del moto uniformemente accelerato*, cioè quella legge che istituisce la proporzionalità dello spazio al quadrato del tempo (in notazione moderna: $s \propto t^2$; nell'originale: $s_1 : s_2 :: t_1^{\ 2} : t_2^{\ 2}$), compare nel trattato come teorema II.[77] Essa è dimostrata facendo uso soltanto del teorema I, che traduce la velocità di un moto accelerato nella velocità di un equivalente moto uniforme.[78] La sua dimostrazione è puramente geometrica, poiché utilizza soltanto proprietà dei triangoli rettangoli, mentre il passaggio alle grandezze del moto è realizzato interpretando i cateti del triangolo in termini di misure di tempo e di velocità. Qui si può vedere come

[77] "Si aliquod mobile motu uniformiter accelerato discenda ex quiete, spatia quibuscunque temporibus ab ipso peracta, sunt inter se in duplicata ratione eorundem temporum, nempe ut eorundem temporum quadrata" (*Opere di Galileo* VIII, p. 209).

[78] "Tempus in quo aliquod spatium a mobile conficitur latione ex quiete uniformiter accelerate, est aequale tempori in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobile motu aequabili delato, cuius velocitatis gradus subduplus sit ad summum et ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati" (*Opere di Galileo* VIII, p. 208). In questo modo, dinanzi a un moto accelerato si può decidere di trasformarlo in un moto uniforme equivalente, in modo da utilizzarne le proprietà e le relazioni tra tempo, spazio e velocità su cui c'era stato generale accordo. I due moti lungo un medesimo spazio devono svolgersi nel medesimo intervallo. Questo è possibile solo se la velocità del moto uniforme è metà della velocità finale raggiunta nel moto accelerato. La riduzione al moto uniforme equivalente, per il quale entrambe le teorie sono concordi, è un *modus operandi* sempre presente nell'opera anche in seguito, durante l'esposizione del moto dei proietti.

Galileo applica il processo di *matematizzazione*.[79] Seguono due corollari. Il primo dimostra la *legge dei numeri dispari*, cioè la proprietà che instaura una proporzionalità diretta tra la successione degli spazi percorsi in intervalli di uguale durata e la successione dei numeri dispari, partendo a contare dall'unità.[80] È seguito da un lungo commento dialogato che ne suggerisce l'importanza e la novità. Il corollario II, invece, stabilisce che lo spazio corrispondente a un qualsiasi istante di moto è dato dal medio proporzionale tra due spazi qualsiasi, percorsi in due intervalli qualunque, presi a riferimento dei tempi ($t_1 : t_2 :: s_1 : s_{mp}$ dove si ha che $s_1 : s_{mp} :: s_{mp} : s_2$).[81] Fino a questo punto, si è fatto uso soltanto della geometria, giacché i primi quattro enunciati non richiedono altro che la definizione di moto naturalmente accelerato che, si ricorda, sancisce una proporzionalità tra velocità e tempo grazie ad una similitudine fra triangoli.

La digressione che segue il corollario I ha un doppio compito. Il primo è matematico il secondo fisico. La dimostrazione del corollario è molto breve e fa uso della teoria euclidea delle proporzioni. Grazie alle proprietà di cui godono le proporzioni di rapporti, in tre passaggi si arriva alla tesi, anche se a scapito della chiarezza. Il compito di Sagredo è proprio quello di riproporre l'enunciato e di risolverlo con strumenti geometrici analoghi a quelli già visti per i teoremi

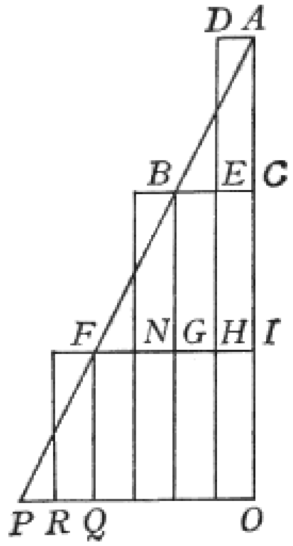
---

[79] Il nodo cruciale qui è dato dalla possibilità di identificare tempi, spazi e velocità con opportuni segmenti. L'isomorfismo può sussistere solo se i primi hanno la proprietà di continuità geometrica, propria delle linee della geometria. Da questo punto di vista, la precedente digressione sulla continua crescita o diminuzione della velocità di un grave in moto accelerato o decelerato prende nuova luce.

[80] "Hinc manifestum est, quod si fuerint quotcunque tempora aequalia consequenter sumpta a primo instanti seu principio lationis, utputa AD, DE, EF, FG, quibus conficiantur spatia HL, LM, MN, NI, ipsa spatia erunt inter se ut numeri impares ab unitate, scilicet ut 1, 3, 5, 7" (*Opere di Galileo* VIII, p. 210).

[81] "Colligatur, secundo, quod si a principio lationis sumantur duo spatial quaelibet, quibuslibet temporibus peracta, tempora ipsorum erunt inter se ut alterum eorum ad spatium medium proportionale inter ipsa" (*Opere di Galileo* VIII, p. 214). Questo corollario è l'inverso della legge del moto accelerato, dove si determinava lo spazio grazie al quadrato dei tempi. Qui si determina il tempo non mediante la radice quadrata dello spazio, come si fa con l'algebra delle equazioni, ma calcolando quella lunghezza il cui quadrato sta in proporzione agli spazi nel modo voluto. Per realizzare il proposito, è necessario che un intervallo e il suo spazio percorso corrispondente siano considerati le unità di misura, rispettivamente, di tempi e spazi.

precedenti. Si costruisce un triangolo rettangolo, in cui il cateto verticale rappresenta i valori del tempo, mentre quello orizzontale descrive la crescita della velocità istante dopo istante (si veda la figura a lato). Se AC rappresenta la durata del primo intervallo temporale, CB ne rappresenta l'intensità della velocità istantanea finale corrispondente. Per il teorema I, se consideriamo il moto uniforme equivalente, nel tempo AC il corpo dovrebbe muoversi con velocità costante CE, pari alla metà di quella del moto uniformemente accelerato. Il rettangolo ACED è quindi la trasformazione geometrica del triangolo ACB. Nel secondo intervallo CI, di durata pari al precedente, il grave in caduta libera raggiunge in I la velocità istantanea IF, che corrisponde alla velocità IG del moto uniforme equivalente. Il rettangolo CINB è la traduzione del trapezio CIFB. Reiterando il procedimento, si ottiene una figura a gradini rettangolari al posto dell'iniziale triangolo. Si può quindi visualizzare e contare il numero di rettangoli unitari congruenti all'iniziale ACED che fa da unità di misura, invece di dover ragionare in termini di segmenti continui per il tempo e per la velocità. Nel diagramma a scalini del moto uniforme è immediato accorgersi che il numero di rettangoli presenti in ciascuna frazione di tempo è rispettivamente: 1, 3, 5, 7. La difficoltà, in questo caso, è legata alla validità del modello geometrico quando viene utilizzato per descrivere grandezze non geometriche come tempi, spazi e velocità.[82] Ancora una volta, si ha una situazione in cui non si può dare per assodato che




[82] Sia nei lavori di Galileo, sia in misura maggiore nell'*Opera geometrica* di Torricelli, si incontrano spesso più dimostrazioni diverse di uno stesso enunciato. È senza dubbio vero che, soprattutto nel caso di Torricelli, presentare numerosi percorsi deduttivi era considerato una prova di talento matematico. Ma non era solo ed esclusivamente una ridondanza vuota, con il solo scopo di ostentare il virtuosismo tecnico, in linea con il gusto barocco dell'epoca. Qui se ne ha un esempio chiaro. In un periodo come questo, in cui alcuni procedimenti e strumenti matematici sono ancora visti con sospetto, Galileo si vide in qualche modo costretto a dimostrare gli enunciati-chiave della nuova scienza del moto in modo da trovare consenso unanime. Erano pochi i matematici che erano in grado di utilizzare con disinvoltura e consapevolezza la teoria aritmetica delle proporzioni. Galileo ne rielaborerà una. La ripenserà in modo da renderla adatta ai propri scopi scientifici con Torricelli, durante gli ultimi mesi di vita, pensando di aggiungerla ai *Discorsi* come *giornata quinta*.

l'infinità dei punti di un segmento abbia le stesse proprietà o sia dello stesso tipo dell'infinità degli istanti che si succedono nel tempo o dell'infinità dei valori assunti da una variazione continua del grado di velocità.

Il secondo compito della digressione è descrivere un'esperienza in cui trovi conferma nei fatti la legge del moto accelerato. È la misura del tempo impiegato da una pallina di piombo a percorrere alcuni tratti determinati di una guida, inclinata a piacere rispetto al suolo. A parte i dettagli tecnici, l'importanza di queste pagine consisteva nel fornire quell'evidenza fenomenica alla teoria, preannunciata all'inizio della *giornata terza*. Il luogo è stato scelto con cura. L'esperienza deve fornire sostegno alla legge del moto accelerato, proprio nel momento in cui si esauriscono i teoremi geometrici, quelli cioè che non l'hanno ancora coinvolta, prima di affrontare le dimostrazioni che ne faranno uso. Già durante la prima stesura dei *Discorsi*, Galileo aveva ritenuto necessario inserire uno scolio.[83] Se fino a questo punto si era trattato esclusivamente di moti di caduta libera, l'esperienza del piano inclinato appena descritta permette di estendere al moto obliquo la validità di tutti gli enunciati dimostrati per il moto verticale. Infatti, un grave che scende lungo una traiettoria rettilinea, inclinata rispetto all'orizzonte di un angolo qualsiasi, si muove di moto uniformemente accelerato perché verifica sperimentalmente la relazione tra spazi percorsi e quadrati dei tempi, eliminati gli impedimenti, o la legge dei numeri dispari. Per terminare l'esame delle problematiche che Galileo solleva nello studio del moto, è importante non tralasciare il teorema seguente con il suo corollario.

Il teorema III è il primo enunciato a chiamare in causa l'assioma del moto, che Galileo usa per ricavare la relazione tra quanto avviene lungo la perpendicolare al suolo, e quanto avviene lungo un qualsivoglia piano inclinato.[84] I due moti, quello

---

[83] "SCHOLIUM: Id autem quod demonstratum est in lationibus peractis in perpendiculis, intelligatur etiam itidem contingere in planis utcunque inclinatis: in iisdem enim assumptum est, accelerationis gradus eadem ratione augeri, nempe secundum temporis incrementum, seu dicas secundum simplicem ac primam numerorum seriem" (*Opere di Galileo* VIII, p. 214).

[84] "Si super plano inclinato atque in perpendiculo, quorum eadem sit altitudo, feratur quiete idem mobile, tempora lationum erunt inter se ut plani ipsius et perpendiculi longitudines" in *Opere di Galileo* VIII, p. 215.

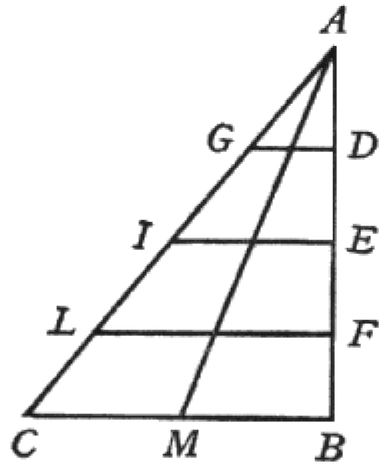
verticale e quello inclinato,[85] non hanno in comune né i tempi di percorrenza, né le lunghezze percorse, e le velocità non sono misurabili direttamente. Si ricordi che la velocità non è calcolabile come rapporto di spazi e tempi, perché non sono quantità omogenee. L'enunciato serve quindi a stabilire un criterio generale per confrontarli. L'assioma permette di affermare che le velocità alla medesima distanza dal suolo sono identiche. I tempi di percorrenza sono però diversi, come pure le distanze percorse. La conclusione, che i tempi hanno la stessa proporzione delle lunghezze corrispondenti, è dimostrata facendo uso di un doppio diagramma o, per essere più precisi, di due diagrammi sovrapposti. Entrambi raffigurano un triangolo rettangolo con le medesime dimensioni lineari. Nel primo, il cateto orizzontale rappresenta la velocità, mentre quello verticale e l'ipotenusa rappresentano gli spazi percorsi e si identificano con le due traiettorie. Nel secondo, il cateto orizzontale rappresenta sempre la velocità, mentre quello verticale rappresenta il tempo. Assumendo la lunghezza del cateto verticale come unità di misura sia del tempo, sia dello spazio, e collegando gli spazi alla geometria del triangolo, si ottiene l'uguaglianza del rapporto dei tempi di percorrenza con il rapporto della lunghezza percorsa totale. È ancora da verificare se Galileo fosse consapevole del proprio *modus operandi*, facendone una strategia euristica molto potente, oppure se il suo procedere *more geometrico* abbia avuto qui un esito fortunato, poiché andava a operare con costrutti che appartengono a piani cognitivi differenti. Il successivo corollario[86] estende ulteriormente le possibilità di studiare e confrontare moti diversi tra loro. Infatti, in base ad esso non è più indispensabile rapportarsi alla caduta libera, perché basta confrontare opportunamente e direttamente due moti inclinati tra loro. È notevole perché rende conto della precisione con cui Galileo si muove, per ottenere una scienza *universale* del moto.

---

[85] L'enunciato chiama in causa i due moti, studiati separatamente, di uno stesso oggetto. Lo stesso si può dire di due corpi perfettamente uguali che, contemporaneamente, cadono lungo la verticale e su un piano inclinato.

[86] "Hinc colligitur, tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, dum tamen eorum eadem sit elevation, esse inter se ut eorum longitudines" (*Opere di Galileo* VIII, p. 219).

Riassumendo, da un punto di vista esclusivamente matematico l'intero sistema assiomatico sta in equilibrio su due elementi fondamentali: l'identità della continuità numerica, con cui si vuole misurare le grandezze fisiche, con quella geometrica e la possibilità di matematizzare l'infinitamente piccolo, cioè di poter ottenere somme finite pur con un numero di addendi infinito. Invece, da un punto di vista fisico la caratteristica fondamentale della scienza del moto è rappresentata dalla sua generalità. La legge di caduta dei gravi, infatti, non coinvolge la quantità di materia propria del grave, cioè non cambia al variare della *massa*,[87] né al variare della sua forma. Neppure la differenza del tipo di materiale di cui sono composti i corpi porta a modificare lo schema di comportamento. D'altra parte, se l'assioma del moto afferma che la velocità al suolo di qualunque oggetto è la stessa, indipendentemente dalla traiettoria percorsa a parità di dislivello, ogni altra proprietà peculiare a ciascun grave deve essere priva di efficacia. Se non c'è nulla di comune a tutti corpi che giustifichi o regoli il loro comportamento durante la caduta libera, la *causa* (o *motore*) poteva essere soltanto esterna a essi.[88]




### *Par. 3 Lo 'Scolio' di Galileo e Viviani nell'edizione dei 'Discorsi' del 1656.*

Com'è già stato anticipato, Viviani con le sue richieste di chiarimento a Galileo riesce a far emergere i punti di debolezza della scienza del moto, spingendo il maestro ad approfondire i segreti meccanismi della natura. Il sistema geometrico-deduttivo non poteva trovare completa giustificazione dal proprio interno. Se si

[87] Con *massa* ( $m$ ) si intende propriamente la *quantità di materia* di un oggetto. Essa equivale al prodotto della *densità* ( $\rho$ ) per il *volume* ( $V$ ). In notazione sintetica si ottiene $m = \rho \cdot V$ . Galileo conosceva bene il ruolo della *densità specifica*, nel caso del fenomeno del galleggiamento.

[88] Non ci sono prove che Galileo fosse consapevole di questo aspetto della scienza del moto.

voleva spiegare come la definizione e, soprattutto, l'assioma fossero corretti, si doveva far ricorso a qualcos'altro che la geometria. Serviva un collegamento con un sapere condiviso e consolidato, in grado di rendere evidente l'assioma del moto. L'ambito in cui si potevano trovare tali strumenti era la *mecanica*, cioè quella disciplina che descriveva l'equilibrio dei corpi e il funzionamento di alcuni strumenti riconducendoli allo schema dell'equilibrio su una bilancia. Il primo matematico a proporsi l'obiettivo di riportare tutte le *macchine semplici*[89] al *modello della bilancia* fu Guidobaldo del Monte,[90] che Galileo conosceva bene.

Il compito di dimostrare la validità dell'assioma premesso al moto naturalmente accelerato è lasciato a Salviati.[91] Il percorso scelto consiste nel dedurre l'assioma da un lemma,[92] che dovrebbe essere fuori discussione per la sua evidenza intuitiva e la sua consolidata verifica sul campo e che appartiene alla scienza della meccanica. Esso coinvolge il *momento della gravità*, grazie all'uso del principio della leva. Infatti, è alla base della condizione di equilibrio di due corpi gravi, collegati da una fune, dove il primo è appeso alla verticale, mentre il secondo poggia sul piano inclinato. L'assioma, invece, coinvolge il *momento della velocità*, poiché è in relazione stretta con la grandezza chiamata *impeto* e mutuata dal contesto della percossa. Il punto di raccordo tra i due diversi *momenti* rappresenta il punto cruciale dell'intera operazione.

---

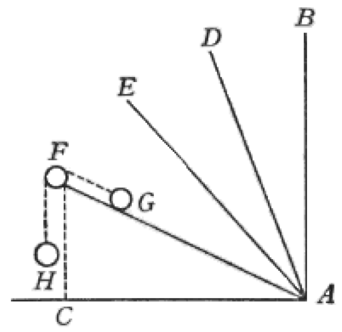
[89] Le *macchine semplici* erano: la bilancia o *libra*, la leva o *vectis*, la carrucola o *trochlea*, l'argano o axis *in peritorchio*, il cuneo o *cuneus*, la vite o macchina per alzare l'acqua o *cochlea* (Guidobaldo del Monte, *Mechanicorum liber*. Pisauri: Hieronymum Concordiam, 1577).

[90] Guidobaldo del Monte (1545-1607) fu uno dei più importanti matematici della sua epoca. Studiò matematica a Padova e a Urbino con Commandino (1509-1575). In particolare, pubblicò la *Mecanica* (1577) e un commentario all'opera di Archimede sui centri di gravità (1588). Conobbe Galileo perché questi gli inviò alcuni teoremi da lui scoperti sulla centrobarica e restò in corrispondenza con lui fino alla morte.

[91] Nell'edizione dei *Discorsi* questa parte non era presente. Viviani fece l'integrazione per l'edizione bolognese del 1656, che è anche la versione proposta da Antonio Favaro (*Opere di Galileo* VIII, pp. 214-219).

[92] "[D]el piano inclinato AF tirando la sua elevazione sopra l'orizonte, cioè la linea FC, per la quale l'impeto d'un grave ed il momento del descendere è il massimo, cercasi qual proporzione abbia questo momento al momento dell'istesso mobile per l'inclinata FA; qual proporzione dico esser reciproca delle dette lunghezze" (*Opere di Galileo* VIII, p. 216).

Nel lemma, la chiave di volta della dimostrazione è data dallo studio dell'equilibrio di due corpi collegati da una fune sempre tesa, il primo (G) è appoggiato su un piano inclinato, il secondo (H) è lasciato pendere a perpendicolo. Viviani scrive che:




> quando debba seguire l'equilibrio, cioè la quiete tra essi mobili, i momenti, le velocità, o le loro propensioni al moto, cioè gli spazii che da loro si passerebbero nel medesimo tempo, devon rispondere reciprocamente alle loro gravità, secondo quello che in tutti i casi de' movimenti mecanici si dimostra: sì che basterà, per impedire la scesa del G, che lo H sia tanto men grave di quello, quanto a proporzione lo spazio CF è minore dello spazio FA.[93]

Dalla relazione tra inclinata e verticale si ricava rapidamente la relazione più generale tra due inclinate. In tutta questa riflessione, Galileo usa il *principio della leva*, che sottintende il *momentum gravitatis*, fatto confermato anche dal successivo confronto tra i due diversi pesi, quando il momento della velocità ha un significato meccanico diverso da quello del momento della gravità.[94] Questa differenza è passata sotto silenzio sia da Galileo, sia da Viviani.

Galileo sembra consapevole dell'importanza di poter utilizzare un tipo di momento o l'altro, indifferentemente. Sa che non gli è possibile dimostrare rigorosamente l'equivalenza fisica tra momento della gravità e momento della velocità, ma sa altrettanto bene che solo grazie ad essa si può fondare la nuova scienza del moto. Quanto precede il lemma serve a instaurare questa equivalenza nella sostanza che, di conseguenza, diventa anche terminologica. Il primo passo è

[93] CF è sulla verticale, FA è un segmento preso lungo l'inclinata (*Opere di Galileo* VIII, p. 217).

[94] Paolo Galluzzi, *Momento*. Roma: Edizioni dell'Ateneo & Bizzarri, 1979, pp. 384-386.

affiancare due parole come se fossero sinonimi, poiché "i momenti o le velocità di un istesso mobile son diverse sopra diverse inclinazioni di piani."[95] L'accostamento tra i momenti e le velocità tramite la disgiunzione "o" serve proprio a suggerire la loro stretta somiglianza. Anche se la grandezza fondamentale è la prima, qui si vuole mostrare che il comportamento di entrambe segue lo stesso andamento. La conferma si ha dalla seconda parte del brano citato, dove si legge che "la massima è per la linea perpendicolarmente sopra l'orizonte elevata, e che per l'altre inclinate si diminuisce tal velocità, secondo che quelle più dal perpendicolo si discostano, cioè più obliquamente s'inclinano."[96] Galileo sta descrivendo come varia il momento (della velocità),[97] ma decide di chiamarlo *velocità*. La determinazione con cui Galileo prepara il terreno è evidente nella chiusura della precedente citazione, "onde l'impeto, il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento, del descendere vien diminuito nel mobile dal piano soggetto, sopra il quale esso mobile s'appoggia e descende."[98] La sovrapposizione del contesto statico dei corpi pesanti che si fanno equilibrio con il contesto dinamico dei corpi che cadono e impattano al suolo è ora completa. L'impeto descrive la modalità e l'effetto che un corpo ha quando urta un

---

[95] *Opere di Galileo* VIII, p. 215 righe 12-13.

[96] *Opere di Galileo* VIII, p. 215 righe 13-16.

[97] Sottointendendo "della velocità", Galileo crea una studiata ambiguità tra il *momento della velocità* e quello *della gravità*, anche in virtù del fatto che l'abbreviazione *momento* era più comune e frequente in ambito meccanico, cioè con la seconda accezione. Il *momentum velocitatis*, chiamato anche *gradus velocitatis*, indica la variazione di velocità che il grave subisce durante la caduta libera o lungo un piano inclinato. Pertanto, è sinonimo di *accelerazione* e, letto in questo modo, il brano è corretto. La discesa lungo un piano inclinato, infatti, ha un'accelerazione che è inferiore all'accelerazione di gravità ($g$ come viene oggi indicata), in proporzione alla sua inclinazione con l'orizzonte. La velocità lungo un piano inclinato, intesa come velocità raggiunta dal mobile in un punto del piano inclinato, è identica alla velocità del medesimo mobile in caduta libera lungo una traiettoria verticale in una posizione a pari distanza dall'orizzonte. E questo, in virtù dell'assioma del moto uniformemente accelerato che si vuole dimostrare. Quello che invece risulta diverso, è il tempo di percorrenza del mobile che è maggiore lungo traiettorie maggiori, mentre il rapporto tra spazi percorsi e tempi di percorrenza resta invariato. È la difficoltà cognitiva di immaginare una velocità a far sì che un moto che impiega più tempo a raggiungere il suolo diventa un moto rallentato, cioè più lento o con velocità minore. Galileo gioca su questo fatto, non si sa se ingenuamente o di proposito. Il risultato, comunque, è che l'andamento della velocità lungo la verticale e l'inclinata diventa lo stesso dell'andamento del momento (della gravità) lungo le medesime direzioni. Questo fatto è anche un segno di una non completa acquisizione del concetto.

[98] *Opere di Galileo* VIII, p. 215 righe 16-18.

altro corpo o il terreno; talento ed energia sono suoi sinonimi; il momento della discesa è il momento dinamico legato alla velocità, ma quando il corpo si appoggia al piano il momento è quello statico.

I momenti e le velocità di uno stesso mobile variano con l'inclinazione del piano d'appoggio rispetto all'orizzontale, in modo che alla caduta verticale compete l'intensità massima, mentre al diminuire della pendenza del piano inclinato si ha un progressivo rallentamento del moto, cioè una diminuzione graduale di entrambe le grandezze, come se l'appoggio avesse un effetto frenante sull'oggetto in movimento. Anche l'*impeto* segue lo stesso andamento, con l'estinguersi della sua intensità all'avvicinarsi del mobile al suolo, giacché rappresenta la causa del moto. La presenza di un legame tra impeto e velocità è dimostrata dal fatto che l'impatto al suolo diminuisce il suo vigore in funzione del diminuire della velocità con cui il corpo lo urta. L'intensità varia così da un valore massimo, che si ha per la caduta libera lungo una verticale, a un valore minimo nullo, che si ha per l'appoggio su un piano orizzontale. Su un piano orizzontale, di conseguenza, si ha *indifferenza* al moto e alla quiete. Galileo afferma che "è impossibile che egli spontaneamente si muova, se con tal moto il suo proprio centro di gravità non acquista avvicinamento al suddetto centro comune."[99] Quindi, se non c'è tendenza naturale al moto, la causa di tale moto deve essere nulla o ininfluente e l'*impeto* o *momento della velocità* deve valere zero. L'andamento di tale variazione, che si modifica con continuità da un massimo a zero, è descritta dalla proporzione che lega l'impeto all'angolo d'inclinazione del piano di appoggio, proporzione che è "reciproca delle lunghezze."[100] Salviati ricorda che questo era già stato dimostrato dall'Accademico a Padova nel capitolo dedicato alla *vite* del suo "trattato di mecaniche,"[101] che aveva composto per gli studenti. Nello specifico, il lemma prova che il rapporto tra il *momento* della verticale e quello dell'inclinata è identico al rapporto tra la *lunghezza*

[99] *Opere di Galileo* VIII, p. 215.

[100] *Opere di Galileo* VIII, p. 216.

[101] *Opere di Galileo* VIII, p. 216.

del percorso sull'inclinata, rispetto a quello lungo la verticale. Da questa relazione segue la generalizzazione della legge della variazione dei momenti su diversi piani inclinati, in funzione del rapporto inverso tra le lunghezze percorse.[102]

Nella successiva dimostrazione dell'assioma del moto naturalmente accelerato, ora diventato teorema, si riassumono le proprietà coinvolte, quelle cioè della *proporzionalità* tra *velocità e tempo*, tra *impeto e tempo*, tra *spazio percorso e quadrato del tempo* e tra *impeto e velocità*. Coinvolgendo soltanto la grandezza dell'impeto, si deve arguire che il momento menzionato debba essere necessariamente quello della velocità, con l'incoerenza che i lemmi di base cui la dimostrazione fa ricorso coinvolgono il momento della gravità. Assodato il principio del moto accelerato, lo scolio aggiunto può procedere alla dimostrazione della Proposizione III e del suo Corollario,[103] insieme alla Proposizione VI[104] altrimenti detto il *teorema delle corde*.

Il *De motu locali* utilizza i concetti di velocità, di grado di velocità, di impeto (causa dell'aumentare della velocità) e di momento della velocità (intensità della velocità, considerata quale effetto risultante di un dato impeto). La validità dell'assioma del moto accelerato dipende da un percorso dimostrativo che coinvolge il bilanciamento di due pesi, esemplificato dalla legge della leva. La condizione di equilibrio dipende dai pesi e dalle reciproche distanze rispetto al fulcro della rotazione, in altre parole gli elementi che individuano il momento della gravità. Ma nel lavoro di Galileo non si trova mai enunciata chiaramente la relazione che intercorre tra questi diversi tipi di momento, sistematicamente utilizzati in situazioni operative profondamente diverse e incommensurabili

[102] "SALV. […] I gradi di velocità di un mobile descendente con moto naturale dalla medesima sublimità per piani in qualsivoglia modo inclinati, all'arrivo all'orizonte son sempre eguali, rimossi gl'impedimenti" (*Opere di Galileo* VIII, p. 218).

[103] "Hinc colligitur, tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, dum tamen eorum eadem sit elevatio, esse inter se ut eorum longitudines" (*Opere di Galileo* VIII, p. 219).

[104] "Si a puncto sublimi vel imo circoli ad horizontem erecti ducantur quaelibet plana usque ad circumferentiam inclinata, tempora descensuum per ipsa erunt aequalia" (*Opere di Galileo* VIII, p. 221).

all'epoca in cui si trovava a operare Galileo, cioè quella dinamica della percossa per il *momentum velocitatis* e quella statica dell'equilibrio dei pesi per il *momentum gravitatis*.[105] Il progetto galileiano di fondare una nuova scienza del moto utilizzando esclusivamente un metodo geometrico, assiomatico e deduttivo fallisce quando si mostra inderogabile il ricorso al concetto di momento della gravità, cioè a una grandezza strettamente collegata alla proprietà di pesantezza del mobile. Questa concessione, però, non porta a una soluzione delle difficoltà fin tanto che non venga esplicitato il legame tra i due momenti. Purtroppo, la lacuna resta e la scienza del moto naturalmente accelerato vacilla. Vincenzo Viviani, nonostante il precoce talento e studio, non dimostra di saper uscire dal solco tracciato dal maestro.

La soluzione che Galileo fornì ai problemi sollevati dal giovanissimo assistente sembra lasciargli qualche perplessità. Infatti, nell'estate del 1641 inviò ad Antonio Nardi, Raffaello Magiotti ed Evangelista Torricelli una bozza della dimostrazione, con la preghiera di passarla al vaglio e di testarne la robustezza. Dalla corrispondenza si ricava che tali incontri e discussioni ebbero luogo, ma non è possibile avere il quadro preciso dei singoli punti di vista dei protagonisti, né del contenuto delle obiezioni, fatta eccezione per qualche riferimento indiretto.[106] Della nuova spiegazione galileiana Antonio Nardi non accettava il passo in cui si determina il momento del peso, che fa uso del *principio delle velocità virtuali*, per lui di dubbia validità. Il motivo era che, in trasformazioni quasi statiche simultanee, come quelle che si hanno con una stadera, la causa non si mantiene precedente all'effetto.[107] Torricelli, invece, doveva avere perplessità maggiori, se si vogliono

---

[105] Paolo Galluzzi, *Momento*. Roma: Edizioni dell'Ateneo & Bizzarri, 1979, p. 313.

[106] *Opere di Galileo* XVIII, pp. 306-307, 309-310, 350, 358-359.

[107] "Male si persuadono i Meccanici comunemente compensarsi in una bilancia di diseguali braccia, la velocità del moto con la grandezza del momento, onde cercano di render ragione perché questi pesi diseguali da distanze reciprocamente diseguali pesino egualmente. Ma ciò non è in vero cagione dell'equilibrio, perché così discorrendo s'adduce di un effetto in atto una cagione in potenza" (Manoscritto Galileiano 130, c. 661; citazione in Paolo Galluzzi, *Momento*. Roma: Edizioni dell'Ateneo & Bizzarri, 1979, pp. 251-252).

collegare proprio al problema del moto le animate discussioni che egli ebbe con Vincenzo Viviani alla fine del 1641. In mancanza di fonti più dettagliate, sembra realistico pensare che l'aggiunta fatta da Viviani e appena esaminata, presente nella seconda edizione dei *Discorsi*, corrispondesse alla soluzione inviata da Galileo al *triumvirato* romano e che la posizione di Torricelli fosse fedele a quanto da lui pubblicato nel 1644 nel suo *De motu*.

### *Par. 4 Il 'De motu gravium naturaliter descendentium' di Evangelista Torricelli.*

Poiché il trattato sul moto accelerato di Evangelista Torricelli aveva il proposito di estendere la scienza del moto galileiana con la deduzione di altre proprietà, il problema legato alla fondazione del principio delle velocità rimaneva aperto sia per la mancata pubblicazione della soluzione (non completamente efficace) di Galileo da parte del giovanissimo Viviani, sia per il mancato accordo tra le due impostazioni.

Il percorso dimostrativo della parte aggiunta ai *Discorsi* da Viviani è dato dalle seguenti tappe: il lemma della proporzionalità tra l'impeto e l'inverso della lunghezza percorsa; il corollario che sancisce la validità del lemma anche tra due inclinate qualsiasi, purché aventi pari altezza dal suolo; la dimostrazione del principio delle velocità; la deduzione del Teorema III, del suo Corollario e del Teorema VI.[108] Evangelista Torricelli, invece, si accorse che dal Teorema VI di Galileo si poteva facilmente dedurre la validità dell'assioma delle velocità. Poiché essa coinvolge la Proposizione II del *De motu equabili*[109] e un teorema "ex elementis

[108] "Si a puncto sublimi vel imo circuli ad horizontem erecti ducantur quaelibet plana usque ad circumferentiam inclinata, tempora descensuum per ipsa plana erunt aequalia" (*Opere di Galileo* VIII, p. 221).

[109] "Si mobile temporibus aequalibus duo pertranseat spatia, erunt ipsa spatia inter se ut velocitates. Et si spatia sint ut velocitates, tempora erunt aequalia" (*Opere di Galileo* VIII, p. 193).

mechanicis", di cui Torricelli non ha mai incontrato la dimostrazione,[110] la sua priorità diventa colmare tale lacuna. Lo schema argomentativo è il seguente: i) la dimostrazione del teorema meccanico; ii) la dimostrazione del Teorema VI di Galileo; iii) la dimostrazione del Teorema III di Galileo; iv) la deduzione del principio del moto uniformemente accelerato in due modi. Il primo (a) ricorre al teorema *mertoniano*[111] ovvero Teorema I[112] di Galileo; il secondo (b), invece, ricorre al teorema dell'impeto de *Le mecaniche*.

La prima tappa del percorso (i) consiste nel dimostrare la proporzionalità tra momento e inverso della lunghezza dello spazio percorso sull'inclinata, che

[110] "Momenta gravium aequalium super planis inequaliter inclinatis, esse inter se ut sunt perpendicula partium aequalium eorundem planorum" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 221-222).

[111] Il *teorema mertoniano* è anche chiamato *teorema della velocità media* o *teorema dell'accelerazione*, in base al quale l'intensità dell'accelerazione uniforme è data equivalente al valore della sua velocità media, considerata nell'istante di mezzo del moto. L'aggettivo *mertoniano* deriva dal nome di un importante college dell'Università di Oxford, il Merton College appunto, in cui furono elaborate per la prima volta durante il Trecento le regole di comportamento di un moto uniformemente accelerato o decelerato. La più antica dimostrazione si trova nelle *Probationes* di Guglielmo di Heytesbury, attivo a Oxford tra il 1330 e il 1340. Nel frammento *De motu* di Riccardo Swineshead si trovano due regole di comportamento per un corpo in caduta libera, molto vicine a quello che Galileo aveva ritenuto valido all'inizio dei suoi studi sul moto: "5. Bisogna sapere anche come l'accelerazione (intensio motus) sta alla velocità (motus), così la velocità (motus) sta allo spazio, poiché come attraverso il moto si percorre uno spazio, così attraverso l'accelerazione (intensio motus) si acquista una velocità (motus). Onde come nel moto locale uniforme la velocità è misurata dalla linea massima descritta da un qualche punto (f. 213r), così nell'accelerazione la velocità è misurata dal massimo incremento (latitudo) di velocità acquisito in un tempo dato. 6. Dovunque c'è accrescimento (intensio) uniforme del moto locale ivi è un moto locale uniformemente difforme. E poiché il moto locale uniformemente difforme corrisponde per quanto concerne l'effetto del suo grado medio, è chiaro che nello stesso tempo un'ugual distanza sarà percorsa da un mobile che si muova di moto uniforme con la velocità del suo grado di mezzo e da quel moto locale uniformemente difforme. Onde qualsiasi moto difforme, così come anche qualsiasi altra qualità, corrisponde a qualche grado…" Per Marshall Clagett, il concetto di accelerazione è il risultato di un'analogia, come indicato dalla regola 5 citata, che egli riconosce operante anche nella *terza giornata* dei *Discorsi* (*Opere di Galileo* VIII, pp. 191, 197-198). In Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison, Wisconsin: The University of Wisconsin Press, 1959 [traduzione italiana di Libero Sosio. Milano: Feltrinelli, 1981, pp. 231, 274]. Per approfondimenti sulla storia del teorema mertoniano, si veda *ibid*. pp. 283-354. Nonostante le parentele linguistiche e terminologiche evidenziate da M. Clagett, oggi la critica esclude un'influenza decisiva della cinematica medievale sull'elaborazione di Galileo, prima della lettera a Sarpi del 1604 (Winifred L. Wisan, *The New Science of Motion: A Study of Galileo's "De motu locali"*. In *Archive for History of Exact Sciences*, 13 (1974) pp. 103-306).

[112] "Tempus in quo aliquod spatium a mobili conficitur latione ex quiete uniformiter accelerata, est aequale tempori in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu aequabili delato, cuius velocitatis gradus subduplus sit ad summum et ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati" (*Opere di Galileo* VIII, p. 208).

dipende dalla *legge del centro di gravità*, indicata come "legge dell'equilibrio". Essa giustifica il permanere di un mobile nella medesima posizione, quando il suo centro di gravità non si avvicina al centro della Terra, se posto nelle possibili posizioni limitrofe a quella in cui giace immobile. Se Galileo aveva lasciato questa legge implicita, sullo sfondo della sua teoria del moto, Torricelli la pone alla base della propria, potenziandone le possibilità d'uso grazie a due proprietà. La prima estende la legge a un sistema di due corpi vincolati rigidamente;[113] la seconda è di portata maggiore e viene indicata come Proposizione I, secondo la quale si ha parità di effetto ogni volta che si sostituisca il grave originario con un altro di pari *momento*.[114] La deduzione della Proposizione II diventa quindi quasi immediata.[115] Un percorso deduttivo alternativo è presentato da Torricelli a partire dalla *legge della leva*, su cui si basa la validità del lemma della proporzionalità inversa tra il rapporto del momento dell'inclinata e della verticale con il rapporto delle corrispondenti lunghezze.[116] A questo punto, Torricelli è riuscito a dare una fondazione meccanica alla scienza assiomatica del moto uniformemente accelerato, grazie a un enunciato che trasforma la tradizionale legge della leva, una *relazione tra peso e distanza* da un fulcro comune di due gravi, in una legge che mette *in relazione il momento del peso di due gravi con la distanza*. In questo modo, si può passare dal peso di un grave alla determinazione di una certa distanza, che a sua volta permette di individuare un corrispondente momento (della gravità). Inoltre, egli fornisce una costruzione geometrica per la stima di tale momento, grazie alla costruzione di un

[113] "Duo gravia simul coniuncta ex se moveri non posse, nisi centrum commune gravitatis ipsorum descendat" (*Opere di Torricelli* II, p. 105).

[114] "Si in planis inaequaliter inclinatis, tandem tamen elevationem habentibus, duo gravia constituantur, quae inter se tandem homologè rationem habeant quam habent longitudines planorum, gravia aequale momentum habebunt" (*Opere di Torricelli* II, p. 105).

[115] "Momenta gravium aequalium super planis inaequaliter inclinatis, eandem tamen elevationem habentibus, sunt in reciproca ratione cum longitudinibus planorum" (*Opere di Torricelli* II, p. 106).

[116] La *legge della leva* afferma che due corpi diversi in gravità si fanno equilibrio se sono posti a distanze dal centro di rotazione, detto anche *fulcro*, inversamente proporzionali ai loro pesi. "Momentum totale gravis ad momentum quod habet in plano inclinato, est ut longitudo ipsius plani inclinati ad perpendiculum" (*Opere di Torricelli* II, p. 106).

segmento rappresentativo, sia nel caso di una sfera che rotola, sia in quello di un corpo di forma qualunque. Infatti, lavorando con rapporti e non con misure assolute, cioè quantificando le lunghezze utilizzate a meno di proporzionalità, un siffatto corollario[117] permette la *misura* del momento. Se il *momento* è inversamente proporzionale allo *spazio percorso* sul piano inclinato, a parità di spazio, il momento è direttamente proporzionale all'*altezza* del piano inclinato rispetto all'orizzontale, data come Proposizione III.[118] La consapevolezza degli strumenti matematici in suo possesso permette a Torricelli di accorgersi che il *momento* dipende quindi dal seno dell'angolo d'*inclinazione* del piano inclinato su cui si muove il grave.[119] A questo punto, il matematico è riuscito a collegare il *momento della gravità*, proprietà meccanica per eccellenza di ogni mobile, con la *geometria della traiettoria* del particolare moto uniformemente accelerato.

La seconda tappa (ii) del percorso consiste nel dedurre il Teorema VI del *De motu naturaliter accelerato* di Galileo, che dimostra come il *tempo* di percorrenza di due *corde* di una medesima circonferenza convergenti nel suo punto di contatto al suolo è lo stesso. È questo il punto in cui si instaura l'equivalenza che permette il passaggio tra il valore del momento meccanico e quello del momento della velocità. Viene realizzato grazie all'introduzione della relazione tra la grandezza tempo e quella del momento. La Proposizione IV di Torricelli, che corrisponde al Teorema III e al suo Corollario nel *De motu naturaliter accelerato* di Galileo, estende la portata del precedente teorema, mostrando che per piani di pari altezza e diversa

[117] "Hinc colligitur momentum sphaerae gravis super diversas planorum elevationes semper esse ut linea illa horizontalis quae à contactu in ipsa sphaera ducitur" (*Opere di Torricelli* II, p. 107). "Si vero grave non sit sphaera, sed quodcunque solidum A habebimus nihilominus singula eius momenta in singulis planorum elevationibus facillime" (*Opere di Torricelli* II, p. 108).

[118] "Momenta gravium aequalium super planis inaequaliter inclinatis, sunt in homologa ratione cum perpendiculis partium aequalium eorumdem planorum" (*Opere di Torricelli* II, p. 109).

[119] La relazione, scritta secondo le convenzioni odierne, è: $h = l \cdot sen\alpha$, dove $h$ è l'altezza del piano inclinato, $l$ la sua lunghezza, $a$ l'angolo alla base del piano inclinato, individuato dal piano stesso con l'orizzontale.

inclinazione il *tempo* del moto è direttamente proporzionale alla *lunghezza* da percorrere.[120]

La successiva ed ultima tappa (iii) è quella che vede dimostrato l'assioma galileiano del *De motu*. È qui che si sancisce il passaggio definitivo al *momento o grado della velocità*, marcato dalla presenza dell'*impeto*, con la perfetta sovrapposizione all'enunciato originario dei *Discorsi*. Una strategia alternativa è però individuata nel ridurre le velocità finali del mobile a un valore medio, per poter passare dal confronto, estremamente arduo e problematico, di moti accelerati a quello di due moti uniformi. Grazie al Teorema VI del *De motu equabili*[121] di Galileo, si ha che il rapporto delle due velocità è 1, dato che la proporzione composta dal rapporto degli spazi e dal rapporto inverso dei tempi dà 1.

Il fine dichiarato di Evangelista Torricelli nell'*incipit* della sua *Opera geometrica* è di aggiungere alla dottrina galileiana del moto altre interessanti e nuove proprietà. La fragilità dell'assioma del moto accelerato ne avrebbe allora sancito il fallimento se egli non vi avesse posto rimedio. Ecco perché la prima questione che si affronta nel suo trattato è quella di fornire delle premesse davvero ben fondate. Se il piano di Galileo non era andato a buon fine, anche considerando la successiva integrazione scritta dal Viviani e non ancora pubblicata, era necessario adottare un diverso punto di vista e cercare di utilizzare nuovi strumenti o nuovi percorsi d'indagine. Torricelli sceglie di partire dai principi della meccanica riconosciuti universalmente validi, come la *legge della leva* e la *legge dell'equilibrio*, da cui dedurre come teorema l'assioma galileiano. Dalla struttura argomentativa dell'approccio torricelliano si ottiene l'equivalenza tra il "momentum gravium" e il "momentum velocitatis". Se la preferenza è accordata al primo, nella fase in cui si sviluppano gli strumenti propri del contesto meccanico, egli adotta il secondo solo quando si

[120] "Tempora lationum ex quiete per plana eandem elevationem habentia, sunt homologè ut longitudines planorum" (*Opere di Torricelli* II, p. 111).

[121] "Si duo mobilia aequabili motu ferantur, ratio velocitatum ipsorum composita erit ex ratione spatiorum peractorum et ex ratione temporum contrarie sumptorum" (*Opere di Galileo* VIII, p. 196).

chiariscono le relazioni con le grandezze cinematiche di tempo e velocità. La precisione e l'efficacia con cui Torricelli procede verso l'obiettivo fanno ritenere che egli avesse una profonda consapevolezza di dove si annidassero le difficoltà e, nello stesso tempo, che avesse una visione molto chiara dei significati dei termini in gioco. Lungi dal suggerire un'analogia semantica, come aveva fatto Galileo, egli procede con rigore a studiare in quale modo si possano misurare le grandezze e costruire relazioni tra esse. La giustificazione del passaggio dall'accezione *meccanica* a quella *cinematica* è fornita dalla possibilità di descrivere quantitativamente i momenti, attraverso costruzioni geometriche di segmenti che, per loro natura, sono omogenei alle rappresentazioni degli spazi, dei tempi e delle velocità usuali nella pratica galileiana.

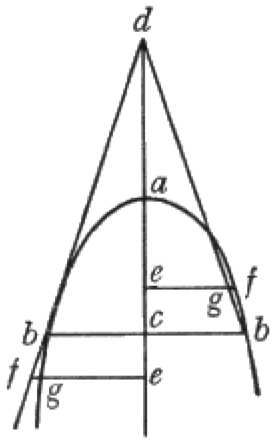
### *Par. 5 Lo studio del lancio dei proiètti.*

La *quarta giornata* dei *Discorsi* è interamente dedicata al moto dei proietti e i tre protagonisti si dilettano con la lettura del terzo trattato dell'Accademico, il *De motu proiectorum*. Come Galileo sottolinea all'inizio del *De motu locali*, la dimostrazione geometrica che la traiettoria percorsa da un proiettile ha forma parabolica è il risultato più importante.[122] L'altra proprietà del moto parabolico che avrà un ruolo fondamentale per l'applicazione della scienza dei proietti all'artiglieria è quella che riconosce nell'angolo di 45° quello che determina il lancio con la gittata massima, a parità d'impeto iniziale.[123] Dopo il primo argomento,[124]

[122] "Observatum est, missilia, seu proiecta, lineam qualitercunque curvam designare; veruntamen, eam esse parabola, nemo prodidit" (*Opere di Galileo* VIII, p. 190).

[123] È enunciata nel Corollario del Teorema IV: "Hinc apparet, quod conversim in proiecto ex termino d per semiparabolam db minor impetus requiritur, quam per quamcunque aliam iuxta elevationem maiorem, seu minorem elevatione semiparabolae bd, quae est iuxta tangentem ad, angulum semirectum supra horizontem continentem. Quod cum ita sit, constat, quod, si cum eodem impetu fiant proiectiones ex termino d, iuxta diversas elevationes, maxima proiectio, seu amplitudo semiparabolae, sive integrae parabolae erit, quae consequitur ad elevationem anguli semirecti: reliquae vero iuxta maiores, sive minores angulos factae, minores erunt" (*Opere di Galileo* VIII, p. 296).

l’Accademico introduce le nozioni di geometria che sono irrinunciabili per seguire senza difficoltà le costruzioni successive. Le proprietà geometriche indispensabili della parabola sono due e sono mutuate dalle *Coniche* di Apollonio. In particolare, la prima è la proprietà caratterizzante gli archi di parabola e fornisce il criterio per distinguere i punti del piano che appartengono a una data parabola da quelli che non vi appartengono.[125] La seconda, invece, è la costruzione che mette in relazione l’asse (ae), il diametro (bb), la sublimità (ad) e la tangente (bd) di un dato punto (b) di una parabola.[126] Da un punto di vista strettamente geometrico, il passaggio dal trattato sul moto naturalmente accelerato a quello sul moto dei proietti corrisponde al passaggio da una matematica rappresentata da triangoli (schema del piano inclinato) e circonferenze (schema contenente piani inclinati che vengono percorsi in tempi uguali), a una matematica rappresentata da parabole (schema del moto di un proietto). Come si vedrà nel prosieguo, l’uso di opportuni diagrammi è il mezzo che sostiene Galileo nel corso di dimostrazioni in cui il mobile diventa un punto in moto accelerato con continuità[127] lungo una linea continua, rettilinea o parabolica. Questo particolare aspetto del trattato permette di osservare come Galileo utilizzasse i diagrammi. La sua concezione dello *schema geometrico* è sostanzialmente descrittiva poiché, pur astraendo sul piano geometrico, esso rimane sempre ancorato alla forma delle traiettorie coinvolte.



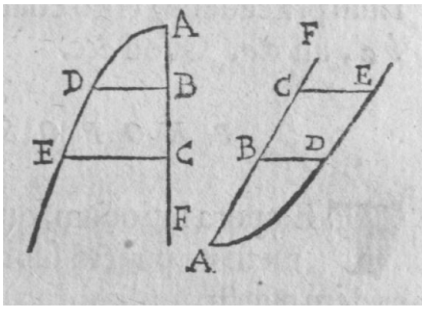

[124] Il primo argomento è il Teorema I: “Proiectum, dum fertur motu composito ex horizontali aequabili et ex naturaliter accelerato deorsum, lineam semiparabolicam describit in sua latione” (*Opere di Galileo* VIII, p. 269).

[125] È la Proposizione XX del Libro I (Apollonius Pergaeus, *Conics. Books 1-3*, Dana Densmore (ed.), translation by Catesby Taliaferro, diagrams by William H. Donahue, introduction by Harvey Flaumenhaft. Santa Fe, N.M.: Green Lion Press, 2000. Nel seguito, sarà indicato come *Coniche*).

[126] È la Proposizione XXXIII del Libro I (*Coniche*).

[127] “Leviora quaedam adnotantur, ut, gratia exempli, naturalem motum gravium descententium continue accelerari” (*Opere di Galileo* VIII, p. 190).

Evangelista Torricelli, invece, dimostra una maggiore flessibilità e disinvoltura, staccandosi da una concezione dello schema come prettamente descrittiva, per adottare una pratica meramente quantitativa e funzionale. Ad esempio, la relazione tra spazi percorsi e quadrati dei tempi di caduta del moto uniformemente accelerato è descritta da un diagramma in cui la figura di riferimento non è più un triangolo, ma una semiparabola (si veda la figura qui di lato).[128] Torricelli utilizza lo strumento matematico che, per sua naturale costituzione, può collegare direttamente le due grandezze fondamentali del moto del proiettile, cioè la sua altezza rispetto al suolo e la semiampiezza della sua traiettoria o gittata. I punti di una parabola qualsiasi stanno nella medesima relazione, quando si mettono a confronto il *diametro* (i segmenti contenuti nella linea AF, cioè AB e AC) e le *proiezioni ordinate* (i corrispondenti segmenti BD e CE) corrispondenti a ciascuno di essi. Una prima conseguenza di quest'uso di diagrammi, per così dire, più astratti è un allargamento delle possibilità euristiche della creatività matematica. Inoltre, la geometria delle coniche permette di ricavare le dimostrazioni di alcuni teoremi già proposti da Galileo in uno stile più breve ed efficace, facile da intendere, non solo per quanto riguarda il moto dei proietti, ma anche per il moto di caduta libera. La parabola diventa uno schema comodo in grado di fornire risposte più immediate. Nel secondo libro del *De motu gravium*, Torricelli estende i risultati già ottenuti da Galileo al caso in cui il lancio del proietto avvenga non parallelamente al suolo ma lungo semirette inclinate verso l'alto o verso il basso rispetto all'orizzonte. Questa volta, la parabola coincide con la traiettoria del mobile, la cui costruzione è affiancata da altre linee, come semirette e semicerchi, che diventano lo schema accessorio che gli permette di stabilire tempi, velocità e impeti di quel particolare




[128] È la Proposizione X: "Tempora lationum, quae ex quiete fiunt per plana quaecunque sunt inter se ut lineae in parabola applicatae ad spatia per quae gravia descenderunt" (*Opere di Torricelli* I, p. 177).

moto. In questo senso, egli mantiene la promessa iniziale di proseguire il percorso iniziato da Galileo.[129]

*Par. 6 Il 'De motu proiectorum' di Galileo.*

La *quarta giornata* entra immediatamente in tema, grazie alla lettura da parte di Salviati del terzo trattato dell'Accademico, intitolato *De motu proiectorum*. Nella brevissima premessa alla presentazione dei teoremi, l'autore anticipa un fatto cruciale per tutto ciò che segue, cioè la *natura composta* del moto dei proietti. Esso è un *moto composto* di due moti rettilinei, il primo orizzontale ed *equabile*, il secondo verticale e *naturalmente accelerato*, che dà luogo a una traiettoria di forma parabolica, come dimostra il Teorema I.[130] Non si tratta semplicemente di un caso più complesso rispetto ai moti studiati nei due precedenti lavori. Il presupposto su cui si fonda la composizione dei moti è un'ipotesi innanzitutto ontologica e, solo in un secondo momento, euristica. È ontologica, perché Galileo non è in grado di dimostrare matematicamente che i due moti rettilinei impressi simultaneamente a uno stesso corpo non si alterino a vicenda, producendo quindi un moto continuo, rappresentato da una particolare linea. Se non si può parlare di dimostrazione, ci si deve accontentare di misurare il fenomeno reale per confrontare poi i dati empirici con le previsioni teoriche. L'accordo tra i due insiemi di dati sarà la prova a sostegno della validità del principio d'indipendenza dei moti componenti. E quest'assunto permette di creare un oggetto fisico nuovo, qual è il moto

[129] "SCIENTIAM de motu G[radium] et Pr[oiectorum] à pluribus quidem tractatam, ab unico (quod ego sciam) Galileo Geometricè demonstratam, aggredi libet. Fateor, quòd ille totam hanc segetem tamquam falce demessuit, nec aliud superest nobis, nisi ut tam seduli messeri vestigia subsequentes, spicas colligamus, si quae ab ipso vel relictae fuerint, vel abiectae: sin minus, Ligustra saltem, et humi nascentes violas decerpamus; sed fortasse et ex floribus coronam contexemus non contemnendam" (*Opere di Torricelli* I, p. 155).

[130] "Proiectum, dum fertur motu composito ex horizontali aequabili et ex naturaliter accelerato deorsum, lineam semiparabolicam describit in sua latione" (*Opere di Galileo* VIII, p. 269).

parabolico.[131] È a sua volta anche euristica, perché, dato per assodata la mutua indipendenza dei singoli moti impressi all'oggetto, le conseguenze che si possono dedurre matematicamente dal modello geometrico del moto parabolico sono direttamente traducibili in termini di tempi, spazi, velocità, impeti e momenti, cioè nelle grandezze fisiche che caratterizzano il moto stesso. Questo scambio reciproco tra l'ambito fisico, in cui si osservano e si realizzano i fenomeni, e l'ambito matematico, in cui si studiano le relazioni tra oggetti geometrici, è ciò che porta alla costruzione di veri e propri *modelli*. Un successivo passaggio è, però, indispensabile per rendere il modello teorico corrispondente al fenomeno osservato. Esso consiste nell'aver "rimosso ogni impedimento",[132] ma solo dopo un'attenta analisi di come ogni singolo *impedimento* agisca sul fenomeno principale. Grazie a quest'estensione ideale delle proprietà del moto si è in grado di pensare al moto uniforme come "perpetuo sul medesimo piano, qualora esso si estenda all'infinito"[133] oppure nel caso di un piano limitato, come a un moto "indelebile";[134] e al moto naturalmente accelerato come determinato dalla proprietà di *gravità* del mobile, che *piega* la retta del moto orizzontale verso il basso.[135]

---

[131] Alberto di Sassonia riteneva che il lancio di un proiettile avesse una traiettoria composta di due moti rettilinei. Il primo era inclinato e ascendente, in virtù dell'azione dell'*impetus* che vince la naturale tendenza del mobile ad avvicinarsi al centro del mondo. Il secondo era inclinato discendente, per l'esaurirsi del moto violento. Le due azioni, in tal modo, operavano una di seguito all'altra senza combinarsi in ciascun istante.

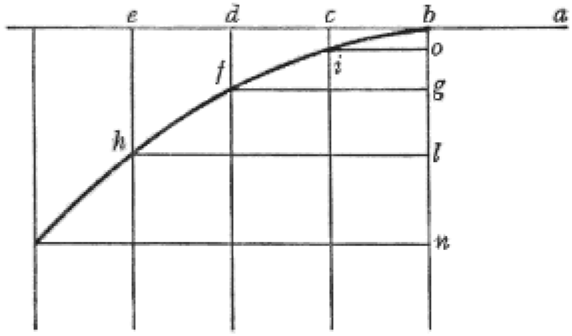
[132] "[O]mni secluso impedimento" (*Opere di Galileo* VIII, p. 268).

[133] "Perpetuum super ipso plano futurum esse, si planum in infinitum extendatur" (*Opere di Galileo* VIII, p. 268).

[134] "[A]equabili atque indelebili priori lationi" (*Opere di Galileo* VIII, p. 268). Una *velocità* che non muta d'intensità, generando così un ideale moto perpetuo, è una proprietà interna al mobile e propria, caratteristica del corpo. Lo stato di moto uniforme si realizza quando non c'è un *motore* esterno a esso, quando cioè la causa dell'eventuale variazione non agisce. Per Galileo, la causa era data dalla presenza di un *momento della velocità* o di un *impeto*, determinati dall'avvicinarsi del baricentro mobile al centro della Terra. Su una superficie sferica oppure lungo una circonferenza, entrambe concentriche alla Terra, tale condizione non occorre mai. Da quanto appena detto, si può constatare la sostanziale differenza tra il concetto di *moto perpetuo uniforme* per Galileo e il concetto di *moto inerziale* newtoniano.

