



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

Sede Amministrativa: Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Ambientale

---

DOTTORATO DI RICERCA IN SCIENZE DELL' INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE  
CICLO XXVII

**ONDA TRASVERSALE STAZIONARIA INDOTTA  
DAL DISTACCO ALTERNATO DEI VORTICI IN CORRISPONDENZA  
DI UNA SCHIERA DI CILINDRI VERTICALI**

**Coordinatore** : Ch.mo Prof. Stefano Lanzoni

**Supervisore** : Ch.mo Prof. Andrea Defina

**Dottoranda** : Irene Pradella







# SOMMARIO

La ricerca esposta nella presente tesi è orientata a comprendere il fenomeno fisico che si può realizzare quando una corrente a superficie libera investe una schiera di cilindri verticali, collocata in un ambiente confinato come un canale: si può infatti assistere alla formazione di una sessa trasversale, rispetto alla direzione del flusso principale monodimensionale, con oscillazioni stazionarie della superficie libera tra le pareti del canale.

L'approccio adottato per lo studio di questo fenomeno è stato duplice, sia teorico che sperimentale. Per quanto riguarda il modello teorico, esso si basa sulla soluzione delle equazioni linearizzate delle onde lunghe in acque basse. Lo studio sperimentale, condotto in modo sensibilmente più accurato rispetto agli analoghi studi presenti in letteratura, ha consentito di raccogliere una cospicua quantità di dati utilizzati sia per la validazione del modello teorico che per affinare le conoscenze sul fenomeno.

I risultati raggiunti sono molteplici:

- si è dimostrata la dipendenza della massima ampiezza d'onda relativa da parametri idraulici, quali il numero di Froude, e da parametri geometrici, quali il diametro e la densità dei cilindri, e la larghezza del canale. L'effetto di questi parametri è correttamente incluso all'interno della formula proposta per la massima ampiezza relativa,  $A/h$  come è confermato dal buon accordo tra le previsioni teoriche e i dati sperimentali raccolti. Inoltre il modello proposto consente di prevedere in maniera sufficientemente accurata anche i dati di letteratura misurati dai vari studiosi che si sono occupati di questo fenomeno;
  - si è rilevata per la prima volta la presenza di due distinti picchi di ampiezza relativa a modo 1;
  - è stata osservata la formazione di un'onda longitudinale progressiva che si sovrappone all'oscillazione trasversale producendo complessivamente un'onda metacronale.
- Questi ultimi due aspetti richiedono, tuttavia, un approfondimento.

Il lavoro di tesi si struttura con i primi due capitoli dedicati all'esposizioni degli aspetti teorici del problema, un terzo capitolo in cui si descrive dettagliatamente il modello matematico proposto, un quarto capitolo in cui viene presentato lo studio sperimentale condotto in laboratorio, un quinto capitolo in cui viene descritto e commentato il confronto tra le previsioni del modello e i risultati sperimentali e un sesto capitolo dedicato all'approfondimento della tematica della comparsa di un'onda longitudinale progressiva.

# ABSTRACT

An array of vertical cylinders in an otherwise uniform open channel flow can generate a seiche in the transverse direction due to the lift associated with vortex shedding behind each cylinder. Seiche amplitude attains a maximum at resonance, i.e., when the vortex shedding frequency is close to the natural standing wave frequency.

The phenomenon at hand was studied both theoretically and experimentally.

A model to predict the maximum seiche amplitude has been proposed. The model is based on the analytical solution of the linearized shallow water equations.

A large set of accurate experimental data has been collected aimed at validating the proposed model and increasing our knowledge about the phenomenon.

The results are encouraging:

- the maximum relative wave amplitude is found to depend on hydraulic parameters, such as the Froude number, and geometric parameters, such as the cylinders diameter and density, and the channel width. The effects of these parameters are properly included in the model to predict the maximum relative amplitude of the seiche,  $A/h$ . This is confirmed by the good agreement between the theoretical and experimental results. In addition, the proposed model agrees quite well with further experimental data available in the literature;
- for the first time two peaks of  $A/h$  in mode 1 have been detected;
- the formation of a longitudinal progressive wave, which composed with the transverse seiche produces a metachronal wave, was experimentally observed.

The latter two points deserve further investigations.

The first two chapters of the thesis introduce the phenomenon and its main theoretical aspects; the third chapter describes the mathematical model; the fourth chapter illustrates the experimental investigation; the comparison between theoretical and experimental results are presented and discussed in the fifth chapter; the sixth chapter is devoted to some preliminary investigations on the longitudinal wave.