[135] "Mobile, quod gravitate praeditum concipio, ad plani terminum delatum, ulterius progrediens, aequabili atque indelebili priori lationi superaddet illam quam a propria gravitate habet deorsum propensionem" (*Opere di Galileo* VIII, p. 268).

Il primo teorema dimostra come la linea tracciata da un mobile di moto composto, uniforme e accelerato, sia parabolica. Dopo una rapida digressione che serve a ricordare le proprietà fondamentali della parabola in geometria piana, segue l'attesa dimostrazione. La strategia consiste, innanzitutto, nel riferirsi allo scorrere del tempo: $t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_{n-1} = t_n$. Rispetto a questo orologio, il moto equabile orizzontale copre spazi uguali in intervalli temporali uguali (nella figura sono dati dai segmenti bc=cd=de=…); il moto di caduta uniformemente accelerato, invece, copre spazi proporzionali all'intervallo di tempo considerato (nella figura sono dati dai segmenti bo, bg, bl, bn…). In questo modo, si costruisce un diagramma piano, in cui ogni punto rappresenta la posizione del mobile in un dato istante $t_n = n \cdot t_1$ ($t_1$ è la durata del primo intervallo temporale dall'inizio dell'osservazione del moto, considerato come unità di misura del tempo, e $t_0 = 0$ l'istante in cui inizia l'osservazione), dopo aver subito uno spostamento orizzontale $s_{or} \propto t_n$ (dove $n$ indica il numero d'istanti trascorsi dall'inizio dell'osservazione) e una contemporanea caduta pari a $s_v \propto t_n^2$. Questo approccio *cinematico* costruisce la curva del moto, risultante dalla composizione del rettilineo uniforme e di quello uniformemente accelerato. Dopo aver ricordato come la relazione tra una lunghezza $x$ e il suo quadrato $x^2$ generi sempre una parabola, si mostra che questo schema *geometrico*, dotato di un livello di astrazione che gli fornisce una generalità assoluta, è perfettamente corrispondente allo schema cinematico.[136] Non è solo un




[136] Galileo ha costruito quello che in matematica si chiama un *omomorfismo*, cioè un'applicazione o mappa da una struttura A (con almeno un elemento) a una struttura B (con almeno un elemento), che fa corrispondere a un oggetto di A un oggetto in B e che traduce l'operazione tra gli elementi di A nella corrispondente operazione tra gli elementi corrispondenti in B. Di conseguenza, la composizione dei moti, che ha una struttura additiva, è mappata nella struttura additiva della geometria piana. Ma è solo la validità del risultato dell'addizione nel contesto geometrico che permette di ricavare l'esistenza del moto composto, il risultato della *somma* dei due moti rettilinei, e derivarne la forma. Questo procedimento non è in realtà sempre valido. Per questo, sarebbe necessario avere un *isomorfismo*, cioè un omomorfismo in cui la relazione

problema legato alla posizione del mobile, come nasce dalla composizione imperturbata dei due spostamenti rettilinei. La discussione seguente che, come nella *terza giornata*, serve a chiarire il quadro teorico e a risolvere le obiezioni più importanti che potevano essere mosse dai sostenitori della spiegazione tradizionale, prende le mosse proprio dalla conferma da parte di Sagredo della validità del principio di composizione.

Le prime due obiezioni vertono sulla bontà della costruzione della traiettoria parabolica. In altri termini, si vuole indagare se e con quali restrizioni lo schema geometrico sia sovrapponibile o omeomorfo allo schema cinematico. Una prima differenza dipende dal fatto che, mentre in geometria piana le linee di proiezione verticali sono parallele tra loro, la caduta di un grave avviene lungo una retta diretta verso il centro della Terra. Per questo motivo, le proiezioni verticali del moto di caduta dovrebbero essere disegnate non parallele ma convergenti nel centro della sfera terrestre, fatto che deformerebbe la parabola. E se così non fosse, si dovrebbe coerentemente mettere in discussione un principio meccanico tra i più consolidati dall'esperienza. Una seconda differenza dipende, invece, dalla definizione di *piano orizzontale* coinvolta nella costruzione del moto rettilineo uniforme. Se si considera la Terra sferica e rappresentata da una circonferenza e il piano rettilineo come una linea retta disegnata in prossimità di essa, si vede come la distanza tra il centro della circonferenza e un qualsiasi punto della retta è variabile. Pertanto, un moto lungo una retta siffatta non potrebbe mai essere equabile, ma rallentato o accelerato secondo il suo verso. È accelerato nel caso in cui il grave passa da una posizione a una successiva che ha una minore distanza dal centro; è decelerato in caso contrario. La soluzione del duplice paradosso è la stessa che si ha nel caso dell'equilibrio di due corpi appesi a una bilancia.[137] Se nel caso della bilancia si

tra gli elementi di A e di B è una relazione 1-1 ovvero, detto in linguaggio moderno, *biiettiva* per la quale è possibile anche ripercorrere la mappa nel verso opposto, dagli elementi di B a quelli di A.

[137] Il principio della leva, alla base della soluzione di questo problema di equilibrio, dipende dal principio dinamico della caduta dei gravi verso il centro della Terra che è coinvolto in queste obiezioni.

possono considerare le rette contenenti i gravi come parallele e il corpo della bilancia come rettilineo orizzontale, allora la medesima approssimazione è valida anche per la costruzione della traiettoria parabolica. In altre parole, se si accettano i risultati della scienza di Archimede, allora si devono accettare anche le conclusioni della nuova scienza del moto di Galileo. A questa considerazione di principio, segue una puntuale stima dell'approssimazione introdotta. Un arco, che insiste su un angolo al centro di 1′, è lungo poco più di 1 miglio (se si prende la lunghezza di 4.000 miglia come lunghezza del raggio della Terra), come la lunghezza della corda a esso sottesa.[138]

La terza obiezione riguarda l'*azione degli impedimenti* al moto dei proietti. Le cause di disturbo del moto sono molteplici, ma la più importante, per l'effetto che produce, e l'unica a essere presa in considerazione è la resistenza dell'aria. Il comportamento di un grave in moto in un mezzo varia al variare di tre parametri principali: la forma del corpo in movimento, la sua gravità[139] e la sua velocità. A parità di forma, l'impedimento è maggiore per i corpi più leggeri e per le velocità più grandi.[140] Per quanto riguarda il primo effetto, l'impedimento che l'aria oppone ai gravi composti di materiali differenti è sensibile, ma del tutto trascurabile se si paragona la differenza di gravità con la corrispondente differenza dei tempi della caduta libera da pari altezza. Per quanto riguarda il secondo effetto, lo si può valutare facendo oscillare due pendoli uguali, ma con ampiezze di oscillazione diverse. Se l'azione frenante dell'aria in funzione della velocità fosse consistente,

---

[138] In dettaglio, si ha: dato l'angolo $\alpha = 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} = 0{,}0002908813 rad$, la lunghezza dell'arco di circonferenza che insiste su $\alpha$ è $\widehat{\alpha} = 1{,}163525 miglia = \frac{2\pi R}{360^{\circ} \cdot 60'} = \frac{2\pi \cdot 4.000 miglia}{21.600'}$, mentre la lunghezza della corda corrispondente è $\overline{\alpha} = 1{,}163525 miglia = \alpha R = 0{,}0002908813 \cdot 4.000 miglia$.

[139] Si ricordi che per *gravità* s'intende la naturale tendenza ad avvicinarsi al centro della Terra, propria di ogni corpo, e non la forza di mutua interazione tra due corpi posti a una certa distanza, come s'intende oggi.

[140] Con il linguaggio attuale, la variazione della resistenza si dice direttamente proporzionale alla velocità e inversamente alla massa: $R \propto \frac{v}{m}$.

alla differenza marcata di ampiezza e, quindi, di velocità, corrisponderebbe una marcata differenza del numero delle oscillazioni in un dato intervallo temporale. Ciò che avviene, invece, è l'uguaglianza della loro frequenza. La resistenza che l'aria oppone a un mobile in moto rettilineo uniforme o nella caduta libera, o a un proietto è diversa da grave a grave, ma agisce in proporzione alla sua velocità: resistenza maggiore per velocità grandi; resistenza minore per velocità piccole. Per dare una ragion d'essere alla nuova scienza, è importante valutare quanto i risultati teorici si discostino dalle misure empiriche. E quanto precede basta per affermare che il moto dei proietti ha forma parabolica con un'ottima approssimazione.

La scienza del moto di Aristotele si basava sulla differenza sostanziale tra i moti naturali, come il moto circolare uniforme dei corpi celesti e la caduta libera dei gravi, e i moti violenti, come il lancio di un grave verso l'alto e il moto dei proietti. Moti naturali e violenti risultavano irriducibili gli uni agli altri, perché erano effetti di cause diverse. Con la scienza del moto di Galileo, invece, si ha una differente classificazione. Il moto di un proietto non può dirsi naturale, perché ha bisogno di un impeto impresso dall'esterno per iniziare, anche se è la composizione di due moti naturali. Non è neppure violento, perché si sviluppa seguendo la sua naturale tendenza a cadere e il naturale permanere dell'impulso iniziale. L'unico tipo di movimento che resta qualitativamente incommensurabile è il risultato di un impeto iniziale grandissimo e indefinito, noto come *percossa*. Esso è alla base non del moto violento dei proietti, ma di un tipo speciale di proietti, quelli detti *tiri d'artiglieria*, poiché "par che la velocità con la quale vien cacciata la palla fuori d'un moschetto o d'una artiglieria, si possa chiamar sopranaturale."[141] E secondo Salviati:

> Questo soverchio impeto di simili tiri sforzati può cagionar qualche deformità nella linea del proietto, facendo 'l principio della parabola meno inclinato e curvo del fine; ma questo, poco o niente può essere di

[141] *Opere di Galileo* VIII, p. 278.

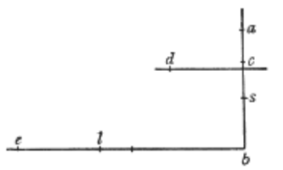
pregiudizio al nostro Autore nelle praticali operazioni: tra le quali principale è la composizione d'una tavola per i tiri che dicono di volata […]; e perché tali proiezzioni si fanno con mortari, e con non molta carica, in questi non essendo sopranaturale l'impeto, i tiri segnano le lor linee assai esattamente.[142]

La composizione di moti è anche un problema di composizione di velocità. Infatti, presupporre che i due moti rettilinei non si perturbino a vicenda significa che le accelerazioni restano invariate anche se applicate a un medesimo corpo. Il Teorema II[143] e il Teorema III[144] sono gli strumenti che descrivono come variano la velocità e l'impeto del moto complessivo. Se per lo spostamento risultante si deve sommare ciascuno dei due contributi tenendo presente la rispettiva direzione, per l'impeto risultante, invece, si deve utilizzare la somma dei quadrati degli impeti componenti, insieme alla loro direzione.[145] Per ottenere questo risultato, Galileo

[142] *Opere di Galileo* VIII, p. 279.

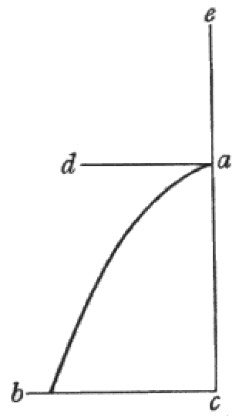
[143] "Si aliquod mobile duplici motu aequabili moveatur, nempe orizontali et perpendiculari, impetus seu momentum lationis ex utroque motu compositae erit potentia aequalis ambobus momentis priorum motuum" (*Opere di Galileo* VIII, p. 280).

[144] "Fiat motus per lineam ab ex quiete in a, et accipiatur in ea quodlibet punctum c; et ponatur ipsamet ac esse tempus, seu temporis mensura, casus ipsius per spatium ac, nec non mensura quoque impetus seu momenti in puncto c ex descensu ac acquisiti. Modo sumatur in eadem linea ab quodcunque aliud punctum, utputa b, in quo determinandum est de impetu acquisito a mobili per descensum ab, in ratione ad impetum quem obtinuit in c, cuius mensura posita est ac. Ponatur as media proportionalis inter ba, ac: demonstrabimus, impetum in b ad impetum in c esse ut lineam sa ad ac" (*Opere di Galileo* VIII, p. 281).




[145] "Per regola dunque ferma e sicura, quando si debba assegnare la quantità dell'impeto resultante da 2 impeti dati, uno orizzontale e l'altro perpendicolare ed amendue equabili, si deve di amendue fare i quadrati, e, componendogli insieme, estrar la radice del composto, la quale ci darà la quantità dell'impeto composto di amendue quelli" (*Opere di Galileo* VIII, p. 280). In questo modo, spazio percorso e impeto acquisito sono utilizzati come se fossero dei moderni vettori, rispettivamente, con la regola del parallelogramma per determinare lo spostamento risultante e con il teorema di Pitagora per calcolare l'intensità dell'impeto risultante.

adotta lo stesso stratagemma che aveva utilizzato nel *De motu naturaliter accelerato*, cioè riduce il moto accelerato a un moto uniforme equivalente.[146] Se, in linea di principio, è sempre possibile associare a un moto naturalmente accelerato un moto uniforme qualsiasi, in questo caso si deve poter determinare univocamente quell'unico moto uniforme da poter comporre con il moto accelerato di caduta verticale che determina il moto parabolico in esame. Il problema nasce dal fatto che non si tratta di misure specifiche e univoche, ma di stime valide a meno di proporzionalità, rispetto alle quali è cruciale fissare in modo definitivo le convenzioni rispetto alle quali portare a termine la costruzione in esame. Infatti, mentre la caduta è univocamente determinata grazie all'assioma del moto accelerato, non variando la velocità d'impatto con il suolo neppure al variare del corpo che cade,[147] per il moto orizzontale uniforme ci sono infinite possibilità, perché infinite sono le possibili diverse scelte della velocità.[148] Pertanto, Galileo fissa alcune convenzioni, che non sono solo legate ad alcune grandezze fisiche del moto, ma sono anche le più semplici da tracciare in un diagramma.




L'*impeto* acquistato al suolo in *c* durante la caduta dallo stato di quiete in *a* è misurato dallo stesso segmento *ac* che descrive lo

[146] Si parla di *equivalenza* tra due strutture, quando gli oggetti e le relazioni della prima sono traducibili in oggetti e relazioni della seconda, in modo che quello che vale in un insieme vale anche nel secondo.

[147] Essa varia, infatti, solo in funzione dell'altezza della caduta, cioè dalla distanza tra l'inizio del moto che parte dallo stato di quiete e il punto di impatto sottostante.

[148] "Resta poi a trovar modo di determinare anco la quantità dell'impeto in un moto equabile in guisa tale, che tutti coloro che circa di quello discorrino, si formino l'istesso concetto della grandezza e velocità sua, sì che uno non se lo figuri più veloce e un altro meno, onde poi nel congiungnere e mescolar questo da sé concepito equabile con lo statuito moto accelerato, da diversi uomini ne vengano formati diversi concetti di diverse grandezze d'impeti"(*Opere di Galileo* VIII, p. 281). Un *moto uniforme* è un moto in cui il valore della velocità resta sempre uguale, indipendentemente dall'istante che si considera. Fissata la velocità $v$, ad esempio, si può determinare la particolare relazione che lo lega al moto di caduta libera che si sta studiando, che potrebbe essere una costante di proporzionalità tra lo spazio nella caduta e quello percorso con il moto uniforme a velocità $v$. Senza questa convenzione, si otterrebbero risultati diversi, ad esempio, nel calcolo della *gittata* di un proietto, vale a dire della lunghezza massima raggiunta da esso e che nella parabola di riferimento corrisponde alla corda perpendicolare all'asse e parallela al suolo, congiungente i punti iniziale e finale del moto.

spazio di caduta,[149] mentre il *grado di velocità* del moto uniforme sarà quello con il quale, nel tempo impiegato a scendere dalla *sublimità* (*ea*, segmento verticale che precede lo spazio della caduta), percorrerà sull'orizzontale uno spazio doppio della sublimità stessa ($ad = 2ea$).[150]

La digressione successiva di Sagredo giunge inizialmente inaspettata. Egli trova in questo meccanismo il modo con cui

> Iddio, dopo aver creati i corpi mobili celesti, per assegnar loro quelle velocità con le quali poi dovessero con moto circolare equabile perpetuamente muoversi, gli fece, partendosi loro dalla quiete, muover per determinati spazii di quel moto naturale e per linea retta secondo 'l quale noi sensatamente veggiamo i nostri mobili muoversi dallo stato di quiete accelerandosi successivamente; e soggiunge che, avendogli fatto guadagnar quel grado nel quale gli piacque che poi dovessero mantenersi perpetuamente, convertì il moto loro retto in circolare, il quale solo è atto a conservarsi equabile, rigirandosi sempre senza allontanarsi o avvicinarsi a qualche prefisso termine da essi desiderato.[151]

Essa giunge di sorpresa, perché esce dal contesto della scienza del moto terrestre, per mostrare come essa possa essere applicata anche in ambito celeste. Se la

---

[149] "[U]nus enim atque idem est semper impetus mobilis ex eadem altitudine cadentis" (*Opere di Galileo* VIII, p. 283).

[150] "[E]x [sublimitate] *ae* si cadens ex quiete in *e* mente concipiam, patet, impetum eius in termino *a* acquisitum, unum esse cum quo idem mobile, per horizontalem *ad* conversum, ferri concepero; eiusque gradum celeritatis esse illum, quo, in tempore descensum per *ea*, spatium in horizontali duplum ipsius *ea* conficiet" (*Opere di Galileo* VIII, p. 283).

[151] *Opere di Galileo* VIII, pp. 283-284.

tradizione aristotelica e tolemaica aveva realizzato un cosmo coerente e consistente, pur nell'inconciliabilità delle leggi che ne regolano le due parti, quella terrestre sub-lunare e la celeste, qui Galileo fornisce al lettore una via per ricongiungere le due parti distinte del mondo, ottenendone un *universo*. Un luogo, questo, in cui valgono le stesse leggi per ogni corpo, sia esso di origine terrestre oppure no. La parentesi cosmologica o, cogliendo un riferimento dello stesso autore, platonica,[152] ha quindi un ruolo notevole nella ricostruzione dell'immagine del mondo che ne risulta. Inoltre, il Dio creatore è qui mostrato sotto le vesti di un Dio artefice che, dopo aver stabilito le leggi del moto, si attiene a esse nelle successive fasi della creazione del mondo. Rispetto al mito platonico, Galileo mostra una divinità che sceglie di muovere i nascosti ingranaggi del cosmo per realizzare la sua opera. La sua descrizione è una scelta di campo che porta la riflessione dall'ambito della *filosofia naturale* tradizionale, verso un nuovo modo di concepire la natura, che sarà in seguito battezzato come *filosofia meccanicista*.

Manifestando il legame che la *scienza del moto* ha con la *scienza dei cieli*, la citazione riassume il punto di vista più maturo di Galileo a proposito delle leggi che regolano il mondo. La scelta del moto circolare uniforme come quell'unico moto in grado di auto-sostenersi indefinitamente, rimarca ancora una volta come il concetto galileiano d'*inerzia* sia profondamente diverso da quello che noi moderni consideriamo tale. Non c'è bisogno di una legge universale che regoli il moto dei corpi in virtù di una qualche forma di azione o forza. È sufficiente il *principio locale* di caduta verso il centro della Terra, che diventa il motivo fondante della dinamica galileiana. Infatti, l'unico modo che ha un corpo in moto di conservare invariata la propria velocità consiste nel non allontanarsi, né avvicinarsi mai, al centro della Terra. L'unica traiettoria possibile, in questo caso, è la circonferenza concentrica alla Terra.[153] Come si concili questa posizione di prestigio del centro della Terra con la

[152] Anche la *prima giornata* del *Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo* è dedicata a inserire la Terra nel sistema dell'universo.

[153] Per Euclide, la *circonferenza* è l'insieme dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro.

convinzione che il vero sistema del mondo segue lo schema copernicano non è dato di sapere con certezza, perché non si ha testimonianza a riguardo da parte di Galileo stesso.[154] Si può certamente affermare che Galileo fosse consapevole della presenza di più centri di rotazione differenti. Infatti, risale all'inizio del 1610 la scoperta dei quattro satelliti di Giove in rotazione attorno ad esso, come la Luna ruota attorno alla Terra, con Giove e Terra che a loro volta descrivono un'orbita[155] attorno al Sole.[156] Quello che manca è una giustificazione o un'*ipotesi meccanica* a riguardo, coerente con il resto del quadro teorico fisico-cosmologico.

Il resto del trattato ha un carattere più applicativo. Esso è dedicato ai modi di ricavare le grandezze fondamentali di un *moto parabolico*, quali sublimità, altezza, ampiezza, impeto iniziale e sua inclinazione rispetto all'orizzonte e alla dimostrazione che l'ampiezza massima, a parità d'impeto, è quella di un lancio inclinato a 45°. Tutto questo materiale è funzionale alla compilazione di alcune tavole utili per i tiri d'artiglieria, per le quali è importante valutare l'azione della percossa iniziale che imprime la velocità al proietto. Lo studio della percossa vera e propria è, però, lasciato alla *quinta giornata* mai aggiunta all'opera.

---

[154] Dopo la condanna da parte della Chiesa del 1633, Galileo non può più difendere e sostenere le ragioni del sistema copernicano. La miglior fonte d'indagine per comprendere il suo punto di vista cosmologico è data dal *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, pubblicato nel 1632.

[155] Galileo credeva che le orbite dei pianeti fossero circolari, probabilmente per le ragioni meccaniche viste in precedenza. Nonostante conoscesse la teoria di Kepler che descriveva i pianeti in rotazione attorno al Sole lungo orbite ellittiche, in cui esso occupava uno dei due fuochi, Galileo non vi dà credito.

[156] Grazie all'uso di un telescopio a 20 ingrandimenti, Galileo osserva per primo i quattro satelliti di Giove, durante la notte del 7 gennaio 1610: nella lettera di Galileo del 7 gennaio 1610: "molte stelle fisse si veggono con l'occhiale, che senza non si discernono; et pur questa sera ho veduto Giove accompagnato da 3 stelle fisse, totalmente invisibili per la loro piccolezza" (*Opere di Galileo* X, p. 277). Anche se, in un primo momento, pensava che fossero nuove stelle fisse, al più tardi il 15 gennaio si convinse che erano corpi in rotazione attorno a Giove. Per una descrizione di come avvenne la loro scoperta, si legga il racconto che Galileo fa in prima persona, proprio nel *Sidereus Nuncius* (*Opere di Galileo* III). In quest'opera, pubblicata nel marzo del 1610, sono illustrate e

*Par. 7 Il 'De motu proiectorum' di Torricelli.*

Il secondo libro del lavoro di Torricelli dedicato al moto è composto di una parte iniziale, estremamente consistente e preponderante rispetto al resto, che si occupa dei proietti e di una parte finale che si occupa del moto delle acque correnti. In questa sede sarà presa in considerazione solo la prima, e solo per quanto riguarda il confronto con l'analogo trattato di Galileo.

Con la sinteticità e chiarezza che gli è usuale, Evangelista Torricelli entra immediatamente nel vivo dell'argomento, descrivendo i limiti di validità della teoria di Galileo ai quali vuole dare una diversa soluzione. La lacuna che ritiene essere cruciale, per accettare senza riserve la scienza dei proietti, è quella concernente il teorema generale della forma parabolica della traiettoria. Infatti, dalla sua dimostrazione non si deduce il medesimo risultato quando il proietto non è lanciato orizzontalmente, cioè quando la direzione del moto equabile componente non è parallela al suolo, oppure quando il punto di inizio della caduta libera non coincide con il vertice della traiettoria parabolica.[157]

Il suo primo intento consiste, quindi, nel dimostrare che anche con moto uniforme non orizzontale, cioè con un lancio inclinato rispetto al suolo, si ha la stessa traiettoria parabolica che si otterrebbe lanciando orizzontalmente. Questa proprietà era stata data per assodata dall'Accademico, come appare evidente dal Corollario alla Proposizione VII, dov'è utilizzata con disinvoltura.[158] Per far questo,

---

analizzate anche altre osservazioni celesti, come la presenza di monti e valli sulla superficie lunare, la natura della Via Lattea e delle Nebulose, e le nuove stelle fisse, troppo poco luminose per essere viste a occhio nudo.

[157] "Dummodo, linea AB quae est directio proiectionis ad horizontem fuerit parallela, et quando parabolae initium B, factum fuerit ex vertice supremo ipsius parabolae, sive (quod idem est) ab extremo axis parabolici puncto B" (*Opere di Torricelli* II, p. 153).

[158] "Hinc apparet, quod, conversim, in proiecto ex termino d per semiparabolam db minor impetus requiritur, quam per quamcunque aliam iuxta elevationem maiorem seu minorem elevatione semiparabolae bd, quae est iuxta tangentem ad, angulum semirectum supra horizonte continentem. Quo dita sit, constat quod, si cum eadem impeta fiant proiectiones ex termino d iuxta diversas elevationes, maxima proiectio, seu amplitudo semiparabolae sive integrae parabolae, erit quae consequitur ad elevationem anguli semirecti; reliquae vero iuxta maiores sive minores angulos factae, minores erunt" (*Opere di Galileo* VIII, p. 296).

però, è indispensabile conoscere l'inclinazione della direzione di lancio e le proprietà geometriche della parabola, come descritte da Apollonio, che vengono ricordate all'inizio del trattato. Il secondo intento di Torricelli consiste invece nell'applicare i risultati teorici ricavati da Galileo ai problemi di artiglieria, per ricavarne regole di utilizzo semplici e immediate per le macchine di lancio.[159]

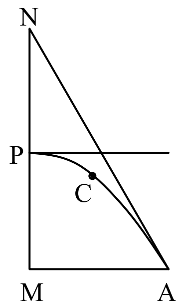
Per quanto riguarda il primo proposito, è indispensabile accordarsi sul moto equabile che concorre nella composizione del moto parabolico. Il moto uniforme è quello rettilineo del proietto, lanciato lungo una retta tangente alla traiettoria. Torricelli assume la stessa convenzione di Galileo, in base alla quale il moto uniforme da considerare è quello che percorre uno spazio doppio rispetto a quello percorso dal moto uniformemente accelerato che si sta studiando. Galileo, però, aveva preso in esame esclusivamente un moto equabile orizzontale, da comporsi con il moto di caduta libera naturalmente accelerato. Torricelli, invece, ha la necessità di ricomporre la traiettoria parabolica non solo partendo dal vertice della parabola, ma anche da un qualsiasi altro punto. Per ottenere questo, ha bisogno di poter considerare moti rettilinei uniformi con qualunque inclinazione rispetto al suolo, insieme a moti uniformemente decelerati. Infatti, la prima metà di un moto parabolico con lancio iniziale inclinato di un angolo $\alpha > 0$ è progressivamente decelerata fino al raggiungimento del punto più alto (il vertice della parabola), dove sembra fermarsi per un istante, per poi ricadere verso il suolo con un moto uniformemente accelerato. La Proposizione I stabilisce il tipo di moto uniforme che compone la parabola e, opportunamente, lo sceglie su una retta verticale.[160] Se la Proposizione II stabilisce la simmetria della curva disegnata dal proiettile rispetto al

---

[159] "Proiecta nunc, bellorumque minas, atque arcium tormenta dicemus: supremus hic laborum Galilei fructus, suprema etiam gloria" (*Opere di Torricelli* II, p. 153); "[d]irectio proiectionis dicitur linea recta quae tangit lineam curvam proiecti in primo puncto eiusdem lineae curvae, quae quidem direction in tormenti bellicis est eadem ac ipsius machinae axis" (*Opere di Torricelli* II, p. 154).

[160] "Si grave sursum proiectum ex A ascendat motu naturalitèr deficiente usque ad sublimius punctum suae lationis B, idem verò mobile aequali tempore, et eadem velocitate quam in puncto A habebat, sed motu aequabili ascendat usque in C. Dico AC duplam esse ipsius AB" (*Opere di Torricelli* II, p. 154).

suo vertice, è solo con la Proposizione III[161] che egli ricostruisce la traiettoria parabolica, partendo dai due moti componenti e qualunque sia l'alzo iniziale.[162] Infatti, la parabola tracciata dal proiettile lanciato con un certo angolo coincide con la parabola che si sarebbe ottenuta lanciando lo stesso grave orizzontalmente dal vertice con un impeto opportunamente scelto. Dato che l'intensità dell'impeto iniziale necessario a disegnare la stessa parabola diminuisce progressivamente, allo spostarsi del punto materiale dalla posizione iniziale del moto alla posizione del vertice, diventa indispensabile poter stabilire la relazione che sussiste tra i due impeti.[163] Per determinarne l'intensità relativa, a Torricelli basta costruire il triangolo rettangolo che ha per ipotenusa la retta inclinata di lancio (AN), che è sempre tangente alla traiettoria parabolica (ACP) nel suo punto iniziale (A), per cateto verticale l'asse della parabola (N) e come cateto orizzontale l'ampiezza della semiparabola all'altezza del punto iniziale del moto (AM). Pertanto, il rapporto tra l'impeto iniziale lungo una semiretta inclinata e l'impeto lungo la semiretta orizzontale che parte dal vertice della traiettoria è proporzionale al rapporto tra l'ipotenusa (AN) e l'ampiezza della traiettoria semiparabolica (AM). La costruzione geometrica appena descritta rende possibile individuare il moto da studiare con estrema precisione, non solo in termini di traiettoria, ma anche in termini di velocità.




161 "Linea curva, quae describitur à mobili secundum quamlibet elevationem proiecto, parabola est, et prorsum eadem, quam describeret mobile si cum horizontali impetu proiceretur à vertice eiusdem lineae curvae" (*Opere di Torricelli* II, p. 156).

162 "Semita proiectorum, quaecunque illa sit, sublimiori sui puncto bifariam secat perpendiculum quod inter horizontem, et lineam directionis intercipitur" (*Opere di Torricelli* II, p. 155).

163 "Requiritur enim maior impetus in proiectione ex A sursum facta ad hoc ut eandem parabolam describat quam designavisset si ex P horizontaliter proiectum fuisset" (*Opere di Torricelli* II, p. 158). Torricelli utilizza soltanto il termine *impeto*, anche quando si tratta di incrementi di velocità, diversamente dall'uso galileiano che oscilla tra *momento* e *impeto*. Il suo significato è in relazione stretta con quello di *velocità*, dato che le due grandezze sono direttamente proporzionali, ma l'*impeto* è più specificatamente la *capacità d'urto* di un grave dotato di una certa velocità. Questa scelta sottolinea la stretta relazione che ha la velocità di un corpo in moto con quello che avviene durante i fenomeni d'urto. La sistematicità della scelta dei termini mostra che Torricelli intende ricollegarsi a una spiegazione del fenomeno di tipo puramente dinamico, oppure che le proprietà dinamiche del moto sono quelle che più gli interessa studiare.

Per una corretta ricostruzione della concezione fisica di Torricelli, si devono esaminare alcune proprietà che sono fondamentali per la composizione di due particolari moti. La proposizione II, infatti, pone un quesito cruciale: il punto in moto rettilineo uniforme, qualsivoglia inclinato rispetto al suolo, è un moto *inerziale* oppure no?[164] Per rispondere a questa domanda, è cruciale analizzare innanzitutto la natura dei punti in moto lungo curve, insieme alla funzione da loro assunta all'interno del discorso geometrico. Quest'ultima è perfettamente analoga all'uso con cui Archimede studiava le spirali.[165] Un'interpretazione di tali moti come moti inerziali avrebbe bisogno di considerare il punto come *punto materiale*, cioè come posizione nello spazio in un dato istante di un oggetto pesante che è sempre influenzato dalla sua *gravezza*.[166] Inoltre, si dovrebbe concepire tale *gravezza* come una *forza* in senso newtoniano, cioè come una grandezza fisica in relazione di proporzionalità diretta con l'accelerazione del mobile e con la sua quantità di materia, *causata* dall'interazione con la massa della Terra. Si consideri a tal riguardo quanto affermato in un Lemma successivo:

> Se un proietto in moto percorresse una parabola ABC,
> [e] in un suo punto B fosse privato di ogni gravità,

[164] "Patet quod sine tractione gravitates procederet mobile motu recto, et aequabili per lineam directionis AB [retta tangente la parabola nel punto A]. Sed gravitate intus operante ab ipsa directione statim declinare incipiet, crescente semper deviationis mensura; et describet aliquam lineam curvam ACD quaecunque sit" (*Opere di Torricelli* II, p. 155).

[165] "Si linea recta in plano sit ducta, et quiescente altero eius termino aequali velocitate circumferantur, donec restituatur in eum locum unde moveri coeperat: et simul cum linea circumlata punctum feratur aequali velocitate ipsum sibijpsi, et per se secundum dictam lineam latum incipiens à termino quiescente: punctum hoc describit in plano lineam spiralem. Terminus itaque lineae sic motae quiescentes, vocetur initium linae spiralis. Positio autem lineae, à qua linea recta incipit circumferri, initium circulationis" (Archimedis, *Opera, quae quidem extant omnia, latini tate iam olim donata, nuncque primum in lucem edita*, Basilaeae, 1544, p. 107). "Si recta linea in plano ducta, manente altero eius termino aeque velociter circumferatur, quo usque rursus in eum locum restituatur à quo moveri coeperat: eodemque tempore aliquod punctum feratur in dicta linea, aeque velociter ipsum sibi ipsi, incipiens à termino manente, punctum hoc in plano spiralem lineam describet. Voceturque terminus lineae manens, principium lineae spiralis. Positio lineae, à qua coepit circumferri, principium lineae spiralis. Positio lineae, à qua coepit circumferri, principium circulationis dicatur" (Archimedis, *Opera*, a cura di Federico Commandino, Venezia, Paolo e Aldo Manuzio., 1558, f. 8v).

[166] Si preferisce utilizzare la parola *gravezza* invece del termine *gravità* usato da Torricelli, per evitare la possibile confusione tra il significato antico e quello moderno.

> allora senza dubbio continuerebbe il proprio moto lungo una linea retta BD tangente alla parabola con un moto sempre uniforme, dal momento che gli sarebbe venuta meno ogni causa per la quale il moto possa incurvarsi, o decelerare, oppure ritardare. È anche evidente che l'impeto dello stesso mobile in qualunque parte della tangente BD sarebbe sempre lo stesso che era stato nel punto B.[167]

La "gravitate" è la tendenza naturale alla caduta, seconda componente del moto parabolico e "causa" della deformazione della retta su cui si avrebbe altrimenti un moto uniforme. Torricelli, dopo aver dimostrato che la composizione di un moto rettilineo uniforme con un moto rettilineo uniformemente accelerato è una parabola, ora vuole dimostrare anche il viceversa, cioè che ogni moto parabolico può essere scomposto in un moto di caduta libera rettilineo uniformemente accelerato e in un moto uniforme lungo una retta tangente alla parabola in un dato punto. Con questo risultato, si ottiene una condizione necessaria e sufficiente, come criterio univoco e generale per individuare moti parabolici che, in questo modo, sono ontologicamente fondati. Non si può parlare ancora di *forza di gravità*, poiché il moto di caduta libera nasce da una proprietà interna al mobile e non da un'azione esterna a esso.[168] Anche volendo interpretare la propensione *naturale* e insita nell'oggetto alla caduta verso il centro della Terra come una delle proprietà caratterizzanti il concetto di *massa* del mobile, non si può

---

[167] "Si mobile proiectum parabolam ABC percurrit, in aliquo ipsius puncto B omni gravitate spoliaretur, tunc procul dubio per lineam rectam BD tangentem parabolae lationem suam continuaret motu semper aequabili. Quandoquidem dempta ei esset omnis causa quae motum aut inflectere posset, aut decelerare, vel ritardare. Manifestum etiam est, impetum ipsius mobilis in qualibet portione tangentis BD, eundem semper futurum fore qui fuerat in puncto B" (*Opere di Torricelli* II, p. 159).

[168] "Grave è quello che va all'in giù verso il mezzo. Io l'ho caro. Qui cosa certa è che quella parola grave significa un corpo, il quale non vada in giù per accidente, ma habbia principio interno di gravità. Bisogna dunque che tutte le cose le quali discendano habbiano principio intrinseco di gravità […]. […] Grave si chiama quello che discende verso il centro […] nel mezzo più leggero" (*Opere di Torricelli* II, pp. 35-36).

ancora parlare di *forza* in senso quantitativo newtoniano perché manca la relazione tra la causa del moto e la sua variazione di velocità. Ciò nonostante, Torricelli tenta di spiegare l'interna *gravezza* con una *causa materiale* che si esprime qualitativamente, rappresentata idealmente come risultato dell'azione d'invisibili funi che tirano il corpo verso il centro della Terra.[169] Riassumendo la sua teoria, si potrebbe affermare che il *peso* è effetto diretto della causa esterna della caduta libera, mentre la *gravità* (o gravezza) ne è la causa interna. Se il primo è una grandezza fisica che non si riesce ancora a misurare direttamente, ma soltanto a saggiare attraverso la forza dell'urto a una certa velocità, la seconda è invece quantitativamente determinabile grazie al concetto di *mole* (l'odierno volume) e a quello di *gravità specifica*.[170]

A proposito della suddivisione della retta di lancio iniziale, comunque inclinata rispetto all'orizzonte, in parti di uguale lunghezza egli afferma:

> È evidente che spazi uguali AL, LI, IM, MB, sarebbero percorsi da un mobile in tempi uguali, se [esso] si muovesse di moto uniforme, senza la comparsa di un nuovo moto verso il basso che si manifesta per interna gravità. Ma poiché in A è abbandonato a essa immediatamente e dal proiciente, sopraggiunge l'attrazione della gravità, [e] incomincia a deviare subito dalla linea diretto verso il basso, [...].[171]

---

[169] "[…] in ogni gran mole, o sia di marmo, o di ferro, o di piombo, io confesso sentirsi quel glutine tenacissimo, e quei funicoli invisibili ma gagliardi, che pare a viva forza la tirino verso il centro. E questo col popolare vocabolo si chiama peso" (*Opere di Torricelli* II, p. 41).

[170] La *gravità specifica* o *in specie* era già stata studiata e misurata da Galileo, come descritto nel suo trattato intitolato *La bilancetta* (*Opere di Galileo* I, pp. 215-220; pp. 225-228). La spiegazione del fenomeno, quindi, è ricondotta alle proprietà costituenti la materia, in un orizzonte filosofico che si può pienamente definire meccanicista. Questa esigenza di tipo riduzionista pone l'accento sullo stretto legame che sussiste tra la *teoria della materia* e la *teoria del moto*.

[171] "Manifestum est quod spatia aequalia AL, LI, IM, MB, percurrerentur à mobili temporibus aequalibus, si motu aequabili, et sine accessu novi motus deorsum ab interna gravitate procedentis, moveretur. Sed quia ei

Per quanto riguarda il moto rettilineo uniforme, egli afferma che se non si considera l'azione della gravità del mobile il corpo proseguirebbe con velocità costante indefinitamente lungo la medesima retta. Per ritornare all'esame del concetto d'*inerzia* questa volta da un punto di vista più propriamente fisico, si legge che per Torricelli il moto perpetuo o che si auto sostiene è quello rettilineo, non importa come sia inclinato rispetto al suolo. Esso è possibile solo a patto di non considerare la propensione naturale di un *grave* ad avvicinarsi al centro della Terra. Eliminare questa proprietà intrinseca dal grave in moto lo priva della caratteristica che lo rende un *grave*, appunto, riducendolo a *puro mobile* oppure, in altre parole, a mero punto geometrico. Se esso non è affetto da "gravezza", non vale il principio meccanico dell'equilibrio delle forze in gioco agenti sul punto materiale e la conseguente *indifferenza al moto* dei corpi equidistanti dal centro della Terra. In base a quanto appena visto, l'essere una proprietà interna al corpo significa essere un *attributo* del corpo, una proprietà che risente delle leggi del centro di gravità e dell'equilibrio. Il riferimento all'"attractio gravitatis" allude al fatto che la gravità comporta un'azione, descritta come *attrazione*, ma che è un effetto e non una causa dello stato di moto del corpo in caduta libera. L'esistenza di un'*azione*, invece, si può sostenere solo se è il centro di gravità della Terra ad attrarre il centro di gravità del corpo.

Nel dimostrare che la traiettoria di un proietto ha forma parabolica, Torricelli assume alcuni presupposti essenziali. Il primo è l'indipendenza dei moti componenti, nel senso che ciascuno procede ed evolve senza modificare le caratteristiche dell'altro ma, semplicemente, sommandosi ad esso. Il secondo assunto è la continuità del moto verticale di caduta libera naturalmente accelerata. La terza ipotesi è che l'andamento del moto del proietto sia perfettamente invertibile, cioè che la parte ascendente e quella discendente siano simmetriche, a parità di impeto iniziale e finale. Tutte le assunzioni non sono discusse. Questo,

statim atque à proiciente dimittitur in A, superadvenit attractio gravitatis, incipiet continuo à linea directionis deorsum deviare, [...]" (*Opere di Torricelli* II, p. 156).

pertanto, ci autorizza a mutuare dal lavoro di Galileo le stesse spiegazioni a sostegno, poiché tali presupposti coincidono con quelli presentati anche da Galileo.

Le proposizioni successive si occupano innanzitutto di studiare l'intensità dell'impeto e come esso sia in relazione con i diversi elementi costitutivi la traiettoria parabolica, quali la direzione di alzo, l'altezza, l'ampiezza e la base,[172] e come questi siano a loro volta in relazione con le caratteristiche di un lancio inclinato a 45°.[173] Di seguito, si ha lo studio di come il tempo del lancio sia collegato ad alcune grandezze del moto come, ad esempio, l'impeto[174] e come a parità di impeto iniziale variano le altre proprietà del moto parabolico.[175] Particolarmente interessanti sono le proposizioni che dimostrano come i punti raggiungibili dal proiettile lanciato con un certo angolo rispetto al suolo e con un dato impeto appartengano alla superficie di un particolare conoide parabolico.[176]

Il secondo proposito di Torricelli è rendere facilmente utilizzabili i risultati conseguiti sul piano teorico. L'applicazione delle relazioni generali si definisce nella sezione dedicata alle tavole per l'artiglieria, che riprendono le tre pubblicate anche da Galileo per aggiungerne altre.[177] Egli prende a riferimento la stessa misura galileiana, cioè le 10.000 parti sia come massima ampiezza della semiparabola, sia come altezza massima, in modo da permettere un confronto diretto con i risultati di Galileo.[178] Questo raffronto è ciò che gli sta maggiormente a cuore, giacché è

172 Proposizioni IV-XIV (*Opere di Torricelli* II, pp. 159-168).

173 Proposizioni XV-XVII (*Opere di Torricelli* II, pp. 168-169).

174 Proposizioni XVIII-XX (*Opere di Torricelli* II, pp. 169-170).

175 Proposizioni XI-XXXVII (*Opere di Torricelli* II, pp. 170-185).

176 Proposizioni XXIX-XXX (*Opere di Torricelli* II, pp. 177-179).

177 "Sequuntur Tabulae non quidem doctis calculi vigilijs elaboratae, ut à Galileo factum est, sed ex ipsa Tabula sinuum ac tangentium facili brevique negozio transcriptae" (*Opere di Torricelli* II, p. 197).

178 Nonostante Torricelli faccia sempre riferimento al lavoro di Galileo come alla pietra miliare a fondamento della nuova disciplina, qui accenna a due elementi di diversità tra loro collegati. Il primo è il tipo di calcolo scelto per elaborare i dati mostrati nelle tabelle: "per innumeras moltiplicationum, divisionum, et radicum ambages" (*Opere di Torricelli* II, p. 197). Nel caso di Galileo sono sequenze di operazioni aritmetiche tediose e impegnative; nel caso di Torricelli, invece, sono

evidente che lui avrebbe preferito partire da una semiparabola di 20.000 parti, per evitare di bisecare l'angolo su cui si deve lavorare.[179] Anche l'importanza data a questa particolare applicazione della teoria balistica è diversa.

Nel caso di Galileo, la tavola delle ampiezze delle semiparabole descritte dal medesimo impeto è un'ordinata collezione dei dati che si ricavano risolvendo il Problema-Proposizione XII.[180] Con essa è agevole calcolare le altezze delle semiparabole generate con lo stesso impeto della precedente,[181] come risultava dalla risoluzione del Problema-Proposizione XIII,[182] che permetteva di aver ragione, almeno in via teorica, della principale difficoltà da superare per chi doveva colpire un bersaglio, cioè la stima della forza e delle differenze d'impeto necessarie per colpire l'oggetto fermo a una certa distanza con tiri di volata. Questo serviva da riferimento nella taratura, altrimenti completamente empirica, della colubrina o di qualunque altra macchina proiciente. Per Galileo, infine, c'era una terza tavola interessante per i tiri di artiglieria, quella contenente le altezze e le sublimità delle parabole al variare di ciascun grado di elevazione,[183] come si poteva ricavare dalla

---

brevi e quasi immediate perché mutuate dalla tavola dei seni. Con le stesse misure di riferimento, cioè con la stessa parabola come traiettoria del proiettile, è possibile raffrontare i risultati. Il secondo elemento di diversità, dunque, si rileva proprio dalla lettura delle tre tabelle iniziali, dove alcuni valori sono consistentemente lontani tra loro e saranno indicati a tempo debito.

[179] "Ideo in solum laborem bissectionum incidimus. Si verò suppositionem variare, hoc est numerum hunc duplum 20000 supponere voluissemus, tunc integrae Tabulae diversae quidem evasissent à Galilei Tabulis, sed numeri poterant sine ulla bissectione ex minibus, et tangenti bus prout ibi leguntur mutuari" (*Opere di Torricelli* II, p. 197).

[180] "Semiparabolarum omnium amplitudines calculo colligere, atque in tabulas exigere, quae a proiectis eodem impetu esplosi describantur" (*Opere di Galileo* VIII, p. 300).

[181] "Non erit inutile, ope huius tabulae, alteram componere, complectentem altitudines earundem semiparabolarum proiectorum ab eodem impetus" (*Opere di Galileo* VIII, p. 303).

[182] "Ex datis semiparabolarum amplitudinibus, in praecedenti tabula digestis, retenteque communi impetu unaquaeque describitur, singolarum semiparabolarum altitudines elicere" (*Opere di Galileo* VIII, p. 305).

[183] "Non erit inutile, tertiam exponere tabulam, altitudines et sublimitates continuentem semiparabolarum quarum eadem futura sit amplitudo" (*Opere di Galileo* VIII, p. 306).

Proposizione XIV.[184] L'intero impianto è un esempio importante di applicazione di una teoria che ha il proprio centro d'interesse nella spiegazione del perché la traiettoria di un proiettile è sempre parabolica, anche al variare della potenza di fuoco iniziale e dell'angolo di inclinazione della canna. I dati elaborati e ordinati in tabelle sono dedotti senza, sembrerebbe, una reale intenzione di confrontarli con i dati ricavati dalla concreta pratica dell'artiglieria. Il commento dei tre protagonisti del dialogo galileiano resta sempre nel solco di un interesse fisico generale per il fenomeno, in cui i dettagli interessanti sono solo quelli del calcolo matematico.

L'impostazione di Torricelli, invece, è diversa dalla precedente sia per struttura argomentativa sia per finalità. Per quanto riguarda la prima, la presentazione dei dati è tripartita: tabella con i dati, spiegazione di come si ricavano geometricamente[185] e l'esempio di come si devono utilizzare nella pratica.[186] Inoltre, Torricelli specifica che la *macchina* cui si sta riferendo deve rimanere la stessa e, in questo caso, prende ad esempio la colubrina da 30.[187] La prima tavola corrisponde alla prima di Galileo, anche se alcuni valori differiscono di un'unità in più o in meno.[188] L'ampiezza della semiparabola è data dal $\sin 2\alpha$ moltiplicato per 10.000, semilunghezza massima raggiunta dal proietto.[189] La seconda tavola corrisponde

---

184 "Altitudines atque sublimitates semiparabolarum, quarum amplitudines aequales futurae sint, per singulos elevationis gradus reperire" (*Opere di Galileo* VIII, p. 308).

185 È la *declaratio, explanatio, expositio* o *explicatio tabulae*.

186 È la *praxis*.

187 "Posuimus maximam amplitudinem, hoc est basim semiparabolae ad elevationem grad. 45 factae esse partium 10000 (quot quadrantes passuum geometricorum prorsus exaequat maximus semijactus machinarum quas appellant *Colubrine da 30*)" (*Opere di Torricelli* II, p. 198).

188 Ci sono solo due casi che mostrano una differenza più marcata, l'ampiezza corrispondente all'angolo di 18° (5870 invece di 5878) e quella dell'angolo di 22° (6947 invece di 6944). I valori determinati da Torricelli corrispondono a meno di 5 decimi a quelli calcolati con le attuali tecnologie. D'altra parte, Galileo ammette che "per fuggire il tedio del calcolare, non si è tenuto conto di alcune frazioni, le quali in somme così grandi non sono di momento né di pregiudizio alcuno" riferendosi in particolar modo alla terza tavola (*Opere di Galileo* VIII, p. 198).

189 Il numero 10.000 serve per stabilire una misura di riferimento, rispetto alla quale poter ricondurre il caso concreto tramite una proporzione. Se si utilizzano gli strumenti della cinematica moderna, si ha che la gittata

alla seconda di Galileo, dove il calcolo dell'altezza massima della parabola è determinato moltiplicando il $\sin^2\alpha$ per 10.000 (corrispondente all'elevazione massima che si ha con un alzo di 90°). Le differenze dei valori calcolati nei due modi sono ancora piccole, assommano al massimo a tre unità.[190] La terza tavola corrisponde ancora una volta alla terza di Galileo, dove si calcolano l'altezza e la sublimità di ciascuna parabola che viene a determinarsi mantenendo una gittata fissa, misurata in 10.000 unità.[191] Le relazioni sono, rispettivamente, $5.000 \cdot tg\alpha$ e $5.000 \cdot tg(90° - \alpha)$. Le successive due tabelle forniscono: la durata del volo del proietto oppure il valore dell'impeto in funzione dell'angolo d'inclinazione della

---

di un proiettile è pari a $\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$, dove $v_0$ è il modulo della velocità iniziale, $g$ è l'accelerazione di gravità e $\alpha$ è l'alzo o angolo di lancio. Confrontando il calcolo di Torricelli per ottenere l'ampiezza della semiparabola con il calcolo odierno della semigittata, si vede quanto Torricelli centrasse il bersaglio. Infatti, il valore arbitrario di 10.000, che gli permette di lavorare con misure e non soltanto con proporzioni, ha il medesimo ruolo del coefficiente $\frac{v_0^2}{2g}$. Forzando ulteriormente la lettura, se si identificasse l'impeto iniziale (arbitrariamente posto uguale a 10.000) con la velocità iniziale, si otterrebbe una stima dell'accelerazione di gravità pari a 5.000.

[190] Dalla buona corrispondenza dei valori, si può affermare che l'altezza di 1685 calcolata da Galileo e corrispondente all'angolo di 24° contiene un pesante errore di calcolo, oppure è stata trascritta male. Infatti, ci sono ben 31 unità di differenza. Analogamente a quanto fatto nel caso della tabella precedente, si può affiancare il procedimento di Torricelli con l'espressione moderna dell'altezza massima raggiunta dal proiettile: $h = h\left(\frac{gittata}{2}\right) = \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)\sin^2\alpha$, che restituisce un valore di 5.000 all'accelerazione di gravità, a parità di forzatura e convenzioni.

Nell'*Explanatio praecedentis Tabulae* a spiegazione di com'è stata costruita la tabella, compare un curioso errore che non mi risulta essere stato notato prima. Il testo presenta un esempio di calcolo numerico e asserisce che la misura di AC, che dovrebbe essere pari al $\sin 40°$, vale 8.264 invece del valore corretto 6.428. Inoltre, si nota che la relazione tra la lunghezza di AC e la lunghezza di AE cercata è esattamente la metà, poiché AE è pari a 4.132 come confermato anche dalla sua presenza nella tavola in corrispondenza dell'angolo di 40°. La divisione per 2 è, però, suggerita dal termine "semissis". Ecco il testo originale: "Datur quidem AC 8264 ex Tabula sinuum, cum sit sinus versus arcus AC gr. 80, qui arcus duplus est anguli elevationis DAC. Sed datus numerus rectae AC 8264 erit respectu semidiametri, quae sit partium 10000. Cum verò nos ponamus totam diametrum AB esse partium 10000 tunc AE erit 4132, hoc est tantummodo semissis illius numeri ex Tabula sinuum versurum excerpti" (*Opere di Torricelli* II, p. 201).

[191] La gittata di 10.000 unità è quella che ha altezza e sublimità di lunghezza pari a 5.000, con un alzo di 45°. Anche questi dati sono molto vicini a quelli di Galileo, eccezion fatta per pochissimi casi e tutti legati al calcolo di altitudini: per 60° si legge 8.660 invece di 8.600; per 70° si ha 13.737 invece di 13.237; per 83° sono 40.722 e non 40.222; per 89° 286.450 anziché 286.499.

canna, supponendo che il loro valore massimo raggiunto valga 10.000;[192] l'angolo di inclinazione da dare al proiettile per ottenere una traiettoria di ampiezza data, insieme al suo complementare, quando la massima proiezione è di 4.000.[193]

Questa è la tavola più importante per chi ha un interesse pratico, perché il problema più arduo da risolvere per un *bombardiere* era proprio quello di stabilire con quale alzo il proiettile avrebbe colpito il bersaglio posto a distanza nota. Non stupisce, quindi, che Torricelli smetta di scrivere in latino per passare all'uso dell'italiano, proprio cominciando con la traduzione di quello che compete l'ultima serie di dati. Inoltre, prosegue entrando in dettagli che solo un contatto diretto con l'esperienza rende possibili, un'esperienza forse mediata. Per esempio, distingue i valori degli angoli utili per le artiglierie, da quelli che sono possibili solo per "mortari, o trabocchi, o saltamartini."[194] Altro elemento non di secondaria importanza è l'angolo con cui il proietto colpisce la superficie dell'obiettivo e il limite di lancio di un cannone, ben esemplificati e discussi. Particolare rilievo è dato a due problemi: come trovare la gittata di un pezzo d'artiglieria, conoscendo i dati di un tiro qualunque, e come calcolare l'altezza massima raggiunta dal proiettile con la sola tavola dei seni, conoscendo però angolo e gittata. Per velocizzare e semplificare la pratica è importante non solo avere dei dati di riferimento già predisposti o un algoritmo da seguire in specifici casi, ma anche possedere uno strumento di misura degli angoli che sia affidabile. A questo scopo è diretta la parte finale del *De motu proiectorum*, interamente dedicata all'uso della squadra di Tartaglia e di quella di Galileo, con la descrizione della costruzione e dell'utilizzo della sua squadra. Lo strumento di Torricelli è realizzato in modo da fornire insieme alla misura dell'angolo di elevazione anche la misura relativa dell'impeto,

---

[192] Il valore corrispondente a 1° è 75 invece del corretto 175 (*Opere di Torricelli* II, p. 205). In questo caso, il calcolo che fornisce i dati in tabella è $10.000 \cdot \sin\alpha$, quando l'espressione odierna è $\frac{2v_0}{g}\sin\alpha$.

[193] Il calcolo dell'angolo si ottiene uguagliando la gittata voluta a $4.000 \cdot \sin 2\alpha$.

[194] *Opere di Torricelli* II, p. 209.

della quarta parte della gittata, l'altezza del vertice della traiettoria parabolica, la sublimità e la durata del tiro.

La differenza d'impostazione tra i due autori dipende fortemente dallo scopo dell'opera. Galileo era interessato all'aspetto squisitamente teorico, rispetto al quale la deduzione di applicazioni era secondaria se non marginale. Torricelli, invece, vedeva l'aspetto applicativo come un secondo mezzo per arrivare a una conoscenza certa del mondo fisico. Nelle sue *Lezioni Accademiche*[195] è molto chiaro nel descrivere la sinergia tra teoria e pratica, tra matematica ed esperienza.[196] Se il lavoro di Galileo non venne utilizzato in artiglieria,[197] il contrario avvenne per quello di Torricelli, come testimonia la corrispondenza con Giovanni Battista Renieri, che gli aveva scritto per la prima volta il 2 agosto 1647, per chiedere riscontro della pessima corrispondenza delle misure reali a quelle teoriche.[198] La replica conferma l'interesse per le applicazioni e una discreta conoscenza dei problemi legati al mestiere, aggiungendo un altro elemento al metodo operativo dei nuovi *filosofi*

[195] Le *Lezioni Accademiche* sono una raccolta di 12 conferenze tenute presso l'Accademia della Crusca, tra il 1642 e il 1647, e trattano di diversi argomenti. Furono pubblicate per la prima volta solo nel 1715 a Firenze.

[196] "Finalmente l'assiduità dell'esperienza mi ha addomesticato quella maraviglia, che l'acutezza della Matematica non poté mai diminuirmi con la dimostrazione" (*Opere di Torricelli* II, Lezione terza: Della percossa, p. 21). "Rare volte, […], ne i problemi naturali, entra la dimostrazione di pura Geometria. Però mi pare che quella opinione possa ammettersi per comportabile, la quale non avendo necessaria dimostrazione in contrario, salva la maggior parte dell'esperienze praticate, e s'accomoda più d'ogn'altra, con gl'effetti della materia proposta. Che poi il filosofo, dopo detto il suo sentimento, sia obbligato a render ragione di tutte le diversità d'accidenti che possono accadere, e non facendolo seguiti per conseguenza che la sua hipotesi fusse falsa, ciò non mi par necessario" (*Opere di Torricelli* II, Lezione quarta: Della percossa, p. 24). "Se elle procedessero temerariamente, o nò, seguitando la semplice scorta del senso, senza correggerla con l'uso della ragione, io non lo so: so bene, che potrebbero difender la causa loro, con l'esempio reverito di Filosofi venerabili. Io fabbricando poi chimere tra me stesso mi accorsi, che era comportabile l'errore d'inconsiderazione commesso da quelle" (*Opere di Torricelli* II, Lezione quinta: Della leggerezza, pp. 33-34). "Nella Matematica quale sarà la definizione, tali bisognerà che siano le cose definite. Nella fisica ancorché si definisca per grave ciò, che descende, non però ciò che descende necessariamente sarà grave. La Natura non muta le leggi mentre gl'huomini formano i decreti" (*Opere di Torricelli* II, Lezione quinta: Della leggerezza, p. 39). "Venghino hora dove mancano i sillogismi della Logica, le parzialità della natura a favorire la posizione" (*Opere di Torricelli* II, Lezione sesta: Della leggerezza, p. 42).

[197] Michael Segre, "Torricelli's Correspondence on Ballistics" in *Annals of Science*, 40 (1943), 489-499; p. 492.

[198] *Opere di Torricelli* III, p. 359, pp. 421-431.

*naturali sperimentali*. Le premesse teoriche non rispettate dal fenomeno reale sono indicate e discusse con precisione. Innanzitutto, sono prese in esame le ragioni di tipo fisico in grado di inficiare la bontà del modello. La principale è la resistenza dell'aria che aumenta con l'aumentare della velocità del proietto e la costanza dell'impeto orizzontale che, invece, diminuisce anche di 4-6 volte. Poi, sono elencate le ragioni di tipo geometrico, vale a dire un diverso angolo al momento dello sparo dovuto al contraccolpo, un appoggio del pezzo che non è orizzontale e non giace sullo stesso piano orizzontale del punto di arrivo, seguite da possibili rimedi. Tutto ciò dimostra attenzione e cura nei particolari sufficienti per credere a un genuino coinvolgimento, se non a un interesse di professione, per l'applicazione della teoria al mondo reale.[199] Questo aspetto dell'indagine del mondo fisico ben si concilia con la ricerca di un metodo sicuro per produrre lenti di gran qualità e lo studio di nuovi strumenti di osservazione o di misurazione che hanno contraddistinto la sua carriera.

Ed è proprio a questo punto di raccordo tra teoria e pratica che si pone la domanda sul livello di matematizzazione del reale. Se, infatti, da un lato si hanno i primi tentativi riusciti di esprimere con relazioni quantitative i legami tra proprietà o attributi diversi di uno stesso fenomeno, dall'altro si ha la necessità di mostrare come la teoria sia in grado di *salvare i fenomeni*. È facile da un punto di vista retrospettivo come quello odierno capire quali *nuove scienze* siano *corrette*. Ma questo porta completamente fuori strada, poiché il nodo della questione all'epoca era proprio quello di poter fare affidamento su una nuova teorizzazione, anche quando i dati dell'esperienza la negano. Se si prende come misura del livello di

---

[199] Di parere contrario sono A. Rupert Hall (*Ballistics in the Seventeenth Century. A Study in the Relations of Science and War with Reference Principally to England* Cambridge: Cambridge University Press, 1952; p. 16 nota 3), che ritiene il livello tecnologico dell'epoca insufficiente per poter generalizzare a partire da dati empirici, e Michael Segre ("Torricelli's Correspondence on Ballistics" in *Annals of Science*, 40 (1943), 489-499; p. 496), che lo segue. Il fatto che non si potesse ancora parlare di scienza balistica vera e propria non è un elemento sufficiente per negare a priori l'esigenza di una scienza in grado di fornire nuovi strumenti teorico-pratici anche in un campo meno nobile, come quello dell'artiglieria. Invece, è proprio dallo studio di questi problemi di tipo ingegneristico, come pure l'idraulica e le costruzioni, che si può approfondire lo studio delle relazioni tra teoria e pratica, tra esperienza assodata e nuove leggi fisiche.

matematizzazione della scienza fisica l'accordo tra deduzioni teoriche di dati e dati provenienti da misure dirette, allora si deve rispondere che ancora non possiamo parlare di vera e propria matematizzazione. In mancanza di strumenti di misura diretta di velocità, accelerazioni e forze oppure di una tecnologia produttiva che permetta uno studio sistematico del comportamento di alcune macchine, come si può credere in una nuova teoria del moto, accelerato o composto? Il banco di prova più autorevole era proprio quello della capacità di spiegare un insieme di fenomeni e comportamenti più ampio della teoria precedente, con un livello non tanto di estetica semplicità, quanto di elevata coerenza interna. La consapevolezza di questo aspetto cruciale dell'indagine del mondo fisico permette di escludere a priori un disinteresse per le conseguenze applicative dei risultati teorici. La descrizione matematica di alcune piccole porzioni di mondo è, d'altronde, un primo indizio del manifestarsi di una nuova esigenza. L'elemento di consapevolezza insito nell'accettazione e riproposizione del metodo archimedeo da parte di Galileo e di Torricelli *in primis* è, però, la prova che il processo di matematizzazione è indubbiamente iniziato. Nei capitoli successivi si vedrà in quale misura e in quale modo.

### *Par. 8 La forza della percossa.*

Nello studio del moto locale dei corpi gravi, una lunga tradizione aveva distinto due principali ambiti d'indagine, quello del moto naturale e quello del moto violento, individuati in funzione delle rispettive cause. Il moto violento, cioè la necessità di forzare un oggetto in quiete, poteva avvenire in molti modi, tutti riconducibili però a due situazioni sostanzialmente diverse. La prima era legata all'uso delle macchine semplici, cioè la leva, la stadera, l'asse della ruota, il piano inclinato e la vite, il cui schema di funzionamento era stato studiato innanzitutto da

Guidobaldo del Monte (1545-1607).[200] Il suo proposito era di ricondurre al modello della leva tutte le altre macchine. A questo filone di ricerca si rifà anche Galileo, specialmente nella sua fase giovanile durante la quale i suoi studi di meccanica prediligevano l'uso della statica. L'analisi della leva e lo studio del suo funzionamento vertevano su casi in cui le velocità delle due estremità erano piccole e, proprio per questo, potevano essere assimilate agli spazi percorsi nei medesimi intervalli. La seconda, invece, si riferiva a tutte quelle situazioni in cui la spinta era particolarmente intensa e nei quali il contatto tra motore e oggetto avveniva in brevissimo tempo come, ad esempio, nei tiri di artiglieria. In questo caso, le velocità espresse dai mobili sono consistenti. L'uso del fuoco, cioè della polvere da sparo innescata dal fuoco, comportava tutta una serie di problemi legati ai modi e alle proprietà della sua azione e questo tipo di propulsione era considerato sostanzialmente diverso dalle percosse o spinte o urti. Inoltre, non era per nulla scalfito il problema di capire se e come i diversi modi di fornire un impeto iniziale al proietto potessero produrre moti sostanzialmente diversi.

Galileo tocca questi temi nei *Discorsi*, in particolare nella *quarta giornata* dedicata al moto dei proietti. In essa, le categorie tradizionali del moto naturale e del moto violento sono messe in crisi. Infatti, la domanda sulla natura del moto di un oggetto lungo una traiettoria parabolica, spiegata con la composizione di un moto verticale e di uno orizzontale entrambi naturali, ma prodotta da una causa di tipo violento, era sicuramente fuori luogo. Inoltre, ammettere che la traiettoria del moto composto è la stessa disegnata dal moto violento dei proietti poneva un nuovo quesito perché l'uguaglianza degli effetti, cioè la forma della traiettoria, avrebbe dovuto implicare l'uguaglianza delle cause. In questo modo si vede come il moto parabolico diventa cruciale nel passaggio da una filosofia della natura che distingue tra cause naturali e violente, sostanzialmente così diverse da non potersi comporre, a una fisica che le considera come mere convenzioni linguistiche

200 Si veda Guidobaldo del Monte, *Mechanicorum Liber*. Pesaro: 1577, tradotto in italiano e commentato da Filippo Pigafetta con il titolo *Le Mecaniche*. Venice: 1581. Lo studio della bilancia si trova alle pp. 260-298.

all'interno di uno stesso modello di spiegazione. Se un corpo in caduta libera segue una traiettoria parabolica ogniqualvolta riceva una velocità orizzontale e se un colpo violento contro un oggetto produce la stessa forma di percorso, allora nasce il problema di determinare come le diverse condizioni iniziali o cause possano influire sul moto successivo.

Per Galileo il problema della percossa era di difficile soluzione, anche perché non gli era stato possibile descriverlo quantitativamente, con la stessa precisione del moto accelerato.[201] Egli accettò la sfida della ricerca delle cause e delle proprietà fondamentali della percossa solo dopo il 1637,[202] anno in cui riprese i suoi appunti di meccanica per darli alle stampe. Dopo le prime quattro giornate dei *Discorsi* era sua intenzione inserirne altre due, una dedicata alla teoria delle proporzioni e l'altra proprio alla percossa. Restano oggi solo poche pagine contenenti l'inizio del dialogo tra i tre protagonisti, Salviati, Sagredo e Aproino e una piccola parte in forma di bozza, con una serie di frammenti che suggeriscono una continuazione.[203] Il punto di partenza di Galileo è che la percossa dipende non solo dalle caratteristiche del

[201] "SAGREDO: […] da diversi ragionamenti auti con amici intrinseci del nostro Accademico ho ritratto, questa material della forza della percossa essere oscurissima, né di quella sin ora esserne, da chiunque ne ha trattato, penetrato i suoi ricetti, pieni di tenebre e alieni in tutto e per tutto dalle prime immaginazioni umane; e tra le conclusioni sentite profferire me ne resta in fantasia una stravagantissima, cioè che la forza della percossa è interminata, per non dir infinita" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 312-313).

"APROINO: […] andrò toccando quei primi motivi, insieme colla prima esperienza, che mossero l'amico ad internarsi nella contemplazione di questo ammirabile problema della percossa. Cercando la maniera del poter trovare e misurare la sua gran forza, ed insieme, se fusse possibile, risolvere ne' suoi principi e nelle sue prime cause l'essenza di cotale effetto" (*Opere di Galileo* VIII, p. 323).

[202] Stillman Drake, *Galileo Galilei pioniere della scienza*. Padova: Franco Muzzio Editore, 1992.

[203] È la *sesta giornata*, che si apre con il riferimento all'ultimo argomento trattato alla fine della *quarta giornata*, cioè l'esame delle proposizioni attinenti ai centri di gravità dei corpi solidi (*Opere di Galileo* VIII, pp. 321-339 e 339-346). In base al lavoro di Roberto Vergara Caffarelli, Galileo avrebbe aggredito l'argomento dal febbraio del 1634 con l'intenzione di dare alla forza della percossa dignità di nuova scienza, la terza dopo quella dedicata alla resistenza dei materiali e quella dedicata al moto locale, già trattate nelle quattro giornate dei *Discorsi*. La sua ipotesi è che la difficoltà del tema e le condizioni di salute sempre più precarie gli fecero interrompere la stesura della giornata aggiunta, in un punto che non permette oggi di avere una visione chiara e completa del quadro teorico complessivo (*Galileo Galilei and Motion: A Reconstruction of Fifty Years of Experiments and Discoveries*. Berlin: Springer, 2009).

corpo mosso ma, in somma parte, dal moto e dalla velocità del percuziente.[204] E poiché un qualunque percuziente è sempre capace di agire su un altro corpo resistente, anche se in misura via via decrescente, la sua dimensione deve necessariamente essere infinita o così grande da risultare indeterminabile. Il nodo da sciogliere è comprendere come la percossa possa avere un modello di comportamento non diverso da quello dell'equilibrio di due corpi di diversa mole, appesi alle estremità di una bilancia. Entrambe le forze in gioco, quella del movente e quella del mosso, per Galileo dipendono sia dal loro *peso*, sia dalla *velocità*, da intendersi non in valore assoluto ma relativo a quella dell'altro corpo, che sono in un rapporto di proporzione inversa nelle macchine. Ma il testo si interrompe a questo punto, senza raggiungere una conclusione. Esaminando il frammento aggiuntivo, si vede una ripresa dell'esperienza iniziale della *sesta giornata*, ma con un tentativo di sviluppo del ragionamento diverso, con l'intento di stabilire una relazione matematica tra l'impeto del percuziente e l'effetto sul corpo mosso nel caso in cui i corpi siano collegati e posti lungo diversi lati di un piano inclinato.[205] L'azione della percossa è legata alla "resistenza interna per la qual noi diciamo, più difficilmente alzarsi un grave di mille libbre che uno di cento"[206] e la sua forza ha

[204] "APROINO: […] ma perché si scorge pur anco nella operazione della percossa intervenire il movimento del percuziente, congiunto colla sua velocità, contro al movimento del resistente ed il suo poco o molto dovere essere mosso; fu il primo concetto dell'Accademico di cercar d'investigare qual parte abbia nell'effetto ed operazione della percossa, v.g., il peso del martello, e quale la velocità maggiore o minore colla quale vien mosso, cercando, se fusse possibile, di trovare una misura la quale comunemente ci misurasse ed assegnasse l'una e l'altra energia" (*Opere di Galileo* VIII, p. 323).

[205] "[SALVIATI: …] E se noi porremmo, la resistenza del palo esser raddoppiata o triplicate, sicché vi bisogni, per superarla, la pressura di dugento o trecento libbre di peso morto, replicando simil discorso troveremo, l'impeto delle dieci libbre cadenti a perpendicolo esser potente a cacciare, siccome la prima, la seconda e la terza volta il palo, e come nella prima la decima parte della sua scesa, così nella seconda volta la ventesima, e nella terza la trentesima parte della sua scesa. E così, moltiplicando la resistenza in infinito, sempre la medesima percossa la potrà superare, ma col cacciare il resistente sempre per minore e minore spazio con alterna proporzione: onde pare che noi ragionevolmente possiamo asserire, la forza della percossa essere infinita: imperocché quando ella supera la resistenza del palo, lo caccerà non per quello spazio solo che lo averà cacciato la percossa, ma seguiterà di cacciarlo in infinito" (*Opere di Galileo* VIII, p. 341).

[206] *Opere di Galileo* VIII, p. 343.

*momento* infinito, perché è la somma di infiniti momenti, tutti uguali a quello della gravità assoluta.[207]

Come si può notare dai cenni appena riferiti, il problema della percossa è importante per il moto dei proiettili, per i quali la fase propulsiva iniziale è cruciale per imprimere una velocità iniziale sufficiente a colpire il bersaglio arrecando più danni possibili. Ancora una volta, la spiegazione dell'intensità infinita è ricondotta a una sommatoria d'infiniti termini, uguali e di valore limitato. La sommatoria è giustificata dalla conservazione dei momenti nel tempo, grandezza questa che viene presa a riferimento. Da questo testo, non è possibile capire in che modo Galileo volesse risolvere i problemi rimasti ancora aperti. A questa lacuna, si aggiunge che non sono rimasti altri appunti di lavoro, che mostrino come Galileo sia giunto a scegliere strategie e strumenti, ma solo i pochissimi riferimenti a esperienze contenute della bozza già esaminata della *sesta giornata*.

A fornire qualche altro indizio vengono in aiuto le *Lezioni accademiche*[208] di Torricelli, tra le quali la seconda, la terza e la quarta sono dedicate proprio alla percossa. In esse, Torricelli descrive il ragionamento di Galileo, sia per quanto riguarda la spiegazione teorica del fenomeno, sia per gli esempi portati relativi ad alcune esperienze. Prendendo per vero l'assunto galileiano dell'infinità della forza della percossa,[209] Torricelli ne delinea un quadro teorico a suo modo coerente e definito, intrecciando le proprie riflessioni con gli spunti presi da Galileo. Ma più

---

[207] "SALVIATI: […] Tali momenti nel tempo della mossa del grave si vanno accumulando di instante in instante con eguale additamento e conservando in esso, nel modo appunto che si va accrescendo la velocità di un grave cadente; ché siccome negl'infiniti instanti di un tempo, benché minimo, si va sempre passando da un grave per nuovi ed eguali gradi di velocità, con ritener sempre gli acquistati nel tempo percorso, così anche nel mobile si vanno conservando di instante in instante e componendosi quei momenti, o naturali o violenti, conferitigli o dalla natura o dall'arte" (*Opere di Galileo* VIII, p. 343).

208 Evangelista Torricelli, *Lezioni accademiche*. Firenze: Jacopo Guiducci, 1715; pp. 3-29. Si veda nota 189.

[209] Torricelli afferma che Galileo si era convinto dell'infinità della forza della percossa dall'analisi del tiro con "certi archi con cui s'ingegnava di dimostrare l'immensità di detta forza" (*Opere di Torricelli* II, p. 5). "L'arco dolce, ma grande, d'una balestra farà talvolta maggior passata d'un altro assai più duro, ma di minor tratta, poiché quello, accompagnando per più tempo la palla, gli va continuamente imprimendo la forza, e questo tosto l'abbandona" (*Opere di Galileo* VIII, p. 346).

che una continuazione del lavoro precedente, Torricelli lo reinterpreta attraverso le proprie categorie, ottenendo un risultato che si allontana molto dalle premesse iniziali. L'idea che "la gravità ne i corpi naturali è una fontana, dalla quale continuamente scaturiscono momenti"[210] dà al problema un aspetto diverso anche perché esso è esaminato da un punto di vista diverso. Accettando che un'intensità infinita possa essere il risultato di una somma infinita di piccoli momenti, a Torricelli preme individuare la causa fisica che giustifichi la sommatoria e la individua nella capacità del grave in moto a *conservare* i momenti generali. A suo avviso, essi sono "prodotti dal tempo"[211] e l'unico modo di generare tale forza illimitata è quello di far cadere il grave.[212] Il punto cruciale, quindi, non è più quello di giustificare l'infinità della percossa, quanto invece quello di spiegare come un'azione infinita in potenza possa esprimersi con effetti in atto che sono finiti. Di conseguenza, diventa indispensabile poter descrivere quantitativamente le relazioni tra le grandezze coinvolte: "*[i] tempi proporzionali reciprocamente alle resistenze, sono equivalenti per estinguere l'istesso impeto*."[213] Ma se il momento di un grave è infinito, esso dovrebbe anche produrre una velocità infinita che, però, non si osserva in natura. L'apparente paradosso è risolto con un tecnicismo matematico, dicendo che l'aumento di velocità dall'iniziale quiete, cioè uno stato a velocità nulla, a un

[210] *Opere di Torricelli* II, p. 8. La metafora mostra che per Torricelli la materia era un qualcosa incapace di agire e privo di proprietà dinamiche, a conferma che il principio di caduta dei gravi verso il centro della Terra era un effetto di qualcos'altro e non una reale proprietà interna alla materia stessa. Le qualità attribuite ai corpi, quindi, sembrano lo specchio di una causa esterna. In questa chiave si può leggere anche la relazione tra *peso* e *gravità*, precedentemente illustrata (si vedano alle pp. 59-60 le note 162, 163 e 164).

[211] *Opere di Torricelli* II, p. 8.

[212] "[L]a definizione medesima che il Galileo adduce del moto naturalmente accelerato, basta per isvelare questo arcano della Natura, intorno alla forza della percossa. Aprasi la scaturigine della gravità. Sollevisi la palla grave in alto, in maniera tale che possa poi quando ella ricaderà all'ingiù dimorare per l'aria dieci istanti di tempo, e per conseguenza generare dieci di quei suoi momenti. Io dico che detti momenti si conserveranno, e si aggregheranno insieme. Ciò è manifesto per l'esperienza continua dei gravi cadenti, e del moto accelerato; vedendosi che i gravi dopo le cadute hanno maggior forza, che non havevano quiescenti" (*Opere di Torricelli* II, p. 8). Come si comprende dal testo appena citato, la *conservazione* dei momenti della gravità si giustifica grazie alla *continuità* dello scorrere del tempo grazie alla "dottrina degli Indivisibili" (*Opere di Torricelli* II, p. 9).

[213] *Opere di Torricelli* II, p. 11.

qualsiasi valore finito non nullo è un "accrescimento infinito."[214] Se, invece, lo si volesse spiegare fisicamente, si dovrebbe dire

> che il momento interno de' gravi cadenti vada continuamente crescendo, e moltiplicandosi, è manifesto dall'effetto istesso. […] [Q]uale è la causa del moto de i gravi all'ingiù? Certo non può esser altro che l'interna gravità; la quale se fusse sempre la medesima, et invariabile, anco la velocità del moto dovrebbe sempre esser eguale à se stessa; ma noi vediamo l'accrescimento troppo cospicuo nella velocità, adunque bisognerà concedere, che si accresca anco la causa.[215]

La vera causa non è la velocità, perché essa è un effetto del momento posseduto, ma i momenti intrinseci veri e propri.

Torricelli studia anche un secondo tipo di percossa, chiamata *percossa artificiale* o *urto*, che occorre quando due corpi, di cui uno almeno dotato di una certa velocità, entrano in contatto diretto. In questo caso, gli elementi caratteristici dell'andamento del fenomeno non sono la quantità di materia, la gravità specifica e la forma dei due oggetti come potrebbe sembrare a un primo e superficiale esame, ma soltanto una "qualche virtù (qualunque ella sia), atta a cagionare il moto, e la velocità o maggiore, o minore, conforme maggiore o minore sarà essa virtù impressa."[216]

Se però la causa di un moto violento è la stessa, non ha più senso tenere separate le due classi di fenomeni come i proietti, la percossa naturale e la percossa

---

[214] *Opere di Torricelli* II, p. 16.

[215] *Opere di Torricelli* II, p. 17.

[216] *Opere di Torricelli* II, p. 30.

artificiale, e diventa possibile riconoscere un comportamento più generale che ha l'aspetto di una nuova legge.[217] La chiave della spiegazione meccanica di simili moti violenti diventa il concetto di *virtù impressa* o di *forza*, nel senso di azione esterna. Se nessuna proprietà specifica dell'oggetto in moto è decisiva, ciò significa che la percossa non è altro che il trasferimento da un corpo a un altro, di una qualche forma di attività esterna all'oggetto.[218]

---

[217] "Si può dunque con ragione affermare che di qualsivoglia corpo velocitato da potenza esteriore l'efficacia nell'atto dell'urtare non sia altro che virtù impressagli dalla potenza che l'haverà mosso" (*Opere di Torricelli* II, p. 132).

[218] Serge Moscovici, "Torricelli's *Lezioni Accademiche* and Galileo's theory of percussion" in Ernan McMullin (ed), *Galileo Man of Science*. New York-London: BasicBooks, inc. Publishers, 1967.

# Capitolo 2.

## *La legge del moto accelerato: termini, oggetti, strutture.*

### *Par. 1 Introduzione.*

La *terza* e la *quarta giornata* delle *Due nuove scienze* di Galileo e il *De motu* di Torricelli vogliono descrivere il moto dei corpi pesanti, in modo da ricavare vecchie e nuove proprietà partendo da pochi principi dati per assodati e da un ristretto numero di definizioni. Questo modo deduttivo di argomentare aveva degli antecedenti che si rifacevano, rispettivamente, ad Archimede e a Niccolò Tartaglia.[219] La veste matematica con cui furono composte le due opere aveva innanzitutto lo scopo di nobilitarne il contenuto, poiché una teoria che aveva l'ambizione di diventare un nuovo capitolo della matematica, che era considerata la scienza esatta per eccellenza, assurgeva necessariamente allo stesso rango.[220] Tale strategia era uno degli strumenti che Galileo poteva utilizzare per raggiungere il suo scopo, cioè quello di sostituire la tradizionale spiegazione aristotelica. Essa, a

[219] Tartaglia curò sia l'edizione degli *Elementi* di Euclide con traduzione in italiano e commento, sia due successive edizioni del *Trattato sui galleggianti* di Archimede, la prima con traduzione latina (1543) e la seconda con traduzione in italiano e commento (1551). Egli ebbe il merito di essere il primo matematico in grado di recuperare la corretta teoria delle proporzioni di grandezze continue di Euclide e a dare la prima soluzione generale delle equazioni cubiche. Inoltre, diede un esempio di come si potesse applicare la matematica ai problemi di artiglieria nel suo libro, pubblicato postumo nel 1537, intitolato *Nuova scienza*.

[220] "SALV. […] appresi dal nostro Accademico, che sopra tal materia aveva fatte molte speculazioni, e tutte, conforme al suo solito, geometricamente dimostrate, in modo che, non senza ragione, questa sua potrebbe chiamarsi una nuova scienza; perché se bene alcune delle conclusioni sono state da altri, e prima di tutti da Aristotele, osservate, tuttavia né sono delle più belle, né (quello che più importa) da i loro primarii e indubitati fondamenti con necessarie dimostrazioni provate" (dai *Discorsi* in *Opere di Galileo* VIII, p. 54).Per capire il ruolo che per Galileo aveva la matematica nella comprensione della natura, ci si può riferire a quanto egli scrive a proposito del lavoro di Gilbert sul magnetismo: "quello che avrei desiderato nel Gilberti, è che fusse stato un poco maggior matematico, ed in particolare ben fondato nella geometria, la pratica della quale l'avrebbe reso men risoluto nell'accettare per concludenti dimostrazioni quelle ragioni ch'ei produce per vere cause delle vere conclusioni da sé osservate; le quali ragioni (liberamente parlando) non annodano e stringono con quella forza che indubitabilmente debbon fare quelle che di conclusioni naturali, necessarie ed eterne, si possono addurre" (dal *Dialogo* in *Opere di Galileo* VII, p. 432).

ben vedere, non reggeva alla prova dei fatti e risultava inconsistente logicamente,[221] anche se veniva difesa e sostenuta da importanti esponenti della cultura filosofica e scientifica del tempo. Questo vantaggio, però, costrinse i due autori ad affrontare problemi di tipo fondazionale che non erano mai stati presi in considerazione dopo Aristotele. Il suo sistema del mondo fisico e metafisico era così ben saldato e coordinato che cambiare alcune leggi o proprietà in un ambito centrale come quello della spiegazione del moto dei corpi avrebbe comportato un completo riaggiustamento dell'intero edificio.[222] In aggiunta, i limiti derivanti dalla scelta della matematica come linguaggio descrittivo imponevano un nuovo modo di guardare ai fenomeni del mondo fisico. Galileo e Torricelli si sono trovati a fronteggiare l'antica sfida lanciata all'uomo dalla natura del moto, insieme a nuove domande che si riferivano alla possibilità di esprimere matematicamente eventi o concetti legati al mondo dell'esperienza e alla relazione tra le due discipline.

Nel primo capitolo sono stati evidenziati alcuni dei problemi che i due autori dovettero affrontare, con le soluzioni che essi preferirono dare. Lo scopo del presente capitolo, invece, è di esaminare in particolare le soluzioni dei nodi concettuali di ordine fisico, cercando di approfondirne le ragioni e di comprendere le conseguenze.

[221] Galileo, nella *prima giornata* dei *Discorsi*, dimostra che la prima legge aristotelica del moto che afferma che la velocità dei corpi che cadono è proporzionale al loro peso, porta a contraddizione (*Opere di Galileo* VIII, pp. 116-119). Infatti, il sistema rigido composto di due corpi aventi pesi diversi dovrebbe cadere con una velocità maggiore a quella posseduta dai due corpi singolarmente presi e, nello stesso tempo, cadere con una velocità minore a quella del corpo più pesante, perché il sistema risulterebbe frenato dal corpo più piccolo che è più lento. Galileo spiega anche perché non vale la seconda legge aristotelica del moto, secondo la quale la velocità di caduta del grave è inversamente proporzionale alla densità del mezzo (*Opere di Galileo* VIII, pp. 119-121).

[222] La teoria aristotelica del moto è contenuta nel Libro II del *De coelo* e nei Libri III, IV, V e VII della *Fisica* e gioca un ruolo di primo piano nella dimostrazione dell'incorruttibilità e immutabilità dei cieli, nell'istituzione delle proprietà dei cinque elementi e di come essi realizzino un cosmo ordinato.

## Par. 2 *Il tema centrale del percorso galileiano: la velocità.*

La legge di caduta dei gravi che Galileo propone è quella che fu accettata da Newton e che s'insegna ancora oggi in tutte le scuole, cioè la proporzionalità tra spazi percorsi e quadrato dei tempi di percorrenza. Nel trattato sul moto, essa compare come Teorema II la cui dimostrazione richiama soltanto la definizione di moto uniformemente accelerato. È, invece, il Teorema IV a estendere la legge di caduta libera anche al caso della discesa lungo piani inclinati e la sua dimostrazione dipende dall'assioma del moto, in cui si afferma che la velocità finale di un grave, che parte dalla quiete da un'altezza data, non dipende dal particolare percorso effettuato. Sua conseguenza è la validità generale della legge per qualunque moto di caduta, libera o no. L'altro risultato notevole da prendere in considerazione è la dimostrazione che la forma della traiettoria percorsa da un grave lanciato è parabolica, presentata come Teorema I nella *quarta giornata* dei *Discorsi*. Essa fa ricorso, a sua volta, alla definizione di moto uniforme e di moto uniformemente accelerato come descritte nella *terza giornata*, insieme al principio di composizione dei moti.[223]

---

[223] Questo principio è di fondamentale importanza anche per la scoperta della legge di caduta, poiché è indispensabile per collegare la spiegazione del moto lungo piani inclinati con quella relativa al moto verticale. Galileo potrebbe averlo ereditato dalla tradizione precedente e, in particolare, dai *Problemi meccanici* (pseudo)aristotelici: "Quando dunque il punto che si muove si muove secondo un rapporto costante, necessariamente si muove su di una retta, e tale retta viene ad essere la diagonale di quella figura [rettangolo ΑΒΗΓ con diagonale ΑΗ e contenente un secondo rettangolo ΑΔΖΕ] che è generata dai segmenti che stanno in tale rapporto. Sia, allora, il rapporto secondo il quale il punto si muove quello che intercorre fra il segmento ΑΒ e il segmento ΑΓ; ed ΑΓ si muova verso Β, ΑΒ invece si muova in basso verso ΗΓ. Supponiamo che il punto Α sia giunto in Δ e il segmento ΑΒ si sia spostato su Ε. Se dunque il rapporto del moto è quello che intercorre fra ΑΒ ed ΓΑ, è necessario che anche tra **Δ** ed ΑΕ intercor ra il medesimo rapporto. Simile di conseguenza è, proprio per la proporzionalità, il piccolo parallelogramma al maggiore, cosicché la loro diagonale è sulla medesima retta, e sarà quella definita dal punto Α verso Ζ. Nello stesso modo, poi, ciò si dimostrerà in qualsiasi punto il moto venga intercettato: esso infatti si troverà sempre comunque sulla diagonale. È chiaro, dunque, che il punto che si muove in base ai due moti lungo la diagonale necessariamente si muove secondo il rapporto che si determina fra i lati; se infatti si muovesse secondo qualsiasi altro rapporto, non si muoverebbe lungo quella diagonale. Se poi si muove di due moti senza un rapporto costante e senza un tempo determinato, è impossibile che realizzi un moto rettilineo" (*ΜΗΧΑΝΙΚΑ* 848 b 10-28; traduzione di Maria Elisabetta Bottecchia Dehò, in Aristotele, *Problemi meccanici*, a cura di Maria Elisabetta Bottecchia Dehò (Catanzaro: Rubbettino, 2000), pp. 62-65). Il brano appena citato prova che la composizione grafica e geometrica di due punti in movimento era nell'uso, anche se in una forma ancora rozza e imprecisa. Galileo, attraverso lo studio dei moti lungo piani inclinati, ne verificherà la

Come risulta dalla lettura delle due giornate finali dei *Discorsi*, Galileo non descrive il moto come uno *stato*[224] in cui si può trovare un corpo pesante e, di conseguenza, neppure come un *processo*[225] che avviene nel tempo. Sembra piuttosto che il moto sia un fenomeno a se stante, da studiare nella sua individualità e specificità, in relazione ad un oggetto solo perché altrimenti esso non sarebbe osservabile. In questo senso, il *moto uniforme*, il *moto uniformemente accelerato* o il *moto parabolico* diventano enti matematici, astratti e generali, che non hanno bisogno di far ricorso a caratteristiche concrete e peculiari del corpo in movimento, quali ad esempio la quantità di materia posseduta o la forza necessaria per produrre un certo moto. Dall'esame dei teoremi dimostrati, si nota che l'attenzione è centrata sulla *velocità* del mobile. Infatti, gli elementi chiave per la fondazione della nuova scienza del moto dipendono tutti strettamente da quel concetto che è il risultato della definizione, delle sue proprietà e delle relazioni tra essa e le altre grandezze utili a descrivere un corpo in movimento. Anche l'aspetto che permette di distinguere i tipi di moto tra loro è legato alla velocità e al modo in cui essa si caratterizza. Da questa prospettiva, lo studio di Galileo del movimento si può descrivere come la determinazione del tipo di velocità a esso propria. Utilizzando le categorie di riferimento della fisica moderna, si può dire che Galileo fosse sì interessato essenzialmente all'aspetto dinamico del fenomeno, rappresentato dallo studio della velocità e dall'accelerazione possedute, ma visto nella sua veste più

---

validità e ne estenderà la portata associando i lati del rettangolo la variabile temporale, invece dello spazio percorso come mostrato nel testo precedente. Questo gli permise di trasformare il grafico (pseudo)aristotelico della relazione di proporzionalità in un diagramma della traiettoria. Ad ulteriore conferma, si vedano il brano sulla composizione dei moti che genera un cerchio (*ibid*. 848 b 29-849 b 18; pp. 64-69) e lo si confronti con quanto descritto nella *seconda giornata* del *Dialogo* a proposito del moto dei corpi in prossimità della Terra in rotazione uniforme attorno al proprio asse.

[224] Per *stato* di un corpo s'intende l'insieme delle proprietà da esso possedute in un certo istante. In questo caso, esse sarebbero la posizione nello spazio, la velocità e l'accelerazione. Il termine non è appropriato perché non è coinvolto alcun aspetto o caratteristica o proprietà, peculiari allo specifico oggetto in moto. Esso sembra essere un *portatore* degli attributi del moto, più che un *soggetto* in moto. Anzi, la strategia di Galileo fu proprio quella di eliminare gli attributi o qualità specifici del grave, quali la forma, la densità, la massa, il *peso* o la *gravezza* dalla sua *nuova scienza*. In questo senso, il moto sembra acquisire piena autonomia dall'oggetto che si muove.

[225] Un *processo* è un insieme continuo di stati, in successione temporale.

generale e astratta e incurante delle forze agenti, cioè quella propria della cinematica. A posteriori, è relativamente facile capire come non fosse adeguato il tentativo di utilizzare un concetto di velocità (o di *momento*) che proviene da analisi statiche, quali quelle della scuola archimedea. D'altro lato, l'analisi dinamica di provenienza aristotelica era da rifondare nella sua totalità, terminologia compresa. La soluzione di Galileo fu di raccordare le definizioni di velocità provenienti dalle due opposte tradizioni attraverso il *principio dei lavori virtuali*[226] che, però, non era generalmente accettato. Questa fu la sfida più impegnativa che dovette affrontare sul fronte fisico.

Risulta, pertanto, indispensabile ricostruire l'accezione originaria del termine velocità, come risulta alla fine dell'intero processo speculativo, prendendo in esame la terminologia e i contesti dove essa venne utilizzata. Un'analisi corretta non può, però, fare a meno di studiarne il ruolo all'interno di una più allargata

[226] Stillman Drake dice di essere stato il primo a vedere nel *principio della bilancia* un precursore del *principio delle velocità virtuali* (Stillman Drake, *Galileo Galilei pioniere della scienza*. Padova: Muzzio Editore, 1992, p. 91), ma ciò non corrisponde al vero dato che almeno Giovanni Battista Venturi lo anticipa (Giovanni Battista Venturi, *Memorie e lettere inedite finora o disperse di Galileo Galilei*, 2 voll. . Modena: G. Vincenzi e comp., 1818, p. 369). Galileo vi fa esplicito riferimento sia nelle sue *Meccaniche*: "Viene dunque ad essere la velocità del moto del grave B, discendente, tanto superiore alla velocità dell'altro mobile A, ascendente, quanto la gravità di questo eccede la gravità di quello; né potendo essere alzato il peso A in D, benché lentamente, se l'altro grave B non si muove in E velocemente, non sarà meraviglia, né alieno dalla costituzione naturale, che la velocità del moto del grave B compensi la maggior resistenza del peso A, mentre egli in D pigramente si muove e l'altro in E velocemente descende" (*Opere di Galileo* II, p. 164); sia nel *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua*: "Il secondo principio è, che il momento e la forza della gravità venga accresciuto dalla velocità del moto; sì che pesi assolutamente eguali, ma congiunti con velocità diseguali, sieno di forza, momento e virtù diseguale, e più potente il più veloce, secondo la proporzione della velocità sua alla velocità dell'altro. Di questo abbiamo accomodantissimo esempio nella libra o stadera di braccia diseguali, nelle quali posti pesi assolutamente eguali, non premono e fanno forza egualmente, ma quello che è nella maggior distanza dal centro, circa il quale la libra si muove, s'abbassa sollevando l'altro, ed è il moto di questo, che ascende, lento, e l'altro veloce" (*Opere di Galileo* IV, pp. 68-69). Il *principio delle velocità virtuali* è uno dei cardini della meccanica moderna e consente di analizzare i movimenti possibili di un elemento puntiforme del sistema (l'insieme dei suoi *spostamenti virtuali*) in un *istante infinitesimo*. In questo modo di procedere, il sistema si deve pensare congelato, cioè in una condizione quasi-statica. Se si confrontano gli spostamenti virtuali di due o più elementi nel medesimo istante, si hanno spostamenti simultanei che, grazie alla coincidenza dei tempi, esprimono di conseguenza le rispettive velocità virtuali (la velocità è il rapporto tra spazio percorso e il tempo di percorrenza, quindi, la velocità virtuale è il rapporto dello spostamento virtuale sull'istante infinitesimo). Questo principio fu dimostrato da Joseph-Louis Lagrange nella sua *Mécanique analytique* del 1788 e analizzato da Ernst Mach nell'opera *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico* del 1883.

teoria fisica dove sono essenziali concetti come, ad esempio, quelli di *accelerazione*, di *gravità*, di *impeto* e di *momento*. Nel procedere, si chiarirà anche l'insieme dei principi che Galileo assunse come veri ma che non appartengono alla sua teoria del moto, perché mutuati da altri ambiti di ricerca, e il loro ruolo nell'economia della nuova scienza.

### *Par. 3 Tempo, spazio, velocità.*

La soluzione del problema del moto che Galileo ereditava è descritta con precisione nella prima giornata del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, quando cerca di chiarire che due moti, il primo lungo la verticale e il secondo lungo un'inclinata con la medesima altezza della precedente, che partono dalla quiete contemporaneamente, possono essere uno più veloce dell'altro e avere la stessa velocità acquisita alla fine della caduta.[227] La spiegazione che la tradizione aristotelica dava dello stesso fenomeno è una descrizione che si avvale dell'uso di coppie di aggettivi contrari, per esempio veloce-lento, che dovrebbero creare quella tensione bipolare indispensabile per generare un cambiamento.[228] Insieme alla coppia veloce-lento, ci sono anche alto-basso, leggero-pesante e raro-denso, indispensabili per dedurre il comportamento dei cinque elementi, dei loro composti e la struttura ordinata del cosmo.[229] La confusione nasce dalla difficoltà di stimare qualitativamente la velocità, quando la durata dei moti e la lunghezza delle

[227] "SAGR. Sono stato per risponder risolutamente di sì, parendomi pur necessario che il moto della perpendicolare CB debba essere più veloce che per l'inclinata CA: tuttavia, se questo è, come potrà il cadente per l'inclinata, giunto al punto A aver tanto impeto, cioè tal grado di velocità, quale e quanto il cadente per la perpendicolare avrà nel punto B? Queste due proposizioni par che si contradicano.

SALV. Adunque molto più vi parrà falso se io dirò che assolutamente le velocità de' cadenti per la perpendicolare e per l'inclinata siano eguali. E pur questa è proposizione verissima; sì come vera è questa ancora che dice che il cadente si muove più velocemente per la perpendicolare che per l'inclinata" (*Opere di Galileo* VII, p. 48).

[228] Aristotele, *ΦΥΣΙΚΗΣ ΑΚΡΟΑΣΕΩΣ*, A 5 188a19-189a10; in *Fisica*, a cura di Luigi Ruggiu. Milano: Mimesis, 2007, pp. 22-27. Nel seguito, quest'opera sarà indicata più brevemente con *Fisica*, seguita dal riferimento al testo greco e dal numero di pagina dell'edizione italiana.

[229] *Fisica*, Δ 8 214b12-216a21; pp. 154-161.

traiettorie percorse non sono uguali.[230] In aggiunta, la relazione tra tempo, spazio e moto non è definita con chiarezza. Ad esempio, "non esiste tempo senza movimento […] e il tempo non è movimento, ma neppure è possibile senza il movimento. […] Noi percepiamo simultaneamente movimento e tempo."[231] Quando due fenomeni avvengono contemporaneamente, si può fissare l'attenzione sullo spazio percorso, o viceversa.[232] Quando, invece, durata e percorso sono entrambi diversi, si valuta la velocità istintivamente, descrivendo il moto come veloce o lento su una scala qualitativa in cui, in alcuni casi, il moto più lento durante un'osservazione è anche il più veloce in un'altra. Il quadro si complica ulteriormente se si considera il tipo di moto o di quiete, *secondo natura* o *contro natura*,[233] uniforme o accelerato e rettilineo, circolare o composto. Per Aristotele, i costituenti principali del moto sono, comunque, il *motore* o forza applicata per contatto, il *mosso* o gravezza del corpo soggetto al movimento, la *lunghezza* prodotta dall'azione della forza e il *tempo* in cui il mobile percorre la data distanza. I quattro

---

[230] "Inoltre, ogni mutamento è più veloce o più lento […]; infatti, lentezza e velocità sono determinate mediante il tempo, e 'veloce' è ciò che si muove molto in poco tempo, mentre 'lento' è ciò che si muove poco in molto tempo" (*Fisica*, Δ 10 218b13-17, pp. 170-171). "[…] 'più veloce' e 'più lento' si dice in rapporto ad ogni cambiamento […]. Dico 'muoversi più velocemente', ciò che muta prima di ogni altro in direzione di una certa condizione, quando si muove lungo la medesima distanza e con movimento uniforme: ad esempio, nel moto locale, se entrambi si muovono secondo la circonferenza o secondo la linea retta" (*Fisica*, Δ 14 222b31-223a3, pp. 188-189).

[231] *Fisica*, Δ 11 218b33-219a4; pp. 172-173.

[232] "[…] necessariamente il corpo più veloce percorre una distanza maggiore in un tempo uguale, e una distanza uguale in un tempo minore, cioè esso percorre una distanza maggiore in un tempo minore: in questo modo si determina ciò che è più veloce" (*Fisica*, Z 2 232a25-27, pp. 238-239). "Inoltre, se tutto ciò che si muove, si muove di necessità o in un tempo uguale, o in un tempo minore o in uno maggiore, e più lento risulta quello che si muove in un tempo maggiore, mentre quello che si muove in un tempo uguale ha velocità uguale, e l'oggetto più veloce non ha né uguale velocità, né è più lento, allora l'oggetto più veloce non si muoverà né in un tempo uguale né in un tempo maggiore. Resta pertanto che esso si muova in un tempo minore: cosicché l'oggetto più veloce percorrerà necessariamente una grandezza uguale in un tempo minore" (*Fisica*, Z 2 232b14-20, pp. 240-241).

[233] "[…] la velocità di ciò che sta per giungere ad uno stato di quiete sembra crescere continuamente, avviene invece il contrario quando si tratta di un movimento effettuato con violenza. Pertanto, il corpo sarà in uno stato di quiete, senza che nessuna quiete si sia effettivamente prodotta. Inoltre, l'arrestarsi in senso assoluto sembra consistere nel muoversi della cosa verso il luogo proprio, oppure quando ciò avviene accidentalmente nel medesimo tempo" (*Fisica*, E 6 230b24-28, pp. 228-231).

parametri in proporzione diretta sono: motore con mosso, lunghezza con tempo, mosso con tempo; in proporzione inversa sono, invece, mosso e lunghezza.[234] Non si fa riferimento esplicito alla velocità e non si pongono limitazioni alle proporzioni precedenti in funzione del tipo di moto.[235] In sintesi, per Aristotele la velocità è una qualità del movimento utile a confrontare moti dello stesso tipo, cioè con la stessa traiettoria, e legata alla coppia di grandezze tempo-spazio. Non ha un uso o un significato diverso da quello indefinito e non specialistico della terminologia del parlato quotidiano ed è strettamente legata ad altri attributi peculiari del mobile, quale ad esempio il suo peso. Ma è in base alla forma della traiettoria che si organizza la classificazione dei diversi moti.

Per Galileo, distanze e durate sono proprietà fondamentali del moto che, però, non sono sufficienti a definirlo compiutamente. Senza velocità e accelerazione, infatti, non è possibile distinguere i diversi tipi di movimento tra loro, né tentare di capire come le condizioni iniziali intervengano nella sua costituzione. Pertanto, gli attributi caratteristici di un moto sono: il tempo, che scorre indipendentemente dal movimento ma che permette di capire quando un oggetto si muove; lo spazio percorso o la successione degli spazi percorsi in dati intervalli temporali, che si possono facilmente misurare; e la velocità o le velocità raggiunte dal mobile durante il suo movimento. Sono grandezze numeriche, perché è possibile assegnare un valore numerico a ciascuna di esse, dopo aver stabilito un'unità di misura o un valore di riferimento, ma non sono operabili direttamente tra loro perché non

[234] *Fisica*, H 5 249b27-250b7, pp. 308-313.

[235] "[…] Quattro cose da considerarsi: la prima è il peso da trasferirsi da luogo a luogo; la seconda è la forza o potenza, che deve muoverlo; terza è la distanza tra l'uno e l'altro termine del moto; quarta è il tempo, nel quale tal mutazione deve essere fatta" (*Le Mecaniche*, in *Opere di Galileo* II, p. 156, r. 9-12). Galileo riprende gli stessi riferimenti di Aristotele, ma li utilizza insieme alla velocità: "il qual tempo torna nell'istessa cosa con la prontezza e velocità del moto, determinandosi, quel moto essere in un altro più veloce, che in minor tempo passa eguale distanza. […] Dal che appare, la velocità della forza essere stata tante volte superiore alla resistenza del peso, quante esso peso è superiore alla forza, poiché in quel tempo nel quale la forza movente ha molte volte misurato l'intervallo tra i termini del moto, esso mobile lo viene ad avere passato una sol volta" (*Le Mecaniche*, in *Opere di Galileo* II, p. 156, rr. 12-15 e rr. 25-29).

omogenee, cioè non aventi lo stesso grado di realtà.[236] Per questo, si può affermare che le grandezze caratterizzanti il moto sono ontologicamente autonome, anche se correlate in modi che possono essere di volta in volta diversi. L'indipendenza della velocità dallo spazio e dal tempo è comprovata anche dal fatto che la classificazione galileiana non dipende dalla geometria del percorso. Si possono avere moti uniformi sia rettilinei che circolari e Galileo, nella trattazione del moto equabile, non fa mai riferimento alla forma della traiettoria poiché, evidentemente, non la ritiene indispensabile. La forma dello spazio percorso, pertanto, non è collegata al concetto di velocità. Di conseguenza, quest'ultima è da considerarsi sempre una grandezza scalare, cioè puramente numerica, e non vettoriale poiché la direzione del moto non influisce sulla forma della traiettoria.[237] Ciò resta vero anche se Galileo, quando

[236] La non omogeneità dei tre attributi del moto è condizione sufficiente per impedire che la loro corrispondente traduzione in termini numerici, o misura, sia direttamente operabile. L'aritmetica, quindi, è subordinata alla genesi del numero. La trasposizione delle grandezze fisiche in quantità non spoglia le grandezze del loro specifico significato, né le priva della loro intrinseca natura. Questa differenziazione tra numeri e numeri è una delle ragioni per cui non sarebbe stato possibile giungere a una definizione di velocità come quoziente tra spazio percorso e tempo di percorrenza corrispondente. Per essere più precisi, quello che non sembra possibile a Galileo non è l'operazione di divisione, ma il significato da attribuire al suo risultato. Un'ipotesi interessante da studiare potrebbe essere il ruolo giocato dall'uso dei diagrammi geometrici, utilizzati per illustrare le relazioni tra tempi, spazi e velocità durante la dimostrazione dei teoremi del moto, nel salto cognitivo che ha portato all'acquisizione del concetto di velocità come rapporto di spazio e tempo. "Riprendiamo, infatti, il triangolo ABC, che sulle parallele alla base BC ci rappresenta i gradi di velocità continuamente aumentati secondo il crescere del tempo, le quali [parallele], essendo infinite, siccome infiniti sono i punti nella linea AC e gli istanti in un tempo qualsiasi, daranno origine alla superficie stessa del triangolo; se intendiamo che il moto continui per altrettanto tempo, ma non più accelerato, bensì equabile, secondo il massimo grado della velocità acquistata, il quale grado è rappresentato dalla linea BC; tali gradi di velocità formeranno un aggregato simile al parallelogramma ADBC, che è doppio del triangolo ABC: perciò lo spazio percorso nel medesimo tempo con gradi di velocità consimili [*tutti eguali a BC*], sarà doppio dello spazio percorso coi gradi di velocità rappresentati dal triangolo ABC. Ma su un piano orizzontale il moto è equabile, allorché non intervenga nessuna causa di accelerazione o di ritardamento; dunque, si conclude che lo spazio CD percorso in un tempo eguale al tempo AC è doppio dello spazio AC: infatti quest'ultimo viene percorso con moto accelerato a partire dalla quiete, secondo le parallele del triangolo; quello, invece, secondo le parallele del parallelogramma, le quali, quando siano prese nella loro infinità, risultano doppie delle infinite parallele del triangolo" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 242-243; traduzione di Franz Brunetti in Galileo Galilei, *Opere*, 2 voll., a cura di Franz Brunetti. Milano: Mondadori, 2008, vol. II, p. 760).

[237] Per Galileo, la composizione di un moto rettilineo uniforme parallelo al suolo con uno uniformemente accelerato perpendicolare al precedente danno una traiettoria parabolica se si immagina la Terra ferma o, in forma equivalente, se si osserva il movimento da un punto di vista solidale con il moto della Terra; esso sarà una "circonferenza" se si osserva il moto da una posizione esterna e non solidale al moto terrestre (*seconda giornata* del *Dialogo* in *Opere di Galileo* VII, 191).

calcola l'intensità della velocità di un moto parabolico, usa la regola della radice quadrata della somma dei quadrati delle velocità componenti, che coincide con l'odierno calcolo dell'intensità o modulo di un vettore. Una fondazione del concetto di velocità non può, quindi, coinvolgere aritmeticamente le nozioni di tempo e spazio, per cui il compito diventa duplice. Alla sua definizione si deve aggiungere la determinazione delle relazioni che intercorrono tra le diverse grandezze.[238] Per quanto riguarda la prima, le uniche strategie efficaci sono essenzialmente due, cioè legare il nuovo significato ad altri concetti noti, oppure tentare di chiarirne l'accezione ricorrendo a una parafrasi esclusivamente linguistica. Galileo le utilizza entrambe.

### *Par. 4 Sintassi e semantica del termine velocità.*

Vediamo innanzitutto le diverse parafrasi. Nelle *Mecaniche*, opera composta prima del 1593 come testimoniato da Vincenzo Viviani, il termine *velocità* viene reso con "prestezza del moto"[239] e il criterio base per un confronto di velocità consiste nel capire quale mobile è *più veloce*, stima che si ha quando "in minor tempo passa eguale distanza"[240] in perfetto accordo con i dettami aristotelici. Nel *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono*, scritto tra il 1611 e il 1612, velocità è sinonimo di *tardità*,[241] alludendo al suo andamento perfettamente reversibile, e due pesi hanno la stessa velocità quando "muovendosi essa bilancia, passerebbono nello stesso tempo spazii eguali."[242]

---

[238] Enrico Giusti, "Il ruolo della matematica nella meccanica di Galileo" in *Galileo e la cultura veneziana*, a cura dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti di Venezia. Trieste: LINT Editrice, 1995, pp. 21-34.

[239] *Opere di Galileo* II, p. 156, p. 158.

[240] *Opere di Galileo* II, p. 156.

[241] *Opere di Galileo* IV, p. 66.

[242] *Opere di Galileo* IV, p. 68. Quest'associazione indica che Galileo aveva risolto o, per lo meno affrontato, il problema di come avvenisse il moto di corpi lanciati con forza verso l'alto.

Nella *Scrittura attenente all'idraulica*, relazione composta nel 1631 ma frutto di una conoscenza precedente di lunga data,[243] non compare una descrizione del termine velocità ma soltanto la spiegazione di come valutarla, specialmente riguardo alle caratteristiche del flusso delle acque. Galileo utilizza i risultati principali del trattato sul moto locale dei gravi nella spiegazione del comportamento dell'acqua che scorre all'interno di canali, anche se lo pubblicherà sette anni più tardi e senza modificarne definizioni, principi e teoremi che verranno presentati qui di seguito. La ragione di questo duplice utilizzo non sta nel fatto che la natura dei liquidi era ritenuta la stessa dei corpi solidi, anzi.[244] Probabilmente, i motivi sono due. In primo luogo, la cinematica galileiana è completamente indipendente dalla forma del mobile, dal suo peso e gravità specifica, dal suo stato solido e dalla rigidità, caratteristica questa che permetteva di applicare i teoremi del moto anche a corpi di natura diversa. Per procedere, però, era indispensabile riconoscere nel comportamento dell'acqua forzata a scorrere in condotte una caratteristica essenziale che rendesse possibile il parallelo. E qui si arriva al secondo punto, poiché il suo fluire è strettamente correlato alla pendenza o, meglio, al

[243] Galileo brevettò un sistema per regolare l'altezza dell'acqua per l'irrigazione, che ottenne la delibera del senato della Repubblica di Venezia il 15 settembre 1594.

[244] Nel suo commento al progetto dell'ingegnere Bartolotti, che voleva risolvere i problemi legati alle esondazioni dei fiumi o canali creando un secondo canale di scolo rettilineo e senza anse, Galileo scrive: "questa decantata pendenza non ha quella assoluta autorità di decretare in questa causa, quale mi par che gli venga attribuita, e spezialmente dall'ingegner Bartolotti, mentre egli regola il più e 'l men veloce corso de i fiumi dalla sola maggiore e minor pendenza. La quale limitazione io stimo non esser interamente adequata all'effetto, né tale che (come scrive l'ingegnero) oltre a quella non si possa assegnar altro: perché, se, come egli asserisce, i laghi mancano di moto, ed i fiumi si muovono, perché questi hanno pendenza, e quelli ne mancano; ed oltre a ciò alcuni fiumi corrono con velocità maggiore, ed altri più lenti, solo per esser quelli più e questi men declivi, e non per altro; ne seguiterebbe che dove non è pendenza, già mai non fusse moto, e dove la pendenza non è maggiore, mai non fusse maggior velocità, e dove le pendenze fussero eguali o la medesima, quivi fusse sempre la velocità eguale, ed in somma che le velocità s'andassero regolando secondo la proporzione delle pendenze: le quali conseguenze ben seguono ne i mobili solidi, ma ne' fluidi credo che procedano assai differentemente" (*Opere di Galileo* VI, pp. 636-637). "E qui comincia a farsi manifesto come non è la pendenza del letto o fondo del canale quella che regola il movimento dell'acqua" (*Opere di Galileo* VI, p. 637). "Bisogna dunque ricorrere ad altro, per causa del grande augmento nella velocità, che al solo accrescimento di pendenza, e dire che per una delle potenti cagioni è che, nell'accrescer in tal modo la pendenza, si accresce sommamente la mole e 'l cumulo d'acqua, la quale, gravando e premendo sopra le parti precedenti col peso delle susseguenti, le spinge impetuosamente" (*Opere di Galileo* VI, p. 639).

dislivello del letto del fiume che è anche il motore agente, anche se non è l'unico fattore determinante. Per questa ragione le tre leggi all'inizio della *Scrittura* istituiscono la relazione fondamentale tra velocità e inclinazione. Non compare, quindi, una descrizione del concetto di velocità, ma soltanto la dichiarazione di quali regole è possibile utilizzare per una sua stima. Per la prima volta, Galileo scrive pubblicamente come si estendono i criteri della tradizione aristotelica: "le velocità di due mobili potersi chiamare eguali non solamente quando essi mobili passano spazii eguali in tempi eguali, ma quando ancora gli spazii passati in tempi diseguali avessero tra di loro la proporzione de i tempi de' loro passaggi."[245] Per quanto riguarda due condotte che hanno diverse lunghezze ma stesso dislivello, "le velocità in amendue sono eguali; ma nella parte superiore del canal lungo […] il moto, è più tardo, ma nelli ¾ rimanenti è altrettanto più veloce passandosi nell'istesso tempo spazio una volta e mezo maggiore di tutto 'l canale AC [che è quello corto]."[246]

Nel *Dialogo sopra i massimi sistemi*, non compare alcun tentativo di dare il significato del termine velocità, anche se uno dei punti chiave della *prima giornata* è distinguere nettamente tra l'uso ingenuo di termini comparativi, quali più veloce o più lento, dal nuovo uso tecnico della parola velocità.[247] Compare numerose volte "gradi di tardità" come sinonimo di "gradi di velocità" oppure "ritardarsi" al posto di "accelerarsi".[248] Quello che si ottiene in questo modo è una maggiore consapevolezza dell'uso corretto della parola in un contesto scientifico e tecnico come quello della teoria assiomatica del moto locale.