# INDICE

<b>CAPITOLO 1: INTRODUZIONE</b>	<b>pag. 1</b>
<b>CAPITOLO 2: ASPETTI TEORICI</b>	<b>pag. 5</b>
2.1 DISTACCO ALTERNATO DEI VORTICI E SCIA DI VON KARMAN	pag. 5
2.2 LA FORMAZIONE DELL' ONDA TRASVERSALE	pag. 10
<b>CAPITOLO 3: IL MODELLO MATEMATICO</b>	<b>pag. 13</b>
3.1 LE EQUAZIONI DEL MODELLO	pag. 13
3.2 SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI	pag. 17
3.3 APPLICAZIONE DEL MODELLO AI DATI DI LETTERATURA	pag. 21
<b>CAPITOLO 4: STUDIO SPERIMENTALE</b>	<b>pag. 31</b>
4.1 APPARATO SPERIMENTALE	pag. 31
4.2 MODALITA' DI ESECUZIONE DELLE PROVE	pag. 34
4.3 DESCRIZIONE QUALITATIVA DEI RISULTATI SPERIMENTALI	pag. 35
4.4 ANALISI DELLE FREQUENZE CARATTERISTICHE	pag. 37
4.5 ANALISI DELLE MASSIME AMPIEZZE DELL'ONDA TRASVERSALE	pag. 46
<b>CAPITOLO 5: APPLICAZIONE DEL MODELLO AI DATI SPERIMENTALI</b>	<b>pag. 55</b>
<b>CAPITOLO 6: EFFETTO DELL' ONDA LONGITUDINALE</b>	<b>pag. 63</b>
<b>CAPITOLO 7: CONCLUSIONI</b>	<b>pag. 67</b>





# CAPITOLO 1: INTRODUZIONE

La ricerca che ci si propone è orientata a comprendere il fenomeno fisico che si può realizzare quando una corrente a superficie libera investe una schiera di cilindri verticali, collocata in un ambiente confinato come un canale: si può infatti assistere alla formazione di una sessa in direzione trasversale rispetto a quella longitudinale del flusso principale monodimensionale, con oscillazioni stazionarie della superficie libera tra le pareti del canale.

Quando una corrente a superficie libera investe una schiera di cilindri verticali e il numero di Reynolds riferito al cilindro è compreso nell'intervallo in cui si ha distacco alternato di vortici ( $47 < Re < 2 \times 10^5$ ) può svilupparsi un'onda stazionaria che oscilla in direzione trasversale al moto. L'onda è prodotta dall'azione periodica dei cilindri sul fluido associata alla forza di lift che si genera a causa del distacco alternato dei vortici e la sua ampiezza è massima quando la frequenza di distacco dei vortici  $f_v$  è prossima alla frequenza naturale dell'oscillazione trasversale  $f$ . In queste condizioni, cosiddette di risonanza, l'ampiezza dell'onda può essere dello stesso ordine di grandezza della profondità della corrente.

Questo fenomeno ha un duplice interesse, sia teorico che pratico. Esso infatti è stato osservato nella realtà in alcuni casi, soprattutto in prossimità delle pile dei ponti (Adam M. Howes (2011)).

Il caso più recente si è verificato nel 2009 nella contea di Ada nello stato dell'Idaho (USA): per ampliare un ponte sulla superstrada I-84 che transita al di sopra del New York Canal (NYC) il numero delle pile fu aumentato da 28 a 60 e durante la seguente stagione irrigua si osservò il verificarsi di onde trasversali e longitudinali all'interno del canale in corrispondenza della struttura del ponte. Queste oscillazioni variarono durante tutta la stagione irrigua e destarono notevoli preoccupazioni in relazione all'erosione delle sponde da esse causata. Di conseguenza nel 2010 al Laboratorio della Utah State University si costruì un modello fisico nel tentativo di simulare il fenomeno oscillatorio e di studiare degli accorgimenti nella configurazione strutturale che consentissero di eliminare il problema (Adam M. Howes (2011)).

Un simile fenomeno oscillatorio era stato già osservato nel 1967 nel Delta Mendota Canal (Schuster (1967)).

E' il caso di ricordare come la sessa trasversale possa avere anche un impatto ecologico: piccoli oggetti galleggianti come sementi, propagoli o uova di zanzare e mosche che, galleggiando, passano attraverso la vegetazione emergente, sono attratti e infine catturati dalle piante in virtù del cosiddetto effetto Cheerios (Defina e Peruzzo (2010)). La sessa, indotta dal distacco dei vortici dietro gli steli emergenti, aumentando la forza di resistenza, può strappare queste particelle, influenzando così il loro destino.