Come si è potuto leggere, ai primi tentativi di descrivere cos'è la velocità di un mobile attraverso sinonimi, Galileo ha preferito chiarire in quali modi si può

[245] *Opere di Galileo* VI, p. 630.

[246] *Opere di Galileo* VI, p. 633.

247 Si veda a tal proposito la nota 221.

[248] *Opere di Galileo* VII, p. 44, p. 45, p. 46, p. 51, p. 52, p. 54, p. 55, p. 145, p. 190, p. 222, p. 225, p. 290, p. 294, p. 370, p. 450, p. 453, p. 454, p. 455, p. 456.

riconoscere il moto più veloce tra due. Strategia che si precisa ulteriormente con la definizione delle relazioni matematiche tra spazi, tempi e velocità. A questo punto, conviene riprendere la *terza giornata* dei *Discorsi intorno a due nuove scienze*, dove viene presentato il moto equabile nella sua versione finale. Le due regole di confronto aristoteliche sono formalizzate in modo che a parità di velocità, i tempi e gli spazi sono direttamente proporzionali, cioè crescono simultaneamente. A esse si aggiunge un'altra coppia di relazioni che stabilisce che, a parità dei tempi di osservazione del moto, le velocità sono direttamente proporzionali agli spazi percorsi. Dati i precedenti quattro assiomi, Galileo deduce altre sei proprietà di cui l'ultima, il Teorema VI, è la versione più generale delle relazioni tra tutte e tre le grandezze: la velocità è direttamente proporzionale allo spazio e inversamente al tempo, cioè all'aumentare dello spazio percorso la velocità non varia se il tempo diminuisce del medesimo fattore. Per avere un moto uniforme, la crescita dello spazio deve essere compensata dalla diminuzione del tempo. Sembra, quindi, che il legame tra le tre variabili sia diventato molto stretto, poiché il modificarsi di una influisce sui valori che le restanti possono assumere, ma si tenga ben presente che questo insieme di relazioni è istituito e, quindi, vale per i moti a velocità costante o per moti di cui è possibile valutare solo la velocità media.

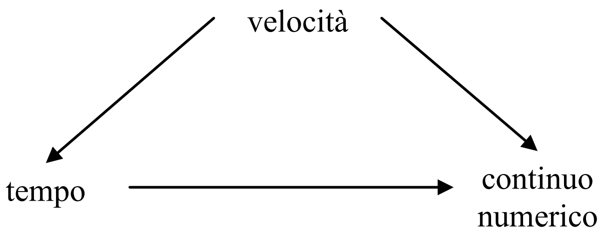
Nella sezione dedicata al moto uniformemente accelerato, invece, il termine "velocità" è reso con "celerità"[249] e l'uso di "tardità" compare pochissime volte e con funzione di sinonimo per evitare monotone ripetizioni della stessa parola.[250] In due casi, però, la parola aiuta a definire quando si ha un corpo in quiete o che raggiunge la quiete.[251] In effetti, spiegare come si comporta un mobile durante un moto comporta anche la comprensione di come lo stesso mobile possa essere messo in moto o fermarsi. Nella soluzione di Galileo, l'andamento della velocità coincide

[249] *Opere di Galileo* VIII, p. 127, p. 132.

[250] *Opere di Galileo* VIII, p. 107, p. 113, p. 199, p. 283.

[251] "l'istesso mobile dopo la partita dall'infinita tardità, cioè dalla quiete" oppure "tal mobile, partendosi da una tardità infinita (ché tal è la quiete)" (*Opere di Galileo* VIII, p. 198, p. 200).

sia con quello della variabile tempo, sia con le proprietà del continuo numerico per il quale è possibile passare dallo zero, il valore attribuito alla quiete, ad un qualunque altro valore *v*, oppure da quello di partenza *v* fino a raggiungere lo zero. Anche se si dà la possibilità di stimare incrementi finiti dell'intensità della velocità, la sua natura deve essere quindi continua. Con la proporzionalità diretta tra velocità e tempo, Galileo istituisce la continuità come proprietà della velocità, collegandola alla stessa caratteristica naturale dello scorrere del tempo (come riepilogato in figura).[252]




Se la continuità dell'aumento di velocità è intuitiva e facilmente accettabile, la sua progressiva diminuzione non lo è altrettanto. Lo diventa, però, grazie all'idea di continuità suggerita dal segmento che ne rappresenta il valore. Se è possibile tracciare un segmento muovendo la punta della matita da un punto estremo a un altro, è altrettanto immediato riconoscere la continuità del movimento fatto dalla matita anche quando, dal punto di arrivo, ritorna sui medesimi passi fino a terminare da dove aveva iniziato. La tardità, quindi, viene esemplificata dal secondo movimento, quando la velocità è rappresentata dal primo.

Come si è potuto vedere, la definizione della velocità attraverso una perifrasi non riesce nello scopo di definirla, poiché utilizza puri sinonimi del linguaggio naturale come "celerità" e "prestezza" che non riescono da soli a ritagliare il nuovo significato. Senza introdurre altre proprietà estranee a essi o nuove relazioni con altre grandezze note, si ottiene una definizione circolare senza valore informativo. Galileo sceglie l'unica via percorribile, cioè quella di stabilire precise relazioni tra la velocità da una parte e spazi e tempi dall'altra e, inoltre, tra

[252] È la stessa strategia che Aristotele utilizza nella *Fisica* (IV, 219b15-20; pp. 174-175).

spazi e tempi tra loro. Per essere più precisi, le Proposizioni 1-28 del moto naturalmente accelerato studiano spazi e tempi di moti lungo percorsi verticali, piani inclinati e corde di circonferenze. Nelle successive, si procede con lo studio indiretto delle velocità, prendendo in considerazione se il moto è fatto "in più breve tempo" (Proposizione 29-Teorema XVIII) o "in minor tempo (Proposizione 36-Teorema XXII), se impiega un "tempo più breve" (Proposizione 30-Teorema XIX), se si svolge "nel tempo più breve" (Proposizione 31-Teorema XX), se è "più presto" (Proposizione 32-Teorema XXI); oppure se nel medesimo intervallo vengono percorsi spazi diversi (Proposizioni 33-38-Problemi XII-XVI). Non ci sono enunciati dove si fa riferimento esplicito alla velocità o dove essa sia direttamente coinvolta nella tesi. L'unica eccezione è l'assioma del moto accelerato, fatto che conferma ulteriormente che Galileo non pensava alla velocità come il risultato di un calcolo aritmetico a partire da tempi e lunghezze. Dal punto di vista del metodo, si vede che la quantificazione vera e propria della velocità di un mobile passa necessariamente attraverso uno dei tre criteri di confronto di spazi e tempi, stabiliti nella sezione dedicata al moto uniforme. Da qui si capisce il perché il Teorema I sia stato messo all'inizio di tutto il trattato del moto accelerato. Grazie ad esso, infatti, si può tradurre un dato moto uniformemente accelerato in un equivalente moto uniforme, per lo studio del quale si utilizzano i tre criteri prima ricordati.

La specializzazione del termine e la sua matematizzazione hanno come conseguenza la perdita dell'immediatezza intuitiva e la necessità di ricorrere a verifiche o misure dirette e indirette delle grandezze in gioco. Il divario tra stima qualitativa e certezza del risultato diventa più evidente quando si ha a che fare con moti accelerati, la cui velocità non resta costante, ma cresce o cala con il passare del tempo in proporzione diretta del tempo. Per questo nel trattato sul moto accelerato Galileo non parla mai di *velocità*, ma di *grado di velocità*. La proprietà che la caratterizza è l'indipendenza del suo valore dalla distanza realmente percorsa o dalla lunghezza della traiettoria perché, come stabilito dall'assioma, essa dipende soltanto dal dislivello percorso rispetto alla verticale. La velocità del moto accelerato diventa una quantità che varia con un andamento che coincide con quello del tempo, la cui intensità dipende esclusivamente dalle posizioni iniziali e finali del moto rispetto al suolo oppure, in termini più generali, dalla distanza dal centro della Terra. Un comportamento davvero curioso per un attributo che non vuole essere collegato alla gravezza o al peso del mobile, come invece viene esplicitato nella *Scrittura attinente all'idraulica*.[253]

### *Par. 5 Galileo: in bilico sulla bilancia.*

Passiamo ora a esaminare le relazioni che intercorrono tra la velocità e le altre grandezze che giocano un ruolo importante nella spiegazione del movimento dei corpi, quali *peso* e *gravità*, *mole*, *momento*, *forza*, *impeto*. I testi saranno considerati in ordine cronologico, per quanto possibile.

Nelle *Mecaniche*, Galileo studia come alcune macchine possono spostare pesi utilizzando una forza esterna applicata, che è minore della forza necessaria per ottenere lo stesso risultato senza di essa. La strategia è spiegare le principali macchine come se fossero delle leve particolari, riconducibili al funzionamento della bilancia. La terminologia è piuttosto chiara. Il *peso* è ciò che deve essere mosso e che resta sempre appeso o a contatto con l'estremità di un braccio della bilancia e produce quella che si chiama la *resistenza*, cioè la forza contraria realizzata dal peso.[254] La *forza* o *potenza* è l'azione da applicare all'altra estremità della macchina per muovere il grave. La *distanza* si riferisce allo spazio che intercorre tra la posizione iniziale del peso e quella finale. Il *tempo* è dato per noto, ma è tramite la sua misura che si può ricavare il valore della *velocità*, anche se solo in termini

[253] "[…] nell'accelerazione del corso delle acque più colme poca parte vi ha la maggior pendenza, e molta la gran copia dell'acqua sopravegnente" (*Opere di Galileo* VI, p. 639).

[254] Il *peso* è descritto come la gravità di un mobile come misurata dalla bilancia, qualità che dipende dalla natura del mezzo in cui il corpo scende; la *gravità* è, invece, la tendenza a cadere verso il centro della Terra (*La bilancetta*, in *Opere di Galileo* I, pp. 215-220), oppure "quella propensione di muoversi naturalmente al basso, la quale, nei corpi solidi, si ritrova cagionata dalla maggiore o minore copia di materia, dalla quale vengono costituiti" (*Le mecaniche*, in *Opere di Galileo* II, pp. 159).

relativi nel confronto di due elementi in moto.[255] La funzione della macchina è "condurre la data forza il dato peso alla determinata distanza".[256] Poiché essa produce movimenti simultanei dei due punti su cui sono applicate la forza e la resistenza, si può tradurre in termini di velocità lo spostamento effettuato che, a sua volta, dipende sia dalla forza, che dalla resistenza. In questo modo, si può definire la relazione anche tra grandezze molto diverse tra loro: "la velocità della forza essere stata tante volte superiore alla [velocità della] resistenza del peso, quante esso peso è superiore alla forza; poiché in quel tempo nel quale la forza movente ha molte volte misurato l'intervallo tra i termini del moto, esso mobile lo viene ad avere passato una sol volta."[257] Tradotto nella notazione odierna, si ha che

$$\frac{v(forza)}{v(resistenza)} = \frac{peso}{forza}.$$

L'uguaglianza vale perché la velocità è il risultato della forza, mediato dalla distanza percorsa nello stesso tempo: forza applicata in un punto → spostamento del suo punto di applicazione → velocità del punto; resistenza applicata in un punto → spostamento del suo punto di applicazione → velocità del punto. La relazione interna a ciascuna catena sussiste perché la forza o resistenza è la causa del movimento, quando la velocità o, più precisamente, lo spostamento sono il suo corrispondente effetto. Di conseguenza, se la forza misura la resistenza allora la velocità dell'una è misurata dalla velocità dell'altra. Per ottenere, però, la corretta proporzione è necessario un ultimo passaggio. Infatti, a velocità maggiore corrisponde forza applicata minore. In definitiva, la velocità prodotta dalla macchina-leva dipende sia dall'intensità della forza-motore, sia dal mezzo in cui si trova, sia dalla distanza del punto di applicazione della forza rispetto alla posizione del fulcro-centro di rotazione. Per esprimere questo insieme di fattori concomitanti, Galileo introduce il termine *momento* e lo definisce come "la propensione di andare

[255] Questi quattro elementi richiamano i quattro costituenti principali del moto per Aristotele (si veda p. 82).

[256] *Opere di Galileo* II, p. 156.

[257] *Opere di Galileo* II, p. 156.

al basso, cagionata non tanto dalla gravità del mobile, quanto dalla disposizione che abbino tra di loro diversi corpi gravi."[258] Sembra essere una sorta di gravità vincolata, che tiene conto sia del peso, che della distanza o posizione in cui esso si trova. Come viene precisato subito dopo, "il momento [è] quell'impeto di andare al basso, composto di gravità, posizione e di altro, dal che possa essere tal propensione cagionata."[259] Il momento, la gravezza e l'impeto si possono pensare raccolti e concentrati nel centro di gravità del grave. Su una leva, due pesi A e B (A<B) posti a distanze dal centro di rotazione AC e BC (AC>BC) hanno lo stesso momento se il rapporto dei pesi è inversamente proporzionale al rapporto delle distanze. Ancora una volta, non si può dire che il momento è uguale al prodotto del peso per la distanza dal fulcro, per lo stesso motivo, per cui non si può dire che la velocità uniforme è uguale al quoziente tra lo spazio percorso e il tempo di percorrenza.[260] Ciò nonostante, la relazione che lega pesi e distanze con l'intensità

[258] *Opere di Galileo* II, p. 159.

[259] *Opere di Galileo* II, p. 159. In questa fase, il termine *impeto* è utilizzato come se fosse un sinonimo di *momento*, nello stesso senso in cui in precedenza *prestezza* lo era di *velocità*. Qui Galileo sta definendo una parola con una precisa accezione tecnica e si avvale di un termine allora in uso e non meglio specificato, quale quello di *impeto*. L'unica differenza tra queste due parole che si può rintracciare in quest'opera è legata al contesto di riferimento. Il momento, infatti, è una grandezza legata all'equilibrio di pesi su una bilancia, in un ambito che si può descrivere come statico. L'impeto, invece, sembra essere un momento di durata minima, o considerato nella sua capacità di produrre un effetto a sua volta, situazione che si potrebbe indicare come dinamica: "se nella medesima circonferenza fusse applicata forza animata, la quale avesse momento di far impeto per tutti i versi, potria far l'effetto constituita in qual si voglia luogo" (*Opere di Galileo* II, p. 168-169); "il suo momento facesse impeto nel punto F" (*Opere di Galileo* II, p. 169); "i momenti [dei gravi inanimati] hanno il loro total vigore e la intiera resistenza nella linea perpendicolare all'orizzonte; e nell'altre, transversalmente elevate o inclinate, servono solamente quel più o meno vigore, impeto, o resistenza, secondo che più o meno le dette inclinazioni s'avvicinano alla perpendicolar elevazione" (*Opere di Galileo* II, p. 186). In seguito, anche quest'ultimo si specializzerà nel senso di una forza d'impatto che produce la velocità iniziale del moto di un proietto, oppure la forza d'impatto che produce il mobile nell'urto contro un ostacolo. Può essere confuso con la velocità iniziale o finale di un moto, perché è strettamente connesso con il valore raggiunti dalla velocità del corpo, ma esso dipende anche dall'angolo che la traiettoria forma con la superficie che viene percossa (si veda la citazione in nota 259).

[260] Un altro motivo, per cui non è possibile identificare il momento di Galileo con l'odierno momento di una forza, è che la descrizione che Galileo fa del sollevamento di un peso con una leva parla di uno *spostamento* del grave. Facendo mente locale, lo spostamento di un'estremità della leva è un arco di circonferenza, la cui lunghezza è direttamente proporzionale al raggio di detta circonferenza. Se si tiene conto della simultaneità dei movimenti delle due estremità, i raggi sono anche proporzionali alle velocità. Dovrebbe, quindi, essere chiaro in che senso il concetto di momento galileiano non può essere confuso con il moderno *momento di una*

del momento è equivalente alla relazione aritmetica moderna. In questa situazione quasi statica, la velocità è direttamente proporzionale alla gravità[261] e al momento.[262]

Alla fine dell'opera, compare un breve paragrafo dedicato alla forza della *percossa*. La riduzione della percossa al modello di funzionamento della leva ha bisogno di una nuova definizione di resistenza o, in modo più preciso, alla spiegazione di cosa si deve intendere per resistenza quando si opera con fenomeni d'urto. In tal caso, le resistenze applicate nello stesso punto sono due: la resistenza all'esser mosso del percuziente e la resistenza al muoversi del percosso. Di


conseguenza, si dovrà parlare di due tipi di spostamento, quello del percuziente soggetto alla forza e quello del percosso. Il rapporto tra i due è inversamente proporzionale al rapporto delle due resistenze.[263] La velocità, quindi, ha il medesimo ruolo di sempre, ma nella percossa essa determina la quantità dello spazio percorso, invece di esserne determinata.

Nel trattato *Intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono*, si vuole studiare il problema del galleggiamento. La risposta di Galileo è che i corpi galleggiano in funzione della loro *gravità specifica*, nel rispetto del *principio di*

---

*forza* = (forza)x(braccio), né con il *lavoro di una forza* = (forza)x(spostamento). Infatti, il momento coinvolge due grandezze tra loro ortogonali, mentre il lavoro utilizza due grandezze tra loro parallele.

[261] "Viene adunque ad essere la velocità del moto del grave B, discendente, tanto superiore alla velocità dell'altro mobile A, ascendente, quanto la gravità di questo eccede la gravità di quello" (*Opere di Galileo* II, p. 164).

[262] "E da questo discorso possiamo venire in cognizione, come la velocità del moto sia potente ad accrescere momento nel mobile, secondo quella medesima proporzione con la quale essa velocità di moto viene augumentata" (*Opere di Galileo* II, p. 164).

[263] *Opere di Galileo* II, pp. 189-190.

*Archimede*,[264] mentre la forma o *figura* non è importante. La spiegazione del fenomeno fa uso di due principi mutuati dalla meccanica. Se il primo è la nota *legge dell'equilibrio sulla bilancia*,[265] il secondo si può indicare come la versione dinamica del precedente, dove la velocità è la grandezza cruciale: "il momento e la forza della gravità venga accresciuto dalla velocità del moto; sì che pesi assolutamente eguali, ma congiunti con velocità diseguali, sieno di forza, momento e virtù diseguale, e più potente il più veloce, secondo la proporzione della velocità sua alla velocità dell'altro."[266] In questo caso, è la velocità a conferire al mobile maggior potenza, purché "i movimenti si faccino secondo le medesime inclinazioni."[267] La dipendenza della forza dalla velocità equivale a una proporzionalità diretta. Da notare che il termine momento si precisa ulteriormente, esplicitando "l'altro" elemento coinvolto:

> momento […] significa quella virtù, quella forza, quella efficacia, con la quale il motor muove e 'l mobile resiste; la qual virtù depende non solo dalla

[264] "È manifesto quant'io dico: perché, detraendo il mezo dalla total gravità de i solidi tanto, quanto è il peso d'altrettanta mole del medesimo mezo, come Archimede dimostra nel primo libro *Delle cose che stanno in su l'acqua*, qualunque volta si accrescerà per distrazion la mole del medesimo solido, più verrà dal mezo detratto della intera sua gravità, e meno quando per compressione verrà condensato e ridotto sotto minor mole"(*Opere di Galileo* IV, pp. 65-66). La versione moderna del principio di Archimede è la seguente: "ogni corpo immerso in un fluido è sottoposto all'azione di una forza, contrari alla forza peso, che è numericamente uguale al peso del fluido spostato ed applicata al centro di gravità del corpo" (Boris M. Javorskij e Andrej A. Detlaf, *Manuale di fisica*, traduzione italiana. Mosca: Edizioni Mir, 1977, p. 261).

[265] "[P]esi assolutamente eguali, mossi con eguali velocità, sono di forze e di momenti eguali nel loro operare" (*Opere di Galileo* IV, p. 68).

[266] *Opere di Galileo* IV, p. 68. Questa relazione tra forza e velocità è in netto contrasto con quanto detto a proposito della medesima coppia di grandezze nelle *Mecaniche*, dove la velocità era inversamente proporzionale alla forza. Ancora una volta, è il contesto operativo a determinare il tipo di relazione: qui si ha un problema di tipo dinamico, dove il concetto principale è quello di *momento della velocità*, com'è anche suggerito dall'introduzione del termine *impeto*, quando nelle *Mecaniche* si affronta il tema dell'equilibrio, collegato con il *momento della gravità* o statico.

[267] *Opere di Galileo* IV, p. 69. Il riferimento alle medesime inclinazioni è importante perché è alla base della legge dell'equilibrio sulla bilancia: la distanza da considerare non è quella del punto di applicazione del peso rispetto al fulcro, ma la proiezione ortogonale del punto di applicazione sulla retta contenente la bilancia. Galileo la presenta in due suoi scritti, nel trattato *De motu antiquiora* (*Opere di Galileo* I, p. 297) e nelle *Mecaniche* (*Opere di Galileo* II, p. 181).

> semplice gravità, ma dalla velocità del moto, dalle diverse inclinazioni degli spazii sopra i quali si fa il moto, perché più fa impeto un grave descendente in uno spazio molto declive che in un meno. Ed in somma, qualunque si sia la cagione di tal virtù, ella tuttavia ritien nome di momento.[268]

Poiché il comportamento dei corpi solidi nell'acqua dipende dal rapporto tra le loro gravità in specie o densità, la loro velocità in acqua deve essere collegata in qualche modo con essa e Galileo, a questo scopo, rivede il principio dell'equilibrio in questo senso: "pesi assolutamente diseguali, alternativamente si contrappesano e si rendono di momenti eguali, ogni volta che le loro gravità con proporzione contraria rispondono alle velocità de' loro moti, cioè che quanto l'uno è men grave dell'altro, tanto sia in costituzione di muoversi più velocemente di quello."[269] Il concetto che media tra la causa del moto o peso/gravità e la velocità è ancora quello di momento. Per la legge della leva, per avere lo stesso momento, due corpi di peso diverso devono avere distanze dal centro di rotazione inversamente proporzionali oppure, in modo equivalente, devono coprire spostamenti e, di conseguenza velocità, inversamente proporzionali. In simboli, dati $p_1 \neq p_2$ e $d_1 \neq d_2$ si ha che $M_1 = M_2 \Leftrightarrow p \propto \frac{1}{d}$ e con $d \propto \alpha R \propto v$ e con $p \propto gr.ass$ si ottiene $gr.ass \propto \frac{1}{v}$ che coincide nella forma a quanto affermato per i moti in un mezzo fluido, a patto di sostituire la gravità assoluta con quella specifica. La relazione tra le variabili diventa $gr.spec \propto gr.ass \propto \frac{1}{v}$, anche se Galileo fa sempre riferimento alla relazione precedente.

Ancora una volta, si deve stabilire cosa siano la resistenza e la forza di cui si intende uguagliare i momenti. La prima è la resistenza dell'acqua a essere alzata, mentre la seconda è la gravità premente del solido che vuole avvicinarsi al centro della Terra.

---

[268] *Opere di Galileo* IV, p. 68.

[269] *Opere di Galileo* IV, p. 69.

Dal confronto tra queste due versioni della stessa relazione diventa evidente come Galileo proceda per concetti e non aritmeticamente. Egli, infatti, utilizza lo stesso modello esplicativo, cioè la proporzione tra gravità assoluta e velocità, forzando prima il ruolo del termine velocità, che in origine era posseduto da una distanza, poi quello del termine gravità, che nel caso del galleggiamento deve essere necessariamente una gravità specifica.[270] Egli conosce bene la relazione tra le due gravità e sa che sono legate alla mole o volume occupato dal grave. Se avesse proceduto aritmeticamente, avrebbe introdotto la proporzione tra gravità e moli o, cosa che qui interessa maggiormente, quella tra momenti e gravità, velocità e inclinazioni o angoli formati dal segmento di traiettoria rettilinea.

Nella *Scrittura attenente all'idraulica*, la velocità è la grandezza principale da studiare, perché per impedire l'esondazione delle acque dai canali si dovrebbe facilitarne lo scarico, che equivale a dire aumentare la velocità di efflusso. Essa si trova collegata alla pendenza, declività o dislivello complessivo rispetto alla verticale e all'inclinazione dei canali o angolo formato dal letto del fiume rispetto all'orizzonte. La pendenza, a sua volta, produce un accumulo o mole d'acqua che, premendo sull'acqua più a valle, diventa il motore e la causa dell'aumento della velocità. Come afferma la seconda proposizione relativa al comportamento delle acque correnti: "in questi medesimi canali [quelli di uguale pendenza ma con tragitti di lunghezza diversa] con egual verità si può dire, il moto esser più veloce nel meno inclinato, cioè nel più lungo, che nel più corto e più inclinato."[271] Il che si giustifica solo tenendo presente che il canale più lungo contiene più acqua. Per ammissione dello stesso Galileo, la velocità non è proporzionale alla pendenza soltanto, né è da considerarsi uniforme. Ciò nonostante, quando egli la calcola, la

[270] È lo stesso Galileo che ne parla in questi termini all'inizio del trattato: "quelli sopra nuotino che saranno men gravi in ispecie dell'acqua, e quelli vadano al fondo che in ispecie saranno più gravi" (*Opere di Galileo* IV, p. 70).

[271] *Opere di Galileo* VI, p. 630.

tratta sempre come se fosse una velocità media o uniforme.[272] Inoltre, è in questo lavoro che essa compare affiancata dall'impeto, in una situazione che ne mette in risalto l'aspetto dinamico a sua volta collegato a fenomeni di percossa. Il termine momento è impiegato una sola volta e in posizione dipendente a quella dell'impeto.[273] In aggiunta, quando si studia il comportamento dell'acqua in un tratto di fiume, si deve ricordare che la velocità iniziale della massa d'acqua non è nulla, ma ha un valore iniziale al quale si deve sommare il contributo dell'accelerazione. Il risultato finale, allora, non sarà proporzionale alla lunghezza del percorso, ma al crescere della velocità iniziale diminuisce la differenza delle velocità finali nonostante la diversa lunghezza del tragitto.[274] Se a parità di dislivello e di dimensioni della sezione trasversale del canale l'acqua tende ad assumere lo stesso valore allo sbocco, allora è come se ogni condotta con le medesime caratteristiche geometriche avesse una velocità propria o naturale, che non si può alterare, anche se si modifica la forma del percorso. In definitiva, la velocità e il suo impeto sono indipendenti dall'effettivo percorso, poiché il motore è dato dal dislivello rispetto alla verticale che separa l'inizio del moto o della sua osservazione, con la fine.

Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Galileo discute la possibilità di una Terra in moto secondo il sistema eliocentrico di Copernico, rispetto alla versione tradizionale del sistema geocentrico di Tolomeo, portando come evidenza a favore del primo la spiegazione delle maree, fenomeno generato dalla rotazione terrestre.[275] Per ottenere il risultato voluto, Galileo si doveva confrontare con il

---

[272] "lo spazio che si passerà nel canale lungo, nel tempo che si passa tutto il corto" (*Opere di Galileo* VI, p. 635).

[273] *Opere di Galileo* VI, p. 639. D'altra parte, le opere viste in precedenza che utilizzavano il concetto di momento erano tutte legate a sistemi di corpi in equilibrio. Qui, invece, i corpi sono contigui, cioè le parti che compongono l'acqua, oppure si può parlare di un unico corpo fluido. Il modello della leva è, dunque, inapplicabile.

[274] Si ricordi che si stanno comparando le velocità dell'acqua che scorre in due canali aventi lo stesso dislivello verticale complessivo, ma lunghezza effettiva del percorso doppia (*Opere di Galileo* VI, pp. 635-636).

[275] Copernico aveva previsto tre movimenti. Il primo era la rotazione della Terra attorno al proprio asse, completata in 24 ore. Il secondo era il moto annuo della Terra attorno al Sole, fermo al centro del sistema. Il

cosmo aristotelico e, da un punto di vista filosofico o cosmologico, in particolare con il *De coelo*. È quest'opera che sancisce la differenza ontologica e strutturale del mondo sublunare e del mondo sopra-lunare, che istituisce la centralità della Terra in quiete, che dimostra la sfericità dei cieli e la loro eternità. Il *Dialogo* deve quindi affrontare gli stessi temi per proporre una visione dell'universo dove la Terra è un pianeta come tutti gli altri. Nella *prima giornata* vengono affrontati gli argomenti pro e contro il moto della Terra, ma da un punto di vista generale, dell'ordine e delle relazioni tra sfere celesti e sfera terrestre. La rotazione diurna è il tema della *seconda giornata*, mentre la *terza* è dedicata al moto annuo. La *quarta giornata*, la più corta dell'opera, si concentra sul fenomeno delle maree, impossibile da spiegare con la fisica aristotelica, teorizzando come una Terra in movimento possa essere la ragione del flusso e riflusso delle acque del mare. Lo studio del moto terrestre introduce un duplice discorso, da un lato si ha il moto dei pianeti, dall'altro quello dei corpi in prossimità della Terra. La velocità ha un ruolo centrale soprattutto nelle prime due giornate, che saranno esaminate separatamente.

Durante la *prima giornata*, la spiegazione tradizionale del moto viene discussa in una prospettiva cosmologica. La posizione aristotelica, in cui il tipo di traiettoria è nella natura degli elementi semplici che formano il mondo, come pure determina il tipo di velocità propria dei mobili, è messa a diretto confronto con la proposta galileiana. In base ad essa, in un universo ordinato i moti celesti possono solo essere circolari,[276] perché il moto rettilineo serve solo a riportare "le materie per

terzo era il movimento rotatorio dell'asse terrestre, indispensabile per mantenere l'asse sempre parallelo a se stesso in ogni posizione dell'orbita.

[276] A questo proposito, è interessante riprendere la discussione sull'*inerzia* galileiana. Il *principio d'inerzia* di Newton dice che un corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché non subentra una forza a modificarlo. La proprietà di avere traiettoria rettilinea è, pertanto, uno degli elementi cruciali dell'enunciato. Galileo non credeva nell'esistenza di moti rettilinei e, in particolare, con velocità uniforme: "SALV. Stabilito dunque cotal principio [che il mondo ha tre dimensioni, è perfetto e necessariamente ordinato], si può immediatamente concludere che, se i corpi integrali del mondo devono essere di loro natura mobili, è impossibile che i movimenti loro siano retti, o altri che circolari: e la ragione è assai facile e manifesta. Imperocché quello che si muove di moto retto, muta luogo; e continuando di muoversi, si va più e più sempre allontanando dal termine ond'ei si partì e da tutti i luoghi per i quali successivamente ei va passando; e se tal moto naturalmente se gli conviene, dunque egli da principio non era

fabbricar l'opera" nel loro luogo naturale.[277] L'inclinazione al moto produce necessariamente un moto accelerato a partire dalla quiete iniziale, in cui la velocità cresce con continuità. Il suo motore è dato da questa tendenza naturale ad avvicinarsi al luogo "desiderato" che lo muove lungo il percorso più breve, cioè rettilineo. L'unico modo naturale per far acquisire una velocità a un corpo è quindi farlo muovere di moto retto. Se, poi, viene deviato in un moto circolare, conserva necessariamente la velocità "perpetuamente uniforme" poiché ruota attorno ad un centro.[278] Se questo è l'ordinamento celeste, la velocità nulla è propria di corpi in quiete; quella costante non nulla è propria dei moti circolari; quella variabile con continuità da zero a un certo valore limite è propria dei moti rettilinei o accelerati. La velocità non è soltanto una proprietà dei moti, anzi. In quest'opera, diventa la proprietà che denota la natura stessa del moto.

All'interno della *prima giornata*, si apre una parentesi per discuterne le proprietà, la principale delle quali è la continuità della sua variazione, insieme ai tre criteri per il confronto di velocità esaminati in precedenza, come sperimentato con la caduta dei gravi, cioè con i fenomeni terrestri. Il primo cambio di registro importante si ha con la terminologia, poiché una valutazione dell'intensità della velocità di un mobile si può avere solo in modo incrementale. Il *grado di velocità*, pertanto, diventa l'unico termine di riferimento quando si entra nel merito della

---

nel luogo suo naturale […]: adunque, come tali, è impossibile che abbiano da natura di mutar luogo, ed in conseguenza di muoversi di moto retto" (*Opere di Galileo* VII, p. 43). L'unico moto perfettamente uniforme possibile in natura è solo circolare: "SALV. […] Ma il moto per la linea orizontale, che non è declive né elevata, è moto circolare intorno al centro: adunque il moto circolare non s'acquisterà mai naturalmente senza il moto retto precedente, ma bene, acquistato che e' si sia, si continuerà egli perpetuamente con velocità uniforme" (*Opere di Galileo* VII, p. 53).

[277] *Opere di Galileo* VII, p. 44.

[278] "SALV. […] Questo [il moto circolare], essendo un movimento che fa che il mobile sempre si parte e sempre arriva al termine, può, primieramente, esso solo essere uniforme: imperocché l'accelerazione del moto si fa nel mobile quando e' va verso il termine dove egli ha inclinazione, ed il ritardamento accade per la ripugnanza ch'egli ha di partirsi ed allontanarsi dal medesimo termine; e perché nel moto circolare il mobile sempre si parte da termine naturale, e sempre si muove verso il medesimo, adunque in lui la ripugnanza e l'inclinazione son sempre di eguali forze; dalla quale egualità ne risulta una non ritardata né accelerata velocità, cioè l'uniformità del moto" (*Opere di Galileo* VII, p. 56).

spiegazione di come varia la velocità. Aumenta o diminuisce con continuità, nello stesso modo in cui a ciascun grado può essere associato un segmento, poiché la sua lunghezza rappresenta l'intensità della velocità. Il segmento di lunghezza nulla è un punto, mentre quello di lunghezza $v$ dà il grado di velocità acquisita dall'inizio del moto. C'è un valore di velocità per ciascun segmento, che può essere disegnato a partire da un punto senza staccare la punta della matita dal foglio. Com'è possibile aggiungere un altro punto alla fine di un segmento, così è possibile trovare un grado di velocità successivo al precedente. L'aumento di velocità produce, di contro, l'acquisto di un *impeto* che, sebbene sia assente nella parte cosmologica, diventa il secondo concetto-chiave del moto terrestre. Esso è prodotto dalla caduta del grave verso il centro della Terra e ha la proprietà di accumularsi all'interno del mobile, per essere eventualmente speso lungo una risalita o durante un rimbalzo. L'uso che ne fa Galileo in quest'opera, però, non è sufficiente a delimitarne con precisione il significato. Egli parla di impeto in contesti in cui il termine velocità è sufficiente a spiegare il fenomeno, ma lo introduce subito dopo aver parlato della percossa. La maggior parte delle volte, le sue caratteristiche ricalcano esattamente quelle della velocità.[279] In un unico caso è utilizzato in un contesto diverso, quando si riferisce alla capacità di agire del mobile alla fine di una caduta, grazie all'acquisto di "impeto e velocità".[280] Anche se talvolta i due termini compaiono affiancati, essi non sembrano essere utilizzati come sinonimi, con la stessa tecnica retorica che Galileo era solito utilizzare quando voleva parafrasare velocità con

[279] "SALV. […] l'acquisto dell'impeto sia mediante l'allontanamento dal termine donde il mobile si parte, e l'avvicinamento al centro dove tende il suo moto, arete voi difficoltà nel concedere che due mobili eguali, ancorché scendenti per diverse linee, senza veruno impedimento, facciano acquisto d'impeti eguali, tutta volta che l'avvicinamento al centro sia eguale?" (*Opere di Galileo* VII, p. 47). "SALV. […] domando se voi concedereste che l'impeto della scendente per il piano [inclinato] CA, giunta che la fusse al termine A, potesse essere eguale all'impeto acquistato dall'altra nel punto B, doppo la scesa per la perpendicolare CB.
SAGR. Io credo risolutamente di sì, perché in effetto amendue si sono avvicinate al centro egualmente, e, per quello che pur ora ho conceduto, gl'impeti loro sarebbero egualmente bastanti a ricondur loro stesse alla medesima altezza" (*Opere di Galileo* VII, p. 47). "[I]mpeto, cioè tal grado di velocità" (*Opere di Galileo* VII, p. 48); "l'impeto, cioè il grado di velocità" (*Opere di Galileo* VII, p. 52).

[280] *Opere di Galileo* VII, p. 46.

prestezza o celerità.[281] L'impeto è, pertanto, un termine con un'estensione di significato più ampia del termine velocità, anche se non ancora del tutto delimitata. Velocità, grado di velocità e impeto sono tre concetti diversi che non devono essere confusi. La velocità è una proprietà del moto che si precisa attraverso l'esame dello spazio percorso e del tempo di percorrenza; il grado di velocità è la quantità di velocità che viene aggiunta o tolta al mobile durante l'intervallo temporale in cui avviene il moto, in conseguenza alle condizioni di moto; l'impeto è la capacità del mobile di accumulare velocità durante una discesa da spendere per una risalita ed ha una natura incrementale. Se la velocità è una proprietà di un primo moto, l'impeto sembra essere la capacità della velocità di poter essere spesa per un altro moto successivo, oppure la proprietà del mobile a continuare il moto su traiettorie diverse, grazie al fatto di possedere un certo grado di velocità. Questo può avvenire, però, solo nel rispetto di un dato limite. Il mobile, infatti, non potrà mai trovarsi a spendere l'impeto accumulato sino a portare il suo centro di gravità a un'altezza superiore a quella iniziale. Se un moto di caduta fa accumulare impeto per l'avvicinarsi del grave al centro della Terra, l'eventuale moto di risalita successivo, che avviene a spese dell'impeto posseduto, non porterà mai il grave più lontano dal centro della Terra, rispetto al punto in cui il primo moto era iniziato. La nozione di impeto suggerisce qui una tendenza a muoversi verso l'alto, quando la gravezza del mobile è una tendenza naturale a muoversi verso il basso. Come la gravità è il motore della caduta, l'impeto è il motore interno della risalita,[282] quando la velocità è semplicemente un attributo del moto.

Nella *seconda giornata* dei *Discorsi*, la difesa del moto diurno terrestre comporta la trasformazione dei moti celesti osservati da un pianeta pensato immobile, in moti relativi a una Terra a sua volta in moto attorno al proprio asse. La

[281] "SALV. […] l'impeto acquistato in qualsivoglia luogo del suo moto sia tanto che basterebbe a ricondurla [la palla] a quell'altezza donde si partì" (*Opere di Galileo* VII, p. 46).

[282] "SALV. […] l'impeto interno di un grave cadente" (*Opere di Galileo* VII, p. 262). "SALV. […] Bisognerebbe che il globo terrestre incontrasse qualche intoppo che l'arrestasse, che vi assicuro che allora vi accorgereste dell'impeto che in voi risiede, mentre da esso sareste scagliato verso le stelle" (*Opere di Galileo* VII, p. 280).

consapevolezza che lo stato di moto dell'osservatore possa modificare la descrizione dello stato di moto dell'oggetto osservato era un dato acquisito già dalla tradizione precedente.[283] Le velocità che si prendono in considerazione qui sono quelle degli oggetti animati o inanimati che si muovono senza essere a contatto con il suolo, oppure quelle della rotazione terrestre e dei cieli. Nel tentativo di spiegare come mai, con una Terra in rotazione diurna ad altissima velocità, nuvole e uccelli in volo non siano lasciati indietro, oppure oggetti inanimati appoggiati al suolo non vengano scagliati lontano con grandissima forza, Galileo ripropone l'uso dell'impeto in un contesto simile a quello della percossa,[284] talvolta affiancandolo al

[283] "Sia dato il segmento A che si muove lungo il segmento B. […] Se i due segmenti si muovono in direzioni opposte, essi si separeranno più velocemente; se invece uno rimane immobile mentre l'altro si muove lungo di esso, si separeranno più lentamente, a condizione che la velocità del segmento che si sposta rimanga la stessa. Che sia la retta finita a muoversi lungo la retta infinita, o sia la retta infinita a muoversi lungo quella finita, il risultato è identico, poiché quando una delle due si muove lungo l'altra, anche questa si allontana dalla prima, e non c'è differenza, quali che siano quella che si muove e quella che rimane immobile, salvo che le due linee si separeranno più velocemente nel caso in cui si muovano entrambe" (*Il cielo* 272a22-272b7, pp. 148-151). "[…] affermiamo che non è possibile che sia in movimento ciò che è senza parti, eccetto che in senso accidentale, come ad esempio quando è in movimento il corpo o la grandezza cui esso appartiene, allo stesso modo in cui diciamo che può essere in movimento un corpo che è nella nave, come effetto del movimento della nave, oppure una parte che viene mossa per il movimento del tutto. […] Le parti hanno infatti differenti movimenti, come quelli che sono per se stessi e quelli che invece lo sono in virtù del movimento dell'intero" (*Fisica* VI, 240b8-20; pp. 276-277).

[284] "SALV. […] quando le parti di essa ruota rapidamente girata non fossero più che saldamente conteste, si dissiperebbero tutte, né per molto che tenacemente fussero sopra la sua esterior superficie attaccati sassi o altre materie gravi, potrebbero resistere all'impeto, che con gran violenza le scaglierebbe in diverse parti lontane dalla ruota, ed in conseguenza dal suo centro. Quando dunque la Terra si muovesse con tanto e tanto maggior velocità, qual gravità, […] e gli uomini e le fiere, che niente sono attaccati alla Terra, come resisterebbero a un tanto impeto? (*Opere di Galileo* VII, p. 158). "SALV. […] quando ci fosse un pozzo che passasse oltre al centro, non però una zolla di terra si muoverebbe oltre a quello, se non in quanto trasportata dall'impeto lo trapassasse" (*Opere di Galileo* VII, p. 162). "SALV. […] un'aquila portata dall'impeto del vento" (*Opere di Galileo* VII, p. 169). "SALV. […] se gli fusse dato impeto verso qualche parte" (*Opere di Galileo* VII, p. 173). "SIMPL. […] il mobile impotente a romper l'aria col suo impeto solo" (*Opere di Galileo* VII, p. 174). "SIMP. […] colui che lo lascia cadere, non l'ha a scagliare né dargli impeto col braccio" (*Opere di Galileo* VII, p. 176). "SALV. […] spinta dal proprio impeto" (*Opere di Galileo* VII, p. 177). "SAGR. […] Ma errate secondariamente, mentre voleste riconoscer la facultà del tener dietro la palla al moto della Terra dall'impeto del fuoco" (*Opere di Galileo* VII, p. 203). Si veda anche la successiva nota 279. "SAGR. […] veggiamo i sassi e gli altri corpi gravi restar contumaci contro all'impeto dell'aria" (*Opere di Galileo* VII, p. 210). "SALV. […] mostrar ancor più sensatamente come sia vero che i corpi gravi, girati con velocità intorno a un centro stabile, acquistano impeto di muoversi allontanandosi da quel centro, quando anco e' sieno in stato di aver propensione di andarvi naturalmente. […] la vertigine conferisce al mobile impeto verso la circonferenza, quando il moto sia veloce" (*Opere di Galileo* VII, p. 216).

termine aristotelico di *impulso* con funzione di sinonimo.[285] Il problema cruciale da risolvere è quello della *conservazione del moto* rotatorio terrestre da parte di quei mobili che non sono a contatto, diretto o mediato, con la Terra. La soluzione di Galileo consiste nell'attribuire all'impeto la capacità di trasferirsi da un corpo a un altro per contatto: "SALV. Talché quell'impeto e quella mobilità, qualunque se ne sia la causa, più lungamente si conserva nelle materie gravi che nelle leggieri."[286] La spiegazione tradizionale è simile, anche se attribuisce al mezzo la capacità di agire sul mobile: "SIMP. […] l'aria, per non esser né grave né leggiera nella sua regione, è disposta a ricevere facilissimamente ogni impulso ed a conservarlo ancora."[287] Grazie a questa capacità l'impeto diventa il motore che produce un moto violento che, si ricordi, deve essere per sua natura rettilineo sia per gli aristotelici,[288] sia per Galileo.[289]

Di contro all'importanza e frequenza del concetto di impeto, quello di *momento* compare solo tre volte: la prima in un esempio che coinvolge il

[285] "SALV. E quando da qualche impeto violentemente impressole ella fusse spinta, quale e quanto sarebbe il suo moto? SIMP. Il moto andrebbe sempre languendo e ritardandosi, per esser contro a natura, e sarebbe più lungo o più breve secondo il maggiore o minore impulso e secondo la maggiore o minore acclività" (*Opere di Galileo* VII, p. 172). "SALV. Adunque una nave che vadia movendosi per la bonaccia del mare […] disposta […] a muoversi, con l'impulso concepito una volta" (*Opere di Galileo* VII, p. 174).

[286] *Opere di Galileo* VII, pp. 177-178. Si veda anche la seguente citazione: "SALV. […] che importa che quell'impeto sia conferito alla palla più dal vostro braccio che dal cavallo?" (*Opere di Galileo* VII, p. 182).

[287] *Opere di Galileo* VII, p. 178. Il fuoco è capace di fornire un impulso (*Opere di Galileo* VII, p. 201, p. 202).

[288] "SIMP. Secondo me il moto concepito nell'uscir della cocca non può esser se non per linea retta; anzi pur è egli necessariamente per linea retta, intendendo del puro impeto avventizio. […] L'impeto impresso dico senz'altro ch'è per linea retta" (*Opere di Galileo* VII, p. 218). "SALV. […] quando voi tirate una palla con l'archibuso, verso che parte acquist'ella impeto di andare?
SIMP. Acquista impeto di andare per quella linea retta che segue la dirittura della canna" (*Opere di Galileo* VII, p. 218).

[289] "SALV. […] il vostro concetto reale si spiega con queste parole: cioè che il proietto acquista impeto di muoversi per la tangente l'arco descritto dal moto del proiciente nel punto della separazione di esso proietto dal proiciente" (*Opere di Galileo* VII, p. 219). "SALV. […] il proietto che dal moto del proiciente riceve impeto di muoversi per la retta tangente, e che vi andrebbe ancora se il proprio peso no lo tirasse in giù" (*Opere di Galileo* VII, p. 221).

sollevamento di un grave;[290] la seconda in un contesto dinamico con un significato similare a quello di grado di velocità;[291] la terza ancora in una situazione di tipo statico collegata al bilanciamento delle parti di un corpo attorno al proprio centro di gravità.[292] In altre sue occorrenze, che non sono state prese in considerazione in dettaglio, il suo significato è riconducibile a quello di intervallo temporale. È questa, forse, l'origine del suo significato dinamico. Altre volte, infatti, l'esame dell'andamento temporale di un fenomeno aveva prodotto di conseguenza un esame dell'andamento della velocità, a parità di spazi percorsi.

### *Par. 6 L'accelerazione nell'accezione galileiana e la quiete.*

Un altro concetto importante per lo studio della teoria del moto è quello di *accelerazione*. Da un punto di vista odierno, l'accelerazione di un corpo in movimento è il rapporto tra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui essa ha luogo. Fornisce, pertanto, una misura di come varia la velocità con il passare del tempo. Se l'intervallo è abbastanza esteso, si parla di *accelerazione media* che si considera di valore costante durante l'intervallo. Se, invece, l'intervallo è un infinitesimo, cioè estremamente piccolo, si parla di *accelerazione istantanea*. Ad esempio, il moto di caduta dei gravi è un moto con accelerazione costante per il quale le due precedenti tipologie si trovano a coincidere. Per Galileo, l'accelerazione è un'altra proprietà del moto che egli non definisce con precisione, né in modo

[290] "SALV. […] come può il romano, col suo peso di due libber sole, resistere al peso di una balla di lana o di seta, che sarà ottocento o mille, anzi pure potrà egli vincere co 'l suo momento la balla e sollevarla?" (*Opere di Galileo* VII, p. 240). "SAGR. Ma credete voi che la velocità ristori per l'appunto la gravità? cioè che tanto sia il momento e la forza di un mobile, verbigrazia, di quattro libbre di peso, quanto quella di un di cento, qualunque volta quello avesse cento gradi di velocità e questo quattro gradi soltanto?" (*Opere di Galileo* VII, p. 241).

[291] "SALV. […] Ma perché l'accelerazione si fa continuamente di momento in momento, e non intercisamente di parte quanta di tempo in parte quanta, essendo posto il termine A come momento minimo di velocità" (*Opere di Galileo* VII, p. 255). Si noti come le prime due occorrenze della parola *momento* si riferiscono al tempo, mentre la terza è sinonimo di *grado*.

[292] "SALV. […] credo […] che esse materie, cospirando naturalmente all'unione, si formino un comun centro, che è quello intorno al quale consistono parti di eguali momenti" (*Opere di Galileo* VII, p. 270).

discorsivo, né matematicamente. È comunque una parola che si collega in modo esclusivo alla variazione o *grado* di velocità.[293] Ciò nonostante, se ne differenzia per la generalità poiché il termine accelerazione compare quando Galileo vuole riferirsi al generale andamento della variazione della velocità, senza fare riferimento in modo preciso a un dato incremento o decremento. Questa grandezza o attributo del moto si ha in due precise occasioni: "l'accelerazione del moto si fa nel mobile quando e' va verso il termine dove egli ha inclinazione, ed il ritardamento accade per la ripugnanza ch'egli ha di partirsi ed allontanarsi dal medesimo termine."[294] Resta, comunque, un termine difficile da precisare ulteriormente e che talvolta comporta alcuni errori, come quando si legge che "[l]'Accademico […] dimostra come l'accelerazione del moto retto de i gravi si fa secondo i numeri impari *ab unitate*"[295] che sappiamo corrispondere al Corollario I del Teorema II del *De motu naturaliter accelerato* dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* che si riferisce agli spazi percorsi. I gradi di velocità, infatti, seguono la successione dei numeri semplici *ab unitate*. Accelerazione o ritardamento avvengono sempre "continuamente" perché la velocità è una grandezza continua, i cui gradi aumentano o diminuiscono a loro volta con continuità. Questo conferisce al moto una tendenza a conservarsi e, pertanto, a trasmettersi a tutti i gravi a contatto tra loro o nelle loro immediate vicinanze.

---

[293] "SALV. […] Dall'aver questa inclinazione ne nasce necessariamente che egli nel suo moto si anderà continuamente accelerando"; "SALV. […] Ora, questa accelerazion di moto non si farà se non quando il mobile nel muoversi acquista [grado di velocità]" (*Opere di Galileo* VII, p. 44). "SAGR. […] quella palla d'artiglieria […] si sia nel suo moto trovata congiunta con sì picciol grado di velocità, che, se avesse continuato di muoversi con quello senza più accelerarsi, non l'avrebbe passata in tutto il giorno" (*Opere di Galileo* VII, p. 46). "SALV. […] quando ella continuasse di muoversi con questo medesimo grado uniformemente, cioè senza accelerarsi o ritardarsi" (*Opere di Galileo* VII, p. 52). Ma la prova più stringente a tal riguardo è nelle citazioni seguenti: "SALV. […] ma converrebbe sapere secondo qual proporzione si faccia tal accelerazione" (*Opere di Galileo* VII, p. 189); "SALV. […] avete mai scherzato intorno all'investigazione di questa proporzione dell'accelerazione del moto de' gravi descendenti?" (*Opere di Galileo* VII, p. 190).

[294] *Opere di Galileo* VII, p. 56.

[295] *Opere di Galileo* VII, p. 248.

L'analisi delle caratteristiche del moto dei gravi non sarebbe, però, completa senza uno studio dello stato di quiete del mobile, che può essere o lo stadio iniziale, oppure lo stadio finale di un movimento. Non le viene dato molto rilievo anche perché i moti celesti sono perpetuamente uniformi e quelli terrestri avvengono su una Terra in rotazione. Nel mondo sublunare tolemaico la quiete aveva un ruolo fondamentale, poiché i corpi erano destinati all'immobilità nel loro luogo naturale su una Terra immobile al centro del cosmo. Nell'universo copernicano, invece, anche i gravi in quiete sono in realtà in movimento, perché partecipano dello stato di moto della Terra in tripla rotazione. La quiete, pertanto, è chiamata in causa o come stato iniziale di un moto, oppure come situazione limite della variazione della velocità. Ancora una volta, la strategia seguita da Galileo per delimitare i possibili significati della parola consiste nel descriverne le proprietà, più che fornirne una definizione in senso matematico. Nel caso di un moto che parta dalla quiete, quest'ultima è "il grado di infinita tardità"[296] perché il mobile "passa, scendendo, per tutti i gradi di tardità precedenti a qualsivoglia grado di velocità."[297] In un diagramma triangolare dove un cateto indica il tempo, mentre l'altro indica la velocità, la quiete è rappresentata dal punto che è vertice dell'angolo formato dall'ipotenusa e dal cateto dei tempi.[298] L'immagine geometrica del segmento parallelo alle velocità e di lunghezza nulla sostiene l'intuizione del concetto d'inizio moto, senza spiegare come possa avvenire che dall'essere fermo il grave diventi improvvisamente mobile.

### *Par. 7 Il concetto di velocità.*

A questo punto, prima di riprendere i contenuti dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* per risolvere i quesiti posti nel primo capitolo, si può riepilogare quanto visto finora in una prospettiva diacronica. Si era deciso di

[296] *Opere di Galileo* VII, p. 43.

[297] *Opere di Galileo* VII, p. 51, p. 52

[298] *Opere di Galileo* VII, p. 255.

ricostruire il significato di *velocità* senza perdere di vista il suo contesto d'uso e, per meglio precisarne il ruolo all'interno dell'opera galileiana, si era stabilito di analizzare anche gli altri concetti che si trovavano ad essa correlati.

Per quanto riguarda l'evoluzione del concetto di velocità, dunque, si possono rintracciare due generatrici. La prima è di matrice meccanica o statica di origine archimedea; la seconda è dinamica di ascendenza aristotelica. Come si è visto, dalla spiegazione tradizionale del movimento locale la velocità ha un ruolo marginale poiché l'attenzione è rivolta soltanto al tempo, allo spazio, al luogo e alla traiettoria del mobile. Il termine, quindi, aveva mantenuto l'accezione comune senza bisogno di una differenziazione. L'unico aspetto degno di nota era la possibilità di una sua stima qualitativa indiretta che permettesse di confrontare le qualità di più moti tra loro. A questo stadio iniziale segue una prima fase di sviluppo nel campo degli studi sull'equilibrio. Sia nelle *Mecaniche*, sia nel *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua*, si ha una sua valutazione quantitativa, possibile grazie alla misura delle distanze dei pesi dal centro di rotazione della bilancia e all'applicazione dei criteri aristotelici di confronto delle velocità. Per ottenere un equilibrio su una bilancia a bracci disuguali, si devono immaginare i due corpi, diversi, in movimento contemporaneo per un attimo. Questa condizione permette di far coincidere quanto è noto degli spazi percorsi, con quanto è ignoto delle corrispondenti velocità. Di conseguenza, la velocità si matematizza ma in stretta simbiosi con la nozione di spazio, ereditandone le relazioni con gli altri elementi in gioco. La velocità, infatti, è direttamente proporzionale alla distanza orizzontale dal centro della rotazione e inversamente al peso che pende da un braccio della bilancia o alla forza applicata alla leva.[299] Solo a proposito del problema dei galleggianti, trattato nel *Discorso* ricordato poc'anzi, si ha che la velocità è in relazione crescente con il momento della gravità e con la forza. È proprio qui che viene sancita la dipendenza del momento dalla velocità.

[299] A questo riferimento si potrebbe far risalire l'origine cognitiva della proporzionalità tra velocità e spazio di caduta, che Galileo riteneva valida anche per la caduta dei gravi.

Seguendo le tracce del significato di velocità e ripercorrendo sommariamente il secondo itinerario, che va dalla *Scrittura attenente all'idraulica* al *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* fino ai *Discorsi intorno a due nuove scienze*, si può vedere come il termine si precisa grazie alle proprietà che emergono in situazioni dinamiche. Galileo prende in esame come varia la velocità in diversi contesti, quello dei fluidi in movimento o quello dei gravi in caduta. Una prima novità è che essa dipende dalla pendenza del percorso effettuato dal mobile rispetto all'orizzonte e dalle condizioni iniziali del moto, sia esso violento o naturale. La dipendenza dall'inclinazione della traiettoria è, per i fluidi, prodotta dalla quantità di materia e, quindi, dalla gravezza del corpo; per i solidi, è invece indipendente da questi ultimi.

Il percorso di geometrizzazione del moto dei gravi passa attraverso due momenti fondamentali. Il primo è la dimostrazione che due corpi composti dalla stessa materia, o gravità in specie, ma di diverso peso, o mole, toccano il suolo con la stessa velocità a parità di condizioni iniziali.[300] Il secondo è la convinzione che anche due gravi con diversa mole e diversa gravità in specie abbiano lo stesso

[300] "SALV. Ma, senz'altre esperienze, con breve e concludente dimostrazione possiamo chiaramente provare, non esser vero che un mobile più grave si muova più velocemente d'un altro men grave, intendendo di mobili dell'istessa materia, ed in somma di quelli de i quali parla Aristotele. Però ditemi, Sig. Simplicio, se voi ammettete che di ciascheduno corpo grave cadente sia una da natura determinata velocità, sì che accrescergliela o diminuirgliela non si possa se non con usargli violenza o opporgli quanlche impedimento.
SIMP. Non si può dubitare che l'istesso mobile nell'istesso mezzo abbia una statuita e da natura determinata velocità, la quale non se gli possa accrescere se non con nuovo impeto conferitogli, o diminuirgliela salvo che con qualche impedimento che lo ritardi.
SALV. Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità de i quali fussero ineguali, è manifesto che se noi congiungessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velo citato dall'altro più veloce. […] Ma se questo è, ed è insieme vero che una pietra grande si muova, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque, congiungendole amendue insieme, il composto di loro si muoverà con velocità minore di otto gradi: ma le due pietre, congiunte insieme, fanno una pietra maggiore che quella prima, che si moveva con otto gradi di velocità: adunque questa maggior si muove men velocemente che la minore; che è contro alla vostra supposizione. Vedete dunque come dal suppor che 'l mobile più grave si muova più velocemente del men grave, io vi concludo, il più grave muoversi men velocemente" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 107-108). "SALV. […] Concludiamo per ciò, che i mobili grandi e i piccoli ancora, essendo della medesima gravità in spezie, si muovono con pari velocità" (*Opere di Galileo* VIII, p. 109).

comportamento dei precedenti.[301] Questa parte, però, non può essere dimostrata per assurdo o deduttivamente. Galileo può solo inferirne la validità da quanto osservato empiricamente e verificato sperimentalmente con le cadute dei gravi in mezzi fluidi o lungo piani inclinati. Egli ne è consapevole quando scrive il *De motu locali* e il testo dell'assioma del moto naturalmente accelerato ne è la prova: l'invarianza della velocità al suolo è valida per un medesimo mobile in caduta libera lungo diversi piani inclinati, senza nominare quanto accade a diversi mobili lungo lo stesso piano inclinato. D'altra parte, la descrizione matematica delle relazioni tra tempi, spazi e velocità è data per mezzo di uguaglianze di rapporti che non sarebbero diversi, anche se il valore della velocità al suolo fosse sì invariante, ma solo per ciascun grave. Quando, cioè, gravi diversi avessero velocità finali diverse tra loro ma mantenessero il medesimo rapporto tra i valori trovati lungo due piani inclinati percorsi da ciascuno.

Nella *prima giornata* dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo vuole risolvere proprio la questione di come il peso non possa influire sulla velocità di caduta dei gravi. La introduce dopo aver spiegato come elementi di materia abbiano la capacità di aggregarsi proprio per la presenza e commistione di piccolissimi spazi vuoti. I corpi così composti devono poi muoversi nello spazio. Di conseguenza, diventa naturale chiedersi come la presenza di corpi più o meno gravi possa essere in relazione con la loro capacità di acquisire velocità durante una discesa. La risposta di Galileo è che la loro gravità non ha nulla a che vedere con la velocità di caduta o, per essere più precisi, con il grado di velocità che essi acquistano, mentre fornisce loro solo la tendenza a cadere, quando non siano presenti impedimenti contrari. La gravità, quindi, è la causa della messa in moto di un corpo, anche se è priva di relazione con il valore della velocità. Pertanto, i gravi cadono tutti con la stessa velocità, a parità di altezza di caduta. Se si osserva una

301 Anche se non lo poteva dimostrare rigorosamente, Galileo era certo che la velocità di caduta di tutti i gravi fosse la stessa: "SALV. […] palle di una, di dieci, di cento, di mille libbre, tutte misureranno le medesime cento braccia nell'istesso tempo" (*Opere di Galileo* VII, p. 249). Il brano precedente asserisce l'indipendenza della caduta dalla mole, ma ancora manca la dipendenza diretta da un'accelerazione comune a tutti i gravi.

differenza nel momento in cui due mobili toccano il suolo, essa dipende soltanto dalla resistenza dell'aria.[302] Nello stesso tempo, Galileo instaura le relazioni tra i termini tecnici principali che sono quelli di velocità, grado di velocità, impeto e accelerazione. La parola *momento*, invece, compare pochissime volte di cui una è particolarmente interessante, poiché affianca il grado di velocità in modo sinonimico.[303] La velocità è studiata in relazione con gravità, forze e resistenze solo per dimostrarne l'indipendenza e il quadro complessivo delle relazioni tra le grandezze di riferimento è sostanzialmente lo stesso che compare nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Riepilogando, la *velocità* è un effetto, che è prodotto o causato dalla tendenza ad avvicinarsi al centro della Terra (la *gravità* del mobile) o da un'azione violenta (l'*impeto* iniziale). Per un moto che parte dalla quiete, invece, l'aumentare della velocità avviene in concomitanza dell'aumento dell'*impeto* che, in questo caso, indica anche la causa che nell'impatto con il suolo produce un effetto visibile. Velocità e impeto, quindi, hanno lo stesso andamento, aumentano e diminuiscono insieme, dato che sono legati dalla relazione di causa ed effetto. Che

---

[302] "SALV. […] vi dirò il discorso fattoci attorno, e quello che ne ho in ultimo ritratto. Dopo essermi certificato, non esser vero che il medesimo mobile in mezzi di diversa resistenza osservi nella velocità la proporzione delle cedenze di essi mezzi; né meno che nel medesimo mezzo mobili di diversa gravità ritengano nelle velocità loro la proporzione di esse gravità (intendendo anco delle gravità diverse in specie); cominciai a comporre insieme amendue questi accidenti, avvertendo quello che accadesse de i mobili differenti di gravità posti in mezzi di diverse resistenze: e m'accorsi, le disegualità delle velocità trovarsi tuttavia maggiori ne i mezzi più resistenti che ne i più cedenti, e ciò con diversità tali, che di due mobili che scendendo per aria pochissimo differiranno in velocità di moto, nell'acqua l'uno si moverà dieci volte più veloce dell'altro; anzi che tale che nell'aria velocemente descende, nell'acqua non solo non scenderà, ma resterà del tutto privo di moto, e, quel che è più, si moverà all'in su" (*Opere di Galileo* VIII, p. 113). "SALV. […] Veduto come la differenza di velocità, ne i mobili di gravità diverse, si trova esser sommariamente maggiore ne i mezzi più e più resistenti; […] cascai in opinione che se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie descenderebbero con eguali velocità. […] osservando ciò che accaggia ne i mezzi più sottili e meno resistenti, in comparazione di quello che si vede accadere ne gli altri manco sottili e più resistenti: ché se noi troveremo, in fatto, i mobili differenti di gravità meno e meno differir di velocità secondo che in mezzi più e più cedenti si troveranno e che finalmente, ancor che estremamente diseguali di peso, nel mezzo più d'ogni altro più tenue, se ben non voto, piccolissima si scorga e quasi inosservabile la diversità della velocità, parmi che ben potremo con molto probabil coniettura credere che nel vacuo sarebbero le velocità loro del tutto eguali" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 116-117). Per i dettagli dell'argomentazione, si vedano anche le pagine successive (*Opere di Galileo* VIII, p. 117-127).

[303] In un'accezione che si definisce come *momento della gravità*: "SALV. […] in tempi eguali si fanno aggiunte eguali di nuovi moment e gradi di velocità" (*Opere di Galileo* VIII, p. 118).

l'impeto sia una grandezza puramente cinetica è anche suggerito dalla sua indipendenza dell'angolo di inclinazione del piano su cui il grave scende.

Nella *seconda giornata*, invece, il tema principale è spiegare il comportamento dei corpi, geometricamente ben definiti, quando sono sollecitati da trazione, compressione, torsione e sforzo di taglio. Qui Galileo utilizza il modello archimedeo dei pesi su una bilancia e, di conseguenza, la legge della leva. La terminologia utilizzata è, pertanto, completamente diversa dalla precedente poiché l'azione di pesi, forze e resistenze è mediata dal concetto di momento che, senza dubbio, è sempre il *momento della gravità*. È una grandezza che dipende e muta al variare dell'angolo d'inclinazione del piano della traiettoria. Il termine velocità, d'altra parte, non compare mai. La prima nuova scienza della resistenza dei materiali alla rottura riepiloga i risultati delle due diverse tradizioni, quella statica e quella dinamica. Galileo le fa convergere nelle successive due, dedicate alla seconda nuova scienza del moto locale.

Nel *De motu locali*, vengono confermati e precisati i risultati dell'analisi del movimento visti in precedenza. In particolare, è il concetto di accelerazione che si delimita con maggior chiarezza. Galileo parte dal presupposto che la velocità aumenta o diminuisce con continuità tra due suoi valori, situazione in cui utilizza la nozione di *grado di velocità*. Ciò nonostante, l'unico modo per poterne parlare è quello di utilizzarne le quantità discrete o incrementi, talvolta anche molto piccoli. Il grado di velocità fornisce sempre una quantità precisa di riferimento, per questo serve un diverso termine per parlare dell'insieme dei gradi acquisiti da un mobile, cioè quello di *accelerazione*, com'è suggerito anche dalla definizione di moto uniformemente accelerato.[304] Questa grandezza è sinonimo di variazione della velocità e non viene mai coinvolta in proporzioni o rapporti. È un termine che comincia a delinearsi tecnicamente con un uso molto controllato e preciso, ma che non è ancora sufficientemente maturo per diventare un rapporto tra una variazione

[304] Si veda la nota 52 a p. 15.

di velocità e l'intervallo temporale in cui essa si verifica. Analogamente a quanto visto per la velocità, anche l'accelerazione è un effetto di quello che Galileo chiama momento, forma abbreviata di *momento della velocità*. D'altra parte, è la tendenza naturale propria di ogni grave la causa del moto di caduta libera che era sempre stata indicata con il termine momento della gravità o, anche solamente, momento. Da un punto di vista concettuale, ha una sua giustificazione pensare che i due termini omonimi possano coincidere, poiché il momento della gravità, che causa la caduta di un grave, è anche la causa dell'aumentare dei momenti della velocità del mobile. Sarebbe un po' come dire che il *grave* e il *mobile* coinvolti nello stesso moto sono lo stesso *corpo*. Per sancire ontologicamente questa sovrapposizione di significati, però, era necessaria una dimostrazione: il lemma presente nell'aggiunta del Viviani.[305] Com'è già stato detto, il piano inclinato con i due pesi che si fanno equilibrio lungo la verticale e lungo il piano stesso costituisce un contesto in cui i due diversi momenti vengono posti in relazione fisica. Questo, però, non risolve il problema di ordine teorico della coincidenza tra i due significati, perché manca la prova che la quantità dell'uno coincide sempre con la quantità dell'altro.

### *Par. 8 Torricelli dimostra la coincidenza tra il momento statico e il momento dinamico.*

Una prova della bontà della precedente analisi e interpretazione del lavoro di Galileo è l'approccio di Torricelli al problema. L'obiettivo iniziale del suo *De motu gravium naturaliter descendentium* è di colmare la lacuna lasciata dal maestro, ricavando l'assioma galileiano del moto uniformemente accelerato come teorema di una proposizione dimostrata nelle *Mecaniche*, ma già nota dal *De motu antiquiora* di Galileo.[306] Torricelli non trova la dimostrazione e sente la necessità di provvedere, pertanto, la prima parte del suo percorso si occupa di questo. La scelta di operare

[305] A tal proposito, si veda l'enunciato e l'analisi del lemma a p. 29 e sgg.

[306] "Momenta gravium aequalium super planis inequaliter inclinatis, esse inter se ut sunt perpendicula partium aequalium eorumdem planorum" (*Opere di Torricelli* II, p. 104).

dall'interno della scienza meccanica è, di conseguenza, anche una scelta lessicale e concettuale dove compare solo il termine momento nell'accezione statica di momento della gravità. Alla fine del primo percorso dimostrativo, Torricelli ottiene due espressioni cruciali per esprimere quantitativamente il momento. La prima stabilisce che i momenti, di gravi uguali su piani inclinati della stessa lunghezza e di diversa inclinazione, sono direttamente proporzionali alle altezze di detti piani. La seconda, invece, dimostra la proporzionalità diretta dei momenti con il seno dell'angolo di elevazione. In questo modo, si esplicita il legame geometrico tra altezze ed elevazioni dei piani inclinati che in Galileo era rimasto celato. Così facendo, inoltre, si comincia a vedere come una stessa grandezza può sia dipendere dall'altezza della traiettoria, sia dal suo angolo. Si ricordi a tal proposito che Galileo aveva stabilito che l'impeto o momento della velocità dipendeva solo dall'altezza della caduta o del piano della discesa, mentre il momento della gravità variava al variare dell'angolo d'inclinazione. Da qui, l'evidente incoerenza nell'attribuire lo stesso significato a due grandezze che avevano relazioni che apparivano inconciliabili tra loro. In questo modo, invece, si ha la possibilità di una soluzione. La ragione per la quale è stato possibile scoprire questo legame geometrico profondo è che Torricelli ricava nuovi teoremi per misurare con segmenti i rapporti dei momenti di uno stesso grave. La geometrizzazione della grandezza chiamata momento è così compiuta.

La seconda parte del percorso di Torricelli intende dimostrare il Teorema VI di Galileo a partire dalla precedente impostazione, vuole cioè ricavare i tempi di discesa lungo piani inclinati concorrenti. La strategia sembra chiara. Se si vuole dedurre l'assioma galileiano delle velocità, si deve ragionare in termini di tempi e di spazi della discesa. Questa fase centrale si preoccupa proprio del passaggio dall'informazione legata al momento a quella legata al tempo.[307]

[307] Per i dettagli, si veda il Capitolo 1, pp. 35-40.

La terza e ultima fase del percorso deduttivo torricelliano ha l'obiettivo di ricavare la relazione delle velocità. La sua dimostrazione mostra immediatamente un cambio repentino del registro linguistico. Dato che l'enunciato parla dei gradi di velocità, Torricelli utilizza sempre il termine impeto. Lo utilizza nel senso di momento poiché, quando nel corso della dimostrazione richiama un teorema precedente, la parola impeto ha lo stesso ruolo della parola momento nel testo originario. Torricelli, però, sembra dare al termine impeto un significato che comprende anche quello di velocità.[308]

Il percorso dimostrativo di Torricelli ottiene il risultato voluto, cioè quello di dimostrare geometricamente la validità di quanto affermato dall'assioma galileiano, che le velocità alla fine della discesa lungo piani inclinati diversi o perpendicolari al suolo sono uguali. Non c'è dubbio che egli abbia ottenuto il risultato cercato, se non altro dal punto di vista logico deduttivo. Il vantaggio di stabilire dei criteri geometrici per la quantificazione di grandezze che erano state matematicamente sfuggenti per Galileo è palese. Quello, però, che manca ancora da esaminare è se la catena delle relazioni geometriche rispetta anche il significato fisico dei termini in gioco. È, infatti, su questo punto che si può valutare il livello di matematizzazione della realtà fisica o, più precisamente, quanto la scienza del moto sia matematizzata. È, pertanto, indispensabile capire se la facilità con cui Torricelli utilizza termini diversi sia lecita e in quale misura. Dall'esame del materiale a disposizione, sembra che il *momento* della gravità sia inteso come la tendenza di un grave a cadere verso il centro della Terra e l'*impeto* sia l'accelerazione verticale cui è soggetto alla fine della caduta. In una terminologia posteriore, il momento si potrebbe identificare con la *forza di gravità*, mentre l'impeto con la variazione di velocità del grave in moto dalla quiete che si identificava con l'accelerazione.[309] In questa prospettiva, forza e

[308] Nella terza dimostrazione del Teorema VI di Galileo egli parla sempre di grado dell'impeto ("gradus impetus" in *Opere di Torricelli* II, p. 113).

[309] William R. Shea and Tiziana Bascelli "How Torricelli Improved on Galileo's Laws of Free Fall and Projectile Motion", in *Aurora Torealis: Studies in the History of Science and Ideas in Honor of Tore Frängsmyr*, a

accelerazione di gravità sono direttamente proporzionali alla massa del mobile e sono costanti e uguali per tutti i corpi in prossimità della Terra. Il problema da risolvere al tempo di Galilei e Torricelli consisteva proprio nel capire che tutti i corpi subiscono la stessa accelerazione di gravità oppure, in modo equivalente, che a parità di condizioni iniziali tutti i gravi cadono con la stessa velocità. Sia Galileo che Torricelli erano consapevoli della validità di questa legge, ma non avevano una concezione chiara di tutti gli elementi in gioco, poiché non erano riusciti a definirli concettualmente e matematicamente in modo compiuto.

### *Par. 9 Il concetto di gravità: l'esperimento ideale del pozzo senza fondo.*

Nelle pagine precedenti, si è detto che Galileo non poteva dimostrare compiutamente che tutti i corpi cadevano con la stessa accelerazione, nonostante fosse universalmente accettata l'esistenza di una *tendenza interna* a ciascuno di essi che li portava ad avvicinarsi al centro della Terra. È proprio questa caratteristica di essere *interna* che prova l'estraneità in Galileo di un concetto di accelerazione di gravità di tipo newtoniano. Se fosse stato altrimenti, il modo più semplice per giustificare una simile proprietà dei gravi, indipendente da ogni altra loro proprietà caratteristica e peculiare, quale forma, peso, mole o gravità specifica, sarebbe stato attribuirne l'origine non al singolo mobile ma alla causa del loro moto, cioè alla vicinanza al centro della Terra oppure alla Terra stessa. Non ci sono evidenze a tal riguardo, né altri elementi che facciano pensare a uno spostamento del riferimento da interno al mobile, a esterno.[310] Non si può, quindi, affermare che Galileo fosse a conoscenza dell'accelerazione di gravità che si indica oggi con il simbolo *g*, il cui valore dipende dalla massa del pianeta.

cura di Marco Beretta, Karl Grandin e Svante Lindqvist. Sagamore Beach, MA (USA): Science History Publications, 2008, pp. 31-50.

Sembra, però, probabile che Galileo credesse nella possibilità di avere nel cosmo più centri di gravità attorno ai quali la terra e i corpi gravi tendono a cadere, al contrario di quanto affermato dalla spiegazione aristotelica che faceva coincidere il centro del mondo con il centro della Terra per sancirne l'unicità. Galileo non ha dubbi che "l'accelerazione del moto si fa nel mobile quando e' va verso il termine dove egli ha inclinazione"[311] e che, "se si può assegnare centro alcuno all'universo, troveremo in quello esser più presto collocato il Sole."[312] Per questa ragione, il centro dell'universo non coincide più con il centro della Terra e la legge di caduta verso il primo non può più giustificare la caduta dei gravi verso il secondo. Per Galileo è altrettanto evidente e naturale che la formazione della mole planetaria per accorpamento dell'elemento terrestre prova "come dal cospirare concordemente tutte le parti della terra a formare il suo tutto ne segue che esse da tutte le parti con eguale inclinazione vi concorrano, e, per unirsi al più che sia possibile insieme, sfericamente si adattano."[313] Anche il Sole, però, la Luna e tutti gli altri pianeti conosciuti hanno forma sferica che, per ugual motivo, è stata generata con lo stesso meccanismo poiché un effetto deve avere sempre la stessa causa:

> sì come le parti della Terra, che tutte per la lor gravità conspirano ad approssimarsi quanto più possono al centro, alcune tuttavia ne rimangono più remote che l'altre, cioè le montagne più delle pianure, e questo per la loro solidità e durezza (ché se fusser di materia fluida si spianerebbero), così il veder noi alcune parti della Luna restare elevate sopra la sfericità delle parti

[310] Galileo non aveva elementi per decidere: "SALV. Io non ho detto che la Terra non abbia principio né esterno né interno al moto circolare, ma dico che non so qual de' dua ella si abbia; ed il mio non lo sapere non ha forza di levarglielo" (*Opere di Galileo* VII, p. 260).

[311] *Opere di Galileo* VII, p. 56.

[312] *Opere di Galileo* VII, p. 58.

[313] *Opere di Galileo* VII, p. 58.

> più basse arguisce la loro durezza, perché è credibile che la materia della Luna si figuri in forma sferica per la concorde conspirazione di tutte le sue parti al medesimo centro.[314]

In aggiunta, Galileo sembra essere profondamente convinto che la rotazione dei pianeti attorno al Sole e la caduta dei gravi sulla Terra debbano avere la stessa causa,[315] che ritiene essere interna ai corpi e non dipendente da un fantomatico punto, detto centro di gravità.[316] Se a questo si aggiunge il fatto che Giove si muoveva in cielo trascinando quattro pianetini in rotazione attorno se stesso, il quadro cosmologico dovrebbe risultare completo. In conclusione, l'idea di Galileo era quella di un sistema planetario in rotazione attorno al Sole, a sua volta in rotazione attorno al proprio asse, dove la materia si aggrega in masse sferiche grazie ad una proprietà intrinseca ai suoi elementi minimi. È la sua tendenza a condensarsi o conglomerarsi che, a livello macroscopico, produce la gravità, e non la presenza di un corpo planetario di grandi dimensioni ad attirarla.

A titolo di esempio, si veda il *topos* della Terra forata da parte a parte lungo un suo diametro. Si trova un primo riferimento nel *De coelo* di Aristotele, dove si dimostra la finitezza dei corpi pesanti o leggeri.[317] A proposito di un corpo pesante

---

[314] *Opere di Galileo* VII, p. 123.

[315] "SALV. […] quello che fa muovere la Terra è una cosa simile a quella per la quale si muove Marte, Giove, e che e' crede che si muova anco la sfera stellata; e se egli mi assicurerà chi sia il movente di uno di questi mobili, io mi obbligo a sapergli dire chi fa muovere la Terra. Ma più, io voglio far l'istesso s'ei mi sa insegnare chi muova le parti della Terra in giù" (*Opere di Galileo* VII, p. 260).

[316] "SALV. […] credo che prima siano le cose gravi che il centro commune della gravità, sì che non un centro, che altro non è che un punto indivisibile, e però di nessuna efficacia, sia quello che attragga a sé le materie gravi, ma che esse materie, cospirando naturalmente all'unione, si formino un comun centro, che è quello intorno al quale consistono parti di eguali momenti: onde stimo, che trasferendosi il grande aggregato de i gravi in qualsivoglia luogo, le particelle che dal tutto fusser separate lo seguirebbero, e non impedite lo penetrerebbero sin dove trovassero parti men gravi di loro, ma pervenute sin dove s'incontrassero in materie più gravi, non scenderebber più" (*Opere di Galileo* VII, p. 270). Per Galileo, quindi, l'unica spiegazione possibile della caduta è delegata alla proprietà interna a tutti i corpi e naturale di aggregarsi, con meccanismi simili a quanto avviene durante la condensazione e durante l'affondamento di corpi solidi in fluidi.

[317] *De coelo*, I, 273a7-22, pp. 154-155; II, 294a10-20, pp. 298-299.

che cade verso il centro della Terra, quando vi arriva, si ferma immediatamente poiché non può oltrepassare il punto più basso. Superarlo, infatti, equivarrebbe a iniziare una risalita, un moto violento e non naturale che richiede una causa motrice esterna. Galileo riprende questo esperimento ideale durante la *prima giornata* del *Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo*, nella parentesi dedicata alla continuità della variazione della velocità e, in particolare, alla capacità dell'impeto acquistato durante una discesa di riportare il mobile a un'altezza pari a quella iniziale. Per Galileo il grave in caduta libera non si ferma al centro ma risale lungo il diametro terrestre, proseguendo il suo cammino nell'emisfero opposto decelerando.[318] E questo avviene in virtù dell'impeto accumulato nella fase di avvicinamento al centro. Questo impeto, però, si esaurisce a sua volta durante la risalita, fermando il mobile a una distanza non superiore a quella iniziale e facendo ricadere il mobile verso il centro. La presenza di alcuni impedimenti, la resistenza dell'aria ad esempio, lo dovrebbe far arrestare al centro.[319] Nella situazione ideale, invece, il movimento del grave continuerebbe indefinitamente con un moto di oscillazione rettilineo tra due estremi opposti del diametro terrestre, per una causa interna al mobile.

---

[318] "SALV. E se io dirò che l'impeto acquistato in qualsivoglia luogo del suo moto sia tanto che basterebbe a ricondurla a quell'altezza donde si partì, me lo concedereste?
SAGR. Condere'lo senza contradizione, tutta volta che la potesse applicar, senz'esser impedita, tutto il suo impeto in quella sola operazione, di ricondur se medesima, o altro eguale a sé, a quella medesima altezza: come sarebbe se la Terra fusse perforata per il centro, e che, lontano da esso cento o mille braccia, si lasciasse cader la palla; credo sicuramente che ella passerebbe oltre al centro, salendo altrettanto quanto scese […].
SALV. Voi perfettamente discorrete" (*Opere di Galileo* VII, pp. 46-47).

[319] "SALV. […] Quando voi [Simplicio] dite che le parti della Terra sempre si muoveranno all'ingiù rimossi gli impedimenti, equivocate gagliardamente, perché all'incontro bisogna impedirle contrariarle e violentarle, se voi volete ch'elle si muovano: perché, cadute ch'elle sono una volta, bisogna co violenza rigettarle in alto, acciò tornino a cader la seconda: e quanto agli impedimenti, questi gli tolgono solamente l'arrivare al centro; ché quando ci fosse un pozzo che passasse oltre al centro, non però una zolla di terra si muoverebbe oltre a quello, se non in quanto trasportata dall'impeto lo trapassasse, per ritornarvi poi e finalmente fermarvisi" (*Opere di Galileo* VII, pp. 161-162). Questa idealizzazione del moto di caduta è anche alla base della spiegazione di come avviene l'acquisto dei gradi di velocità, che fornisce di conseguenza un esempio di validità del Teorema I del moto uniformemente accelerato (*Opere di Galileo* VII, pp. 253-254) e la dimostrazione di come un mobile si può muovere di movimenti contrari grazie al medesimo principio interno (*Opere di Galileo* VII, p. 262)..

Nella *lezione accademica sesta*, Torricelli ironizza sul concetto aristotelico di leggerezza mostrando come il prendere a riferimento la leggerezza invece della pesantezza potrebbe ugualmente spiegare compiutamente e coerentemente tutti i fenomeni della filosofia naturale. A tal proposito, considera il concetto di quiete per i corpi e lo presenta proprio in relazione al centro della Terra. Ecco le sue parole:

> Perché dunque vorranno le parti della terra andar a cercare il centro, se dato che vi giungessero, in ogni modo ivi non riposerebbero niente più di quello che facessero nella loro nativa regione? Dunque l'andare al centro sarebbe indarno, et indarno la natura haverebbe dato alle cose questo momento. Anzi, se io dovessi dire un mio pensiero, io stimo che niun altro luogo del mondo sia meno atto per la quiete, che il centro della terra. Non dite voi che l'acqua tutta, e tutta la terra s'affaticano per giugnere al centro? Dunque collocato, per esempio un sasso nel centro havrà guerra continua da tutte le parti, e da tutte l'altre cose che vorrebbero pervenir al centro ancor loro. Il centro è uno, le cose sono molte, e la penetrazione de' corpi non si dà.[320]

Tenendo presente che Torricelli afferma ripetutamente di accettare per vere le conclusioni cui era giunto Galileo, non si può negare che egli aderisse alla medesima spiegazione anche a proposito di questo esperimento ideale. Quello, però, che potrebbe differenziare i due punti di vista è legato alla ragione, o causa, del movimento del grave verso e attraverso il centro della Terra. Se per Galileo la causa è nella tendenza naturale e perciò innata al corpo grave di cadere verso di

[320] *Opere di Torricelli* II, p. 46.

esso, Torricelli invece potrebbe ritenere quella causa esterna, come suggerito dal brano citato prima.

# Capitolo 3.

## *La necessità del continuo matematico.*

### *Par. 1 Ricognizione.*

Nei due testi presi in considerazione nel corso del primo capitolo, il termine *continuità* ricorre spesso e a proposito delle grandezze fondamentali del moto, cioè tempo, spazio, velocità e variazione di velocità, accelerazione e movimento, che si vogliono *fisicamente continue*. Le grandezze fisiche devono essere misurate oppure stimate, processo che prevede l'assegnazione di valori o di rapporti numerici che ereditano un'idea di *continuità numerica*. Inoltre, l'intera scienza del moto è una costruzione matematica, dove la deduzione è sorretta da un preciso uso di diagrammi che suggeriscono e coinvolgono un concetto intuitivo di *continuità geometrica*. La domanda che si pone ora è se i tre tipi di continuità coincidano oppure se, in caso contrario, possano essere compatibili a tal punto da poter essere pensati come sovrapponibili, senza incorrere in paradossi e incoerenze.

Nella scienza del moto di Galileo e Torricelli il problema prende diverse connotazioni che saranno esaminate nei successivi paragrafi. Scopo del presente capitolo è comprendere il ruolo che ciascun autore ha dato al concetto di continuità per l'esito della nuova scienza. Inoltre, si vuole studiare come i tre tipi di continuità interagiscano tra di loro e con gli altri elementi chiave della teoria del moto, per valutare in che modo il processo di matematizzazione muovesse i suoi primi passi.

## *Par. 2 Analisi preliminare.*

La parola *continuità* o l'aggettivo *continuo* indicano generalmente un qualcosa che non ha interruzione, che non si ferma mai.[321] Ad esempio, si può immaginare la continuità come quella proprietà della linea, che è disegnata senza mai staccare la punta della matita dal foglio. Questa descrizione intuitiva tiene insieme tre elementi: un ente geometrico (spazio lineare come insieme di punti), una successione temporale (insieme di istanti) e una relazione che mette in ordine gli elementi minimali della linea e gli elementi minimali dello scorrere del tempo (il movimento della matita). La spiegazione di come si costruisce una linea continua è poi ulteriormente esplicitata dicendo che, data appunto una linea continua, è possibile suddividerla all'infinito senza che l'ultima parte residua perda di significato o sia di genere diverso. Se, cioè, spezziamo un segmento un certo numero di volte, grande a piacere, si otterrà sempre un segmento, piccolo a piacere, qualunque sia il numero di divisioni effettuate poiché il procedimento è ripetibile illimitatamente, senza fine, dunque un numero infinito di volte. Da un punto di vista linguistico, la continuità di un processo è realizzata con un uso ripetuto delle congiunzioni per suggerire un'idea di iterazione, da cui nasce il legame stretto con il concetto di infinito.[322] Come si vede, il concetto di continuità è strettamente legato sia al concetto di *insieme* (la successione è per definizione un insieme di oggetti presi in un determinato ordine), sia al concetto di *infinito*. È in questo senso che il

[321] *Continuo* viene dal latino *continŭus*, termine formato da *cum* (insieme) + *tenēre* (tenere) (Giacomo Devoto, *Avviamento alla etimologia italiana. Dizionario etimologico*. Milano: Mondadori, 1982; Ottorino Pianigiani, *Vocabolario etimologico della lingua italiana*. La Spezia: F.lli Melita, 1990). Per Aristotele, "[i]l continuo rientra fra ciò che è contiguo: dico continua una cosa quando il limite che esiste fra due cose, ciò per cui esse sono in contatto, è lo stesso e unico termine e, come dice il nome, essi stanno assieme. E questo non è possibile quando invece i loro estremi sono duplici. Una volta definito questo, è evidente che il continuo è in quelle cose che, essendo in contatto, divengono, a partire da esse, una sola cosa per natura. Allora ciò che è continuo diviene uno" (*Fisica* V, 227a10-17; pp. 212-213).

[322] "Consideriamo una frase come *John saltava e saltava, e saltava ancora*: qui abbiamo un'iterazione di tre salti. Ma *John saltava e saltava e saltava* viene di solito interpretata non come tre salti, ma come un numero indefinito e indeterminato di salti. […] In breve, l'idea di azione iterata viene usata in varie forme sintattiche per esprimere l'idea di un'azione continua. Ciò può essere caratterizzato in termini cognitivi tramite la metafora I PROCESSI CONTINUI INDEFINITI SONO PROCESSI ITERATIVI" (George Lakoff e Rafael E. Núñez, *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Torino: Bollati Boringhieri, 2005; p. 201).

presente capitolo rappresenta un intermezzo di raccordo tra i precedenti e il successivo, dedicato al problema degli infinitesimi.

La *continuità naturale* è caratterizzata dal moto di un punto che disegna un percorso.[323] Quando si studia il moto, si dice che un oggetto assume diverse posizioni nello spazio, ordinate secondo la successione temporale. Se il punto di vista da cui si affronta l'analisi è quello del fenomeno in quanto tale, il moto si dice *fisicamente continuo*.[324] La continuità è, però, intuitivamente sostenuta e di conseguenza accettata grazie alla sensazione di continuità del flusso di coscienza che è anche responsabile della percezione del tempo che scorre privo di interruzioni e, quindi, continuo.[325] La definizione di moto coinvolge strutturalmente la nozione di tempo, che ha la priorità su questa, poiché senza percezione di uno spostamento temporale non si avrebbe la percezione del legame tra le diverse posizioni degli oggetti. Di conseguenza, è la continuità temporale a determinare la continuità del movimento. Il movimento è anche inseparabile dalla nozione di spazio, la cui struttura determina la continuità del moto. Aristotele scrive che "[una] cosa è mossa

[323] "[I]n generale, i processi vengono concettualizzati metaforicamente in termini di moto tramite la metafora sulla struttura dell'evento, nella quale i processi sono moti estesi […]. Il moto indefinitamente continuo è difficile da visualizzare, e impossibile per periodi molto lunghi: ciò che facciamo, piuttosto, è visualizzare moti brevi e poi ripeterli, concettualizzando così il moto indefinitamente continuo come un moto ripetuto. Inoltre, le azioni quotidiane continue richiedono tipicamente azioni iterate. Per esempio, camminare in modo continuo richiede di fare passi ripetutamente […]. Questa fusione di un'azione continua con azioni ripetute dà origine alla metafora tramite cui le azioni continue sono concettualizzate in termini di azioni ripetute" (George Lakoff e Rafael E. Núñez, *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Torino: Bollati Boringhieri, 2005; pp. 201-202).

[324] "Di necessità, infatti, tutto ciò che è in movimento, è sempre divisibile in parti divisibili; si è dimostrato questo assunto in precedenza nei trattati sulla natura in generale, e cioè che tutto ciò che è in movimento per sé, è continuo" (Aristotele, *Fisica* VIII, 257a33-257b1; pp. 346-347). "Continuo è ciò che è divisibile in parti che a loro volta sono sempre divisibili, e corpo è ciò che è divisibile secondo tutte le dimensioni" (Aristotele, *Il cielo* I, 268a6-8; pp. 120-121).

[325] "La convinzione che l'infinito esiste, la si ricava soprattutto da cinque ragioni: dal tempo (questo è infatti infinito); dalla divisione delle grandezze (in effetti i matematici si avvalgono, per far questo, dell'infinito); inoltre, dal fatto che la generazione e la corruzione non hanno mai fine […]. Inoltre, […] in quanto ciò che è limitato è tale sempre in relazione a qualcosa che lo limita; sicché, necessariamente, non v'è nessun limite, se ogni cosa viene ad essere delimitata da qualcosa di sempre differente. […] [D]al momento, infatti, che non ha mai termine l'attività propria del pensare, per questo motivo non solo il numero sembra essere infinito, ma anche la grandezza matematica e ciò che è al di fuori del cielo" (Aristotele, *Fisica* III, 203b15-25; pp. 102-103).

con continuità, se essa non lascia nessun intervallo, o l'intervallo minore possibile fra le cose: non un intervallo di tempo (niente, infatti, impedisce che vi sia uno stacco e quindi che, subito dopo la nota più acuta, vi sia quella più bassa), ma un intervallo nelle cose nelle quali il movimento si sviluppa."[326]

Quando si utilizza il riferimento alla successione degli istanti o delle posizioni assunte dal mobile, ci si immerge nella *continuità numerica* che assegna un numero naturale ad ogni fotogramma che rappresenta il moto. Il processo del contare è privo di fine, poiché a un numero è sempre possibile sommare un'unità e ottenere un nuovo numero maggiore del precedente e a esso successivo. Ogni *numero naturale*[327] è uno per la quantità, molteplice per la relazione.[328] Se si rimane all'interno dei naturali, tra un naturale e il suo successore non c'è alcun altro numero naturale o, in un linguaggio metaforico, c'è il vuoto numerico, ma proprio per questo, il processo di frammentazione di una quantità data $n$ è finito, poiché per eseguirne la divisione aritmetica è necessario stabilire qual è il divisore che viene confrontato con essa, che ha il ruolo della misura. Nel caso dei naturali, l'unità di misura standard è l'1.

A priori, il procedimento di suddivisione implicito nella definizione di continuo si può realizzare in due modi. Innanzitutto, si può fissare una grandezza numerica come unità di misura e calcolare il numero di volte che è contenuta nella grandezza di partenza. L'esito, in questo caso, può essere finito o infinito secondo la *commensurabilità* o *incommensurabilità* dell'unità-campione. Se il processo iterativo non ha termine, esso individua in potenza uno specifico numero, il quoziente della

---

326 *Fisica* V, 226b27-35; pp. 210-211.

327 Un *numero naturale* è qualunque numero che si ottiene partendo da 0 e sommando 1 un certo numero di volte. L'insieme di tutti i numeri naturali si indica con il simbolo $N$ .

328 È *uno* perché ciascun numero è un oggetto unico, la cui natura consiste nella quantità che esso individua. È *molteplice* perché la quantità individua anche la sua posizione all'interno della successione delle grandezze numeriche, cioè fissa e compendia la relazione tra il numero e tutti i suoi predecessori. Al primo significato corrisponde il concetto di *numero cardinale*, al secondo quello di *numero ordinale*.

divisione,[329] senza portare a paradossi logici poiché l'illimitata ripetibilità del confronto rispetta la definizione di continuità naturale. In alternativa, si può decidere di suddividere la grandezza di partenza in un numero finito di parti intere, ad esempio 2, 3 o $n$, per poi considerarne una soltanto delle $n$ ottenute.[330] In questo caso, la ripetizione del procedimento di suddivisione è ammessa indefinitamente grazie alla definizione di continuità, solo se si opera all'interno di un insieme che contenga almeno la struttura dei numeri razionali.[331] In tal caso, però, la successione delle grandezze così ottenute è infinita e convergente verso un valore, detto *limite*, che vale 0. Lo zero è il numero corrispondente alla quantità nulla oppure all'assenza di grandezza e in questo senso è una quantità-limite che appartiene a un genere diverso da quello proprio a tutti gli altri numeri. Un esempio alternativo è quello di una successione di grandezze razionali che converge a un limite, dato da un numero irrazionale che ha a sua volta una natura diversa.[332] È come se il valore cui si tende con l'iterazione illimitata di una certa divisione

---

[329] Nel caso in cui il divisore è un *numero razionale*, il quoziente è a sua volta un numero razionale, cioè un rapporto di due numeri interi o un numero decimale con sviluppo decimale finito o periodico. Invece, nel caso di una misura incommensurabile, cioè una grandezza *irrazionale*, il quoziente sarà un numero irrazionale o un numero decimale con sviluppo decimale illimitato non periodico. Tutto questo è valido se la grandezza da dividere è intera.

[330] In simboli, si sta costruendo $\frac{1}{n}$.

[331] L'insieme dei *numeri razionali* $Q$ è costituito da tutti i rapporti del tipo $\frac{m}{n}$, con $m$ e $n$ *numeri interi* (numeri naturali con segno positivo o negativo) con $n \neq 0$. Gode della proprietà di *densità* nell'insieme dei numeri reali, cioè dati due numeri razionali $a$ e $b$ distinti, con $a < b$, esiste sempre un altro numero razionale $c$, diverso dai precedenti, compreso tra $a$ e $b$. Il procedimento di divisione in $n$ parti di una grandezza razionale $q$ è sempre possibile all'interno dei numeri razionali, poiché $\frac{q}{n}$ è ancora un numero razionale. L'insieme dei *numeri reali* $\Re$ è costituito da tutti i razionali e da tutti gli *irrazionali*, cioè i numeri a sviluppo decimale illimitato non periodico, e per questo $Q \subset \Re$.

[332] Si consideri la divisione in $n$ parti della radice $n$-esima del fattoriale di $n$, in simboli $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, dove $n!$ è il prodotto di tutti i numeri naturali minori e uguali a $n$ tra loro, cioè $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Il limite cui tende la successione è pari a $\frac{1}{e}$ dove $e$ è il numero di Nepero che si rappresenta in notazione decimale come 2,71828182845…

trascendesse l'insieme delle grandezze di partenza, generando così un ampliamento della struttura con oggetti numerici incommensurabili ai numeri razionali della successione convergente. Il problema è che un oggetto-limite di questo tipo, cioè che non appartiene allo stesso genere degli elementi che lo precedono, ferma l'iterazione del processo, fatto che produce un assurdo logico con la definizione di continuità. Sembra pertanto che l'insieme dei numeri razionali o non possa dirsi continuo, oppure sia continuo *solo fino a un certo punto*. Invece, se si decide di lavorare sempre nell'insieme dei numeri reali, non ci sono rischi di tal genere poiché ogni procedimento iterativo o successione numerica converge a un limite dello stesso genere.[333] Per questo motivo la struttura dei numeri reali è la più piccola con la proprietà di continuità.[334]

La *continuità geometrica*, come fu intesa dall'antichità sino ai lavori di Hilbert, dipende da quanto si ricava dagli *Elementi* di Euclide. Le forme geometriche, come pure i numeri, erano proprietà astratte di oggetti reali, la cui definizione spiega il cos'è dell'oggetto ma non ne fornisce l'esistenza che doveva essere dimostrata indipendentemente da essa attraverso un procedimento costruttivo. Se la linea è continua quando è disegnata da un punto in movimento, allora è indispensabile

---

333 Infatti, $Q$ è uno *spazio separato*, cioè per qualunque scelta di numeri razionali $a$ e $b$, si può sempre costruire una coppia di intervalli disgiunti contenenti ciascuno uno solo di essi, segno del carattere *discreto* dell'insieme, anche se *denso*. A prima vista, $Q$ potrebbe sembrare molto più numeroso di $N$. In realtà, non è così perché si possono ordinare i suoi elementi in modo da associarli a ciascun numero naturale, con la certezza di non saltarne qualcuno. L'ordine è il seguente: $\begin{matrix} 1/1 & 1/2 & \dots & 1/n & \dots \\ 2/1 & 2/2 & \dots & 2/n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m/1 & m/2 & \dots & m/n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$.

334 Poiché $Q$ è *denso* in $\Re$, cioè ogni intervallo di numeri reali contiene almeno un numero razionale. Inoltre, $\Re$ è *completo* perché ogni successione convergente di numeri reali converge in $\Re$. L'insieme $\Re$ non è numerabile, cioè non ha lo stesso numero di elementi di $N$ che viene indicato con il simbolo $\aleph_0$. Lo si dimostra costruendo un numero reale diverso da tutti i numeri della successione ordinata che si ottiene posizionando i numeri reali secondo la grandezza crescente di ciascuna cifra della notazione decimale. Si può anche dimostrare che $\Re$ ha $2^{\aleph_0}$ elementi. L'affermazione che tra i due termini della relazione $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ non ci sono altri numeri cardinali resta un'ipotesi, l'*ipotesi del continuo*.

esaminare le definizioni geometriche di *punto* e *linea* per capire in quali relazioni essi stiano e da dove possa nascere la proprietà del continuo. Per Euclide, il "[p]unto è ciò di cui non <è> alcuna parte" e la "linea [è] lunghezza senza larghezza."[335] I punti sono indivisibili perché per definizione sono privi di parti, in modo tale che Aristotele ne identifica il luogo con la posizione.[336] L'individuazione in atto di un singolo punto è impossibile poiché non si può catturare un oggetto geometrico che non ha lunghezza, né larghezza, né profondità. La sua esistenza è quindi possibile solo in potenza e può essere data a priori in virtù di un assioma o di una conseguenza diretta di un assioma,[337] oppure per progressivo avvicinamento grazie a un procedimento iterativo illimitato.[338] Per quanto riguarda le relazioni tra i due precedenti enti geometrici, si ha che i "limiti di una linea <sono> punti" e che la "linea retta è quella che è posta ad uguale <livello> rispetto ai punti su se stessa."[339] Due punti distinti danno la possibilità di costruire un unico segmento

---

[335] Sono rispettivamente il primo e il secondo termine o definizione del Libro I degli *Elementi* (Euclide, *Tutte le opere*. Milano: Bompiani, 2007, pp. 778-779). Si noti che il termine *linea* corrisponde all'odierno *segmento*.

[336] *Fisica* IV, 209a7-9; pp. 128-129.

[337] Il quinto postulato di Euclide stabilisce che "qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono gli <angoli> minori di due retti" (Libro I degli *Elementi* in Euclide, *Tutte le opere*. Milano: Bompiani, 2007, pp. 780-781). Pertanto, due rette non parallele si intersecano in un punto. Questo è un modo per costruire un punto grazie alla sezione di due rette. Quello che hanno in comune deve godere delle stesse proprietà, di conseguenza non ha profondità né larghezza perché queste non sono proprietà delle rette; non ha lunghezza perché dovrebbe avere la lunghezza propria di una retta, ma limitata dalla mancanza di larghezza dell'altra, visto che le due direzioni non sono parallele. L'elemento in comune gode delle proprietà sancite dalla definizione di punto.

[338] Percorrere un segmento per raggiungere un'estremità è un processo iterativo descritto in modo molto chiaro da Zenone, nell'enunciazione del paradosso di *Achille e la tartaruga* o di quello della *freccia*. L'estremità è un oggetto che non ha larghezza come il segmento e non ha lunghezza perché è l'ultimo elemento. Ancora una volta si ottengono le proprietà caratterizzanti il punto.

[339] Sono rispettivamente il terzo e il quarto termine o definizione del Libro I degli *Elementi* (Euclide, *Tutte le opere*. Milano: Bompiani, 2007, pp. 778-779). L'ultimo enunciato riportato dice che rispetto a un punto qualunque del segmento il segmento giace nello stesso modo rispetto a esso, non nel senso della lunghezza, perché altrimenti il segmento sarebbe una retta, ma nel senso della larghezza.

con essi come estremi e un segmento si può sempre prolungare indefinitamente in una retta.[340]

### *Par. 3 Un'analisi del continuo.*

Per Aristotele nessuna somma di punti, indivisibili per definizione, può realizzare un insieme divisibile come una retta continua, né può generare un ente dotato di lunghezza poiché questa proprietà non appartiene loro. Il procedimento infinitario di frammentazione della retta geometrica in punti non è invertibile, perché la somma geometrica di punti come intesa da Aristotele non produce una linea formata da due punti, ma collassa in un punto solo che è la sovrapposizione dei due. Pertanto, due punti distinti possono soltanto essere separati in modo da non avere nulla in comune oppure, in caso contrario, sovrapporsi completamente e fondersi nel medesimo ente. Di conseguenza, dire che una linea è composta di punti è contraddittorio. "Il *punto inesteso* è un assurdo razionale: ciò che è l'origine, l'elemento, il principio, la causa, del γένος, dello spazio, dell'estensione, della quantità esteriore, non appartiene al γένος stesso, lo trascende – quindi sarebbe una causa trascendente."[341] In effetti, quando Euclide la descrive come 'ciò che non ha parti' ne dà un'immagine intuitivamente comprensibile ma estremamente ambigua. Si ricordi che per il pensiero antico tutto ciò che ha quantità deve necessariamente avere delle parti, quelle che vengono contate. Ma ciò che non ha parti, che è cioè semplice o unitario, viene presentato nello stesso modo in cui viene descritta l'estensione. Nella matematica contemporanea, il punto resta una nozione intuitiva e priva di una definizione matematica vera e propria, oppure è riportato al concetto di limite. Questa sua natura di rappresentare un obiettivo cui tende un dato insieme di oggetti equivale ad affermarne la trascendenza, poiché il limite è impossibile da

[340] Sono rispettivamente la prima richiesta o postulato "[s]ia stato richiesto di condurre una linea retta da ogni punto a ogni punto"; e la seconda "[e] di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in <linea> retta" del Libro I degli *Elementi* (Euclide, *Tutte le opere*. Milano: Bompiani, 2007, pp. 780-781).

[341] Giorgio Colli, *La ragione errabonda* (Milano: Adelphi, 1982) pp. 440-441.

afferrare. Il punto geometrico è, pertanto, un simbolo o una forma pura dello spazio di un ente che non può essere dato per costruzione, in un modo concreto come si danno gli altri enti geometricamente estesi. Il *punto* è quindi una *causa formale*, che fornisce alle altre forme dell'espressione un modo d'essere e di essere generate, come insiemi di punti.

Il continuo aristotelico è, quindi, "ciò i cui estremi sono uno" e di conseguenza "risulta impossibile che qualcosa di continuo sia costituito da indivisibili, come ad esempio la linea da punti, se la linea è continua e il punto è indivisibile. Le estremità dei punti non sono infatti 'uno', dal momento che non esiste un estremo che sia qualcosa di diverso dalla parte della cosa indivisibile; né gli estremi sono assieme, poiché non esiste un estremo di ciò che non ha assolutamente parti: l'estremità è infatti altro da ciò di cui essa è estremità."[342] In definitiva, partendo dal tutto non è possibile raggiungere e individuare la parte indivisibile senza affrontare un procedimento che coinvolga un numero infinito di passi; l'approccio diametralmente opposto di partire dai punti per tentare di ricostruire la retta è parimenti fallimentare in virtù della relazione tra punti in successione. I punti costituenti la linea, infatti, non possono essere in contatto,[343] né consecutivi,[344] né è possibile che tra essi ci sia una realtà intermedia di genere diverso.[345] Il punto indivisibile non può neppure essere in movimento, poiché in tal

[342] *Fisica* VI, 231a21-29; pp. 234-235.

[343] "giacché il contatto sussiste o come un tutto in rapporto al tutto, o come una parte in rapporto alla parte, oppure come tutto in rapporto alla parte. Ma dal momento che l'indivisibile è senza parti, necessariamente il contatto avverrà come un tutto in rapporto al tutto. Ma tutto ciò che esiste in contatto come rapporto di un tutto a un tutto, non potrà essere continuo, poiché il continuo ha parti che sono differenti in questo modo e sono separate per il luogo" (*Fisica* VI, 231b2-6; pp. 234-235).

[344] "'Consecutivo' è infatti ciò che non ha una realtà intermedia della medesima natura, mentre ciò che è intermedio fra i punti è sempre una linea […]. Inoltre, ciascuno di essi sarebbe divisibile in parti indivisibili, dal momento che ognuno deve essere diviso nelle sue parti componenti. Ma nessun continuo è divisibile in componenti che non ammettono parti" (*Fisica* VI, 231b6-12; pp. 234-237).

[345] *Fisica* VI, 231b12-18; pp. 234-237.

caso dovrebbe muoversi di una grandezza minore o uguale a se stessa per mezzo della quale misurerebbe la linea, risultato impossibile.[346]

In definitiva, sia i numeri sia i punti sono oggetti dotati di unità e di relazione che non riescono da soli a produrre un insieme che li contenga con la proprietà di essere continuo, poiché non si riesce a dedurre dalle loro caratteristiche e definizioni, legate a concetti discreti e di ordinamento, un genere completamente diverso e, pertanto, ad essi irriducibile. Se si considerano le due categorie della *quantità pura* e della *relazione pura*, il *continuo* secondo la quantità è anche una *dualità*, cioè una relazione. Allora si deve postulare l'esistenza di un nodo nel continuo da cui la dualità della relazione è originata e tenuta assieme, ma che allo stesso tempo non può appartenere al continuo. Il continuo è divisibile all'infinito solo quando lo si intenda come dualità. Il nodo corrisponde a un punto di contatto indivisibile nella rappresentazione del continuo, ad esempio come estensione. È una condizione del continuo che, però, non è parte di essa.

> "Aristotele cerca di inserire l'αρχή indivisibile nel tessuto della continuità, ma Zenone gli ribatte cha la quantità è sempre divisibile. I matematici moderni tentano la scappatoia, separando l'indivisibile da una o dall'altra parte del taglio che bisogna operare nel continuo (hanno i coraggio di tagliare quello che Aristotele lasciava unito). Ma in realtà tagliando il continuo, e non si può non tagliare la diade, la rappresentazione, la relazione [...], in mezzo non resta nulla, il vuoto, la mancanza, il non essere [...]. E i due estremi della quantità così divisa restano adesso estranei l'uno all'altro, diversi: *i punti sono due*, non uno, e da una parte e dall'altra ci sono *le origini diverse*

346 *Fisica* VI, 241a2-14; pp. 278-279.

> del soggetto e dell'oggetto. Il fulcro c'è, è il contatto, ma non si trova là in mezzo, è soltanto la condizione [...] *che ha operato il taglio*, la causa non rappresentativa. Ma non può ritrovarsi come un *punto indivisibile*, perché ogni punto, appartenendo alla quantità, è sempre divisibile. Il contatto è là dov'è il taglio, ma in sé non è nulla, e non è neppure là: il là del taglio lo *esprime soltanto*, e l'espressione ha per sua natura la funzione di alludere, di indicare un'altra natura.[347]

Dedekind riteneva che la continuità della retta dovesse essere imposta da un assioma,[348] a sottolineare proprio la necessità di un salto qualitativo incolmabile tra discreto e continuo. Si comprende allora come mai ogni tentativo di simulare la continuità passi attraverso un qualche tipo di discretizzazione, sia essa numerica o geometrica. A questa visione della geometria e del ruolo che hanno i modelli geometrici nello studio dello spazio può essere assimilata anche l'opinione di Hermann Weyl: "il grande compito che si affaccia fin dalla scoperta pitagorica degli irrazionali rimane oggi più che mai incompleto; ossia, la continuità a noi immediatamente data dall'intuizione (nel flusso del tempo e del movimento) deve essere colta matematicamente come una totalità di 'stadi' discreti in accordo con quella parte del suo contenuto che può essere concettualizzata in maniera 'esatta'."[349]

---

[347] Giorgio Colli, *La ragione errabonda*. Milano: Adelphi, 1982, pp. 324-325.

[348] "Se lo spazio ha davvero un'esistenza reale, non è necessario che sia continuo; molte delle sue proprietà rimarrebbero le stesse anche se fosse discontinuo. E se sapessimo con certezza che lo spazio è discontinuo, nulla ci impedirebbe di riempire i suoi buchi con il pensiero, e di renderlo così continuo; questo riempimento consisterebbe nella creazione di nuovi oggetti-punto e dovrebbe essere effettuato secondo il principio [di continuità]." Citazione in George Lakoff e Rafael E. Núñez, *Da dove viene la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri, 2005, p. 370.

[349] Citazione in George Lakoff e Rafael E. Núñez, *Da dove viene la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri, 2005, p. 393.

La domanda se i tre tipi di continuità siano compatibili e fino a quale punto, dovrebbe aver trovato risposta. D'altronde, il sorgere dei paradossi sembra proprio essere indice della coesistenza di elementi contraddittori o non sufficientemente esplicitati. Dal punto di vista odierno, la scelta di descrivere il corpo dei numeri reali assiomaticamente riesce ad aggirare tutte le difficoltà di cui si è detto in precedenza. L'intuizione va però sostenuta da una rappresentazione di un qualche tipo. Quella classica è l'associazione della struttura numerica con la retta geometrica, ribattezzata *retta reale*. Da questa sovrapposizione di contesti, detto *isomorfismo*, nascono alcune difficoltà dovute al fatto che il modello geometrico standard, consolidato in noi dall'uso prolungato e dalla sua immediatezza interpretativa, permette intuitivamente delle azioni che la natura dei numeri reali esclude. In geometria, la retta è vista come un insieme di punti, non definiti ma descritti come oggetti senza dimensione. Nella realtà dell'uso, però, si riesce a individuare un punto su una retta ad esempio intersecando una prima retta con una seconda. È anche possibile parlare di punti distinti, che determinano pertanto un ordinamento nella loro successione sulla medesima retta, e punti coincidenti che sono quelli, cioè, che si avvicinano tanto da doversi considerare sovrapposti. È come se non fosse possibile farli avvicinare oltre un certo limite altrimenti diventano indistinguibili, aggregandosi in un unico oggetto identico. La loro proprietà di essere indivisibili va di pari passo con la necessità logica di dar loro una dimensione non nulla ma *infinitesima* o, preferibilmente, *piccola a piacere*. Solo a queste condizioni è possibile poter scegliere un punto da una retta, come si fa con un elemento di un insieme qualunque.

L'isomorfismo che sembra a prima vista più naturale per la retta geometrica è quello con il *corpo dei razionali*. Infatti, la proprietà di *densità* riesce a riempire le lacune lasciate dagli interi e permette di trovare, se necessario, un altro *punto razionale* intermedio a due dati. I razionali sono infiniti, ma non così numerosi da produrre un salto di livello rispetto alla cardinalità. È come se tra due interi consecutivi, come ad esempio 0 e 1, si potesse trovare specchiato l'infinito numerabile, per così dire quasi contratto in una *misura* ristretta. Questo ambiente permette di scegliere un punto, cioè di individuare posizione e quantità, di verificare con procedure finite quale numero lo precede e quale lo segue nell'ordinamento indotto dalla retta. In definitiva, la metafora che ne riassume le caratteristiche è quella del *filo di perle*. Topologicamente parlando, esiste un'unica retta. Ma non appena vi si definisce una misura e, quindi, un insieme numerico di sostegno cominciano a verificarsi quelle situazioni sorprendenti viste in precedenza. Ad esempio, quando si disegna un quadrato di lato unitario e si riporta la misura della diagonale sul prolungamento di uno dei lati debitamente trasformato in retta razionale, l'estremità non cade su un punto razionale! Di conseguenza, ci devono essere dei vuoti sulla retta naturalmente continua lasciati dai numeri-punti razionali.