Tuttavia le onde stazionarie trasversali oggetto di questo lavoro sono state maggiormente osservate nel corso di esperimenti di laboratorio in cui una serie di cilindri veniva usata per simulare la vegetazione rigida. La formazione della sessa trasversale quindi risultava essere un fastidioso aspetto collaterale del problema principale studiato, disturbando non poco gli esperimenti.

Il fenomeno di oscillazione trasversale dell'acqua causato dal distacco alternato di vortici da una schiera di cilindri presenta notevoli somiglianze con il fenomeno del Vortex Induced Vibration (VIV) dove però è il cilindro che oscilla in direzione trasversale. Un riassunto dei più importanti studi degli ultimi vent'anni riguardanti il VIV è stato pubblicato da Williamson e Govardhan (2000).

Nell'ambito del Vortex Induced Vibration, la più nota caratteristica riguardante l'interazione fluido-cilindri è il regime di lock-in primario: esso si verifica quando la frequenza di distacco dei vortici,  $f_v$ , è vicina alla frequenza naturale (o forzata) di oscillazione del cilindro,  $f$ . In questa regione il distacco dei vortici viene influenzato dal movimento del cilindro e la frequenza di distacco dei vortici cambia per adeguarsi a quella con cui oscilla il cilindro.

L'equivalenza qualitativa tra VIV e sessa trasversale è stata osservata nelle indagini sperimentali di Oengören e Ziada (1992,1993,1998, 2000) sulla risonanza acustica in fasci di tubi. In questi studi, incentrati sulla determinazione delle frequenze tipiche del fenomeno, l'esistenza di una regione di lock-in a cavallo tra la condizione di risonanza è stata confermata per il caso delle onde a superficie libera. In questo intervallo il distacco dei vortici è sincronizzato con la sessa trasversale, vale a dire, il distacco di vortici da tutti i cilindri, attraverso un meccanismo di feedback, si sincronizza per risultare in fase reciprocamente nonchè con la sessa; in queste condizioni si verificano le maggiori oscillazioni della superficie libera. Oengören e Ziada (1992,1993,1998, 2000) hanno anche scoperto che la frequenza dell'oscillazione naturale è accuratamente predetta dalla teoria delle onde di piccola ampiezza:

$$f = \left[ \frac{gn}{4\pi B} \tanh\left(\frac{\pi h_0 n}{B}\right) \right]^{1/2}$$

in cui  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $n$  è il modo di oscillazione,  $B$  è la larghezza del canale e  $h_0$  è la profondità media della corrente.

Nonostante in letteratura non esista un importante numero di studi riguardante questo fenomeno, oscillazioni trasversali della superficie libera sono state osservate per la prima volta da Crasse già nel 1939. Successivamente Clay e Tison (1968) hanno rilevato le onde trasversali in un canale con solo un cilindro investito dalla corrente. Stone (200) e Stone e Shen (1999) indagando le perdite di energia subite dal fluido nel suo transitare attraverso uno schieramento di steli verticali che dovevano simulare la vegetazione, incontrarono molta difficoltà nel determinare la profondità media dell'acqua nel canale a causa di importanti oscillazioni della superficie libera riconducibili al fenomeno suddetto. Anche Tsujimoto (1992) e Tsujimoto e Kitamura (1992) rilevarono il problema durante alcune sperimentazioni simili a quelle effettuate da Stone (1997).

Solo pochi studi hanno specificamente affrontato la questione della sessa trasversale prodotta da una serie di ostacoli verticali in una corrente a superficie libera. Un primo lavoro sistematico si deve a Zima e Ackermann (2002), i quali hanno studiato il fenomeno sperimentalmente. Essi hanno scoperto che le più grandi ampiezze d'onda si verificavano quando il rapporto tra le frequenze  $f_v/f$  era compreso tra 0.7 e 1.3, ovvero prossimo alle condizioni di risonanza, che si raggiungono in teoria per  $f_v/f=1$ . In queste condizioni le massime ampiezze delle onde misurate erano all'incirca pari al 35% della profondità media della corrente. Al contrario, quando il rapporto tra le frequenze era inferiore a 0.5 o maggiore di 2.0, l'ampiezza dell'onda rilevata era praticamente nulla.