L'insieme dei *numeri reali* comprende sia i razionali, sia gli irrazionali o decimali illimitati non periodici. I problemi che ora si pongono con l'aggiunta degli irrazionali sono principalmente due: se sia possibile individuare un irrazionale sulla retta, a partire dai razionali, oppure se sia sempre possibile collocare due irrazionali nel giusto ordine. Se si ragiona in termini di procedura finita, si dovrebbe rispondere negativamente. Infatti, se si potesse osservare al microscopio l'infinitamente piccolo della retta reale nel tentativo di mettere a fuoco un certo numero irrazionale, ci si troverebbe dinanzi a un'impresa disperata. Il tentativo di individuare un numero irrazionale passando in rassegna il suo sviluppo decimale produce per ciascuna cifra una specie di ramo frattale, collaterale al segmento di retta sotto osservazione, contenente un'altra infinità numerica di decimali differenti comunque ordinabili. La retta reale, quindi, è un oggetto che conserva coesione nonostante il processo di suddivisione e che sembra possedere una specie di elasticità inesauribile:

> un corpo flessibile o elastico ha ancora parti coerenti che formano una piega, benché esse non si separino in parti di parti, ma piuttosto si dividano all'infinito in

> pieghe sempre più piccole che mantengono ancora una certa coesione. Di modo che il labirinto del continuo non è una linea che potrebbe dissolversi in punti indipendenti, come la sabbia si disperde in singoli granelli, ma piuttosto come una stoffa o un foglio di carta che si divide in pieghe all'infinito o si scompone in movimenti curvilinei, e ognuno di loro viene determinato da quanto lo attornia. [...] L'unità di materia, il più piccolo elemento del labirinto, è la piega, non il punto che non è mai una parte ma una semplice estremità della linea.[350]

A ragion veduta la definizione moderna di numero reale coinvolge successioni convergenti. Solo un processo numerabile come quello di successione, infatti, può rendere conto della loro inafferrabilità caratteriale e della loro tendenza a nascondersi. A tutt'oggi si è riusciti ad afferrarne pochissimi, mentre si è dimostrato che essi rappresentano la parte preponderante dell'insieme.[351]

### *Par. 4 Galileo: dal discreto al continuo e ritorno.*

Il primo lavoro di Galileo in cui si incontrano le parole *continuo* o *continuità* è il *secondo libro* del *De motu antiquiora*, la cui stesura dovrebbe appartenere al periodo pisano (1589-1592), nel quale si tratta anche del moto accelerato.[352] Dopodiché, non se ne trova più menzione sino alla *Scrittura attenente all'idraulica*, nella parte che

---

[350] Gilles Deleuze, *La piega. Leibniz e il Barocco*. Torino: Einaudi, 1990, p. 9.

[351] "Ogni tentativo di trattare i numeri irrazionali formalmente e senza il concetto di grandezza geometrica deve necessariamente condurre alle più astruse e fastidiose artificiosità, le quali, anche se possono essere portate a termine con completo rigore, cosa di cui abbiamo ogni diritto di dubitare, non posseggono un grande valore scientifico" (Hermann Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867) pp. 46-47; in Morris Kline, *Storia del pensiero matematico. Dal Settecento a oggi*. A cura di Alberto Conte, vol. II. Torino: Einaudi, 1999, p. 1152.

[352] Il titolo esatto è *Liber secundus in quo agitur de motu accelerato* (*Opere di Galileo* I, pp. 261-266).

spiega il movimento delle acque correnti con riferimento a quanto dimostrato "ne i libri de i moti naturali e de proietti."[353] A essere "continuamente accelerati"[354] sono i moti dell'acqua lungo canali dotati di una certa pendenza e, perciò, l'aggettivo si riferisce al modo in cui la velocità varia. Contemporaneamente all'introduzione della proprietà di continuità si ha anche l'introduzione della nuova fraseologia "grado di velocità" in riferimento alla quantità di velocità acquistata dal mobile durante un certo tratto di moto. L'opera citata si può considerare a un punto di svolta nello sviluppo di una teoria del moto dei gravi. In tutti i lavori precedenti, il riferimento alla velocità compare sempre isolato e privo di specifiche, come se Galileo pensasse sempre a una velocità costante o da ritenersi tale. Da questo momento, invece, la velocità è uniforme oppure uniformemente accelerata, nel qual caso deve *variare con continuità* dal valore iniziale a quello finale. In questa *Scrittura* e in tutte le pubblicazioni successive, la continuità compare sempre e con un ruolo chiave nella spiegazione di come avviene la caduta dei gravi anche perché intende produrre una descrizione matematica del fenomeno. La misura delle variazioni di tempo, spazio e velocità in termini di quantità discrete come i rapporti di segmenti, però, trova fondamento nell'immagine del continuo geometrico che gli fornisce lo strumento principe per sostenere la deduzione delle proprietà del moto accelerato. Quando sarà costretto a spiegare come mai la variazione continua è la soluzione corretta del problema della caduta dei gravi, Galileo cercherà di costruire termini e procedimenti per manipolare l'infinitamente piccolo. Il più originale *atomismo* galileiano, quindi, nasce matematico prima di essere trapiantato in ambito fisico. A questo punto, si presenta un nuovo problema: come si può descrivere matematicamente il continuo o, per essere più precisi, con quali strumenti matematici si può rendere conto della proprietà di continuità della variazione della

---

[353] *Opere di Galileo* VI, p. 631. Qui si fa riferimento alle opere pubblicate, che sono state analizzate nel corso di questo lavoro, e non alla cronologia dell'elaborazione delle teorie galileiane, su cui non c'è consenso unanime. Per questa ragione, i testi che saranno presi in considerazione nel corso del presente paragrafo saranno quelli in cui viene sviluppata la spiegazione del moto accelerato, cioè il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* e i *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*.

[354] *Opere di Galileo* VI, p. 631.

velocità nei gravi in caduta? La matematizzazione della scienza del moto di Galileo è realizzata grazie a due strumenti: l'aritmetica della teoria delle proporzioni e la geometria piana delle rappresentazioni.

L'aritmetica delle grandezze proporzionali è contenuta nel Libro V degli *Elementi* di Euclide, l'unica parte dell'opera a non fornire alcuna rappresentazione grafica come esemplificazione del contenuto astratto e di portata generale e che, forse proprio per questo, subì numerose emendazioni e interpolazioni.[355] Galileo raccolse la sfida e propose una sua teoria delle proporzioni più semplice e duttile di quella euclidea, ma con la medesima portata, cioè con la medesima validità per grandezze sia commensurabili, sia incommensurabili.[356] La sua proposta si articola in cinque definizioni e un postulato,[357] insieme alla deduzione della definizione euclidea di grandezze proporzionali che ne garantisce l'equivalenza.[358] Il problema ha un ruolo cruciale nel processo di matematizzazione della filosofia naturale, poiché una determinata scelta interpretativa permette o impedisce il confronto di

[355] L'*editio princeps* vide la luce a Basilea nel 1533, cui seguì un periodo di interpretazione e studio che si protrasse fino al 1600. Nel secolo successivo, invece, molti matematici tentarono di emendare e riformare il testo, per una sua applicazione più semplice. Per un resoconto dettagliato dei contenuti del Libro V si veda Enrico Giusti, *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana.* Torino: Bollati Boringhieri, 1993. La descrizione della teoria delle proporzioni di Galileo, riassunta qui di seguito, è ricavata dal contenuto del medesimo libro.

[356] La necessità di poter manipolare rapporti e similitudini di rapporti incommensurabili risulta chiara quando si faccia riferimento al tipo di contesto nel quale si trova a operare Galileo. La trattazione puramente geometrica della sua teoria del moto locale coinvolge costruzioni e dimostrazioni che utilizzano segmenti. Di frequente, i segmenti nascono come diagonali di rettangoli che hanno lunghezze generalmente incommensurabili con le misure dei lati. Ad esempio, la diagonale di un rettangolo di lati lunghi 1 e 3 misura $\sqrt{10}$, numero irrazionale e di conseguenza incommensurabile rispetto ai lati.

[357] Sono nell'ordine: i) definizione di rapporto o proporzione: "la proporzione tra due grandezze [è] un tal rispetto o relazione tra di loro, per quanto si appartiene alla quantità"; ii) definizione di proporzionalità: "proporzionalità è similitudine di proporzioni"; iii) postulato di esistenza di un quarto proporzionale; iv) definizione di similitudine di proporzioni nel caso di grandezze commensurabili; v) definizione generale di similitudine di proporzioni; vi) definizione di proporzione maggiore e minore. Si veda Enrico Giusti, *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana.* Torino: Bollati Boringhieri, 1993, p. 78.

[358] La dipendenza della teoria di Galileo dalla lettura fattane da Cristoforo Clavio nel suo commentario *Euclidis Elementorum Libri XV*. Romae: V. Accoltum, 1574, è stata dimostrata da Paolo Palmieri in "The Obscurity of the Equimultiples: Clavius' and Galileo's Foundational Studies of Euclid's Theory of Proportions", *Archives of History of Exact Sciences* (2001).

coppie di grandezze. La clausola che le *grandezze* debbano essere tutte e quattro *omologhe*, cioè dello stesso genere, impedisce l'uso delle proporzioni composte che giocano un ruolo molto importante soprattutto nella teoria del moto uniforme.[359] Per Galileo, quattro grandezze sono proporzionali "quando l'eccesso della prima sopra la seconda (qualunque egli sia) sarà simile all'eccesso della terza sopra la quarta."[360] Grazie a questa definizione, egli è in grado di utilizzare la *proporzione composta*: "una proporzione si dice comporsi di più proporzioni, quando le quantità di dette proporzioni multiplicate insieme avranno prodotto qualche proporzione"[361] e di applicare un calcolo molto semplice: "SALV. [...] Dice la difinizione vulgata, che la proporzione composta di queste due proporzioni si avrà se noi multiplicheremo fra di loro le quantità di esse proporzioni."[362] Per una comprensione completa della portata della definizione, si consideri il problema di poter comporre una proporzione utilizzando rapporti di grandezze di genere diverso, come ad esempio il rapporto delle basi di due triangoli simili, aventi altezze uguali, e quello delle loro aree. Con l'impostazione galileiana la proporzione ha significato, in quella di Federico Commandino[363] no. Inoltre, si faccia attenzione alla terminologia specifica, per la quale *grandezza* è una quantità geometrica, mentre *quantità* è una quantità numerica. L'importanza di tale soluzione è chiara agli occhi di Galileo, che la persegue con lucidità, come confermato dalle sue stesse parole:

> SIMP. Io non credo che si sia fatt'altro, se non formar
> due rettangoli con quelle quattro linee poste da

[359] Si ricordi il teorema che dimostra la proporzionalità tra lo spazio e il prodotto della velocità con il tempo, che dipende dall'applicazione della regola della *proporzione composta* (si veda la nota 49 a p.14).

[360] *Opere di Galilei* VIII, p. 352. Per "eccesso" si deve intendere di quanto una grandezza è multipla dell'altra.

[361] *Opere di Galilei* VIII, p. 359.

[362] *Opere di Galilei* VIII, p. 362.

[363] Federico Commandino (1509-1575) fu uno dei maggiori matematici del Cinquecento, che tradusse in latino, curò e commentò numerose opere matematiche antiche come, ad esempio, le *Sezioni coniche* di Apollonio, gli *Elementi* di Euclide (Pisauri: 1572; Urbino: 1575; Pesaro: 1619), le *Opere* di Archimede (Venezia: 1558), le *Collectiones Mathematicae* di Pappo (Bologna: 1660).

> principio; uno, cioè con le antecedenti A, C, e l'altro con le conseguenti B, D.
>
> SALV. Ma la formazione de' rettangoli nelle linee della geometria corrisponde per appunto alla multiplicazione de' numeri nell'arimmetica, come sa ogni matematico anche principiante; e le cose che noi abbiamo multiplicate sono state le linee A, C e le linee B, D, cioè i termini omologhi delle poste proporzioni. Ecco dunque come, multiplicando insieme le quantità o le valute delle date proporzioni semplici, si produce la quantità o la valuta della proporzione la quale poi si chiama composta di quelle.[364]

In definitiva, con questo impianto teorico Galileo era in grado di lavorare con quantità razionali, irrazionali algebriche[365] e $\pi$.

Che la proprietà di continuità dell'incremento della velocità di un grave sia fondamentale per la scienza del moto locale e, di conseguenza, per il sistema del mondo galileiano è suggerita dalla sua posizione di rilievo nel *Dialogo*. Essa compare sin dall'inizio della *prima giornata*, in cui si apre la prima parentesi a essa dedicata e che si protrae per svariate pagine.[366] L'accelerazione che, si ricordi, significa variazione di velocità e non rapporto tra questa e l'intervallo temporale in cui essa avviene, è continua quando il suo valore passa da 0, il valore della quiete,[367] al valore finale attraverso *tutti* i valori intermedi, detti *gradi*, o viceversa quando il

[364] *Opere di Galilei* VIII, p. 362.

[365] Gli *irrazionali algebrici* sono le soluzioni di equazioni in $x$ di grado $n$ a coefficienti razionali, come ad esempio $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ o, in generale, $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$.

[366] *Opere di Galileo* VII, pp. 44-55.

[367] "SAGR. […] zero, che rappresenta lo stato di quiete; […] il minimo grado sia il zero" (*Opere di Galileo* VII, p. 254).

mobile si muove verso l'alto per un impulso iniziale. Attraversarli tutti significa, in altre parole, che "non ci è ragione nissuna per la quale e' debba entrare in un tal determinato grado di velocità, prima che entrare in un minore, ed in un altro ancor minore prima che in quello; anzi par molto ben ragionevole passar prima per i gradi più vicini a quello donde ei si parte, e da quelli a i più remoti."[368] In questa descrizione, è palese il riferimento alle grandezze geometriche che possono dare un'efficace rappresentazione dei gradi di velocità come segmenti, aventi lunghezze proporzionali al grado cui si riferiscono. L'espressione "entrare in un grado" suggerisce l'immagine della matita che arriva a tracciare l'estremità finale del segmento, non prima di aver tracciato i tratti precedenti, dall'estremità di partenza, cioè il punto d'inizio. Il riferimento all'ambito geometrico è provato dal fatto che i gradi intermedi sono *infiniti*[369] e che a ogni grado corrisponde un istante di tempo.[370] La necessità della conclusione dipende dal fatto che la continuità del tempo era accettata, come pure l'equivalente infinità di istanti che qualunque intervallo temporale conteneva.[371] L'infinito numerico, invece, crea delle difficoltà che Galileo riassume con le parole di Salviati: "essendo nel moto accelerato l'augmento continuo, non si può compartire i gradi di velocità, la quale sempre

[368] *Opere di Galileo* VII, p. 44, p. 225, p. 226.

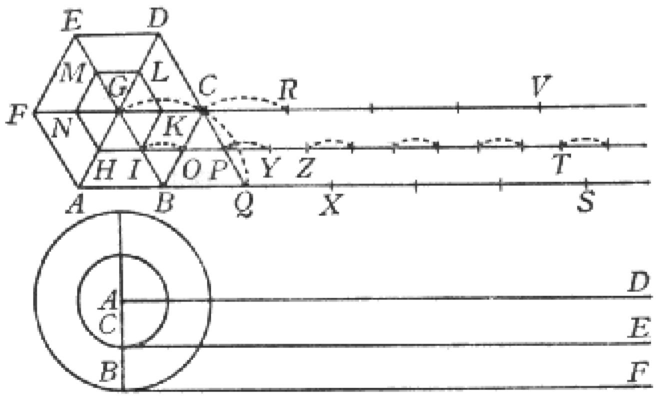
[369] "SAGR. Io sento con gran gusto questo discorso, e maggiore credo che sarà doppo che mi abbiate rimossa una difficoltà: la quale è, che io non resto ben capace come di necessità convenga che un mobile, partendosi dalla quiete ed entrando in un moto al quale egli abbia inclinazion naturale, passi per tutti i gradoi di tardità precedenti, che sono tra qualsivoglia segnato grado di velocità e lo stato di quiete, li quali gradi sono infiniti" (*Opere di Galileo* VII, p. 45); "la tardità si conduca a essere infinita" e "passa per tutti gl'infiniti gradi di tardità" (*Opere di Galileo* VII, p. 52); "nel piano inclinato il mobile grave spontaneamente descende e va continuamente accelerandosi […]; ma sul piano ascendente […] 'l moto impressogli va continuamente scemando, sì che finalmente si annichila" (*Opere di Galileo* VII, pp. 172-173).

[370] "SALV. […] contenendo qualsivoglia piccol tempo infiniti instanti, non ce ne mancheranno per assegnare il suo a ciascheduno de gl'infiniti gradi di tardità, e sia il tempo qualsivoglia breve" (*Opere di Galileo* VII, p. 46).

[371] "SALV. […] perché l'accelerazione si fa continuamente di momento in momento […], essendo posto il termine A come momento minimo di velocità, cioè come stato di quiete e come primo instante del tempo susseguente AD, è manifesto che avanti l'acquisto del grado di velocità DH, fatto nel tempo AD, si è passato per altri infiniti gradi minori e minori, guadagnati ne gli infiniti instanti che sono nel tempo DA, corrispondenti a gli infiniti punti che sono nella linea DA" (*Opere di Galileo* VII, p. 255).

cresce, in numero alcuno determinato, perché, mutandosi di momento in momento, son sempre infiniti: però meglio potremo esemplificare la nostra intenzione figurandoci un triangolo."[372] Nei *Discorsi* il riferimento alla continuità si incontra innanzitutto all'interno della nuova scienza della resistenza dei materiali, in concomitanza con la presentazione della teoria della materia, composta di particole e vuoti e la relazione tra continuo e infinito è illustrata grazie alla *ruota di Aristotele*.[373]

Il problema della ruota era uno dei quesiti presenti nei *Problemi meccanici* pseudo-aristotelici, dedicato ai movimenti di cerchi concentrici: "perché mai il cerchio maggiore rotolando sviluppa una traiettoria uguale a quella del cerchio minore, quando siano solidalmente concentrici. […] E così la traiettoria viene ad essere talora uguale alla traiettoria sviluppata dal cerchio maggiore, talora invece uguale a quella sviluppata dal minore."[374] La spiegazione aristotelica non è esauriente, poiché giustifica la differenza dei percorsi complessivi con la traiettoria di quel cerchio che in un dato momento è considerato la causa del moto. Galileo lo presenta come la dimostrazione di "come in una continua estensione finita non repugni il potersi




[372] *Opere di Galileo* VII, p. 255.

[373] *Opere di Galileo* VIII, pp. 68-71. Si tralascia tutto quello che è inerente la teoria della materia, che non è funzionale ai contenuti del presente lavoro. Per uno studio dell'atomismo galileiano si vedano, in particolare, i saggi di Giancarlo Nonnoi "Galileo Galilei: quale atomismo?" e di Carla Rita Palmerino "Una nuova scienza della materia per la *scienza nova* del moto. La discussione dei paradossi dell'infinito nella prima giornata dei *Discorsi* galileiani" in *Atomismo e continuo nel XVII secolo*, a cura di Egidio Festa e Romano Gatto. Napoli: Vivarium, 1998; rispettivamente alle pp. 109-149 e pp. 275-319. Sono corredati da una bibliografia ampia ed esaustiva.

[374] Aristotele, *MHXANIKA* 855a28-856a40; in Aristotele, *Problemi meccanici*, a cura di Maria Elisabetta Bottecchia Dehò. Catanzaro: Rubbettino, 2000, pp. 104-111.

ritrovar infiniti vacui."[375] Invece di esaminare il caso della ruota, preferisce prima studiare il caso analogo di due esagoni concentrici e solidali che ruotano appoggiandosi sul lato maggiore. Dopo una rotazione completa, l'esagono maggiore ha sviluppato una lunghezza pari a sei volte la lunghezza di un suo lato (AB), pari al suo perimetro. Contemporaneamente, l'esagono minore ha percorso una lunghezza quasi uguale, che è prodotta dai sei lati più corti (HI) e dai sei archi (K=$\alpha$ BI, con $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$ e BI=AB) disegnati dall'estremità (I) del lato minore in rotazione attorno al vertice (B) del lato maggiore. Contemporaneamente, il centro della ruota esagonale (G) si sposta di quasi altrettanto spazio, tracciando sei archi di circonferenza di raggio BG e centro B. La differenza tra le traiettorie coincide con la differenza esistente tra l'arco di circonferenza e la corda a esso sottesa. Se si considera la stessa costruzione ma per un poligono di 1000 lati e poi uno di 100.000, si giunge a spiegare anche il comportamento di due ruote concentriche, poiché il cerchio può essere considerato come un poligono di infiniti lati. Il cerchio minore, però, non disegna un arco, bensì rimane sempre aderente alla linea che nasce srotolando la sua circonferenza. Questi due segmenti di retta tracciati dai punti delle due circonferenze hanno lunghezza uguale e, proprio perché sono punti, forniscono un modello geometrico della continuità della retta. Essendo la circonferenza un poligono di infiniti lati, la lunghezza della maggiore è uguale a quella della minore cui si devono aggiungere altrettanti vuoti che, in questo caso, non sono altro che "infiniti punti […] vacui"[376] che ne rappresentano i "suoi infiniti indivisibili vacui."[377] Questa nozione di continuità sempre ulteriormente divisibile comporta di conseguenza che le parti siano infinite e, per questo motivo, essa risulta composta "di infiniti indivisibili."[378] La soluzione galileiana, allora, è quella

[375] *Opere di Galileo* VIII, p. 68.

[376] *Opere di Galileo* VIII, p. 71.

[377] *Opere di Galileo* VIII, p. 72.

[378] *Opere di Galileo* VIII, p. 80.

di "distinguere e risolvere tutta la infinità in un tratto solo," cioè di "ammetter questa composizione del continuo di atomi assolutamente indivisibili."[379] Egli, infatti, trova un modo molto efficace per superare la dicotomia aristotelica di potenza e atto, che tentava di risolvere i paradossi dell'infinito. Galileo propone di prendere una lunghezza finita, ad esempio di lunghezza unitaria, e di piegarla in tante parti quanti sono i lati del poligono che si vuole racchiudere con essa. Quando si congiungono i suoi estremi per formare una circonferenza, ecco che si realizza (in atto) l'infinità delle suddivisioni della linea in infiniti indivisibili puntiformi. A riprova di questo, basta appoggiare la circonferenza su una retta tangente per ottenere l'individuazione di un punto: l'indivisibile della linea. D'altra parte, si può far ruotare la circonferenza mantenendola sempre tangente alla retta e, così facendo, in un tempo finito si scorrono tutti gli infiniti punti della circonferenza o, in altre parole, si contano i lati del poligono con infiniti lati. Basta che non si indugi, che non si resti cioè più di un istante sullo stesso punto.

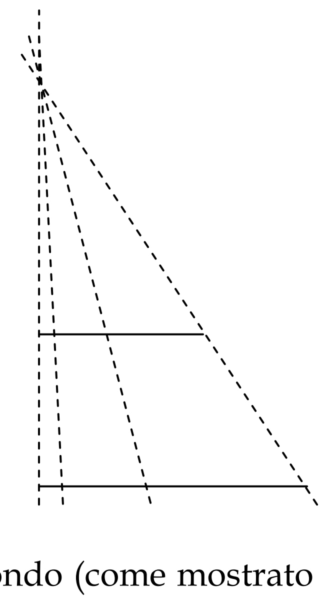
Nella *terza giornata* dei *Discorsi*, Galileo utilizza la stessa descrizione per spiegare come la velocità vari con continuità: "SALV. […] il mobile […] vi passa solamente, senza dimorarvi oltre a un istante; e perché in ogni tempo quanto, ancor che piccolissimo, sono infiniti instanti, però son bastanti a rispondere a gl'infiniti gradi di velocità."[380] Il movimento continuo della matita che traccia un segmento si può, quindi, immaginare realizzato aggiungendo un punto al tratto già disegnato, analogamente al procedimento di piegatura del segmento intero lungo i vertici del poligono che esso racchiuderà. La geometria così descritta è affine allo scorrere del tempo e la struttura del segmento è isomorfa alla composizione di un intervallo finito di tempo, visto come insieme di infiniti istanti. Quello che salvaguardia l'infinità attuale di un moto o di una variazione continua della velocità è proprio la corrispondenza delle proprietà di quest'ultima con quelle del segmento e dell'intervallo temporale. Per rendere indiscutibile la relazione biunivoca tra questi

[379] *Opere di Galileo* VIII, p. 93.

[380] *Opere di Galileo* VIII, p. 201.

tre insiemi, cioè l'insieme dei gradi di velocità, quello degli istanti di un arco di tempo limitato e quello dei punti di un segmento, Galileo utilizza come rappresentazione geometrica un triangolo rettangolo, in cui un cateto fornisce i punti-istanti che sono associati univocamente ad un segmento perpendicolare e parallelo all'altro cateto, rappresentativo della misura del grado di velocità.[381]

Dopo l'analisi concettuale e linguistica di come Galileo introduca e manipoli la continuità, è indispensabile prendere in considerazione anche la sua matematizzazione. Il termine non è corretto, se applicato a questo aspetto dell'opera galileiana, perché non si trova mai nei testi un uso esplicito di strumenti matematici che traducano le descrizioni in calcoli aritmetici. Per questo motivo è preferibile parlare di *grammatica dei gradi*, invece di *aritmetica del continuo*. Comunque, ciò non toglie che si possa associare al testo galileiano l'equivalente aritmetico o geometrico, anche se anacronistico. Quando Galileo deve rendere conto di come sia possibile raggiungere un certo valore partendo da zero attraverso un insieme infinito di passi intermedi, dice che il passaggio intermedio "è fatto senza dimorare in veruno" come se vi rimanesse "non [...] più di un solo instante di tempo."[382] Questo significa che la somma di infiniti contributi è possibile in atto, solo se la dimensione di ciascun elemento è paragonabile a quella di un istante di tempo. Non ci si deve, però, ingannare pensando che per Galileo il grado di velocità sia proporzionale al tempo. Il legame instaurato tra le due variabili, infatti, è quello di una corrispondenza uno-uno o biiezione tra i due insiemi di valori, rappresentabile con due segmenti di lunghezza diversa, dove i punti del più corto sono proiettati sul più lungo, costruendo la retta da un punto esterno, che passa per ciascun punto del primo segmento e interseca il secondo (come mostrato in figura). In questo modo si individua la grandezza dell'incremento-base che andrà



[381] *Opere di Galileo* VIII, p. 208, p. 242.

[382] *Opere di Galileo* VII, p. 46.

a costituire il grado di velocità alla fine del processo di addizione infinitario.[383] Stabilita questa misura, la proporzione corretta che descrive il legame tra la variabile-grado e la variabile-tempo durante il moto di un grave è quella inversa, per la quale più piccolo è l'incremento della velocità in ciascun istante del moto, più grande è il tempo necessario per arrivare a ottenere il valore finale della velocità.[384] Come si può facilmente ricavare dallo schema precedente, entrambi i segmenti contengono un'infinità di elementi costituenti che potremmo chiamare *punti*, solo intendendo con questo termine il limite cui tende l'infinita successione di suddivisioni della linea.[385] È rispetto a questo contesto che Galileo asserisce che "dell'infinito una parte non è maggior dell'altra, quando amendue sien finite."[386]

### *Par. 5 Torricelli: il ruolo del continuo nella scienza di Archimede.*

Torricelli si riferisce alla continuità solo indirettamente, quando vuole richiamare questa proprietà in relazione ad un altro oggetto matematico, solitamente un ente geometrico o il movimento di un punto lungo una linea.[387] Nel suo *De motu* egli ribadisce per ben due volte di scrivere per un lettore erudito e di

---

383 Galileo chiamava questo incremento-base finito *parte quanta* (*Opere di Galileo* VII, p. 255).

384 "SALV. […] il cadente per la perpendicolare CB ed il decrescente per l'inclinata CA, nei termini B, A si trovassero avere acquistati eguali gradi di velocità. Ora, seguitando più avanti, non credo che voi abbiate difficoltà veruna in concedere che sopra un altro piano meno elevato di AC, qual sarebbe, v.g., DA, il moto del descendente sarebbe ancora più tardo che nel piano CA: talché non è da dubitar punto che si possano notar piani tanto poco elevati sopra l'orizonte AB, che 'l mobile, cioè la medesima palla, in qualsivoglia lunghissimo tempo si condurrebbe al termine A, già che per condurvisi per il piano BA non basta tempo infinito, ed il moto si fa sempre più lento quanto la declività è minore" (*Opere di Galileo* VII, pp. 51).

385 "SALV. […] quelle parallele hanno per ultimo termine della loro diminuzione l'istesso contatto, che è un punto indivisibile" (*Opere di Galileo* VII, p. 229).

386 *Opere di Galileo* VII, p. 149.

387 A proposito di una linea, Torricelli dice: "una lunghezza, cioè una estensione di punti continuati" (*Opere di Torricelli* II, p. 247) che descrive un punto in moto continuo, che genera la lunghezza, dimensione a lui non propria. Inoltre, appartenendo al *De motu ac momentis varia* il punto cui si riferisce dà la posizione nel tempo di un corpo materiale.

dare per conosciute le nozioni presentate da Galileo nei suoi scritti.[388] Questo fa pensare che il lavoro di Galileo per dare fondamento a un nuovo e moderno concetto di velocità sia accettato *in toto* e ritenuto soddisfacente. A sostegno di questa ipotesi si consideri la Proposizione XVII, alla fine della quale Torricelli sottolinea che "passa il grave dopo la caduta AB per i singoli punti della parabola."[389] Il punto materiale o mobile percorre la traiettoria curvilinea con continuità, nello stesso modo in cui una linea si può pensare generata da una successione di punti, come è stato visto all'inizio di questo capitolo.

In definitiva e, soprattutto, data l'esigua mole degli scritti rimasti, Torricelli sembra non voler aggiungere nulla a quanto già scritto da Galileo sulla continuità delle grandezze cinematiche del moto locale. La sua preferenza per gli strumenti d'indagine puramente geometrici, d'altronde, farebbe anche pensare a una preferenza per il concetto geometrico di continuità. Il moto di un punto, infatti, è visto secondo una prospettiva più archimedea che galileiana. Galileo cerca all'interno della geometria un modo per esprimere quello che osserva nei fenomeni del mondo fisico. Torricelli, invece, prende spunto dal modello galileiano del moto e dalla matematizzazione delle grandezze fisiche per dedurre nuovi risultati per via geometrica. Nel suo caso, la parte più interessante del processo di scoperta è quella che estende il numero dei teoremi grazie all'applicazione della geometria piana e solida. La verifica della corrispondenza di tali risultati astratti a nuove proprietà o caratteristiche dei fenomeni reali sembra non essere al centro dei suoi interessi, stando a una lettura di quanto ci è rimasto.

Inoltre, si vedrà nel prossimo capitolo come Torricelli manipoli la continuità in un contesto che è quasi sempre geometrico. Il suo modo di immaginare le quantità è geometrico. Anche per il concetto di infinito e per la possibilità di realizzare somme finite di successioni di infiniti elementi si delega alle pagine

---

[388] *Opere di Torricelli* II, p. 104; *Scholium* p. 113.

[389] "Transit ergo grave post casum AB per singular propositae parabola puncta" (*Opere di Torricelli* II, p. 122; traduzione di Lanfranco Bellone in Evangelista Torricelli, *Opere scelte*, p. 184).

successive, nelle quali diventerà chiaro come le costruzioni siano efficaci e generali e, nello stesso tempo, frutto di un modo di pensare prettamente visivo e di grande potenza euristica.

# Capitolo 4.

## *L'infinito numerico e le grandezze fisiche matematizzate.*

### *Par. 1 Il "punto" della questione.*

La continua crescita o diminuzione della velocità dei moti uniformemente accelerati o decelerati, dei moti composti che li coinvolgono e l'esigenza di una sua descrizione matematica pone un problema fondamentale. Per Galileo, un grave che parte dalla quiete ha una velocità iniziale nulla che aumenta con lo scorrere del tempo, finché non si ferma bruscamente per la presenza di un ostacolo che ne impedisce il movimento. La velocità propria di un moto uniformemente accelerato è proporzionale al tempo trascorso e avviene con una variazione che ha un tasso costante. Di conseguenza, se la durata di un evento è misurata sommando il numero di unità temporali prese a riferimento, sembra scontato poter calcolare il valore di una velocità alla fine di una caduta sommando tra loro un certo numero di unità di misura della velocità tante volte quante sono le unità temporali. Si potrebbe chiamare il precedente procedimento, un *modello discreto* della variazione di velocità, coerente con il concetto di variazione che era in uso durante il medioevo, sino al sedicesimo secolo, e che è utilizzato ancora da Galileo nella dimostrazione di alcuni teoremi.[390] Galileo e Torricelli, invece, volevano realizzare un *modello continuo* per descrivere l'andamento della velocità nei moti uniformemente accelerati o decelerati, che era fondato sulla parcellizzazione del tempo in *istanti*, cui corrispondevano incrementi di velocità *quasi puntiformi*. Il processo di riduzione delle grandezze reali ai singoli contributi infinitesimali, inoltre, doveva essere percorso a ritroso. La ricomposizione delle grandezze finite risultava, pertanto,

[390] Stillman Drake, "Free Fall from Albert of Saxony to Honoré Fabri" in *Studies in History and Philosophy of Science*, 5 (1975), pp. 347-366. Per l'uso che fa Galileo di questo procedimento si vedano, ad esempio, la dimostrazione del Teorema I del moto uniforme (*Opere di Galileo* VIII, pp. 192-193) e i Teoremi I e II del moto accelerato (*Opere di Galileo* VIII, pp. 208-210).

dalla somma di infiniti termini di dimensioni infinitamente piccole come risultanti dall'interminabile e indeterminabile serie di suddivisioni che la definizione intuitiva di continuo (numerico) permetteva. Questa è l'origine del problema che Galileo cercò di risolvere con la teoria dei *quanta*, che Torricelli avrebbe poi trasformato nella teoria degli *indivisibili*.

Nel presente capitolo, si vuole indagare come i due autori abbiano sviluppato un modello di calcolo per descrivere le proprietà macroscopiche dei corpi in movimento che dipendono dalle proprietà delle particelle che le compongono. Il concetto di infinito vi è coinvolto in diversi modi e con diverse accezioni, in funzione del ruolo che esso gioca nel momento in cui viene preso in considerazione. Il problema di partenza è cruciale in un secolo che si interroga sulle proprietà dei corpi e della materia e come esse si possano spiegare in funzione degli elementi cui sono ricondotti. Come si vedrà nei successivi paragrafi, la domanda viene posta nel medesimo contesto, cioè quello di una *teoria della materia*.[391] Letti in questa prospettiva, i contributi di Galileo e Torricelli si possono considerare come i primi passi nella comprensione e descrizione di un modello proto-matematico del *calcolo infinitesimale*.

## *Par. 2 I quanta di Galileo.*

Riprendendo le fila del discorso lasciato nei capitoli precedenti, Galileo aveva bisogno di trasformare l'idea ingenua di velocità in un nuovo concetto quantificabile. La sua matematizzazione era, però, possibile soltanto a patto di dimostrare che era omogenea alle altre grandezze cinematiche, quali il tempo e lo spazio. La proprietà a fondamento di quest'operazione era la continuità, in virtù della quale si poteva instaurare la relazione biunivoca tra lo scorrere del tempo, la successione delle posizioni assunte e i valori della velocità assunti dal mobile. In

[391] Per il ruolo del continuo nella teoria della materia di Galileo, si veda il saggio di François de Gandt, *Force and Geometry in Newton's 'Principia'*. Princeton: Princeton University Press, 1995.

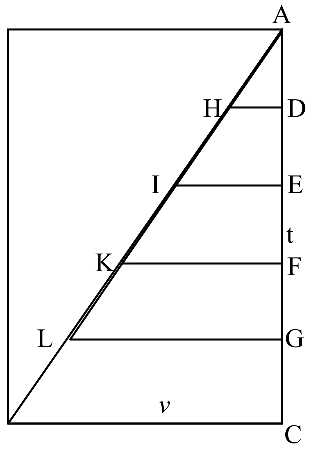
questo modo, la definizione della velocità come proprietà del mobile anziché del moto diventava esprimibile attraverso lo schema geometrico del segmento.

D'altra parte, come si è visto nel capitolo terzo, le difficoltà teoretiche e logiche portate dall'analisi del concetto di continuità erano rese ancor più complesse dal concetto di infinito, chiamato in causa sia dall'interminabile successione di suddivisioni prevista dalla definizione di grandezza continua, sia dalla crescita continua della grandezza in esame. Di contro, il processo di suddivisione doveva avere un termine di qualche tipo, mentre la variazione del tempo piuttosto che della velocità dovevano sempre avere un numero-lunghezza che li esprimesse. Inoltre, la differenza cognitiva che sussiste tra il modello geometrico e il modello numerico di continuità rendeva il problema ancor più complesso, com'era anche sottolineato dall'emergere di paradossi.

Alla domanda se e in che misura Galileo fosse consapevole di un tale intreccio di temi e problemi si può rispondere con le sue stesse parole. Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Salviati dedica un'unica pagina alla descrizione di come volesse geometrizzare la velocità, sia nel caso uniforme, sia in quello uniformemente accelerato.[392] In questa lunga spiegazione di Salviati, si nota come il *grado di velocità* non corrisponda esattamente alla nostra *velocità istantanea*. Innanzitutto, Galileo non mostra di pensare a una relazione funzionale quando associa il tempo alla velocità, poiché è la sua mutazione che è associata all'istante. Inoltre, non pensa alla velocità come data da uno spazio infinitesimo in rapporto all'infinitesimo di tempo corrispondente. Questo fa intravedere come il suo problema fosse quello di determinare la velocità finale raggiunta dal cadente al termine di un intervallo temporale. Detto in altri termini, Galileo non è interessato

[392] "SALV. […] Imperocché, essendo nel moto accelerato l'agumento continuo, non si può compartire i gradi di velocità, la quale sempre cresce, in numero alcuno determinato, perché, mutandosi di momento in momento, son sempre infiniti. […] Ma perché l'accelerazione si fa continuamente di momento in momento, e non intercisamente di parte quanta di tempo in parte quanta, […] è manifesto che avanti l'acquisto del grado di velocità DH, fatto nel tempo AD, si è passato per altri infiniti gradi minori e minori, guadagnati ne gli infiniti instanti che sono nel tempo DA, corrispondenti a gli infiniti punti che sono nella linea DA […]" (*Opere di Galileo* VII, p. 255).

all'accelerazione ma alla misura della velocità di un grave alla fine di un tragitto, sapendo che parte da fermo. È, infatti, questa la ragione alla base del diagramma che accompagna la spiegazione: le velocità sono simboleggiate da segmenti tutti aventi l'estremo iniziale sulla linea del tempo, cioè corrispondente al valore nullo iniziale della velocità, e non dall'insieme dei punti che sono l'estremità finale dei segmenti della velocità e che si sovrappongono al lato obliquo del triangolo.




Pertanto, è più aderente alle intenzioni galileiane parlare di *velocità finale guadagnata* dal mobile in un dato intervallo, oppure di *variazione di velocità* (in simboli moderni: $\Delta v = v_{i+1} - v_i = v_1 - v_0$). Da questo presupposto segue anche che ogni quantificazione della grandezza in esame è di tipo macroscopico, non infinitesimale.[393] Euristicamente parlando, questa possibilità, insieme con la definizione di moto naturalmente accelerato, costruisce un procedimento che porta a una misura della velocità e, di conseguenza, della sua accelerazione com'è concepita oggi, ma questo rappresenterebbe un anacronismo. A tal proposito, infatti, non si dimentichi che Galileo parlava di *accelerazione* per indicare genericamente una *velocità che varia*, come si è dimostrato nel corso del secondo capitolo. In aggiunta, essa sarebbe un'interpretazione forzata e che non corrisponde al concetto di spazio che Galileo aveva all'epoca, cioè il ritenere che l'area del triangolo i cui cateti indicano velocità e tempo rappresenti lo spazio percorso,[394]

---

[393] Continuando la citazione della nota precedente: "però per rappresentare la infinità de i gradi di velocità che precedono al grado DH, bisogna intendere infinite linee sempre minori e minori, che si intendano tirate da gl'infiniti punti della linea AD, parallele alla DH, la qual infinità di linee ci rappresenta in ultimo la superficie del triangolo AHD; e così intenderemo, qualsivoglia spazio passato dal mobile con moto che, cominciando dalla quiete, si vadia uniformemente accelerando, aver consumato ed essersi servito di infiniti gradi di velocità crescenti, conforme all'infinite linee, che, cominciando dal punto A, si intendono tirate parallele alla linea HD ed alle IE, KF, LG, BC, continuandosi il moto quanto ne piace " (*Opere di Galileo* VII, p. 255).

[394] S. Drake è di questo avviso (Stillman Drake, "The Uniform Motion Equivalent to a Uniformly Accelerated Motion from Rest" - ora in *Galileo Gleanings XX* -, *Isis* **63** 1 (Mar., 1972), pp. 28-38), mentre per A. Frajese e

come lo sarebbe per noi che vediamo l'area del triangolo, cioè lo spazio percorso, come l'integrale della funzione velocità rispetto al tempo, sua variabile indipendente.[395] Per Galileo, la superficie delimitata dal triangolo possiede una *massa*, le corrisponde cioè una quantità o estensione numerica che si misura e che

---

E.R. Grosholz, Galileo attribuiva all'area del triangolo il significato di spazio percorso (Attilio Frajese, *Galileo matematico*. Roma: Editrice Studium, 1964; Emily R. Grosholz, "Geometry, Time and Force in the Diagrams of Descartes, Galileo, Torricelli and Newton" in *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1988, Volume Two: Symposia and Invited Papers (1988), pp. 237-248 Published by: The University of Chicago Press on behalf of the Philosophy of Science Association). D'altronde, è vero che nel *Dialogo* Galileo sembra alludere allo spazio quando si riferisce all'area del triangolo tempo-velocità, cosa che evita di fare nei *Discorsi*. Secondo M.G. Evans, era di dominio comune ad una certa tradizione il fatto di riferirsi alla superficie del triangolo delle velocità come ad uno spazio (Melbourne G. Evans, "Aristotle, Newton, and the Theory of Continuous Magnitude" in *Journal of the History of Ideas* **16** 4 (Oct., 1955), pp. 548-557).

[395] Proseguendo ancora: "Ora finiamo l'intero parallelogrammo AMBC, e prolunghiamo sino al suo lato BM non solo le parallele segnate nel triangolo, ma la infinità di quelle che si intendono prodotte da tutti i punti del lato AC. E sì come la BC era massima delle infinite del triangolo, rappresentanteci il massimo grado di velocità acquistato dal mobile nel moto accelerato, e tutta la superficie di esso triangolo era la massa e la somma di tutta la velocità con la quale nel tempo AC passò un tale spazio, così il parallelogrammo viene ad esser una massa ed aggregato di altrettanti gradi di velocità, ma ciascheduno eguale al massimo BC, la qual massa di velocità viene a esser doppia della massa delle velocità crescenti del triangolo, sì come esso parallelogrammo è doppio del triangolo;" (*Opere di Galileo* VII, pp. 255-256). Questo brano può essere considerato la risposta al quesito che Bonaventura Cavalieri presentò a Galileo nella sua lettera del 15 dicembre 1621: "Il dubbio è questo, al quale mando inanzi questa esplicatione: Se in una figura piana s'intenderà tirata una linea retta come si voglia, et in quella poi tirateli parallele tutte le linee possibili a tirarsi, chiamo queste linee così tirate tutte le linee di quella figura; e se in una figura solida s'intenderano tirati tutt'i piani possibili a tirarsi paralleli ad un certo piano, questi piani gli chiamo tutt'i piani di quel solido. Hora vorrei sapere se tutte le linee d'un piano a tutte le linee d'un altro piano habbino proportione, perché potendosene tirare più e più sempre, pare che tutte le linee d'una data figura sieno infinite, e però fuor della diffinitione delle grandezze che hano proportione; ma perché poi, se si aggrandisse la figura, anco le linee si fano maggiori, essendovi quelle della prima et anco quelle di più che sono nell'eccesso della figura fatta maggiore sopra la data, però pare che non sieno fuora di quella diffinitione: però desidero esser da V. S. sciolto di questo dubbio" (*Opere di Galileo* XIII, p. 81). Galileo non rispose e qualche tempo dopo Cavalieri gli scrive di aver comunque risolto: "Alcune cose, come chiare, per brevità le ho tralasciate, in particolare nel bel principio, che tutte le linee di due figure piane e tutte le superficie di due figure solide habino proportione, il che parmi facile da dimostrare; perché, multiplicando l'una delle dette figure, si multiplicano anco tutte le linee nelle piane e tutte le superficie nelle solide, sì che tutte le linee d'una figura, overo superficie, possono, cresciute, avanzare tutte le linee, o superficie, dell'altre, e così sarano ancor esse fra le grandezze ch'hanno proportione. Come io pigli poi questo termine (tutte le linee d'una figura piana, o tutte le superficie d'un solido), lo dichiaro in esso trattato. Di gratia, mi favorisca di dirmene il suo parere, ché ben può pensare che lo sto aspettando con gran desiderio" (lettera del 22 marzo 1622 in *Opere di Galileo* XIII, pp. 86-87). Cavalieri ne era soddisfatto, come afferma nella sua lettera a Galileo del 17 dicembre 1627: "inviai l'opera che già componeva, qual V. S. sa, a Mons.r Ciampoli, havendola terminata nel miglior modo che ho saputo e potuto, non havendo mutato quel mio fondamento di quelle che chiamo tutte le linee di una figura piana o tutti i piani d'una solida, poiché a me pare che sia con evidenti e salde ragioni stabilito a bastanza." (*Opere di Galileo* XIII, p. 381).

sta in una relazione matematica precisa con la superficie della seconda figura. Sembra, quindi, indubitabile che Galileo mettesse in relazione il *peso* della superficie del triangolo e del rettangolo, nati dalla rappresentazione della velocità rispettivamente del moto uniformemente accelerato e del moto uniforme, allo spazio percorso: "e però, se il mobile che cadendo si è servito de i gradi di velocità accelerata, conforme al triangolo ABC, ha passato in tanto tempo un tale spazio, è ben ragionevole e probabile che servendosi delle velocità uniformi, e rispondenti al parallelogrammo, passi con moto equabile nel medesimo tempo spazio doppio al passato dal moto accelerato."[396] Infatti, immaginando di prendere intervalli temporali uguali, sia in estensione sia in numero, e di considerare in ciascuno di essi il moto come se fosse uniforme con velocità pari alla velocità che vi si misura, lo spazio percorso risulta proporzionale alla velocità qualunque sia il tipo di moto. In questo senso, a Galileo poteva sembrare "probabile" che lo spazio totale fosse proporzionale al diagramma delle velocità.

La possibilità di scomporre una linea continua in infiniti elementi infinitesimi e, di conseguenza, ricomporre le "particelle" nell'unità iniziale aveva allora un ruolo centrale nella questione. La validità delle due nuove scienze galileiane dipendeva in modo molto stretto dalla bontà dei metodi di decomposizione e ricomposizione delle grandezze continue. Una linea continua, come ad esempio quella di un segmento, è composta di infiniti punti per definizione.[397] Se essi fossero "quanti", cioè di valore finito o determinato anche se piccolo e a loro volta continui, la loro sommatoria darebbe come risultato una grandezza di valore infinito.[398] Nell'analisi del paradosso della *ruota di Aristotele*,

---

[396] È la fine della spiegazione di Salviati, presentata nelle note precedenti (*Opere di Galileo* VII, p. 256). Si noti come gli aggettivi "ragionevole" e "probabile" indichino l'incapacità da parte di Galileo di dimostrare geometricamente la validità di quanto appena affermato. La presentazione di Salviati corrisponde al *teorema mertoniano* dimostrato all'inizio dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (si veda a tal proposito le note 102 e 103).

[397] Si veda la citazione alle note 386 e 387.

[398] *Opere di Galileo* VIII, p. 71.

che è stata presentata nel capitolo precedente, si intrecciano due problemi, quello dell'analisi di un movimento composto e quello della relazione biunivoca tra punti di due diverse circonferenze. Entrambe sono collegate ai concetti di continuità, di infinito e di numero.[399] Galileo utilizza il termine *quanto* come opposto a infinito, nel senso di numero di elementi limitato.[400] Per lui, ogni oggetto della geometria gode della stessa proprietà di essere continuo e, pertanto, composto da infiniti indivisibili o "non quanti".[401] Solo infiniti indivisibili riescono a produrre una grandezza "divisibile e quanta", per quanto piccola essa sia, poiché un numero limitato anche se grande produrrebbe sempre una grandezza nulla.[402] Il concetto di "quanto" è, pertanto, molto sottile. Oltre a definire una grandezza piccola ma determinata, finita, esso è il più piccolo elemento a mantenere anche la proprietà di continuità. Il loro numero all'interno di una qualunque grandezza continua non è né finito, né infinito: "le parti quante nel continuo […] non esser né finite né infinite, ma tante

[399] "We are concerned, in the problem of ARISTOTLE'S Wheel, with two matters, (I) the problem of motion, particularly the composition of motions, and (2) the point-to-point correspondence of paths of different lengths. These matters are, to be sure, only apparently independent, for both are, at least from one view-point, ultimately bound up with the problems of continuity, infinity, and the number system" (p. 169 in Israel E. Drabkin, "Aristotle's Wheel: Notes on the History of a Paradox" in *Osiris* 9 (1950), pp. 162-198 Published by: The University of Chicago Press on behalf of The History of Science Society).

[400] "[E] sì come i lati [di un cerchio] non son quanti, ma infiniti"; "risolvendo e dividendo una linea in parti quante, e per conseguenza numerate"; "imaginandola [la linea] risoluta in parti non quante, cioè ne' suoi infiniti indivisibili, la possiamo concepire distratta in immenso senza l'interposizione di spazii quanti vacui, ma sì bene d'infiniti indivisibili vacui" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 71-72); "SALV. […] stante che la linea ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non veggo come si possa sfuggire, la composizione essere di infiniti indivisibili, perché una divisione e subdivisione che si possa proseguir perpetuamente, suppone che le parti siano infinite, perché altramente la subdivisione sarebbe terminabile; e l'esser le parti infinite si tira in consequenza l'esser non quante, perché quanti infiniti fanno un'estensione infinita: e così abbiamo il continuo composto d'infiniti indivisibili" (*Opere di Galileo* VIII, p. 80).

[401] "E questo che si dice delle semplici linee, s'intenderà detto delle superficie e de' corpi solidi, considerandogli composti di infiniti atomi non quanti" (*Opere di Galileo* VIII, p. 72). Il punto di vista di Bonaventura Cavalieri era diverso: "assolutamente io non mi dichiaro di componere il continuo d'indivisibili, ma solo mostro che i continui hanno la proportione delli aggregati di questi indivisibili, non assumendo io se non le linee o punti di retto transito" (lettera di Cavalieri a Galileo del 2 ottobre 1634 in *Opere di Galileo* XVI, p. 138).

[402] *Opere di Galileo* VIII, p. 77.

che rispondono ad ogni segnato numero".[403] Inoltre, il quanto è sì un elemento infinitesimale, nel senso che ha una misura piccola a piacere ma mai nulla, ma è un oggetto di ordine superiore all'ordine in cui si trovano gli indivisibili.[404] Applicando questa costruzione astratta alla spiegazione del comportamento fluido dell'acqua, Galileo asserisce che "i minimi dell'acqua, ne i quali ella pur sembra esser risoluta […], esser differentissimi da i minimi quanti e divisibili; né saprei ritrovarci altra differenza, che l'esser indivisibili".[405] Sembra, quindi, esserci una gerarchia negli ordini di grandezza (continuità finita – quanti – indivisibili) anche in natura, non solo nella sfera matematica, sia per quel che riguarda la composizione degli oggetti materiali (materia – particelle – atomi), sia per quel che riguarda la struttura del tempo (tempo – *momenta* – istanti).[406] L'effetto che ha il salto di livello tra quanti e indivisibili rispetto al procedimento di sommazione potrebbe essere paragonato al salto di livello esistente tra l'insieme dei numeri razionali e quello degli irrazionali. Come si è detto nel capitolo precedente, la cardinalità degli irrazionali è incommensurabile a quella dei razionali che, a sua volta, è la stessa dei naturali.

Dopo l'esame della dinamica di scomposizione del continuo geometrico, è ora venuto il momento di analizzare la sua ricomposizione. Le relazioni tra gli enti geometrici elementari, quali il punto, la linea, la superficie e lo spazio, sono presentate negli *Elementi* di Euclide. Anche per Galileo "una linea […] contiene ella

[403] *Opere di Galileo* VIII, p. 81.

[404] "SALV. […] in proposito del volere o poter risolver la linea ne' suoi infiniti […]: col qual ordine chi credesse di trovare i suoi infiniti punti, s'ingannerebbe indigrosso, perché con tal progresso né men la division di tutte le parti quante si perverrebbe in eterno; ma de gli indivisibili tanto è lontano il poter giugner per cotal strada al cercato termine, che più tosto altri se ne discosta, e mentre pensa, col continuar la divisione e col multiplicar la moltitudine delle parti, di avvicinarsi alla infinità, credo che sempre più se n'allontani" (*Opere di Galileo* VIII, p. 82).

[405] *Opere di Galileo* VIII, p. 86.

[406] "SALV. […] dove i lati di qualsivoglia poligono son compresi da qualche numero, i lati del cerchio sono infiniti: quelli sono quanti e divisibili; questi, non quanti e indivisibili: i termini de i lati del poligono nella revoluzione stanno per qualche tempo fermi […]; ne i cerchi similmente le dimore de' termini de' suoi infiniti lati son momentanee, perché tal parte è un instante d'un tempo quanto, qual è un punto d'una linea, che ne contiene infiniti" (*Opere di Galileo* VIII, p. 95). "SALV. […] una esperienza che tenda anche ad una composizione d'infiniti indivisibili nelle materie fisiche" (*Opere di Galileo* VIII, p. 99).

punti infiniti",[407] anche se il separare "i punti l'uno dall'altro e ve li faccia veder a uno a uno distinti sopra questa carta"[408] è impossibile. Infatti, "il risolver la linea ne' i suoi infiniti punti non è solamente impossibile, ma né meno ha in sé maggior difficoltà che 'l distinguere le sue parti quante".[409] Il problema che affronta, però, è quello di capire se e come un punto possa generare una linea, una linea generare una superficie, una superficie generare un solido, poiché i due enti in gioco differiscono per una dimensione. Detto in altre parole, la domanda chiede come sia possibile che un punto, oggetto privo di dimensioni, possa generare una linea che ha la dimensione della lunghezza, cioè com'è possibile che sommando contributi nulli nel senso della lunghezza si riesca ad ottenere una lunghezza finita non nulla. L'unico requisito esplicito è che il loro numero sia infinito, com'è stato visto nelle pagine precedenti. Che sia possibile che questa sommatoria di infiniti elementi indivisibili dia un valore finito, lo si può facilmente ottenere non tramite suddivisione, ma grazie a un metodo geometrico che verifica direttamente se la lunghezza data finita è composta da indivisibili: la tangenza in un punto di una circonferenza che ruota su di un piano.[410] Di nuovo, l'elemento *movimento* possiede un ruolo determinante.[411] L'unico modo per essere certi della corretta composizione

---

[407] *Opere di Galileo* VIII, p. 81.

[408] *Opere di Galileo* VIII, pp. 91-92.

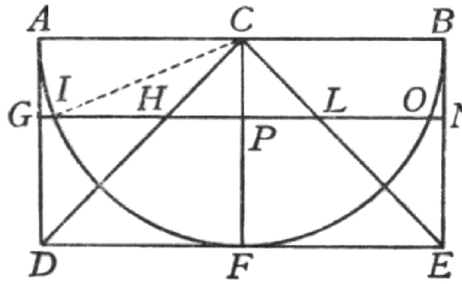
[409] *Opere di Galileo* VIII, p. 91.

[410] "SALV. […] quando io formi di lei [un segmento] un poligono di lati infiniti, cioè quando io la infletta nella circonferenza di un cerchio, […] tal risoluzione esser fatta ne' suoi infiniti punti […]. Il cerchio, che è un poligono di lati infiniti, tocca la medesima retta con uno de' i suoi lati, che è un sol punto, diverso da tutti i suoi collaterali, e perciò da quelli diviso e distinto non meno che un lato del poligono da i suoi con terminali: […] così il cerchio girato sopra un tal piano descrive con gl'infiniti suoi successivi contatti una linea retta egual alla propria circonferenza" (*Opere di Galileo* VIII, p. 92).

[411] Si veda a tal proposito l'opinione di Cavalieri: "nel concetto di tutte le linee di una figura piana o di tutti i piani di un corpo non si devono, secondo le mie definitioni, intendere le estreme, benché parino del medesimo genere; poiché chiamo tutte le linee di una figura piana le communi settioni del piano segante la figura nel moto fatto da esso da un estremo a l'altro o da una tangente sino all'opposta tangente: hora, perché il principio e termine del moto non è moto, perciò non si devono computare le estreme tangenti fra tutte le linee; e così non è meraviglia, intendendo l'istesso per i piani ne' solidi, che questi estremi restino diseguali, come nel suo essempio della scodella" (lettera di Bonaventura Cavalieri a Galileo del 19 dicembre 1634 in *Opere di Galileo* XVI, p. 175).

o comportamento dell'insieme di posizioni dei punti che formano una linea è dato dal moto di un punto nel tempo, che assume tutte le posizioni che formano l'insieme-linea studiato.

Un'altra relazione importante tra punto e linea è presentata nelle pagine dedicate all'esame della composizione della materia. Per Galileo, un punto e una linea si possono considerare "uguali" se il loro comportamento è assimilabile a quello mostrato nel *teorema della scodella*.[412] Si prenda un cono retto (CDE), avente l'altezza uguale al raggio della sua base (CF = FE), e lo si inserisca in un cilindro (ABED) che ha per base un la base del cono e per altezza l'altezza del cono. All'interno di questo cilindro, si scavi una mezza sfera (AIFOB) avente lo stesso raggio del cono (CA = CI = CF) e tangente nel centro (F) della base del cono. La "scodella" così ottenuta contiene il cono. Ora, si prenda un piano (GN) parallelo alla base della scodella e lo si ponga a una qualunque altezza intermedia. Si dimostra che l'area dell'anello ritagliato dal piano nella scodella è uguale all'area del cerchio intersecato dal piano con il cono, qualunque sia la sua altezza. Di conseguenza, se il piano di sezione è fatto passare all'estremità superiore del solido (AB), l'anello degenera in una circonferenza e il cerchio in un punto (C). Pertanto, punto e linea sono "uguali". In realtà, a nostro parere, il problema nasce dall'aver identificato una relazione che non è quella più opportuna. Non si hanno, invece, conseguenze paradossali se si sceglie come relazione quella di equiestensione, cioè l'uguaglianza delle aree delle due figure nate dalla sezione con il piano. Il caso limite punto-circonferenza sancisce l'uguaglianza dei due elementi rispetto alla misura della superficie. In questo senso, allora, il risultato non è paradossale poiché sia un punto, sia una linea, sono di misura nulla rispetto a una misura di superficie. Questo, però, non ne dimostra l'uguaglianza in senso generale come vorrebbe far credere Galileo che, invece, ritiene che l'estensione della relazione precedente a questo caso sia una




412 *Opere di Galileo* VIII, p. 74-76.

forte prova a favore dell'uguale comportamento che avrebbero linea e punto in materia di composizione di superfici e linee, rispettivamente. Ciò nonostante, Galileo afferma che gli "attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro."[413]

### *Par. 3 La velocità infinitesimale di Galileo.*

Se si applica quanto appena stabilito al concetto di grado di velocità, risulta corretto pensarlo come una *variazione di velocità formata da indivisibili*, quando si vuole ricomporla in un continuo, e come *variazione di velocità formata da quanti*, quando è il risultato della scomposizione della velocità. L'aggiunta galileiana alla definizione di moto equabile, secondo la quale gli spazi percorsi si devono confrontare con tempi uguali "comunque presi", rende possibile il confronto tra spazi e tempi *quanti* che garantisce davvero di aver a che fare con un reale moto uniforme. Anche la definizione di moto equabilmente accelerato è compatibile con questa interpretazione, purché i "momenti di velocità" siano intesi come sinonimi di "gradi di velocità", ma in più con l'idea che il loro acquisto avvenga in un "momento" o quanto di tempo e che abbia una dimensione pari al quanto di spazio.[414] La relazione che Galileo istituisce tra il tempo e la velocità richiede che le loro grandezze siano piccole a piacere ma con lo stesso requisito di continuità che appartiene, in ultima istanza, solo ai quanti e non agli infinitesimi.[415] La struttura

[413] *Opere di Galileo* VIII, pp. 77-78. Si faccia attenzione: per Galileo questa impossibilità di confrontare infiniti tra loro, nello stesso modo che viene utilizzato per confrontare grandezze e quantità finite, è una prova a sostegno del fatto che davvero un punto e una circonferenza sono uguali. Per noi, invece, la soluzione del paradosso è diversa, come descritto poc'anzi.

[414] L'esistenza e l'uso di questa accezione del termine *momento* sono stati studiati da Galluzzi nel suo saggio *Momento*. Roma: Edizioni dell'Ateneo & Bizzarri, 1979.

[415] "SAGR. […] essendo il tempo subdivisibile in infinito, ne séguita che, diminuendosi sempre con tal ragione l'antecedente velocità, grado alcuno non sia di velocità così piccolo, o vogliamo dire di tardità così grande, nel quale non si sia trovato costituito l'istesso mobile dopo la partita dall'infinita tardità, cioè dalla quiete […].

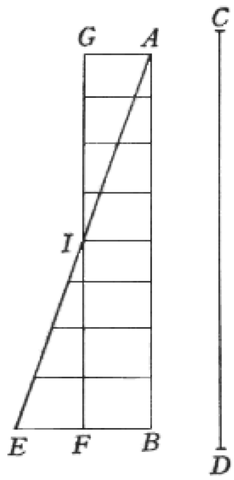
continua e il tessuto infinitario del tempo e della velocità sono la condizione di esistenza del moto stesso, che permette e realizza la messa in moto del grave. In nessun altro modo si può fondare un moto continuo che renda conto dell'apparente discontinuità iniziale del passaggio dallo stato di quiete a quello di moto. È solo grazie alla presenza degli indivisibili che l'aumento o la diminuzione della velocità iniziale del moto può variare con continuità di istante in istante *successivo*, senza dar luogo a paradossi. Il mobile, infatti, non deve dimorare in un grado qualsiasi per più di un istante,

> perché in ogni tempo quanto, ancor che piccolissimo, sono infiniti instanti, però son bastanti a rispondere a gl'infiniti gradi di velocità diminuita. Che poi tal grave ascendente non persista per verun tempo quanto in alcun medesimo grado di velocità, si fa manifesto così: perché se, assegnato qualche tempo quanto, nel primo instante di tal tempo ed anco nell'ultimo il mobile si trovasse aver il medesimo grado di velocità, potrebbe da questo secondo grado esser parimente sospinto in su per altrettanto spazio, […] e finalmente continuerebbe il suo moto uniforme in infinito.[416]

SALV. […] i primi impeti del cadente, benché gravissimo, esser lentissimi e tardissimi […]. Noi abbiamo un sasso grave, sostenuto nell'aria in quiete; si libera dal sostegno e si pone in libertà, e, come più grave dell'aria, vien descendendo al basso, e non con moto equabile, ma lento nel principio, e continuamente dopo accelerato: ed essendo che la velocità è augumentabile e menomabile in infinito, qual ragione mi persuaderà che tal mobile, partendosi da una tardità infinita (ché tal è la quiete), entri immediatamente in dieci gradi di velocità più che in una di quattro, o in questa prima che in una di due, di uno, di un mezo, di un centesimo?" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 199-200).

[416] *Opere di Galileo* VIII, p. 201.

In questo comportamento è insita una *virtù conservativa* del moto acquisito[417] che, però, sembra propria soltanto dei quanti e non degli indivisibili, poiché è la permanenza del mobile in un quanto temporale con un quanto di velocità che produce un moto infinito uniforme, mentre gli indivisibili puntiformi sono liberi di far variare la loro quantità, realizzando un moto finito sia nel tempo, sia nel valore della velocità. Galileo applica questo insieme di relazioni tra tempi, spazi e gradi di velocità, tutte fondate sul concetto di continuità, nelle dimostrazioni dei teoremi del moto uniformemente accelerato. In uno di essi la proprietà di continuità è centrale.




Il Teorema I del moto accelerato[418] è la riproposizione dell'enunciato presentato nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi*, che collega un certo moto di caduta con un moto uniforme.[419] Le due dimostrazioni sono diverse in alcuni punti.[420] Innanzitutto, il diagramma del teorema è costruito sovrapponendo un triangolo rettangolo (ABE) e un rettangolo (ABFG), aventi la stessa area. Pertanto, il rettangolo ha per altezza la stessa altezza del triangolo (AB) e per base un segmento (FB) che è la metà del cateto di base del triangolo (EB). La figura, invece, presente nel *Dialogo* mostra un rettangolo che contiene il triangolo.[421] In secondo luogo, nel teorema lo spazio è rappresentato da un segmento (CD) esterno alla figura principale, secondo l'uso di Euclide, mentre nella spiegazione del *Dialogo* si cerca di stabilire lo spazio percorso nei due moti senza

[417] Questo riferimento alla presenza di una virtù impressa non è peregrino, poiché anche Sagredo spiega la "causa dell'accelerazione del moto naturale de i gravi" mediante il bilanciamento di una "virtù impressagli dal proiciente" con la virtù impressa e "contraria della gravità" (*Opere di Galileo* VIII, p. 201).

[418] Si veda l'enunciato alla nota 72 di p. 23 e il suo ruolo all'interno del trattato galileiano, pp. 23-24.

[419] Si vedano le note 386-387 e 389-390 e la sua analisi sviluppata a p.147 e seguenti.

[420] Tra gli autori che hanno esaminato lo stesso problema, Attilio Frajese è quello che ne ha scritto più estesamente. Sebbene l'analisi venga condotta attraverso gli stessi testi, le sue conclusioni sono molto diverse da quelle presentate nel presente lavoro. Si veda il saggio di Attilio Frajese, "Galileo e la somma delle linee" in Attilio Frajese, *Galileo matematico*. Roma: Editrice Studium, 1964, pp. 106-122.

[421] Si veda il diagramma a p. 154.

rappresentarlo. Inoltre, la tecnica dimostrativa è diversa, dovendosi adattare alle diverse finalità dell'opera: geometrica e tecnica l'una, più discorsiva e divulgativa l'altra.

Per quanto riguarda la costruzione del triangolo del moto accelerato, disegnato il cateto AB verticale del tempo complessivo di caduta dalla quiete, Galileo traccia il cateto orizzontale BE della velocità massima raggiunta dal mobile. L'ipotenusa AE che chiude il triangolo delimita i segmenti, paralleli a BE e tutti con l'origine in un punto del segmento dei tempi AB, che rappresentano i gradi di velocità propri del cadente nell'istante corrispondente all'estremo del segmento stesso. Per quanto riguarda il rettangolo del moto uniforme, il segmento AB continua a essere la linea del tempo, perché i due moti saranno confrontati in conformità a un medesimo intervallo temporale, mentre il segmento della velocità del moto uniforme è BF, la metà del segmento BE. Se l'equivalenza delle due figure è un noto risultato della geometria piana, per estenderne la validità anche all'ambito cinematico serve qualcosa di più. Galileo afferma che "l'aggregato di tutte le parallele contenute nel quadrilatero è uguale all'aggregato di quelle contenute nel triangolo AEB."[422] Due insiemi di segmenti, infiniti come l'infinito numero dei punti della linea temporale e quello degli istanti presenti nell'intervallo di tempo del moto, sono paragonabili proprio perché ogni punto-istante è l'origine di due segmenti, quello del grado di velocità del moto uniforme e quello del moto accelerato.[423] Poiché le loro lunghezze sono diverse, eccezion fatta per il grado di velocità che divide a metà l'intervallo temporale, un modo per ottenere l'equivalenza consiste nell'utilizzare l'uguaglianza delle aree delle due figure. Se i punti-istanti assicurano l'uguale numerosità dei segmenti, paralleli a EB e che

---

[422] "[H]abebimus aggregatum parallelarum omnium in quadrilatero contentarum aequalem aggregatui comprehensarum in triangulo AEB" (*Opere di Galileo* VIII, p. 208).

[423] "Cumque singulis et omnibus instanti bus temporis AB respondeant singula et omnia puncta lineae AB, ex quibus actae parallelae in triangulo AEB comprehensae crescentes gradus velocitatis adauctae repraesentant, parallelae vero intra parallelogrammum contentae totidem gradus velocitatis non adauctae, sed aequabilis, itidem repraesentent" (*Opere di Galileo* VIII, pp. 208-209).

appartengono alle due figure piane, si può definire una relazione che accoppia i gradi di velocità del moto accelerato con quelli del moto uniforme, in modo che la differenza in eccesso tra i due elementi della coppia in corrispondenza coincida con la differenza in difetto di un'altra coppia.[424] Ciò nonostante, il procedimento che associa le differenze in eccesso e in difetto non è controllabile nella totalità dei casi e, per questo motivo, non dimostra quanto voluto. Galileo, quindi, può soltanto confrontare insiemi finiti di segmenti o, in alternativa, aree di figure.

Il nodo cruciale è l'identità tra l'insieme delle infinite parallele del triangolo e del rettangolo e l'estensione della superficie delle due figure piane. A rigore, Galileo accetta che una sovrapposizione di infinite linee in una direzione diversa da quella della lunghezza, che è priva di dimensione per definizione di linea, produca una dimensione finita. Qui converge e prende senso quanto visto in precedenza, quando si analizzavano le proprietà degli indivisibili e dei quanta nel processo di sommazione infinitaria, portando una nuova luce sul ruolo delle prime due giornate dei *Discorsi*.

## *Par. 4 Le premesse dell'analisi di Torricelli.*

Gli storici sono concordi nell'attribuire la paternità del *metodo di esaustione* a Eudosso,[425] autore della teoria delle proporzioni valida anche per i rapporti incommensurabili, che si basava sul concetto di *grandezza* come oggetto matematico d'imprecisata natura (poteva essere un segmento, un angolo, un tempo, un volume) che varia con continuità. Nel suo linguaggio, le grandezze non erano numeri e non erano neppure associate a numeri. Soltanto il rapporto di due grandezze aveva assegnato un significato puramente geometrico, che poteva essere confrontato con

[424] "enim momentorum deficit in prima motus accelerate medietate […], reficitur a momentis per parallelas trianguli IEF repraesentatis" (*Opere di Galileo* VIII, p. 209).

[425] Eudosso (Cnido 408 aC – 355aC circa) è considerato il più grande matematico greco classico, secondo solo ad Archimede. Studiò alla scuola di Archita di Taranto e fondò una scuola a Cizico, per unirsi a Platone nel 368. Fu anche un astronomo, noto per aver prodotto la prima teoria sui moti celesti.

altri per l'unico tramite di una proporzione.[426] Il suo metodo di esaustione ci è giunto grazie al capitolo XII degli *Elementi* di Euclide.[427] Esempi di applicazione particolarmente importanti si possono trovare nelle opere di Archimede *Sulla quadratura della parabola* e *Sulle spirali* che erano ben note a Torricelli, come appare dal frontespizio della sua unica pubblicazione, l'*Opera geometrica* (1644) e da quello delle sezioni in cui si compone.[428] Lo schema ricorrente si articola in una prima fase, in cui si mostra come una particolare successione di poligoni possa esaurire la figura curvilinea, con una costruzione iniziale che è ripetuta un numero illimitato di volte; una seconda fase verifica la condizione necessaria per la convergenza, cioè che la differenza tra l'area della curva e l'area poligonale sia piccola a piacere;[429] un'ultima fase prevede l'uso di una dimostrazione per assurdo per ottenere la validità dell'uguaglianza tra le due aree.[430]

---

426 Morris Kline, *Storia del pensiero matematico. I: Dall'antichità al Settecento*. Torino: Einaudi, 1999, pp. 60-63.

427 Il termine non è originale, ma fu inventato nel Seicento. Esso si riferisce al tipo di tecnica applicata, per dimostrare, ad esempio, che le aree di due cerchi stanno in un dato rapporto tra loro. Consiste nell'approssimare la superficie costruendo poligoni inscritti con un numero di lati crescente, in modo da *esaurire* la parte in eccesso e giungere a un'esatta misura del rapporto in questione. Il metodo è rigoroso, non approssimato, e utilizza una dimostrazione indiretta, cioè dimostra l'uguaglianza cercata provando che le relazioni di maggiore e minore non si danno perché portano a contraddizione. È impossibile non pensare a Eudosso, quando Galileo presenta il cerchio come un poligono di infiniti lati.

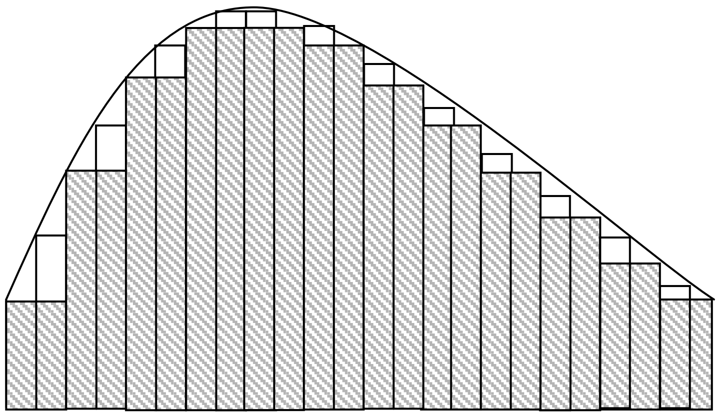
428 Il frontespizio recita: "OPERA GEOMETRICA EVANGELISTAE TORRICELLII. De Solidis Spheralibus. De Motu. De Dimensione Parabolae. De Solido Hyperbolico. Cum Appendicibus de Cycloide, et Cochlea." La prima pagina della prima sezione riporta: "DE SPHAERA Et Solidis Sphaeralibus *LIBRI DVO* In quibus Archimedis Doctrina de Sphaera et cylindro denuo componitur, latiùs promouetur […]." La prima pagina della terza sezione è la seguente: "DE DIMENSIONE PARABOLAE, Solidique Hyperbolici *PROBLEMATA DVO*: ANTIQVVM ALTERVM In quo quadratura parabolae XX. Modis absoluitur, partim Geometricis, Mecanicisque; partim ex indiuisibilium Geometria deductis rationibus: NOVVM ALTERVM, *In quo mirabilis cuiusdam solidi ab Hyperbola geniti accidentia nonnulla demonstrantur*. CVM APPENDICE De Dimensione spatij Cycloidalis, et Cochleae" (Evangelista Torricelli, *De Sphaera Et Solidis Sphaeralibus V2 (1644)* (Milton Keynes UK: Kessinger Publishing's Legacy Reprints, 2009) p. 1/I parte, p. 3, p. 1/II parte).

429 È il Teorema I del Libro X degli *Elementi* di Euclide: "Fissate due grandezze disuguali, qualora dalla maggiore sia sottratta una grandezza maggiore che la metà e da quella restata fuori una maggiore che la metà, e questo risulti in successione, sarà restata una certa grandezza, che sarà minore della minore grandezza fissata" (Euclide, *Tutte le opere*. Milano: Bompiani, 2007, pp. 1230-1231).

430 Attilio Frajese, *Attraverso la storia della matematica*. Firenze: Le Monnier, 1969, pp. 266-273; Morris Kline, *Storia del pensiero matematico. I: Dall'antichità al Settecento*. Torino: Einaudi, 1999, pp. 130-136, p. 411.

Nonostante i risultati notevoli ottenuti da Archimede ed Eudosso con questo metodo, esso era di limitata applicazione perché richiedeva una costruzione *ad hoc* iterativa, cioè ripetibile senza limite, che producesse una successione di poligoni di approssimazione. Il passo saliente della dimostrazione, costruzione geometrica a parte, è quello che dimostra indirettamente l'uguaglianza cercata, per il tramite di una riduzione all'assurdo. L'inconsistenza logica delle altre possibilità (area curvilinea maggiore o minore dell'area poligonale), infatti, dimostra la necessità dell'unico caso rimasto che è quello dell'uguaglianza, per esclusione. L'uguaglianza deve, però, essere credibile e probabile, per questo motivo solo la costruzione che genera differenze piccole a piacere realizza le condizioni sufficienti e necessarie allo scopo. Il metodo di esaustione, pertanto, risulta un metodo misto, geometrico e logico, anche se indiretto.

Proprio per il suo limitato campo di applicazione e per la sua natura indiretta, i matematici del Seicento preferirono imboccare l'altra direzione, quella della ricerca di un metodo generale per misurare le superfici curve. Un tale approccio consisteva nel realizzare successioni di poligoni regolari più semplici di quelle necessarie per far funzionare il metodo di esaustione, in grado di approssimare la figura curvilinea per difetto o per eccesso. Maggiore era l'approssimazione, maggiore era il numero dei poligoni. Per ottenere la condizione euclidea dello scarto inferiore a qualunque grandezza piccola a piacere, serviva



lavorare con una successione infinita di figure. Di conseguenza, il prezzo da pagare per un approccio generale al calcolo di lunghezze, aree e volumi era adottare un procedimento equivalente all'attuale *passaggio al limite*.[431] Quando i poligoni di approssimazione diventano infiniti di numero, una delle dimensioni possedute diventa infinitamente piccola o, con le parole in voga all'epoca, un *indivisibile* della superficie o del solido che si vuole misurare. Il ricorso all'indivisibile indicava che la diminuzione, ad esempio, della lunghezza della base dei poligoni di approssimazione doveva essere portata all'estremo, fin tanto che un ulteriore frazionamento gli avrebbe fatto perdere significato.[432] Il *metodo degli indivisibili* consisteva proprio in questo e aveva le sue radici teoriche nella natura continua degli oggetti geometrici. Questo modello, combinato con la natura dinamica dello studio delle curve archimedeo, produrrà l'idea che un cambiamento continuo di alcuni elementi presenti nelle figure piane o solide potesse generare una molteplicità di casi particolari, come nella futura geometria proiettiva.[433]

Per quanto precede, il metodo di esaustione si può vedere come l'origine della riflessione di Torricelli sul ruolo dell'infinito nella dimostrazione geometrica. Questo punto di partenza della sua analisi dell'infinito merita quindi di essere presentato in dettaglio, con l'esempio emblematico della Proposizione V.[434] Con esso Torricelli dimostra le prime dieci versioni (sono ventuno in totale) della

---

[431] In base alla definizione di limite data da Cauchy, una funzione $y = f(x)$ ammette limite $l$ per $x \to c$ (che si legge: "per *x* tendente a *c*" cioè per tutti i valori numerici *x* che si avvicinano progressivamente al valore fisso *c*) se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere) è sempre possibile determinare un $\delta > 0$ tale che se $|x - c| < \delta$ (cioè se la distanza tra *x* e *c* è sufficientemente piccola) allora $|f(x) - l| < \varepsilon$ (cioè la corrispondente ordinata di *x* è a sua volta vicina a *l* tanto quanto si era stabilito inizialmente). È attraverso questa definizione di limite di una funzione che oggi si definisce il significato di *funzione continua in un punto* e, per estensione, di *continuità*.

[432] È qui il punto in cui si differenziano le diverse impostazioni e, di conseguenza, le diverse teorie sugli indivisibili. La forma dell'indivisibile può essere piana, con una dimensione infinitesima ma non nulla, oppure che degenera in una linea, cioè con una dimensione nulla, rettilinea o curva.

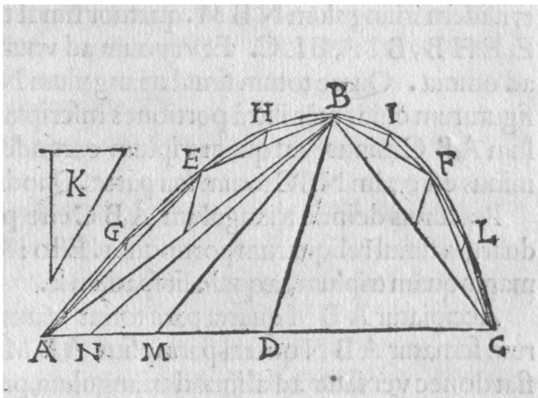
[433] Quello che gli storici chiamano il *principio del cambiamento continuo* è alla base della nascita della geometria proiettiva. Le prime tracce si trovano in Johannes Kepler, *Astronomiae pars Optica* (1604) o nel lavoro di Pascal.

[434] "La parabola è i quattro terzi del triangolo avente la stessa base e la stessa altezza [della parabola]" ("Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, eandemque altitudinem habentis" *Opere di Torricelli* I/1, pp. 120-121).

quadratura della parabola. La tesi, facendo riferimento alla figura presentata qui di fianco, recita: "Sia ABC una parabola, di diametro BD, [e sia] ABC un triangolo inscritto. Dico che la parabola è i quattro terzi del triangolo ABC a essa inscritto." La proprietà da dimostrare è quindi l'uguaglianza tra l'area della parabola (ABC) delimitata da una sua corda (AC), detta *ordinatamente applicata* o *base*, e i quattro terzi dell'area del triangolo inscritto, avente per base la stessa base della parabola. Questa relazione è equivalente ad affermare che "il triangolo ABC è triplo delle altre due parti [prese] insieme AEB, BFC."[435] Secondo il metodo di esaustione, quindi, si deve procedere dimostrando che il caso dell'area del triangolo ABC maggiore del triplo e quello opposto dell'area minore del triplo portano a contraddizione. È nel corso di queste due dimostrazioni per assurdo che è costruita la successione di triangoli, che ricopre la superficie rimasta libera tra la curva e il triangolo principale ABC, oltre una misura fissata a piacere.

> Innanzitutto, sia minore del triplo, e le due parti restanti saranno maggiori della terza parte del triangolo ABC. La [parte in] eccesso sia uguale alla superficie K, e si inscrivano in primo luogo i triangoli AEB, BFC dentro [quel]le parti; e di nuovo dentro la parte più piccola [si inscrivano] i quattro triangoli AGE, EHB, BIF, FLC; poi otto e così via fintanto che l'eccesso delle parti al di sopra delle figure inscritte sia chiaramente minore della superficie K. Allora, ci saranno *n* figure inscritte ancora maggiori della terza parte del triangolo ABC. / Ora si assuma che il

[435] Questa proprietà è dimostrata dal Lemma VII, che non è altro che la Proposizione 21 del *De quadratura parabolae* di Archimede: "Se in una parabola viene inscritto un triangolo, avente la stessa base della parabola e la stessa altezza; se si inscrivono in modo analogo anche due altri triangoli nelle parti restanti; il triangolo inscritto per primo sarà otto volte gli altri due triangoli inscritti per ultimi" ("Si in parabola inscribatur triangulum: eandem habens cum parabola basim, eandemque altitudinem. Inscribantur etiem pariter et in reliquis portionibus duo alia triangula: Erit triangulum primò in scriptum, octuplum alterutri posteriùs inscripti trianguli"*Opere di Torricelli* I/1, p. 112).




triangolo ABM [sia] la quarta parte del triangolo ABC (per il Lemma VII). E poiché ABC è il quadruplo tanto del triangolo ABM, quanto dei triangoli AEB, BFC presi insieme, il triangolo ABM sarà uguale ai due triangoli AEB, BFC insieme; e di conseguenza il triangolo MBC sarà il triplo dei due triangoli AEB, BFC insieme. / Si prenda di nuovo il triangolo ABN, quarta parte di tutto il triangolo ABM. Poiché, dunque, ABM è il quadruplo dello stesso ABN, anche i due AEB, BFC sono il quadruplo dei quattro triangoli successivi [presi] insieme AGE, EHB, BIF, FLC; e poiché gli antecedenti sono uguali, saranno uguali anche i seguenti. Di conseguenza, poiché il triangolo NBM è triplo del triangolo ABN, lo stesso triangolo NBM sarà anche il triplo dei quattro triangoli [presi] insieme AGE, EHB, BIF, FLC. E uno sta a uno, come tutti insieme [stanno] a tutti. Pertanto, il triangolo NBC tutto insieme sarà chiaramente il triplo delle figure inscritte nelle parti. Ma il triangolo ABC era minore del triplo di quelli. Quindi ABC è minore di NBC: il tutto [minore di] una sua parte. Il che è assurdo.[436]

La seconda parte della dimostrazione per assurdo si articola in modo analogo, con la deduzione dell'impossibilità di avere un'area maggiore del triplo. Di conseguenza, l'unica possibilità rimasta è che il triangolo ABC sia davvero uguale a tre volte la somma dei due triangoli laterali costruiti sui suoi due lati. La conclusione segue rapidamente grazie alla manipolazione della proporzione e ne segue che la parabola starà al proprio triangolo come 4 a 3, cioè l'area della parabola sarà uguale ai quattro terzi dell'area del triangolo.[437]

Anche se non si nomina l'infinito, esso è sottointeso dalla possibilità di continuare a disegnare triangoli lungo i lati dei precedenti, finché si "vede chiaramente" che lo spazio lasciato scoperto è minore di un K fissato. Poiché K è arbitrario, può essere anche piccolissimo, ma non nullo poiché una spezzata non coincide con un arco di parabola, passo ontologico che realizza la condizione di esistenza del problema posto. Solo grazie a un *passaggio al limite* il ricoprimento della porzione curvilinea si può pensare esaurito, cioè se ci si spinge fino al punto

---

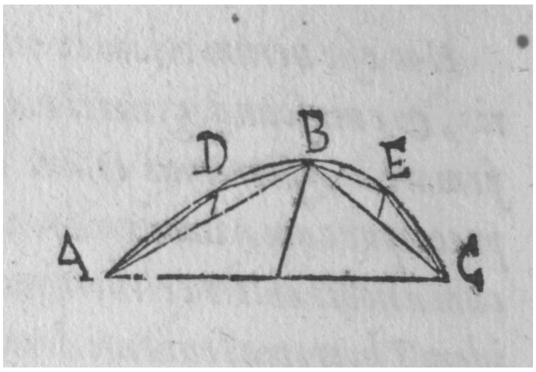
[436] Si è preferito dare la citazione per intero, perché solo in questo modo si può avere un saggio del *modus operandi* e del particolare stile di Torricelli. "Sit primo minus quam triplum, eruntque duae reliquae portiones magis quàm tertià pars trianguli ABC. Estò excessus aequalis spatio K, et inscribantur intrà portiones primùm triangula AEB, BFC; iterumque in reliquis portiuncolis quatuor triangula AGE, EHB, BIF, FLC; deinde octo etc. et hoc semper donec excessus portionum supra inscriptas evidentèr figuras sit minor spatio K. Tunc. *n* erunt inscriptae figurae adhuc maiores quàm tertia pars trianguli ABC. / Sumantur iam triangulum ABM quarta pars totius trianguli ABC. Et quotiamo ABC quadruplum est tam trianguli ABM, quam triangulorum AEB, BFC simul sumptorum, aequale erit triangulum ABM, duo bus simul triangulis AEB, BFC; et propterea triangulum MBC triplum erit duorum simul triangulorum AEB, BFC. / Accipiatur iterùm triangulum ABN quarta pars totius trianguli ABM. Cum ergò ABM quadruplum sit ipsius ABN; et duo AEB, BFC, quadrupla sint quatuor simul subsequentium triangulorum AGE, EHB, BIF, FLC; cumque antecedentia sint aequalia, aequalia erunt etiam consequentia; et propterea cum triangulum NBM triplum sit trianguli ABN, triplum etiam erit idem triangulum NBM. quatuor simul triangulorum, AGE, EHB, BIF, FLC. Et ut unum ad unum ita omnia simul ad omnia. Quare totum simul triangulum NBC, triplum erit figurarum evidentèr intra portiones inscriptarum. Sed triangulum ABC minus erat quam triplum earundem; Ergo ABC minus est quàm NBC totum sua parte. Quod est absurdum etc." (*Opere di Torricelli* I/1, p. 121).

[437] "Triangulum ergo ABC duarum reliquarum portionum triplum est; et componendo; et per conversionem rationis parabola ad suum triangulum erit ut 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat propositum etc." (*Opere di Torricelli* I/1, p. 121).

che ogni nuovo triangolo della successione degenera in un unico punto, il *triangolo infinitesimo* o indivisibile della superficie curvilinea. Se la costruzione è ripetuta indefinitamente, la porzione di superficie parabolica non ricoperta da triangoli ha misura nulla. Come si può vedere, la dimostrazione per *esaustione* aggira l'ostacolo dell'infinito, dimostrando rigorosamente che non si danno altri casi se non quello della coincidenza delle due misure di superficie. Il ruolo dell'infinito, pertanto, non indebolisce la validità della dimostrazione. Dopo le dieci diverse quadrature della parabola effettuate con dimostrazioni di tipo ortodosso o, come furono chiamate, "secondo il metodo degli Antichi"[438] seguono altre undici dimostrazioni che utilizzano la geometria degli indivisibili.[439]

### *Par. 5 Il metodo degli indivisibili classico a confronto con il metodo di esaustione.*

Si prenda in esame, adesso, la Proposizione XV che corrisponde a quella appena vista per il metodo di esaustione (si faccia riferimento alla figura qui sotto), ma che viene dimostrata grazie agli indivisibili.[440] La successione dei triangoli costruiti sui lati del precedente, nella porzione di superficie libera tra l'arco di parabola e il poligono che ne risulta, è identica a quella presentata nella proposizione V, anche se è presentata in modo più sintetico e sbrigativo.[441] A questo punto, si introducono gli indivisibili che realizzano la superficie parabolica: "La parabola, dunque, non è




[438] "QUADRATVRA PARABOLAE. Pluribus modis per duplice positionem, more antiquorum, absoluta" (*Opere di Torricelli* I/1, p. 102).

[439] "QUADRATVRA PARABOLAE. per nouam indiuisibilium Geometriam pluribus modis absoluta" (*Opere di Torricelli* I/1, p. 139).

[440] *Opere di Torricelli* I/1, pp. 150-151.

[441] "Nelle restanti superfici ADB, BEC, dunque, si inscrivano due triangoli ADB, BEC. E il triangolo ABC sarà il quadruplo dei due triangoli ADB, BEC [presi] insieme. Si disegnino anche nelle altre quattro piccole

nient'altro che un certo *aggregato di grandezze* infinite di numero in una proporzione quadrupla, delle quali la prima è il triangolo ABC, la seconda invece è composta dai due triangoli ADB, BEC. Di conseguenza, la prima grandezza ABC sarà media proporzionale tra la prima differenza e tutto l'aggregato, cioè la parabola."[442] Il termine "aggregato" ha il significato di *unione di superfici* triangolari in questo caso oppure, con una piccola forzatura aritmetica, la somma della successione illimitata delle aree dei triangoli. Torricelli, al posto di dimostrare l'incoerenza logica delle disuguaglianze come visto in precedenza per il metodo di esaustione, passa a scrivere la proporzione tra le varie parti in cui è suddivisa la figura. Il vantaggio offerto dall'uso delle proporzioni è cruciale in questo momento, poiché in una successione infinita di grandezze in proporzione continua tra di loro la relazione delle prime due vale anche come relazione tra qualunque altra coppia, di qualunque dimensione anche piccola a piacere. Se il triangolo ABC vale 4 e l'insieme dei due triangoli ADB e BEC vale 1, la "prima differenza" sarà uguale a (4 – 1) = 3.[443] Allora, la parabola sta al triangolo ABC come la prima grandezza sta alla prima differenza, cioè come 4 a 3, il che equivale a dire che il rapporto tra la superficie della parabola e quella del triangolo è $\frac{4}{3}$.[444]

---

superfici AD, DB, BE, EC quattro triangoli inscritti. E i due triangoli ADB, BEC [presi] insieme saranno quadrupli dei suddetti quattro triangoli successivi [presi] insieme. E [si prosegua] in questo modo sempre" ("Inscribantur enim etiam in reliquis portionibus ADB, BEC, duo triangula ADB, BEC. Eritque triangulum ABC, quadruplum duorum simul triangulorum ADB, BEC. Concipiantur etiam in reliquis quatuor portiunculis AD, DB, BE, EC, inscripta quatuor triangula; eruntque duo simul triangula ADB, BEC, quadrupla praedictorum simul quatuor subsequentium triangulorum; et hoc modo semper" *Opere di Torricelli* I/1, p. 150).

[442] "Parabola igitur nihil aliud est quàm aggregatum quoddam infinita rum numero magnitudinum in proportione quadrupla, quarum prima est triangulum ABC, secunda verò constat ex duobus triangulis ADB, BEC. Propterea prima magnitudo ABC media proportionalis erit inter primam differentiam, et aggregatum omnium, nempe parabolam" (*Opere di Torricelli* I/1, pp. 150-151).

[443] La relazione vale per il Lemma VII, già menzionato, che dimostra come il triangolo ABC sia uguale a 8 volte il triangolo ADB.

[444] "Ponatur itaque triangulum ABC esse ut 4. et ideo duo simul triangula ADB, BEC erunt ut unum: eritque prima differentia (nimirum inter 4. et unum) ut 3. Ergo aggregatum omnium infinitarum magnitudinum, nempe ipsa parabola, erit (per lemma 27) ad primam magnitudinem, hoc est ad inscriptum triangulum ABC,

A un esame superficiale, sembrerebbe che l'infinito sia richiamato soltanto dal fatto che la superficie parabolica è decomposta in infiniti triangoli di dimensioni sempre più piccole. In realtà, l'infinito decisivo per il buon esito della dimostrazione è quello insito nella proporzione finale, quella che stabilisce il valore $\frac{4}{3}$ per l'area curvilinea e che si richiama a sua volta a un lemma precedente. Per suo tramite, si calcola la somma finita di una successione infinita di grandezze in proporzione geometrica continua.[445] Tale proporzione ha valore costante e raggruppa i termini a tre a tre. Di conseguenza, i primi tre (il primo, il secondo e la loro differenza) sono sufficienti a individuarne il rapporto caratteristico, che ha validità generale. Anche in questo caso, Torricelli compone una grandezza geometrica, un segmento, con altre dello stesso genere, le quali sono piccole a piacere da un certo punto in poi della successione e che, per questo, si possono chiamare infinitesimi o, con la terminologia del tempo, *indivisibili lineari*. Poiché la proprietà vale per qualunque quantità, anche numerica,[446] il ruolo del Lemma XXVI è cruciale. Infatti, ogni grandezza geometrica può essere associata a un numero, per il tramite di una misura quale potrebbe essere la sua area o il suo perimetro. Quest'ultima relazione porta all'utilizzo di segmenti, cioè degli oggetti continui per eccellenza, come se fossero equivalenti a numeri, cioè agli oggetti discreti del contare. In questo modo, Torricelli realizza un ponte tra l'ambito delle dimostrazioni geometriche e quello delle dimostrazioni in teoria dei numeri, che a quel tempo era meno sviluppata e

---

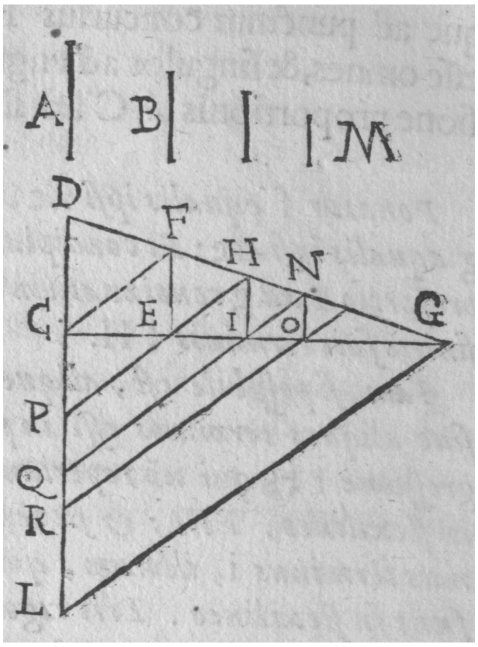
ut prima ipsa magnitudo ad primam differentiam; vide licet ut 4. ad 3. nempe sesquitertia. Quod erat propositum demonstrare etc." (*Opere di Torricelli* I/1, p. 151).

[445] A rigore, i lemmi sono due, il XXVII che richiama a sua volta la costruzione del Lemma XXVI. Il primo dimostra che data una successione infinita di grandezze continue, la prima è media proporzionale tra la prima differenza e l'intero aggregato ("Suppositis infinitis magnitudinibus in continua proportione Geometrica maioris inaequalitatis, erit prima magnitudo media proportionalis inter primam differentiam et inter aggregatum omnium"*Opere di Torricelli* I/1, p. 149). Il secondo, invece, costruisce il segmento di lunghezza uguale alla somma aritmetica di tutte le infinite lunghezze date, in successione continua ("Suppositis infinitis rectis lineis continua proportione maioris inaequalitatis, rectam lineam, quae praedictis omnibus sit aequalis reperire"*Opere di Torricelli* I/1, pp. 148-149).

[446] "Hoc esse verum etiam in numeris, et cuiuscunque generis magnitudinibus non dubitabimus affirmare" (*Opere di Torricelli* I/1, p. 149).

duttile. Il lemma, dunque, calcola la somma di un insieme infinito di segmenti-numeri in modo rigoroso e generale, che potrebbero anche essere pensati come lunghezze, aree o volumi. In questo modo, il processo di rappresentazione simbolica raggiunge con Torricelli un livello più alto rispetto a quello di Galileo e permette di parlare di una teoria della misura vera e propria.

Riprendendo il filo del ragionamento, le estensioni geometriche (lineari, di superficie e solide) sono associate a segmenti che, a loro volta, sono pensati come numeri. La costruzione, però, non può ancora dirsi valida in generale, perché il requisito primario è che la successione sia di un certo tipo particolare. Gli elementi-segmenti della successione (A, B, … M), infatti, si devono poter inscrivere nel triangolo rettangolo (DCG dove G è il punto di intersezione dei prolungamenti del segmento CE, su cui giacciono A = DC e B = FE, e del segmento DF contenente le loro estremità) individuato dalle sue prime due grandezze e nascere dalla sezione del fascio di rette parallele (CF, PH, QN, R…, LG) così determinato (dati CD ed EF, esiste un'unica diagonale CF che fornisce la direzione del fascio; poiché esiste un'unica parallela a essa per E, detta PH, il terzo elemento della successione HI deve avere la lunghezza esatta che lo colloca in tale posizione). Dalla costruzione, come mostrata in figura, si ricava che gli infiniti elementi della successione decrescente, inscritti nel triangolo DCG, sono trasportati dalle rette del fascio sul prolungamento di DC in modo da essere consecutivi: A = DC, B = = FE = CP, HI = PQ, NO = QR, … G = L. Di conseguenza, la loro somma è misurata dalla lunghezza del segmento risultante DL.




In entrambi gli esempi visti, quello dell'arco di parabola e questo dei segmenti, la successione di enti geometrici, che serve a misurare l'oggetto di partenza (di misura finita) e che a sua volta è infinita e composta di grandezze decrescenti, è formata da oggetti che sono dello stesso genere dell'oggetto da misurare. Nel primo caso, il procedimento di scomposizione della superficie è attuato grazie alla tassellazione con figure piane, i triangoli appunto. Nel caso, invece, della successione di segmenti, il procedimento di costruzione individua la lunghezza cercata in un particolare segmento. La presenza di grandezze indivisibili non fa nascere paradossi, perché gli elementi che costituiscono le parti e il tutto che sono in relazione appartengono allo stesso genere. Da un punto di vista geometrico, non c'è differenza di natura tra la figura piana o il segmento generati da altre figure piane o da altri segmenti. Caso mai, l'attenzione è posta sulla possibilità di avere una superficie o una lunghezza limitate, quando esse sono il risultato di una somma illimitata di termini, che è un problema risolto dal lemma esaminato prima.

### *Par. 6 Torricelli studia gli indivisibili di Cavalieri.*

I casi appena visti non sono esaustivi del modo in cui Torricelli lavora con l'infinito. Infatti, nella prima quadratura con il metodo degli indivisibili egli propone diversi *aggregati* per giustificare il passaggio in cui avviene l'estensione della proprietà, dalla parte al tutto. Nella Proposizione XI, ad esempio, un parallelogramma è definito un aggregato di segmenti intercettati da un fascio di rette parallele a uno dei suoi lati; un cilindro è l'aggregato delle circonferenze intercettate da un fascio di piani paralleli alla sua base; un cono è l'aggregato delle circonferenze intercettate da un fascio di piani paralleli alla sua base.[447] La prospettiva d'indagine qui sottointesa appartiene al quadro teorico della teoria degli indivisibili, considerata classica all'epoca, quella cioè di Bonaventura Cavalieri. In essa, il procedimento di sezione era l'unico mezzo rigoroso per individuare l'indivisibile da studiare e, come si sa dalla geometria, la sezione deve essere fatta con un oggetto di dimensione inferiore: le figure piane si secano con

[447] "[E]rgo per Lemma 18 erunt omnes primae simul, nempe parallelogrammum AE, ad omnes secundas simul, nempe ad trilineum ABCD, ut sunt omnes tertiae simul, nempe cylindrus AE, ad omnes quartas simul hoc est ad conum ACD" (*Opere di Torricelli* I/1, p. 140).

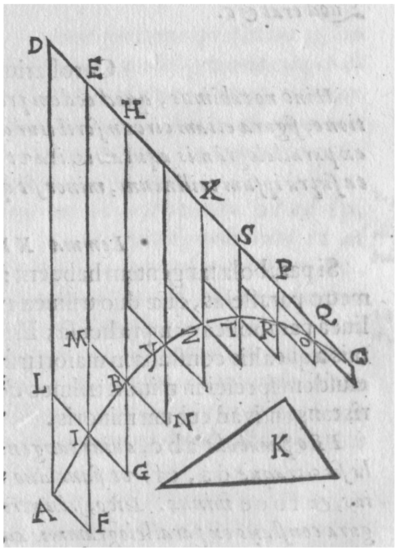
fasci di rette parallele tra loro complanari con la figura da intersecare, i solidi con fasci di piani paralleli. Ne risulta di necessità che l'indivisibile possiede sempre una dimensione in meno rispetto all'oggetto da cui nasce e del quale è un *caso limite*.[448] La perdita di dimensione corrisponde anche a una perdita di informazione, come mostra l'insorgere di paradossi pur da una corretta applicazione del metodo. La soluzione proposta da Cavalieri consiste nel porre dei vincoli alle sezioni, in modo da poter eliminare le situazioni che generano enunciati falsi, poiché non sempre la proporzione che vale per le figure intere vale anche per gli elementi che la compongono.

Il Lemma XV, in particolare, mostra che Torricelli preferiva sempre rimanere nello stesso ambito dell'oggetto da misurare, quando doveva scegliere gli indivisibili da utilizzare e questo si nota fin dall'inizio della sua speculazione.[449] Anche in questo caso, si vuole misurare l'area della figura curvilinea (ADC) che ha un lato di forma parabolica (AC). La differenza tra il valore esatto dell'area del trilineo misto e quella della figura composta da parallelogrammi è stimata dalla somma dei parallelogrammi contenenti la curva. Nella costruzione proposta, la tangente CD è suddivisa in *n* parti congruenti, grazie a bisezioni successive (DE, EH, … XS, SP, PQ, QC), finché la superficie del primo parallelogramma (DAFE) è

---

448 François de Gandt, *Force and Geometry in Newton's 'Principia'*. Translated by Curtis Wilson. Princeton: Princeton University Press, 1995, pp. 176-185. L'analisi della teoria degli indivisibili di Cavalieri esula dai compiti del presente lavoro. Per un approfondimento di questo tema, oltre al volume appena citato si vedano anche i saggi di Egidio Festa, "La notion d' 'agrégat d'indivisibles' dans la constitution de la cinématique galiléenne : Cavalieri, Galilée, Torricelli" (in *Revue d'histoire des sciences* **XLV** 2/3 (Avril-Septembre 1992), pp. 307-336) e di Giovanna Baroncelli, "Bonaventura Cavalieri tra matematica e fisica" (a cura di Massimo Bucciantini e Michele Torrini, *Geometria e atomismo nella scuola galileiana*. Firenze: 1992, pp. 67-101), insieme ai volumi di Enrico Giusti, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*. Roma: Cremonese, 1980 e di Charles Boyer, *History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1949.

449 "Dato un trilineo misto, delimitato da una linea parabolica, da una sua tangente e da un'atra retta parallela al diametro [della parabola], è possibile inscrivere nel dato trilineo una figura composta da parallelogrammi di altezza costante, la quale figura approssimi il trilineo misto di una differenza minore di qualunque grandezza data" ("Dato trilineo mixto, sub linea parabolica, eiusque tangent, et alià rectà diametro parallela compraehenso; possibile est in dato trilineo figuram inscribere constantem ex parallelogrammis aequealtis, quae figura deficiat à trilineo mixto minori differentià quàm sit quaecumque data magnitudo" *Opere di Torricelli* I/1, pp. 128-129). Il *trilineo misto* è un triangolo avente almeno un lato curvilineo, anziché retto.




visivamente più piccola di quella data come termine di paragone (K). Con un procedimento di trasporto dei parallelogrammi contenenti la curva (LAFI, MIGB, …BNY, …Y…Z, …Z…T, …T…R, …R…O, QO…C) lungo la direzione di CD, si dimostra che il primo parallelogramma è la somma di tutti i precedenti (DAFE = LAFI + MIGB + …BNY + …Y…Z + …Z…T + …T…R + …R…O + QO…C). Se il passaggio dal tutto alla parte, cioè dal trilineo misto agli indivisibili suoi componenti, fosse diretto e semplice come sembra intuitivamente parlando, si potrebbe affermare che i punti appartenenti all'arco di parabola sono gli indivisibili dell'arco stesso e sono individuati diminuendo le dimensioni dei parallelogrammi come LAFI fino al limite estremo. Per l'enunciato, allora, l'insieme dei punti sulla parabola dovrebbe coincidere con l'insieme dei punti che sono gli indivisibili del segmento DA, a sua volta caso limite della successione di parallelogrammi come DAFE. È immediato rendersi conto, però, che la lunghezza dell'arco di parabola AC non corrisponde alla lunghezza del segmento DA.[450]

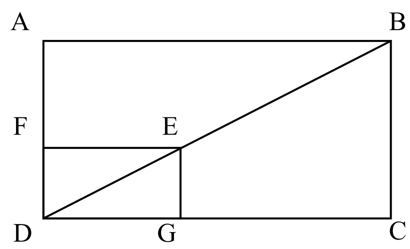
Il metodo degli indivisibili di Cavalieri poteva, quindi, portare a conclusioni errate se utilizzato con leggerezza e Torricelli ne era consapevole. Alcuni suoi appunti manoscritti danno una precisa testimonianza del suo interesse nel comprendere le ragioni di tali anomalie e di come egli cercasse di rintracciare la causa di quegli errori. Nella sua raccolta di teoremi e problemi, intitolata *Campo di tartufi*,[451] ad esempio, sono inserite alcune proposizioni dette "contro gl'infiniti", dove il metodo degli indivisibili è messo alla prova.[452] Sono sfere, cilindri, coni e

[450] Per parallelogrammi di approssimazioni sufficientemente piccoli, l'arco parabolico in essi contenuto si può assimilare a un segmento, che in questo caso diventerebbe la diagonale del parallelogramma. La diagonale è sempre maggiore di ciascuno dei lati e, di conseguenza, la somma delle diagonali approssimanti l'arco di parabola è maggiore della somma dei lati paralleli al diametro della parabola.

[451] *Opere di Torricelli* I/2, pp. 1-43.

[452] Sono le proposizioni 73- 80 (*Opere di Torricelli* I/2, pp. 20-23).

fusi parabolici intersecati da piani. Le linee così ottenute stanno tra loro in determinati rapporti che, però, non si mantengono validi anche per i loro aggregati, cioè per le superfici o i solidi che esse compongono. La sezione intitolata *Contro gli infiniti* presenta altri cinque casi esemplari in cui non solo l'uguaglianza dei rapporti tra sezioni corrispondenti non si mantiene valida per il loro insieme, ma neppure la relazione di minore e maggiore.[453] Queste situazioni si ritrovano anche nel fascicolo *Sulla dottrina degli indivisibili applicata scorrettamente*, che raccoglie in tutto ventotto esempi di paradossi, tra i quali i primi quattordici prevedono l'utilizzo degli indivisibili retti o piani, cui seguono gli altri quattordici che coinvolgono gli indivisibili curvi.[454] Le circostanze che si realizzano sono varie. I primi due sono contro-esempi della deduzione che da una proprietà vera per tutti gli indivisibili implica la validità della proprietà anche per la figura-aggregato.

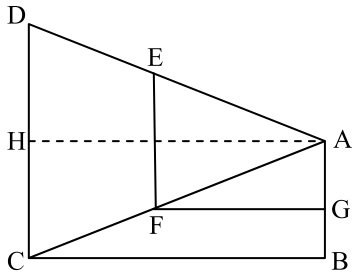



Nel primo, un rettangolo ABCD è diviso in due triangoli uguali dalla diagonale BD, che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le sezioni del triangolo ABD (FE) e quelle perpendicolari del secondo triangolo BCD (EG). La quantità di segmenti è la stessa in entrambe le due porzioni e corrisponde alla quantità dei punti della diagonale. Siano AB il lato maggiore e BC quello minore. La stessa relazione vale per ciascuna coppia di segmenti-sezione FE ed EG. La deduzione che l'intero aggregato degli FE è maggiore dell'intero aggregato degli EG è però falsa, poiché è

[453] *Opere di Torricelli* I/2, pp. 47-48.

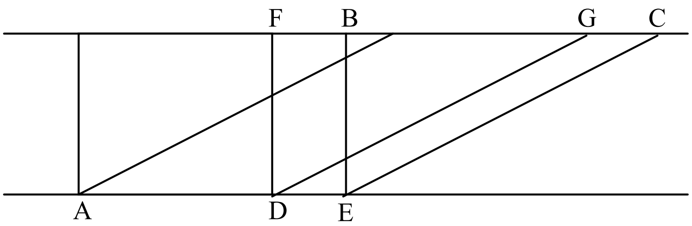
[454] *De indivisibilium doctrina perperam usurpata* (*Opere di Torricelli* I/2, pp. 416-431). Le due parti relative ai due tipi di indivisibili sono presentate in due capitoli distinti. In entrambi, la descrizione della costruzione e la sua analisi sono in latino, lingua che farebbe pensare a uno stato di ripulitura dei contenuti in vista di una loro prossima comunicazione, tramite lettera probabilmente, oppure stampa. Soltanto nel secondo capitolo, intitolato *Esempi d'uso degli indivisibili curvi* (*Exempla pro uso* [sic!] *curvorum indivisibilium*), alla fine di ciascun esempio si legge un commento in italiano, che analizza le linee appena ricavate nell'enunciato e ne determina le dimensioni. Sia per la forma, sia per il contenuto, è probabile che le aggiunte in italiano siano delle note a posteriori, che apparterrebbero alla fase in cui Torricelli elabora in maniera compiuta e coerente la sua teoria degli indivisibili. La copia manoscritta a noi pervenuta è del Viviani. Si è scelto di fare riferimento alle *Opere di Torricelli* nonostante i discutibili criteri editoriali che in numerosi punti deformano il testo, poiché il lavoro sul manoscritto 138 (tomo XXVIII dei *Discepoli di Galileo*, vol. 8/4) avrebbe richiesto risorse non disponibili.

assodato nella geometria elementare che la diagonale di un rettangolo divide il quadrilatero in due parti equiestese, cioè con la stessa area.

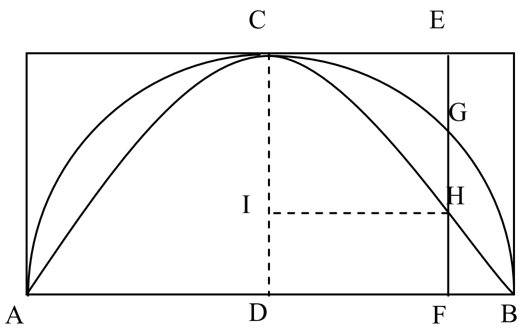



Il secondo esempio fornisce il viceversa del precedente: gli aggregati di due segmenti-sezione di uguale lunghezza (EF = FG) producono triangoli (ACD e ABC) di aree diverse.

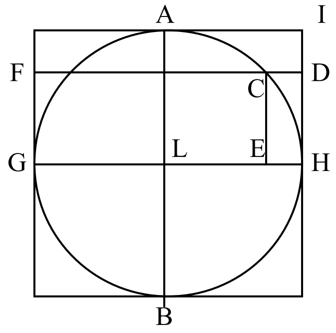
Il terzo esamina la deduzione opposta alle due precedenti, cioè quella che dall'uguaglianza dell'area di un insieme di parallelogrammi equiestesi (ADF, ADG oppure AEB, AEC), aventi stessa base (AD oppure AE) e stessa altezza (la distanza tra le due rette parallele contenenti le basi), si dedurrebbe l'uguaglianza delle lunghezze dei lati obliqui poiché altezza e lato obliquo sono casi degeneri dei parallelogrammi, il che equivale a dire loro indivisibili.



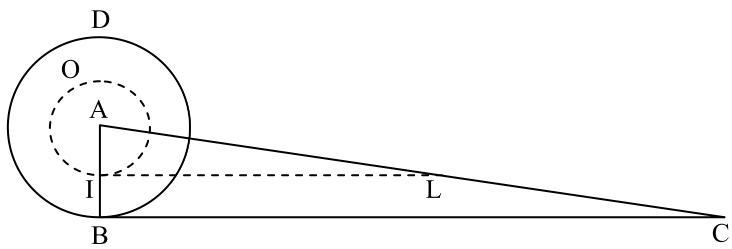

I successivi esempi analizzano, invece, i rapporti tra curve. Se si interseca un rettangolo contenente un semicirconferenza ed un arco di parabola con una retta (EF) parallela all'asse della parabola, il segmento EF risulta diviso in tre parti (EG, GH, HF) tali che GF è media proporzionale tra l'intero EF e la parte minore FH. Questa proporzione, che vale per qualsiasi sezione, non vale per gli aggregati, cioè per le aree delle figure piane; analogamente per un rettangolo contenente un arco di ellisse e una semiparabola.



Per i solidi, se si interseca un cilindro (il quadrato in figura), contenente una sfera inscritta (il cerchio in figura), con un piano parallelo alla sua base (FD), la lunghezza della circonferenza-sezione del cilindro è sempre maggiore di quella della sfera quando, invece, le due superfici laterali sono uguali; analogamente per una sfera e un cilindro inscritto, oppure per un cilindro contenente una semisfera tangente e un cono, aventi la base in comune.

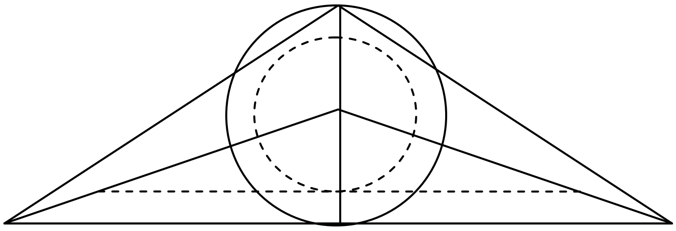



Con *indivisibili curvi*, Torricelli intende riferirsi alle superfici dei solidi di rotazione o alle linee curve, quali circonferenze, ellissi, parabole o iperboli, che nascono dalla sezione di un solido di rotazione con un piano. La ragione è che una superficie di rotazione si può considerare come un aggregato di circonferenze, opportunamente sovrapposte. Il primo esempio è notevole per due motivi. Innanzitutto, illustra come Torricelli individua i corrispondenti indivisibili curvi, a partire dalle figure piane curvilinee e dai solidi di rotazione. Secondariamente, mostra molto bene la sua particolare strategia, che cerca di ricondurre gli oggetti curvi a figure piane o segmenti equivalenti, come se volesse trovare un metodo di validità generale semplificare il problema, rettificando le curve senza perderne però le caratteristiche. Il cerchio di raggio AB è equivalente al triangolo rettangolo avente la base (BC) pari alla circonferenza e l'altezza (AB) pari al raggio. Dato un punto qualunque di AB, esso genera una circonferenza concentrica IOI e un segmento IL, parallelo a BC e lungo come la circonferenza associata, per i quali vale la stessa relazione di equivalenza vista prima. Pertanto, se un indivisibile della superficie triangolare è, ad esempio, il segmento che nasce dalla sezione di una retta parallela a uno dei lati, allo stesso modo un indivisibile di un cerchio è una circonferenza concentrica. Tenendo presente che la circonferenza concentrica è la



sezione di una superficie sferica di ugual raggio, la corrispondente superficie sferica è, pertanto, un indivisibile della sfera di raggio AB.