Zima e Ackermann (2002) hanno proposto anche un'equazione per la stima dell'ampiezza massima della sessa. L'equazione è stata ricavata imponendo l'equilibrio tra la forza di pressione dovuta all'inclinazione della superficie libera in direzione trasversale e la forza di lift dovuta ai cilindri.

Un recente contributo allo studio del fenomeno si deve a Sarkar (2012), il quale ha condotto un'indagine sperimentale su una schiera di cilindri distribuiti casualmente e completamente sommersi. Questi studi hanno confermato l'esistenza di una regione di lock-in.

In letteratura vi sono inoltre altri due lavori che si occupano del fenomeno della sessa trasversale, con autori rispettivamente Ghomeshi et al. (2007) e Jafari et al. (2010). In entrambi gli studi è stata condotta un'ampia serie di prove sperimentali proponendo una formula per la massima ampiezza d'onda che viene fatta dipendere da una serie di parametri adimensionali significativi. La formula è perfezionata effettuando una regressione lineare multiparametrica sui dati sperimentali.

Nella fase iniziale del mio lavoro di ricerca gli studi citati sono stati fondamentali per una preliminare comprensione del fenomeno fisico e hanno fornito il primo database di valori sperimentali di ampiezza d'onda. Con riferimento a questo ultimo aspetto è bene però ricordare che tutte le

misure sperimentali di ampiezza d'onda effettuate nei vari studi venivano registrate a vista, con l'ausilio di una scala graduata affissa sulla parete esterna della canaletta; ciò introduce una sensibile componente di errore nei dati inducendoci a diffidare riguardo alla loro completa attendibilità. E' per questo motivo che, nel corso dei tre anni di dottorato, sono state da me effettuate nuove e più accurate indagini di laboratorio, di cui verrà ampiamente discusso nel proseguo della trattazione.

Infine nel 2014 è stato pubblicato da Zhao, Cheng e Huang uno studio riguardante proprio le oscillazioni della superficie libera che si producono in corrispondenza delle schiere di cilindri. Il lavoro si concentra soprattutto sulla determinazione della frequenza delle oscillazioni della superficie libera e propone una correzione alla formula della frequenza naturale che tenga conto della porosità dovuta alla presenza della schiera di cilindri. Gli studiosi inoltre rilevano la presenza di quattro diverse configurazioni di flusso (superficie piana con assenza di onde, onde trasversali, onde longitudinali e superficie libera disturbata), insistendo in particolare sul fatto che le onde trasversali non si presentano mai in assenza delle onde longitudinali e viceversa.

Nel quadro appena tracciato si inserisce il lavoro portato avanti nel corso del mio dottorato di ricerca, il quale è consistito nell'elaborazione di un modello matematico che arrivi a prevedere la massima ampiezza dell'onda trasversale e parallelamente nella conduzione di un'ampia serie di prove sperimentali che ci consentissero di avere a disposizione un database di ampiezze misurate con cui confrontare le ampiezze calcolate tramite la formula proposta che verrà introdotta nel proseguo della trattazione.

I risultati ottenuti dimostrano come la formula proposta per  $A/h$  produca un notevole miglioramento nella predizione dei valori misurati rispetto a quanto facciano le altre formule di letteratura. Inoltre essa ha l'indiscutibile vantaggio di essere stata ricavata risolvendo le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto opportunamente approssimate e linearizzate.

Le prove sperimentali hanno inoltre permesso di evidenziare i parametri idraulici e geometrici che influenzano la massima ampiezza d'onda relativa, primi fra tutti il numero di Froude come parametro idraulico e il numero di cilindri per unità di area come parametro geometrico.

# CAPITOLO 2: ASPETTI TEORICI

## 2.1 DISTACCO ALTERNATO DEI VORTICI E SCIA DI VON KARMAN

Le grandezze adimensionali che descrivono il movimento del fluido attorno ad un cilindro liscio a sezione circolare dipendono dal numero di Reynolds riferito al diametro del cilindro stesso:

$$Re = \frac{Ud}{\nu}$$

in cui  $d$  è il diametro del cilindro,  $U$  è la velocità della corrente e  $\nu$  è la viscosità cinematica del fluido.

Il fenomeno più importante è sicuramente quello del distacco alternato di vortici, che è comune in tutti i casi in cui  $Re > 40$ . In queste circostanze lo strato limite aderente alla superficie del cilindro si separa.

Lo strato limite che si forma lungo il cilindro contiene una grande quantità di vortici che inducono lo strato a ruotare formando un vortice avente lo stesso verso di quello della vorticosità in arrivo. Analogamente dalla parte opposta del cilindro si forma un altro vortice che ruota nella direzione opposta.

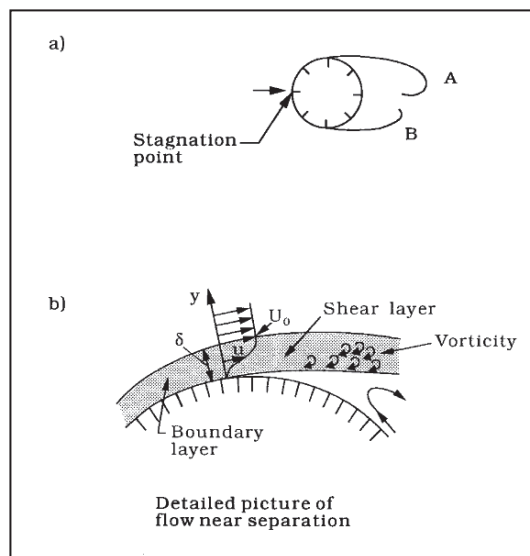
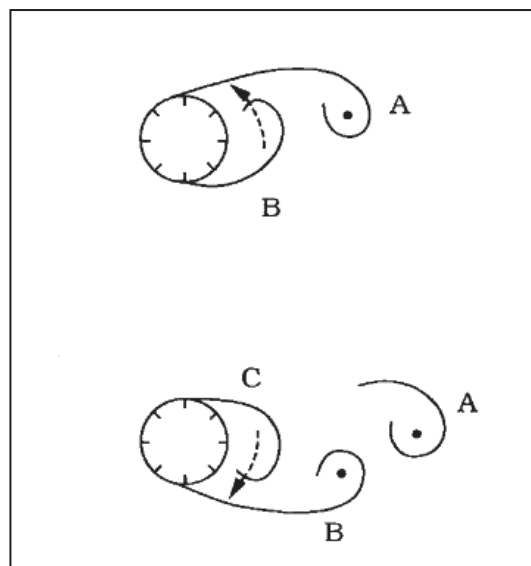


Fig. 1 Rappresentazione schematica della strato limite.

Se  $Re > 40$  la coppia di vortici così formata è instabile. Di conseguenza uno dei due vortici (vortice A) si sviluppa maggiormente dell'altro diventando ad un certo punto così forte da attrarre a sé il vortice opposto (vortice B). Il vortice A gira in senso orario mentre il vortice B gira in senso antiorario. L'avvicinamento del vortice B che gira in senso opposto al vortice A esclude per quest'ultimo l'alimentazione di vorticosità dal suo strato limite. A causa di ciò il vortice A si stacca e viene trasportato dalla corrente.

A seguito del distacco del vortice A si forma un nuovo vortice nel medesimo lato del cilindro (vortice C). Il vortice B gioca ora lo stesso ruolo che prima era svolto dal vortice A, infatti cresce in dimensioni e forza fino ad attrarre a sé il vortice C. A questo punto anche il vortice B si stacca (vedi **Fig. 2**).

Tale processo si manifesta nuovamente ogni volta che un vortice si stacca da un lato del cilindro cosicché il distacco continua ad avvenire in maniera alternata da ciascun versante del cilindro.



**Fig. 2 Meccanismo di distacco alternato dei vortici.**

La frequenza di distacco dei vortici, una volta normalizzata con la velocità della corrente  $U$  e il diametro del cilindro  $d$ , è una funzione del numero di Reynolds:

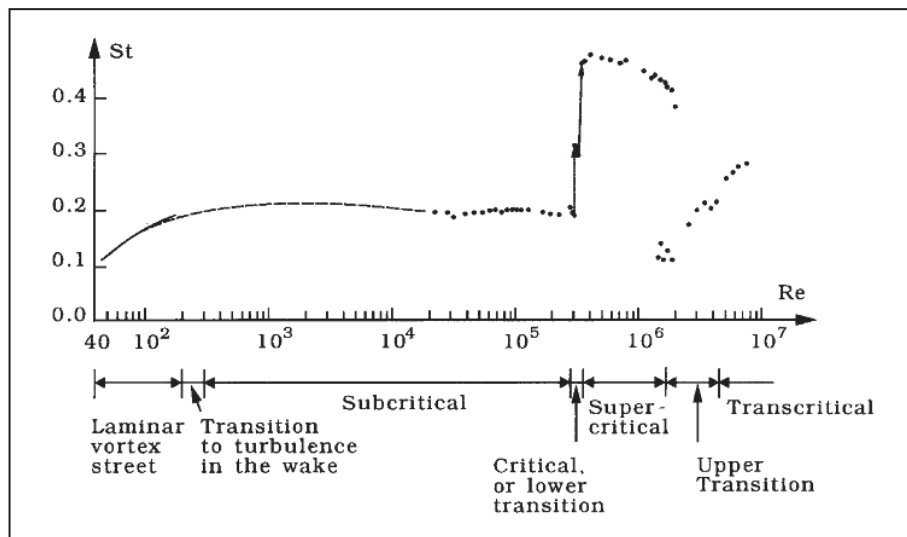
$$S_t = S_t(Re)$$

in cui:

$$S_t = \frac{f_s d}{U}$$

dove  $f_s$  è la frequenza di distacco dei vortici. La frequenza di distacco dei vortici normalizzata  $S_f$  è chiamata numero di Strouhal.

La **Fig. 3** mostra come il numero di Strouhal vari con  $Re$ .



**Fig. 3** Numeri di Strouhal per un cilindro a sezione circolare. I dati sperimentali si riferiscono ai lavori di *Williamson (1989)* (linea continua), *Roshko (1961)* (linea tratteggiata) e *Schewe (1983)* (punti).

In presenza di due schiere parallele di vortici elementari come quelli che possono staccarsi dai bordi di un corpo prismatico o cilindrico allungato, posto trasversalmente ad una corrente, la formazione di vortici che ne deriva può acquistare, sotto talune ipotesi, una configurazione stabile, con un distacco alternato dei vortici che è stato studiato particolarmente da Th. Von Karman (1912).



**Fig. 4** Scia di Von Karman

La cosiddetta scia vorticoso di Von Karman è una configurazione asimmetrica, caratterizzata dal rapporto:

$$\frac{a}{b} = 0.281$$

fra la distanza  $a$  delle due schiere di vortici e l'intervallo  $b$  con cui si succedono i vortici stessi.

Pur essendosi fatte varie ipotesi non è ben chiara la valutazione della distanza  $a$  in rapporto alla dimensione trasversale  $d$  del corpo. Su basi sperimentali i seguenti valori forniti da D. B. Steinman (1946) possono ritenersi applicabili al caso di un cilindro circolare fisso in una corrente a pelo libero:

$$\frac{a}{d} = 1.3 \quad \frac{a}{b} = 0.30 \quad \frac{b}{d} = 4.3 \quad \frac{v_s}{v_0} = 0.86$$

Si noti che la schiera di vortici rimane indietro rispetto alla corrente, essendo  $v_s < v_0$  ( $v_s$  è la velocità con cui si spostano i vortici mentre  $v_0$  è la velocità media della corrente indisturbata).

Si è visto come per numeri Reynolds compresi tra 300 e  $3 \times 10^5$ , il numero di Strouhal di un singolo cilindro sia approssimativamente pari a 0.2 (vedi **Fig. 3**). Per un gruppo di cilindri il valore del numero di Strouhal dipende dalla configurazione dei cilindri stessi (sfalsati o allineati), dal loro diametro e dalla loro distanza reciproca.

Zukauskas et al. (1988) hanno presentato le seguenti due equazioni valide rispettivamente per una configurazione sfalsata oppure allineata:

$$S_t = 0,2 + \exp \left[ -0,44 \left( \frac{T}{d} \right)^{1,8} \right]$$

$$S_t = 0,2 + \exp \left[ -1,2 \left( \frac{T}{d} \right)^{1,8} \right]$$

dove  $T$  è la distanza tra i cilindri di una stessa riga e  $d$  è il diametro dei cilindri.

Entrambe le formule valgono quando  $T/d \geq 1.15$ .

Fitz-Hugh ha proposto delle mappe che riportano il numero di Strouhal in funzione di  $T/d$  e di  $P/d$ , in cui  $P$  è la distanza tra le righe di cilindri e  $T$  è la distanza tra due cilindri adiacenti appartenenti alla stessa riga (**Fig. 5** e **Fig. 6**).