In un secondo esempio, una sfera è detta uguale a un cono, avente come altezza il raggio della sfera e come diametro della base la lunghezza del diametro della sfera. Secondo questa costruzione, sussiste una relazione biunivoca tra le sfere concentriche e i coni aventi per vertice il vertice del cono di partenza e per altezza il raggio della nuova sfera. Analogamente a quanto visto prima, un indivisibile della sfera è una superficie sferica concentrica, cui è associato un indivisibile del cono come, ad esempio, un cerchio-base della successione dei coni appena costruita. Gli altri casi presentati in questa sezione applicano lo stesso procedimento a diverse coppie di solidi quali, ad esempio, cono e scodella cilindrica,[455] cono retto e cono obliquo, cono retto equilatero con base e vertice tangenti alla sfera con cui è messo in relazione, spirale e parabola, semisfera e cono, calotta sferica e conoide iperbolico, cono e sferoide.



Nella raccolta di esempi intitolata *Sulla dottrina degli indivisibili applicata scorrettamente*, dunque, non si trova una trattazione sistematica di una teoria matematica degli indivisibili, ma soltanto l'esemplificazione di come si possano costruire relazioni biunivoche tra indivisibili appartenenti allo stesso genere. Lo scopo appare chiaro soprattutto quando si affrontano le pagine dedicate agli indivisibili curvi, dove diventa evidente il vantaggio che si ottiene traducendo le proprietà di un solido di rotazione complesso, come uno sferoide o un paraboloide, a un caso meglio noto, come un cilindro o un cono. A loro volta, tutti i solidi si possono ricondurre a figure piane, grazie al procedimento di sezione, dove si controlla più facilmente se l'applicazione del metodo degli indivisibili dà un risultato falso.

[455] È chiamata *scodella* un cilindro che contiene al suo interno un foro di forma cilindrica o semisferica.

## *Par. 7 La natura degli indivisibili di Torricelli.*

Sembra probabile che la fase in cui Torricelli si occupa dell'analisi dei casi fallaci e, di conseguenza, dello studio delle relazioni tra enti geometrici e loro proprietà segni il passaggio dall'iniziale adesione agli indivisibili di Cavalieri, allo sviluppo di un nuovo oggetto completamente diverso.[456] Anche l'indivisibile di Torricelli nasce dal passaggio al limite che si compie quando si costruisce una successione di figure che decrescono almeno rispetto a una loro dimensione. Al contrario di Cavalieri, per il quale gli indivisibili appartengono sempre alla classe degli enti geometrici che hanno una dimensione in meno rispetto all'oggetto di partenza, Torricelli fa sì che il suo indivisibile appartenga sempre allo stesso genere delle figure della successione. Esso ha quindi una dimensione piccola a piacere, ma mai nulla. Se si sta lavorando con un parallelogramma, ad esempio, un suo indivisibile alla Cavalieri potrebbe essere immaginato come un segmento parallelo a uno dei lati. In geometria, una linea ha lunghezza ma non larghezza e corrisponde a quello che Galileo chiamerebbe indivisibile, che solo accostato a un'infinità di altri indivisibili può dare luogo a una figura avente lunghezza e larghezza, anche se minima o *quanta*. Per Torricelli, invece, l'indivisibile deve mantenere le medesime proprietà legate all'estensione dell'oggetto geometrico di partenza, pena l'incorrere in paradossi e risultati fallaci. Se, come aveva intravisto Cavalieri, è l'operazione di sezione a produrre difficoltà ed errori, il nodo della questione non è la sua direzione, bensì la perdita di informazione che la sezione produce, con la perdita di una dimensione che è essenziale per ricostruire la specificità dell'oggetto.[457] Inoltre,

---

[456] Si veda a tal proposito il saggio di François de Gandt, "Les indivisibles de Torricelli" (*L'œuvre de Torricelli : science galiléenne et nouvelle géométrie*, a cura di François de Gandt. Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de Nice, 32 (1987), I série, pp. 147-206).

[457] Cavalieri sembra decidere a priori che un punto è indivisibile della linea, perché una linea è un insieme di punti; che un dato segmento è indivisibile di una figura piana, perché la figura è un aggregato di segmenti sovrapposti; che una certa figura piana è indivisibile di un solido, perché il solido è un aggregato di figure. Il suo approccio consiste nel partire da certi enti geometrici e nel ricostruire l'oggetto voluto per sommazione o sovrapposizione. Torricelli, invece, parte dall'oggetto e cerca di comprendere da cosa esso possa essere frazionato, in quali elementi possa essere decomposto e come. È l'attenzione al come che lo porta a porre dei vincoli alla forma degli indivisibili.

il processo di decomposizione che porta all'individuazione delle caratteristiche dell'indivisibile possiede la proprietà di essere ripetibile all'infinito, indeterminatamente, attraverso una successione di stazioni intermedie che continuano ad appartenere allo stesso genere delle precedenti. La condizione ontologica che lo permette dipende esclusivamente dalla continuità dell'estensione geometrica, qualunque sia il numero delle sue dimensioni. È possibile perdere una dimensione solo dopo aver compiuto il salto del passaggio al limite, cioè dopo aver creato una discontinuità nel tessuto geometrico. Se si vuole rimanere nel medesimo contesto operativo, allora ci si deve accontentare di terminare la decomposizione quando si raggiunge la dimensione dei *quanta* galileiani.

La soluzione non può essere che una: quella di mantenere in vita tutte le dimensioni dell'oggetto di partenza, insieme alle sue proprietà di cui è fondamentale la continuità, riducendone alcune quanto più possibile, ma senza annullarle o annichilirle completamente. È questo l'unico modo di capire come mettere correttamente in relazione coppie di indivisibili appartenenti a figure differenti. Torricelli è chiarissimo e certo di aver colto nel segno. Nel lavoro intitolato *De infinitis parabolis*,[458] si trova il capitolo *Delle tangenti delle parabole infinite per lineas supplementares*,[459] dove viene risolto il problema della determinazione delle rette tangenti a qualunque parabola in qualunque suo punto. Prima di presentarla, Torricelli deve descrivere il modo con cui è riuscito a trovare la soluzione che utilizza opportuni indivisibili. Egli esordisce in questo modo: "[c]he gli indivisibili tutti sieno eguali fra di loro, cioè i punti alli punti, le linee in larghezza alle linee e le superficie in profondità alle superficie, è opinione a giudizio mio non solo difficile da provarsi, ma anco falsa."[460]

[458] *Opere di Torricelli* I/2, pp. 277-328.

[459] *Opere di Torricelli* I/2, pp. 320-324.

[460] *Opere di Torricelli* I/2, p. 320.

Seguono subito delle situazioni esemplari in cui vengono costruiti gli indivisibili e analizzate le loro caratteristiche o relazioni mutue. Non è casuale che il primo sia un riferimento al paradosso della *ruota di Aristotele*, come era stato presentato da Galileo nell'intento di analizzare i paradossi dell'infinito.[461] Tra due circonferenze concentriche sussiste una relazione biunivoca tra punti. Ogni punto della minore individua una e un solo punto della maggiore, che è l'intersezione di quest'ultima circonferenza con l'unica retta passante per il punto scelto sulla minore e per il centro. Viceversa, ogni punto della circonferenza maggiore individua un unico punto sull'altra circonferenza, grazie alla sezione di questa con la retta per il centro e per esso. Non esistono punti dell'una che non appartengano all'altra, quindi è corretto affermare che il numero dei punti è lo stesso su entrambe le linee, anche se hanno una lunghezza diversa. Il paradosso si scioglie non appena ci si convince che la misura di un'infinità di elementi-punti è cosa diversa dalla sua cardinalità[462] e si ricorda che le regole di confronto degli insiemi infiniti sono diverse da quelle che si utilizzano nel caso finito. L'apparente incoerenza svanisce quando si pensano i punti come a enti dotati di dimensioni che, di conseguenza, si possono quantificare in modo relativo per il tramite di una proporzione.[463] Una misura anche infinitesima non è possibile perché i punti-quanti della linea sono tanti quanti è necessario che siano, i quali possono essere uguali a qualunque numero si voglia, per usare un modo di dire di Galileo.

In battuta successiva, Torricelli ricorda le situazioni apparentemente lecite per il metodo di Cavalieri che portano, però, ad assurdi e le risolve a proprio modo.

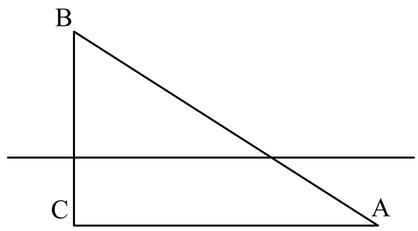
---

[461] Si vedano in proposito le pp. 143-145 e la nota 367. Questo riferimento è confermato dall'autore stesso, che commenta le parole di Galileo a proposito del problema della ruota: "Quello che dice il Galileo di un punto eguale ad una linea è vero e nel nostro solido hyperbolico è vero che l'asse infinitamente lungo è eguale ad una superficie cilindrica, avero ad un circolo quanto" (*Opere di Torricelli* I/2, p. 321).

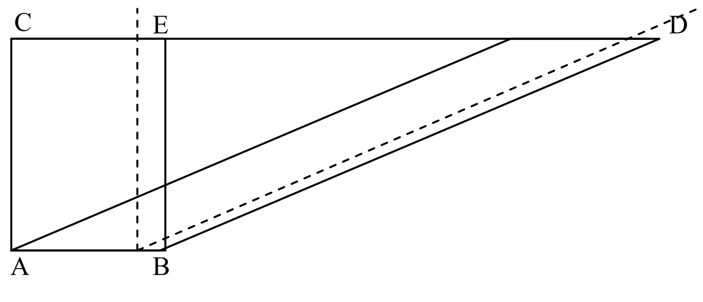
[462] La *cardinalità* di un insieme è la sua numerosità, cioè il numero di elementi in esso contenuti.

[463] "Se siano due circoli concentrici, e dal centro s'intendano tirate tutte le linee a tutti i punti della periferia maggiore, non è dubbio che altrettanti punti faranno i transiti delle linee sulla periferia minore, e ciascuno di questi sarà tanto minore di ciascuno di quelli, quanto il diametro è minore del diametro" (*Opere di Torricelli* I/2, p. 320).

Sono tre problemi ricorrenti nell'applicazione degli indivisibili alle figure piane che, affrontati correttamente, determinano proporzioni valide tra i loro elementi costitutivi. "Se nel triangolo ABC che abbia il lato AB maggiore del BC ci immagineremo tirate tutte le infinite linee parallele alla base AC, tanti saranno i punti stampati dal segmento su la retta AB, quanti su la BC; dunque un punto di quella ad un punto di questa sta come tutta la linea a tutta la linea."[464] I punti non sono più indistinguibili e perfettamente uguali, altrimenti non si potrebbe avere una proporzione tra il loro primo aggregato, il lato BC, e il secondo aggregato, il lato AB. Inoltre, la proporzione trasferisce il confronto dal livello dei segmenti, al livello dei punti che sono presenti nello stesso numero in entrambi gli insiemi. Di conseguenza, la dimensione longitudinale dei punti-quanti, se pur infinitesima, è quantificabile in modo relativo.




"Se saranno due parallelogrammi su la medesima base AB, e da tutti i punti della AB siano tirate le infinite linee parallele ai lati, tanto nel parallelogrammo A[E] quanto nell'AD, saranno tutte le AC insieme prese eguali a tutte le AD insieme prese; ma sono anco eguali di num[er]o (perché di qua e di là tante sono le linee quanti sono i punti in AB); dunque una è eguale ad una, ma sono disugualmente lunghe, adunque benché indivisibili sono di larghezza ineguale, e reciproca alle lunghezze."[465]

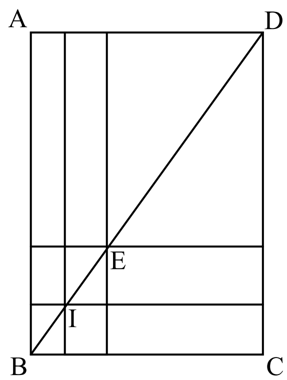



[464] *Opere di Torricelli* I/2, pp. 320-321.

[465] *Opere di Torricelli* I/2, p. 321.

Un'applicazione elementare del metodo era la dimostrazione dell'equiestensione di due figure piane. Questo enunciato richiama la Proposizione XXXV del Libro I degli *Elementi* di Euclide.[466] La corrispondenza biunivoca che prova l'equiestensione dei due insiemi di linee è assicurata dal fatto che i due segmenti in relazione hanno un estremo in comune, che appartiene al lato AB. L'uguaglianza delle due aree, di conseguenza, deve essere coerente con il requisito che le proprietà valide per l'aggregato di linee devono continuare a valere per le linee singolarmente prese e viceversa. Poiché i segmenti in corrispondenza nei due parallelogrammi hanno lunghezza diversa, gli indivisibili lineari devono avere anche una seconda dimensione in grado di compensare la somma. In questo caso, pertanto, l'indivisibile della superficie deve necessariamente possedere un lunghezza, che resta costante, e uno spessore. La biiezione tra i due aggregati di indivisibili determina anche il rapporto tra i loro spessori, poiché per avere aree uguali, la larghezza deve essere inversamente proporzionale alla lunghezza. Solo così il loro prodotto resta costante. Il terzo problema ripresenta la stessa situazione vista nel primo e per questo non lo si propone.

A questo punto, Torricelli deve mostrare come si opera con i suoi indivisibili, per ricavarne quelle proprietà e relazioni utili alle dimostrazioni geometriche. Il primo esempio riguarda i parallelogrammi, cui segue l'applicazione alle parabole che lo condurrà alla costruzione della tangente. Dato un parallelogramma ABCD, si prenda un qualunque punto E sulla diagonale BD, che individua lo gnomone ABCE, diviso a metà dalla porzione di diagonale BE. Se I è il punto medio di BE, anche ciascuna delle due parti equivalenti dello gnomone saranno divise a metà.




[466] "35. I parallelogrammi che sono sulla stessa base e nelle stesse parallele sono uguali tra loro" (Euclide, Tutte le opere. A cura di Fabio Acerbi. Milano: Bompiani, 2007, pp. 828-829). Questa è il primo enunciato in cui si studia l'uguaglianza di due superfici, aventi forma diversa (Federigo Enriques (a cura di), *Gli 'Elementi' di Euclide e la critica antica e moderna*. Roma: ed. Stock, 1924, vol. I, p. 115).

> [E] se questa divisione si farà, o si supporrà fatta infinite volte, ci ridurremo ad havere in cambio di semignomoni una linea BC eguale alla BA; dico eguale di quantità non di lunghezza; poiché sebbene indivisibili ambedue sarà la BC tanto più larga della BA, quanto questa è più lunga di quella; et invero se ambedue devono occupare adeguatamente il punto diametrale B, è necessario che la CB più prossima ad esser perpendicolare sia anco più larga della AB, la quale è più inclinata.[467]

Subito dopo commentando ulteriormente quanto appena spiegato, Torricelli rappresenta un punto con un piccolo rettangolo, i cui lati riproducono esattamente le sue due dimensioni che realizzano il rapporto cercato tra gli spessori degli indivisibili lineari.

L'applicazione alla parabola è analoga a quanto appena visto, con la sola differenza che il rapporto tra i due semignomoni, ora curvilinei, si ricava in modo diverso come "l'esponente delle app[licate] a quello delle diametrali [...] come l'esponente all'esponente; et se faremo, o supporremo fatta questa div[ision]e infinite volte, resteranno in cambio di figure due linee [...], le quali, non secondo la longitudine, ma secondo la quantità, saranno nel medesimo modo come l'esponente all'esponente."[468]

L'indivisibile, sia esso un puntiforme o lineare, possiede sempre due dimensioni. È quindi un oggetto dello stesso genere delle figure piane, ma che appartiene all'ordine degli infinitesimi di superficie e non a quello delle figure con cui solitamente opera la geometria. La gerarchia dalla figura, all'indivisibile lineare, all'indivisibile puntiforme è dettata dal numero delle dimensioni visibili,

[467] *Opere di Torricelli* I/2, p. 322.

[468] *Opere di Torricelli* I/2, p. 322.

rispettivamente due, una e nessuna. Da questa prospettiva, l'indivisibile ripropone la geometria piana a livello infinitesimale, dove le dimensioni sono piccole a piacere ma finite, in definitiva dei quanta galileiani che permettono ulteriori suddivisioni, mantenendo tra di loro relazioni costanti e determinabili.

Con le precise indicazioni date da Torricelli, è ora possibile tornare agli *Exempla pro uso curvorum indivisibilium* per dare un significato ai commenti in italiano alla fine di ogni esempio.[469] La nota del primo esempio recita così: "Ogni antecedente curva superficie sferica è uguale alla sua conseguente piana superficie circolare e quelle e queste hanno eguale et uniforme e spessezza de medesimi punti d'una stessa retta linea, e con retto transito."[470] Risulta allora evidente, alla luce di quanto ora noto, che il testo sottolinea quali enti sono in corrispondenza biunivoca, in questo caso sono una superficie sferica e un cerchio, che sono gli indivisibili curvi rispettivamente di una sfera e di un cilindro. Sono indivisibili di un solido e, di conseguenza, essi devono possedere non solo lunghezza e larghezza, dimensioni caratterizzanti le superfici, ma anche uno spessore. La dimensione infinitesima citata nella nota è proprio lo spessore, che risulta uguale in entrambi i casi poiché la costruzione si avvale di sezioni ad angolo retto che mantengono rapporti unitari con gli gnomoni. La medesima formula si ripete in tutti gli esempi del capitolo, dove le uniche differenze consistono nel tipo di superfici o curve prese a riferimento.

### *Par. 8 Gli indivisibili di Torricelli applicati al moto.*

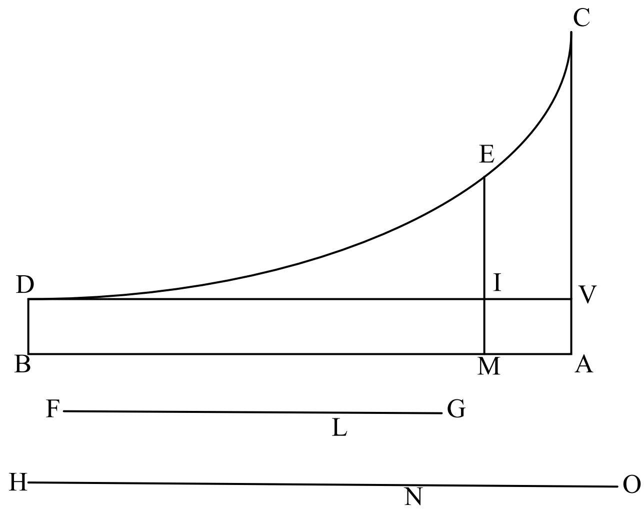
I teoremi di geometria dimostrati da Torricelli si avvalgono di quattro diverse strategie. La prima consiste nell'utilizzo degli strumenti della geometria elementare piana e solida di Euclide, Apollonio e Pappo. La seconda consiste nella tecnica di Archimede, che applica la legge della leva alle quadrature delle sezioni

[469] Si vedano le pp. 182-183.

[470] *Opere di Torricelli* I/2, pp. 427-428.

coniche. La terza utilizza l'altra soluzione archimedea, che immagina le curve come descritte dal moto composto di un punto sul piano. La quarta è quella che applica il metodo degli indivisibili. Nonostante Torricelli abbia impiegato queste strategie per lo più da sole, non mancano però le situazioni in cui egli ne compone due.

Si veda la pagina dedicata al confronto tra due moti, uno uniforme e l'altro uniformemente accelerato, in cui egli utilizza gli indivisibili il cui titolo, *Pro confirmanda prima Galilei et sequentem nostram*,[471] richiama il Teorema I del moto naturalmente accelerato di Galileo. Un mobile è pensato muoversi lungo GF con moto uniforme e lungo OH con moto non uniforme, nel medesimo intervallo di tempo, AB. I gradi di velocità sono rappresentati dai segmenti paralleli ad AC. Torricelli vuole dimostrare che il rapporto tra gli spazi percorsi (GF : OH) è uguale al




rapporto tra le aree del rettangolo e del quadrilineo misto (AVDB : ACDB).[472] La dimostrazione, innanzitutto, istituisce la corrispondenza biunivoca tra gli indivisibili lineari che realizzeranno la proporzione per il tramite degli indivisibili puntiformi.[473] I punti del segmento GF sono uguali in numero a quelli presenti su OH, perché i due moti si sviluppano nello stesso arco di tempo. Per ogni istante (M) esiste una e solo una posizione su GF (L) e una su OH (N), ma per questo la loro

[471] *Opere di Torricelli* I/2, p. 259.

[472] "[49] Esto tempus [...] AB, moveaturque mobile, et tempore AB percurrat rectas GF, OH, ssseddd rectam GF currat motu aequabili cum gradu velocitatis semper eodem AV, rectam vero OH currat motu non aequabili cum gradibus velocitatis homologis ad lineas AC, sive ME. Dico spatium GF ad OH esse ut figura ACDB ad figuram AVDB" (*Opere di Torricelli* I/2, p. 259).

[473] Il testo che precede la dimostrazione è una sorta di promemoria su come si applica il metodo degli indivisibili al moto, come conferma anche il suo titolo *Pro sequentibus*: "[48] Quod puncta, et reliqua indivisibilia habeant rationes inter se infinitas, sicuti habent magnitudines terminatae, atque divisibiles, mihi jam satis superque patet, quamquam semper sint indivisibilia" (*Opere di Torricelli* I/2, p. 259).

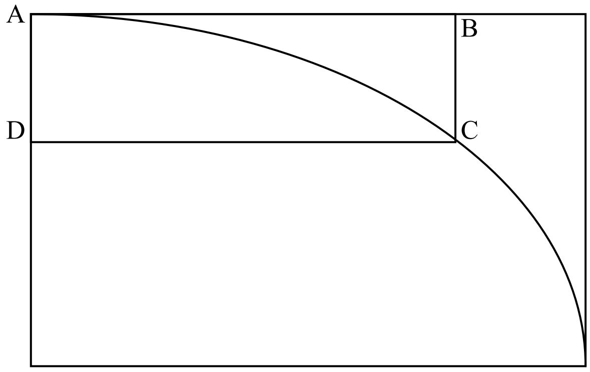
dimensione lungitudinale infinitesima è diversa.[474] Questa diversa lunghezza dei punti si riflette anche nella quantificazione della velocità, che a sua volta è rappresentata da due segmenti, rispettivamente MI per il moto uniforme, ME per quello accelerato. Solo così si spiega la proporzionalità MI : ME = GL : ON che vale qualunque sia l'istante M considerato. Ma MI e ME sono uguali secondo la quantità, cioè contengono lo stesso numero di indivisibili e qualunque sia M, perciò anche la superficie rettangolare AVDB contiene tanti indivisibili quanti ne contiene la superficie ACDB,[475] misurati secondo un rapporto che deve mantenersi costante per la validità della conclusione. Nel metodo di Torricelli, infatti, si deve determinare di volta in volta la relazione che sussiste tra gli indivisibili in corrispondenza biunivoca, onde evitare i risultati falsi in cui, invece, incorreva il metodo di Cavalieri.

Una prima osservazione importante è che Torricelli, sebbene il titolo si riferisca al teorema di Galileo che confronta il moto uniforme con quello uniformemente accelerato, parla di moto "non uniforme" indicando, in realtà, una classe ben più ampia di moti, quella in cui la velocità varia con il tempo con una legge qualunque. Questo fatto è provato anche dalla forma del profilo della velocità, che è chiaramente una curva e non un segmento inclinato come nel caso del moto uniformemente accelerato. Di conseguenza, l'enunciato appena dimostrato da Torricelli ha una validità generale. Dalla conoscenza e misura delle distanze percorse in un medesimo intervallo di tempo, si può risalire all'intensità delle velocità in qualunque istante si desideri. La seconda osservazione riguarda la proporzione così stabilita, in cui il rapporto degli spazi percorsi coincide con il rapporto delle aree di due figure piane. In questo modo, la differenza tra spazio

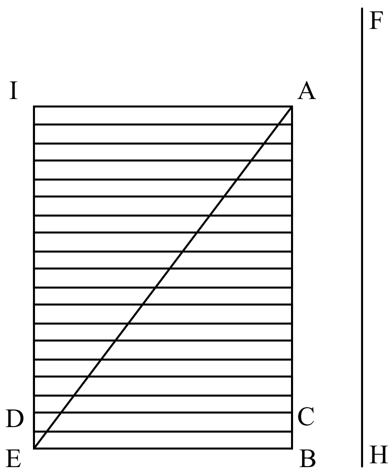
[474] Proseguendo la nota 461: "Nam totidem sunt puncta in spatio GF quot sunt in spatio OH, nempe totidem quot fuerunt instantes ejusdem temporis, sed illa puncta sunt inaequalia. Iam sumpto quolibet instanti temporis puta M, sint puncta peracta hoc instanti ipsa L et N," (*Opere di Torricelli* I/2, p. 259).

[475] Terminando la nota precedente: "eritque ut recta MI ad ME, hoc est ut impetus, ita spatium L ad spatium N, et hoc semper; suntque antecedentes aequales et ergo ut AVDB ad ACDB, ita quantitas omnium punctorum GF ad quantitatem omnium nempe totidem punctorum OH, sive ita GF ad OH" (*Opere di Torricelli* I/2, p. 259).

rettilineo percorso e area del diagramma diventa naturale e intuitiva. Il terzo passo, allora, è sovrapporre il concetto di spazio-area con quello di aggregato delle velocità, producendo un concetto nuovo e moderno, quello di spazio come integrale di superficie della funzione velocità. Torricelli mostra di averlo effettuato varie volte, in particolare risulta evidente in un problema del *De infinitis parabolis*.[476] se si ha un moto composto di uno orizzontale uniforme e uno verticale accelerato, il diagramma del grado di velocità del primo è un rettangolo che assomma tutti i segmenti uguali, che rappresentano una velocità costante. Il diagramma del secondo moto, invece, è il triangolo misto ABC con lato parabolico AC che è l'aggregato dei segmenti di lunghezza variabile, che descrivono una velocità variabile. Allora, "gli spazi percorsi in tempi uguali saranno come tutti i gradi di velocità [del primo] a tutti i gradi di velocità [del secondo], cioè come il parallelogramma BD al trilineo AB."[477]




Uno studio di moti diversi da quello equabile o equabilmente accelerato si trova nel saggio *De infinitis parabolis*,[478] che contiene insieme ai riferimenti espliciti al lavoro di Galileo anche i riferimenti indiretti dei diagrammi utilizzati nelle dimostrazioni. Nel primo studio, Torricelli disegna lo stesso diagramma che Galileo aveva proposto nel *Dialogo*, per la dimostrazione del teorema mertoniano, del rettangolo

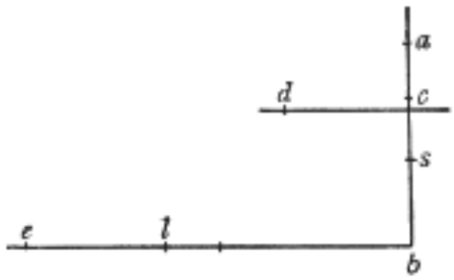



[476] *Opere di Torricelli* I/2, p. 313.

[477] "[S]patia vero temporum aequalium erunt ut omnes gradus velocitatis ad omnes gradus velocitatis, nempe ut parallelogrammum BD ad trilineum AB" (*Opere di Torricelli* I/2, p. 313).

[478] Il saggio si trova in *Opere di Torricelli* I/2, pp. 277-328, mentre le proposizioni cui si fa riferimento in questo paragrafo sono in *Opere di Torricelli* I/2, pp. 309-313.

contenente un triangolo per il confronto delle velocità nei due moti, uniforme e naturalmente accelerato. Questa volta, però, suppone che il mobile cada con una velocità proporzionale non al tempo, ma al quadrato dei tempi. Se AB è il tempo della discesa, EB è il quadrato della velocità alla fine della caduta e FH lo spazio percorso. In un tempo intermedio AC, la velocità è come il quadrato DC. Galileo aveva dimostrato che il mobile, arrivato alla fine della discesa verticale e deviato lungo l'orizzontale, percorreva una distanza doppia in un moto uniforme equivalente. Con questa nuova legge di variazione della velocità, invece, percorre il triplo dello spazio di caduta.




Se ora ci si riferisce al diagramma galileiano riprodotto qui di lato, supponendo sempre che la velocità cresca come il quadrato dei tempi, allora gli spazi percorsi orizzontalmente sono proporzionali ai cubi degli spazi di caduta verticale. Torricelli studia i moti composti di un moto uniforme orizzontale e di uno con accelerazione lineare, quadratica, cubica e quant'altro,[479] per determinarne la forma specifica della traiettoria parabolica. Nel caso dell'accelerazione quadratica, la traiettoria parabolica è cubica; se l'accelerazione è cubica, la traiettoria parabolica è di quarto grado. Di tutti questi casi, Torricelli produce un metodo generale per la determinazione della tangente e per la sua corrispondente quadratura.

Il metodo degli indivisibili di Torricelli estende, a tutti gli effetti, le possibilità della geometria piana e solida anche all'infinitamente piccolo. La sua analisi della continuità geometrica e delle conseguenze di una suddivisione ripetuta infinite volte lo porta a comprendere che le relazioni di proporzionalità tra le dimensioni degli oggetti devono essere rispettate, anche quando i rettangoli sembrano linee o punti. L'infinitamente piccolo che si può catturare e manipolare, per Torricelli, è comunque "quanto", a sua volta continuo e limitato, come lo voleva

[479] "Definitio lineariter, quadratice, cubicae etc. accelerat." (*Opere di Torricelli* I/2, p. 309).

Galileo. L'astrazione che produce l'ideale e primigenio indivisibile galileiano non è geometricamente applicabile, anche se alcune sue manifestazioni sono possibili. Ma il salto di ordine di grandezza, dagli indivisibili galileiani ai quanta, è incolmabile con gli strumenti a sua disposizione. Torricelli non se ne occupa in questo capitolo, dove il problema è quadrare un'area curvilinea, relegando gli indivisibili all'ambito della geometria pura delle sezioni. L'applicazione del suo metodo alle traiettorie descritte da punti in movimento composto apre un secondo fronte di novità, che gli permette di vedere con occhi moderni i diagrammi e le relazioni tra grandezze cinematiche. Il tempo, lo spazio e la velocità non appartengono più a categorie e generi diversi e, quindi, non miscibili aritmeticamente, ma sono omogenee almeno indirettamente, per il tramite delle grandezze numeriche cui vengono puntualmente riferite.

# Conclusione.

L'analisi svolta nei precedenti capitoli è giunta alla sua conclusione. Le domande poste all'inizio dell'indagine hanno trovato una loro risposta e sistemazione all'interno del percorso di scoperta di Galileo e Torricelli. Inoltre, il quadro complessivo in cui si collocano le due opere sul moto qui esaminate risulta coerente.

La confluenza di saperi che ha caratterizzato la presente tesi è stata la prima sfida e, probabilmente, la più ardua. Infatti, tenere in equilibrio l'analisi teoretica con le necessarie digressioni di contenuto fisico e matematico si è rivelata un'impresa irta di difficoltà, che sembrano però essere state in buona parte superate. Parte di questo processo di chiarimento concettuale e terminologico interdisciplinare è stato anche il capire fino a che punto fosse necessario aiutare il lettore nell'esplicitazione dei sottintesi e delle convenzioni proprie dell'ambito scientifico. Per non rendere difficoltosa la lettura, si è deciso di delegare alle note tale incombenza. E talvolta, si è anche reso indispensabile dare saggio dello stile matematico di Torricelli, per palesarne le caratteristiche impossibili da esprimere in altro modo.

La questione principale era determinare in cosa consistesse il processo di matematizzazione della filosofia naturale e che caratteristiche esso avesse nei due autori scelti, per tentarne una successiva valutazione. La strategia migliore è sembrata quella di scegliere una proprietà centrale per il moto e la più indicata è sembrata la velocità, sia per la scarsità degli studi a riguardo, sia per il ruolo fondamentale che essa possiede nella meccanica moderna. Il percorso d'indagine era volto a rintracciare le tappe della sua trasformazione da accezione intuitiva e vaga, puramente qualitativa, utile a discriminare tra due movimenti (quello più veloce e quello meno veloce), a grandezza quantificabile numericamente in modo relativo (serve, infatti, una unità di misura che a quei tempi non era ovviamente standard). Proprio per questo, è stato necessario riprendere i testi galileiani più importanti e studiare come Galileo le abbia dato forma moderna. Il procedimento da lui seguito è risultato nitido. La velocità deve avere pari importanza del tempo e dello spazio e, come questi, possedere una struttura bidimensionale, interna ed esterna. Esternamente, la velocità deve stare in relazioni quantitativamente determinate con lo spazio e il tempo, che si possono creare solo a condizione che essa sia internamente continua. In caso contrario, la corrispondenza matematica tra punti-tempo, punti-luogo e punti-velocità non esisterebbe. La struttura del continuo, quindi, è la condizione necessaria e irrinunciabile per rendere possibile una sua matematizzazione e l'analisi effettuata del concetto di continuità ne ha evidenziato sia le potenzialità, sia i limiti.

Nel corso dell'indagine semantica del termine velocità, se così si può dire, è stato necessario individuarne con precisione i contesti d'uso che non sono tanto i campi di appartenenza del discorso, come ad esempio quello dello studio delle macchine, delle acque correnti, del movimento dei corpi o del galleggiamento, bensì le connessioni con gli altri termini chiave del discorso (accelerazione, forza, energia, impeto, momento). Tale contesto terminologico ha permesso di valutare anche il ruolo che la velocità aveva in funzione del tipo di questione discussa dall'autore. Il punto d'osservazione scelto, pertanto, ha mostrato una serie di aspetti nuovi interessanti. Innanzitutto, Galileo non ha un concetto maturo di accelerazione, e se ne serve solo come sinonimo di "velocità che varia", nell'accezione più generale del termine. Torricelli, invece, preferisce parlare di "momento" con il senso odierno di "accelerazione di gravità". Entrambi gli autori conoscono la differenza tra "velocità media" e "velocità istantanea". Ma per descriverle con i mezzi della matematica, diventava indispensabile trovare un modo per operare con gli insiemi infiniti che nascevano dalla continuità di tempi, spazi e velocità. Galileo dimostra una lucidità sorprendente nel pianificare la sua scienza del moto. Per evitare contestazioni legate all'uso degli indivisibili di Cavalieri che, all'epoca, erano una novità e come tale erano oggetto di discussione, Galileo forza gli strumenti tradizionali della teoria delle proporzioni e della geometria. Egli non fa mai riferimento agli indivisibili nelle proposizioni del moto, portando a termine le dimostrazioni secondo lo stile di Euclide. Nei punti cruciali in cui gli serve la continuità o la misura finita di un insieme di infiniti elementi, egli ricorre sistematicamente al commento di un diagramma dove può far leva sull'intuizione delle proprietà dell'estensione. Torricelli, invece, dimostra una sicurezza e una padronanza degli strumenti tradizionali come pure dei più recenti tale da colmare le lacune del maestro. Non prima, però, di aver reso il metodo degli indivisibili privo di spiacevoli inconvenienti.

Per poter matematizzare le questioni della filosofia naturale e, in particolare, lo studio del moto locale, non si può prescindere da un altro requisito: la modellizzazione del fenomeno reale. Con questa perifrasi s'intende il processo teoretico che dall'osservazione di un evento produce una sua semplificazione, con la scelta delle variabili descrittive fondamentali. A questo fa seguito la ricerca delle relazioni aritmetiche che possono legare le variabili, nonché la loro stima o misura. La maggior parte del lavoro di Galileo rispecchia un interesse quasi esclusivo per la prima parte del processo, mentre Torricelli è più coinvolto nella seconda. È da questo atteggiamento diverso che gli esiti delle ricerche dell'uno sono portate a compimento dall'altro. Il diverso uso della velocità ne è un esempio. Galileo la tratta sempre come se avesse una natura omogenea a quella di spazio e tempo, ma appare chiaro che la considera alla stregua di una terza grandezza, distinta dalle altre e da esse autonoma. Torricelli, invece, dà maggior peso al legame funzionale tra velocità e tempo, arrivando a porsi il problema della "forma" che assume la velocità quando la relazione con il tempo è espressa da una qualunque sua potenza. Solo con Torricelli si può cominciare a parlare di legame funzionale tra le due grandezze cinematiche.

Un altro risultato collaterale dell'analisi linguistica è stato il chiarimento del progetto galileiano. L'uso del termine "impeto" si incontra sempre in studi di tipo dinamico, come la percossa, il moto violento dei proietti, quello delle acque e in concomitanza al termine "velocità". Invece, la parola "momento" era sempre stata utilizzata nell'ambito degli studi sull'equilibrio, sul funzionamento delle macchine o meccanici, di carattere essenzialmente statico. Quando si tratta di sostenere il principio del moto uniformemente accelerato per il quale ogni corpo cade con la stessa velocità, a parità di condizioni iniziali, Galileo intuisce che l'unica soluzione era la coincidenza del momento statico con quello dinamico, cioè del momento della gravità con il momento della velocità. Effettua un'operazione tanto lucida quanto sottile, per portare il lettore ad accettare la coincidenza del loro significato fisico, ma lavorando sul piano dell'intuizione, ingenuo e linguistico, anziché sul piano tecnico operativo. Sarà Torricelli a completare tale progetto. Grazie a questo percorso di ricerca, è emerso anche come i concetti di momento statico e di momento dinamico non siano l'uno una filiazione dell'altro, bensì due nozioni distinte con una loro storia individuale che, a un certo punto, sono stati messi a confronto e riuniti con un'operazione concettuale molto raffinata.

Da un punto di vista più fisico, la scoperta e l'enunciazione della corretta legge del moto da parte di Galileo sono state il frutto di una progressiva generalizzazione delle categorie interpretative. Tutti i corpi dovevano avere lo stesso comportamento, leggasi "velocità", indipendentemente dalla loro forma, dimensione e materia. Questo ha fatto sì che il ruolo della massa non sia stato compreso da Galileo, né quello delle relazioni tra massa e forza, massa ed energia, massa e quantità di moto. In questo senso, il mobile è un corpo puntiforme, portatore di velocità. Una spiegazione puramente cinematica del movimento locale, priva di nozioni come quelle di forza o d'interazione, per reggere aveva bisogno di una qualche legge di conservazione del moto. L'unico moto in grado di continuare all'infinito sembrava essere non a caso quello circolare, poiché era la spiegazione di come i corpi celesti si mantengono in rotazione da sempre come da tradizione aristotelica. Un'estensione della meccanica celeste all'ambito terrestre doveva essere coerente con questo fatto e Galileo doveva esserne consapevole.

La ricerca qui presentata ha fornito una chiave di lettura dei *Discorsi* di Galileo inusuale e capace di portare un'ulteriore chiarificazione della sua struttura e del progetto scientifico dell'autore. La ricostruzione semantica della nozione di velocità ne rappresenta il centro focale e il parametro chiave che ha reso possibile una stima del livello e delle modalità del processo di matematizzazione che caratterizza la scienza moderna. Dallo studio del *De motu* di Torricelli, sono emersi sia la conferma della validità della lettura dell'opera di Galileo, sia la coerenza dello sviluppo della nuova scienza del moto. Infatti, la capacità di costruire geometricamente la rappresentazione di alcune grandezze fisiche cruciali e di esprimere matematicamente le loro relazioni ha reso possibile un altro passo nella direzione della futura dinamica newtoniana.

# Bibliografia.

**1) Fonti primarie**

a] Relative alle opere di Galileo Galileo e di Evangelista Torricelli

Galileo Galilei, "Juvenilia", "Le Mecaniche", "De motu antiquiora", "La bilancetta", "Sulle cose che stanno in su l'acqua", "Sidereus Nuncius", "Il Saggiatore", "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo", "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze." In *Opere di Galileo Galilei* a cura di A. Favaro, Firenze: Barbéra, 1968.

Galileo Galilei, "Manoscritto 72." In S. Drake, *Galileo's Notes on Motion*, Supplemento agli Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza, 3 (1979). Firenze: Istituto e Museo di Storia della Scienza, 1976.

Evangelista Torricelli, *De motu gravium naturaliter descendentium*. Firenze: De Landis, 1644.

Evangelista Torricelli, *Opera geometrica*. Firenze: De Landis, 1644 [riprodotta da Kessinger Publishing (UK), 2009].

Evangelista Torricelli, *Opere*. A cura di G. Loria e G. Vassura, voll. 4. Faenza: 1919-1944.

Evangelista Torricelli, *Opere scelte*. A cura di Lanfranco Belloni. Torino: UTET, 1975.

b] Riproduzioni di autori vari

Boas Hall, Marie (ed.) *Nature and Nature's Law. Documents of the Scientific Revolution*. London: Macmillan, 1970.

Boas Hall, Marie "Il rinascimento scientifico." *Il rinascimento: interpretazioni e problemi. A Eugenio Garin nel suo settantesimo compleanno*. Bari: Laterza, 1979 [traduzione inglese London: Methuen, 1982].

Krafft, Fritz "Renaissance der Naturwissenschaften: Naturwissenschaften der Renaissance. Ein Überblick über die Nachkriegs-literatur." *Humanismusforschung seit 1945. Ein Bericht aus interdisziplinärer Sicht*. Mitteilung 2, Deutsche Forschungsgemeinschaft, Kommission für Humanismusforschung. Boppard: Harald Boldt, 1975.

Rossi, Paolo *La rivoluzione scientifica da Copernico a Newton*. Torino: Loescher, 1973.

Rei, Dario *La rivoluzione scientifica. Scienza e società in Europa tra il XV e il XVII secolo*. Torino: SEI, 1975.

Westfall, Richard S. "Teaching the History of Science: Resources and Strategies. The Scientific Revolution." *History of Science Society Newsletter* **15** 3 (1986).

**2) Fonti secondarie**

a] Sulla Rivoluzione Scientifica

Boas Hall, Marie *The Scientific Renaissance 1450-1630*. The Rise of Modern Science, 2. London: Collins, 1962.

Cohen, H. Floris *The Scientific Revolution. A Historiographic Inquiry*. Chicago: University of Chicago Press, 1994.

Crombie, Alistar C. "Historians and the Scientific Revolution." *Physica* **11** (1969), pp. 167-180.

Hall, A. Rupert *The Scientific Revolution, 1500-1800. The Formation of Modern Scientific Attitude*. London: Longmans, 1954.

Hall, A. Rupert *The Revolution in Science 1500-1700*. London: Longman, 1983.

Koyré, Alexandre *From the Closed World to the Infinite Universe*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1957.

Koyré, Alexandre *La révolution astronomique: Copernicus, Kepler, Borelli*. Paris: Hermann, 1961.

Koyré, Alexandre *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*. Paris: Presses Universitaires de France, 1966.

Kuhn, Thomas S. *The Copernican Revolution. Planetary Astronomy in the Development of Western Thought*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1957.

Lenoble, Robert “Origines de la pensée scientifique moderne.” *Histoire de la science*. Maurice Daumas, ed. Encyclopédie de la Pléiade. Paris: Gallimard, 1957.

Lindberg, David C. e Westman, Robert S. (a cura di) *Reappraisals of the Scientific Revolution*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

Righini Bonelli, N.L. e Shea, W.R. (a cura di) *Reason, Experience and Mysticism in the Scientific Revolution*. New York: Science History Publication, 1975.

Rossi, Paolo *Aspetti della rivoluzione scientifica*. Napoli: Morano, 1971.

Schmitt, Charles B. *Studies in Renaissance Philosophy and Science*. London: Variorum reprints, 1981.

Wolf, A. *A History of Science, Technology, and Philosophy in the Sixteenth and Seventeenth Centuries*. II ed. a cura di Douglas McKie. London: George Allen and Unwin, 1950.

b] <u>Sulla meccanica</u>

Ariotti, Piero E. "Toward Absolute Time: the Undermining and Refutation of the Aristotelian Conception of Time in the Sixteenth and Seventeenth Centuries." *Annals of Science* 30 (1973) pp. 31-50.

Bennett, A. "The Mechanics' Philosophy and the Mechanical Philosophy." *History of Science* 24 (1986) pp. 1-28.

Blumenberg, Hans *The Genesis of the Copernican World. Studies in Contemporary German Social Thought*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1987.

Boas Hall, Marie "The Establishment of the Mechanical Philosophy." *Osiris* 10 (1952) pp. 412-541.

Burtt, Edwin A. *The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science*. II ed. London: Routlege and Kegan Paul, 1932.

Butterfield, Herbert *The Origins of Modern Science, 1300-1800*. II ed. London: Bell and Wyman, 1957.

Clagett, Marshall *La scienza della meccanica nel Medioevo*. Milano: Feltrinelli, 1981.

Clavelin, Maurice *The Natural Philosophy of Galileo. Essay on the Origins and the Formation of Classical Mechanics*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1974 [traduzione dall'originale francese del 1968].

Dijksterhuis, E.J. *The Mechanization of the World Picture*. Oxford: Clarendon Press, 1961 [tradotto dall'edizione olandese del 1950].

Drake, Stillman e Drabkin, I.E. (a cura di) *Mechanics in Sixteenth-Century Italy. Selections from Tartaglia, Benedetti, Guido Ubaldo, and Galileo*. Madison: University of Wisconsin Press, 1969.

Duhem, Pierre *La teoria fisica: il suo oggetto e la sua struttura*. Bologna: il Mulino, 1978.

Freudenthal, Gideon *Atom and Individual in the Age of Newton. On the Genesis of the Mechanistic World View*. Dordrecht: Reidel, 1986.

Galluzzi, Paolo *Momento: studi galileiani. Roma.* Ateneo e Bizzarri, 1979.

Grant, Edward "Medieval and Seventeenth-Century Conception of an Infinite Void Space beyond the Cosmos." *Isis* 60 (1969) pp. 39-60.

Grant, Edward "The Principle of the Impenetrability of Bodies in the History of Concepts of Separate Space from the Middle Ages to the Seventeenth Century." *Isis* 69 (1978) pp. 551-571.

Grant, Edward *Much Ado about Nothing. Theories of Space and Vacuum from the Middle Ages to the Scientific Revolution*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Hall, A. Rupert *From Galileo to Newton, 1630-1720*. The Rise of Modern Science, 3. London: Collins, 1963.

Koyré, Alexandre "A Documentary History of the Problem of Fall from Kepler to Newton." *Transactions, American Philosophical Society* **45** 4 (1955) pp. 329-355.

Mach, Ernst *The Science of Mechanics. A Critical and Historical Exposition of its Principles*. London: Watts and Co., 1893 [traduzione della II ed. Tedesca del 1988].

Maier, Anneliese *Die Mechanisierung des Weltbilds im 17. Jahrhundert*. Forschungen zur Geschichte der Philosophie und der Pädagogik, Heft 18. Leipzig: F. Meiner, 1538.

Olivieri, Luigi (a cura di) *Aristotelismo veneto e scienza moderna*. Padova: Antenore, 1983.

Randall, J.E. *The School of Padua and the Emergence of Modern Science*. Padua: Antenore, 1961.

Redondi, Pietro (a cura di) "Science: the Renaissance of a History. Proceedings of the International Conference Alexandre Koyré, Paris, Collège de France, 10-14 June 1986." *History and Technology* **4** 1-4 (1987).

Rossi, Paolo *I filosofi e le macchine. 1400-1700*. Milano: Feltrinelli, 1962.

Schmitt, C.B. "Experience and Experiment: A Comparison of Zabarella's View with Galileo's in *De motu*." *Studies in the Renaissance* 16 (1969) pp. 80-138.

Strong, Edward W. *Procedures and Metaphysics: A Study in the Philosophy of Mathematical-Physical Science in the Sixteenth and Seventeenth Centuries*. Berkeley: University of California Press, 1936.

Toraldo di Francia, G. *L'indagine del mondo fisico*. Torino: Einaudi, 1976.

Wallace, William A. *Prelude to Galileo. Essays on the Medieval and Sixteenth-Century Sources of Galileo's Thought*. Dordrecht: Reidel, 1981.

Westfall, Richard S. *The Construction of Modern Science: Mechanisms and Mechanics*. New York: John Wiley, 1971.

Westfall, Richard S. *Force in Newton's Physics: the Science of Dynamics in the Seventeenth Century*. London: Macdonald, 1971.

c] <u>Studi di meccanica galileiana</u>

Camerota, Michele *Galileo Galilei e la cultura scientifica nell'età della Controriforma*. Roma: Salerno Editrice, 2004.

Carugo, Adriano e Crombie, Alistar C. "The Jesuits and Galileo's Ideas of Science and of Nature." *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza* **8** 2 (1983).

Clericuzio, A. *La macchina del mondo. Teorie e pratiche scientifiche dal Rinascimento a Newton.* Roma: Carocci, 2005.

Crombie, Alistar C. *Da S. Agostino a Galileo. Storia della scienza dal V al XVII secolo*. Milano: Feltrinelli, 1970.

Crombie, Alistar C. *Stili di pensiero scientifico agli inizi dell'Europa moderna*. Napoli: Bibliopolis, 1992.

Drake, Stillman *Galileo Studies: Personality, Tradition, and Revolution*. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press, 1970.

Drake, Stillman "Mathematics and Discovery in Galileo's Physics." In *Historia Mathematica*, 1 (1974) pp. 129-150.

Drake, Stillman "Free fall from Albert of Saxony to Honoré Fabri." In *Studies in History and Philosophy of Science*, 5 (1975) pp. 347-366.

Drake, Stillman "Impetus Theory Reappraised." In *Journal of the History of Ideas*, **36** 1 (1975) pp. 27-46.

Drake, Stillman e MacLachlan, James "Galileo's Discovery of the Parabolic Trajectory." In *Scientific American*, 232 (1975) pp. 102-110.

Drake, Stillman "A further Reappraisal of Impetus Theory: Buridan, Benedetti, and Galileo." In *Studies in History and Philosophy of Science*, 7 (1976) pp. 319-336.

Drake, Stillman "Tartaglia's Squadra and Galileo's Compasso." In *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza*, 3 (1976) pp. 35-54.

Drake, Stillman *Galileo at Work: His Scientific Biography*. Chicago: University of chicago Press, 1978.

Drake, Stillman "Galileo's Notes on Motion." Supplemento agli *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza*, 3 (1979). Firenze: Istituto e Museo di Storia della Scienza, 1979.

Drake, Stillman "The Organizing Theme of the Dialogue." In *Atti dei convegni lincei*, 55 (1983) pp. 101-114.

Drake, Stillman "Galileo's Pre-Paduan Writings: Years, Sources, Motivations." In *Studies in History and Philosophy of Science*, 17 (1986) pp. 429-448.

Drake, Stillman "Galileo's Constant." In *Nuncius*, 2 (1987) pp. 41-54.

Galluzzi, Paolo *Momento. Studi galileiani*. Roma: Ed. dell'Ateneo e Bizzarri, 1979.

Geymonat, Ludovico *Galileo Galilei*. Torino: Einaudi, 1957.

Gille, Bertrand *Leonardo e gli ingegneri del Rinascimento*. Milano: Feltrinelli, 1980.

Giusti, Enrico "Aspetti matematici della cinematica galileiana." In *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 1 (1981) pp. 3-42.

Giusti, Enrico "Ricerche galileiane: il trattato "De motu aequabili" come modello della teoria delle proporzioni." In *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 6 (1986) pp. 89-108.

Giusti, Enrico *Euclides reformatus: la teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*. Torino: Bollati-Boringhieri, 1993.

Hill, David K. "Galileo's Work on 116v: a New Analysis." In *Isis*, 77 (1986) pp. 283-291.

Hill, David K. "Dissecting Trajectories. Galileo's Early Experiments on Projectile Motion and the Law of Fall." In *Isis*, 79 (1988) pp. 646-668.

Hill, David K. "Pendulum and Planes: What Galileo didn't Publish." In *Nuncius*, 9 (1994), 499-515.

Koyré, Alexandre *Etudes galiléenne. 1. A l'aube de la science classique. 2. La loi de la chute des corps. 3. Galilée et la loi d'inertie*. Histoire de la pensée. Paris: Hermann, 1939.

Jantero, J.L. e Souffrin, Pierre "Note sur la demonstration "mécanique" du théorème de l'isochronisme des cordes du cercle dans les « Discorsi » de Galilée." In *Review for the History of Science*, 45 (1992) pp. 269-280.

MacLachlan, James, Naylor, Ronald H. e Drake, Stillman "Notes and Discussions." In *Annals of Science*, 39 (1982) pp. 381-397.

Meli, Domenico B. *Thinking with Objects. The Trasformation of Mechanics in the XVIIth Century*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2006.

Naylor, Ronald H. "The Evolution of an Experiment: Guidobaldo Del Monte and Galileo's "Discorsi" Demonstration of the Parabolic Trajectory." In *Physis*, 16 (1974) pp. 323-346.

Naylor, Ronald H. "Galileo and the Problem of Free Fall." In *The British Journal for the History of Science*, 7 (1974) pp. 105-134.

Naylor, Ronald H. "Galileo: Real Experiment and Didactic Demonstration." In *Isis* (1974) pp. 398-419.

Naylor, Ronald H. "Galileo's Simple Pendulum." In *Physis*, 16 (1974) pp. 23-46.

Naylor, Ronald H. "An Aspect of Galileo's Study of the Parabolic Trajectory." In *Isis*, 64 (1975) pp. 394-396.

Naylor, Ronald H. "Galileo: the Search for the Parabolic Trajectory." In *Annals of Science*, 33 (1976) pp. 153-172.

Naylor, Ronald H. "Galileo's Theory of Motion: Processes of Conceptual Change in the Period 1604-1610." In *Annals of Science*, 34 (1977) pp. 365-392.

Naylor, Ronald H. "Galileo's Theory of Projectile Motion." In *Isis*, 71 (1980) pp. 550-570.

Naylor, Ronald H. “The Role of Experiment in Galileo’s Early Work on the Law of Fall.” In *Annals of Science*, 37 (1980) pp. 363-378.

Naylor, Ronald H. “Galileo’s Method of Analysis and Synthesis.” In *Isis*, 81 (1990) pp. 675-707.

Netz, Reviel “Why did Greek Mathematicians “Publish” their Analyses?” In *Ancient & Medieval Traditions in the Exact Sciences*, edited by Patrick Suppes, Julius M. Moravcsik and Henry Mendell. Stanford: CSLI Publications.

Maier, Annaliese “Galilei und die scholastische Impetustheorie.” *Ausgehendes Mittelalter*. Roma: Edizioni di Storia e Letteratura, 1967.

Paolo Palmieri, “The Obscurity of the Equimultiples.” In *Archive for History of Exact Sciences*, 407 (2001).

Palmieri, Paolo *Galileo’s construction of idealized fall in the void*; Paolo Palmieri, “Mental models in Galileo’s early mathematization of nature.” In *Studies in History and Philosophy of Science*, 34 (2003) pp. 229-264.

Palmieri, Paolo “The Cognitive Development of Galileo’s Theory of Buoyancy.” In *Archive for History of Exact Sciences*, 59 (2005) pp. 189-222.

Palmieri, Paolo “A New Look at Galileo’s Search for Mathematical Proofs.” In *Archive for History of Exact Sciences*, 60 (2006) pp. 285-317.

Palmieri, Paolo “Breaking the circle: the emergence of Archimedean mechanics in the late Renaissance.” In *Archive for History of Exact Sciences* (2007).

Paolo Palmieri, “’Spuntar lo scoglio più duro’: did Galileo ever think the most beautiful thought experiment in the history of science?” In *Studies In History and Philosophy of Science*, Part A, **36** 2 (June 2005), pp. 223-240.

Renn, Jurgen e altri, “Hunting the White Elephant: When and How did Galileo Discover the Law of Fall?” In *Science in Context*, 13 (2000) pp. 299-419.

Rossi, Paolo “Immagini di Galileo.” In *Nuncius* 9 (1994) pp. 3-14.

Shea, William R. *Galileo's Intellectual Revolution*. New York: Science History Publications, 1972.

Shea, William R. *La rivoluzione intellettuale di Galileo. 1610-1632*. Firenze: Sansoni, 1974.

Shea, William R. e Wolf, Neil S. “Stillman Drake and the Archimedean Grandfather of Experimental Science.” In *Isis* 64 (1975) pp. 397-400.

Shea, William R. “Galileo and the Justification of Experiments.” In *Historical and Philosophical Dimensions of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, a cura di Butts e Hintikka. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1977, pp. 81-92.

Shea, William R. *Nature Mathematized*. Dordrecht-Boston-London: D. Reidel Publishing Company, 1983.

Shea, William R. “The Scientific Revolution Really Occurred.” In *European Review*, **15** 4 (2007) pp. 457-469.

Soppelsa, Marialaura *Genesi del metodo galileiano e tramonto dell'aristotelismo nella scuola di Padova*. Padova: Antenore, 1974.

Schemmel, Matthias “The English Galileo: Thomas Harriot and the Force of Shared Knowledge in Early Modern Mechanics.” In *Physics in Perspective*, 8 (2006) pp. 360-380.

Wallace, William A. (a cura di) *Reinterpreting Galileo*. Washington, D.C.: Catholic University of America Press, 1986.

Wallace, William A. *Galileo's Logical Treatises*. Dordrecht-Boston-London: D. Reidel Publishing Company, 1992.

Westfall, Richard S. *Force in Newton's Physics. The Science of Dynamics in the XVIIth Century*. London-New York: MacDonald-American Elsevier, 1971.

Westfall, Richard S. "Science and Patronage: Galileo and the Telescope." *Isis* 76 (1985).

Wisan, Winifred L. "The New Science of Motion: A Study of Galileo's *De motu locali*." In *Archive for History of Exact Sciences*, 13 (1974) pp. 103-306.