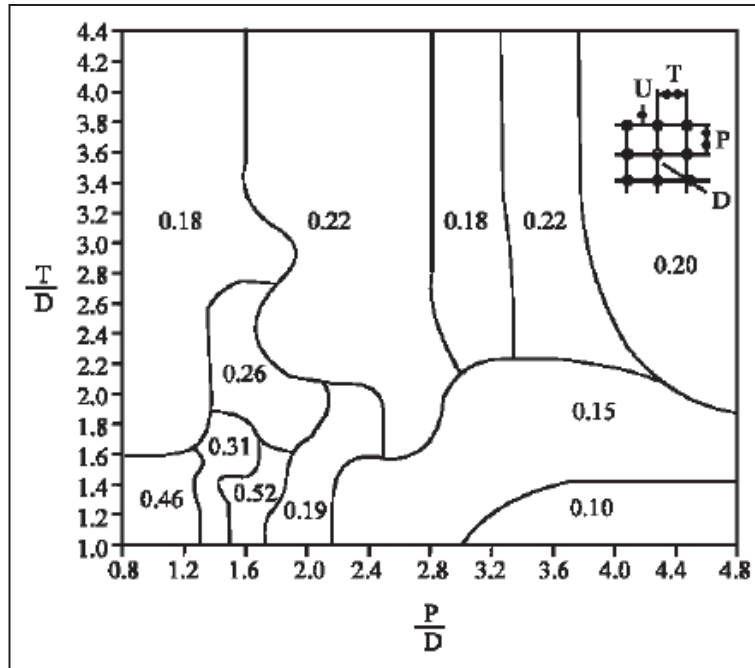


Fig. 5 Cilindri allineati

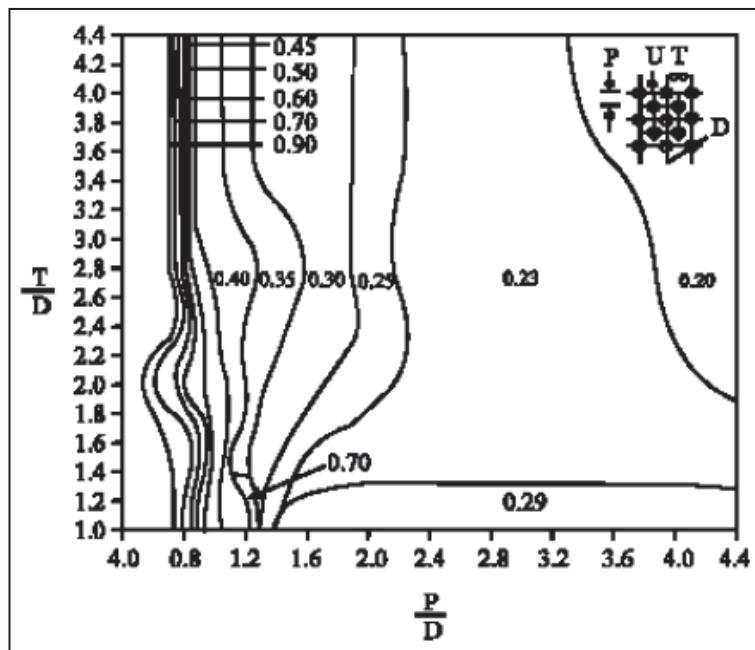


Fig. 6 Cilindri sfalsati

## 2.2 LA FORMAZIONE DELL' ONDA TRASVERSALE

Come precedentemente ricordato lo scopo della mia ricerca è lo studio dell'onda stazionaria trasversale che può verificarsi quando una corrente a superficie libera passa attraverso un gruppo di cilindri verticali. Come già ampiamente detto l'onda è promossa dalla forza di lift associata al distacco alternato di vortici a tergo di ciascun cilindro.

Poiché questo problema è legato al fenomeno della risonanza, è opportuno spendere alcune parole per chiarirlo, in particolare sfruttando l'esempio dell'altalena.

La risonanza è una condizione fisica che si verifica quando un sistema oscillante viene sottoposto ad una forza periodica la cui frequenza è uguale alla frequenza propria del sistema naturale.

In particolare, se spingiamo un'altalena, essa inizia ad oscillare con una frequenza caratteristica (frequenza di oscillazione naturale). Se la forza esterna periodica ha una frequenza prossima alla frequenza naturale, l'altalena tende ad aumentare la sua oscillazione sempre di più. Se al contrario la forza esterna periodica ha una frequenza molto superiore o molto inferiore alla frequenza naturale, la forza si opporrà all'oscillazione fino ad annullarla.

Riassumendo ogni sistema fisico caratterizzato da una propria frequenza naturale può entrare in risonanza con una forza periodica esterna. In particolare ci sono tre condizioni necessarie per avere risonanza:

1. un sistema fisico caratterizzato da una frequenza di oscillazione naturale;
2. una fonte esterna di energia che costringa il sistema ad oscillare alla sua frequenza naturale;
3. bassissima capacità di dissipare energia da parte del sistema.

Possiamo trovare esempi di risonanza in molti sistemi fisici, come strutture, dispositivi meccanici, strumenti musicali ecc. Il più famoso esempio di risonanza meccanica è il crollo del Tacoma Bridge (1940): sotto l'azione di un vento costante i vortici della scia di von Karman trasmisero coppie torsionali alla stessa frequenza torsionale propria del ponte, innescando un fenomeno di risonanza con ampiezze di oscillazione via via crescenti che portarono infine al crollo del ponte.

Nel nostro caso il sistema fisico caratterizzato da una frequenza di oscillazione naturale è l'acqua che oscilla nel canale con una frequenza naturale ben approssimata dalla formula ottenuta dalla teoria delle onde di piccola ampiezza:

$$f = \left( \frac{gn}{4\pi B} \tanh \frac{n\pi h}{B} \right)^{1/2} \quad (1)$$

Tuttavia questa formula è applicabile solo quando l'effetto della densità dei cilindri è trascurabile. Zhao, Cheng e Huang (2014) propongono di considerare l'effetto dei cilindri, trattando la schiera come un mezzo poroso con porosità  $1-\lambda$ , dove  $\lambda$  indica il rapporto tra l'area occupata dai cilindri e l'area totale. Sulla scorta di quanto riportato negli studi di Yu e Chwang (1994) i tre autori propongono un'espressione modificata della frequenza naturale di oscillazione, in cui viene introdotto un coefficiente  $S$  che, nel caso del cilindro, è pari a  $S=1+\lambda/(1-\lambda)$ :

$$f = \left( \frac{1}{S} \frac{gn}{4\pi B} \tanh \frac{n\pi h}{B} \right)^{1/2} \quad (2)$$

La fonte esterna di energia è rappresentata dai vortici che si staccano dietro ogni cilindro con una determinata frequenza  $f_v$ .

La risonanza si verifica quando le due frequenze  $f$  ed  $f_v$  sono più o meno uguali e l'ampiezza dell'onda trasversale è massima.

In generale, la frequenza di distacco dei vortici può essere calcolata con la formula di Strouhal:

$$f_s = \frac{S_t U}{d} \quad (3)$$

Tuttavia in condizioni particolari il vortex shedding viene influenzato dal moto trasversale dell'acqua e la frequenza di distacco dei vortici si modifica per adeguarsi alla frequenza dell'onda trasversale (fenomeno di lock-in). In questa condizione il distacco dei vortici è sincronizzato con la sessa trasversale e si realizzano le massime ampiezze d'onda.

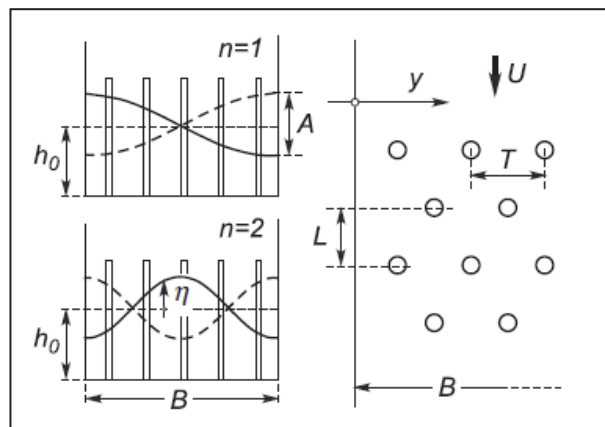


# CAPITOLO 3: IL MODELLO MATEMATICO

## 3.1 LE EQUAZIONI ALLA BASE DEL MODELLO

Il questo capitolo si procederà alla descrizione del modello matematico che ci ha permesso di ricavare un'espressione per la massima ampiezza d'onda relativa in condizioni di risonanza.

Consideriamo una schiera di cilindri verticali disposti allineati, sfalsati o in maniera casuale, in un canale rettangolare (vedi **Fig. 7**) e supponiamo che la schiera si estenda all'infinito nella direzione del flusso ( $x$ ). Si assume inoltre l'ipotesi di moto uniforme in direzione longitudinale ( $x$ ).



**Fig. 7 Sezione trasversale (sinistra) e pianta (destra) che mostrano le onde stazionarie in un canale rettangolare per differenti modi di oscillazione, e relativa definizione dei parametri rilevanti.**

Eseguendo una doppia media (nel tempo e nello spazio, su una superficie di riferimento orizzontale elementare) sulle equazioni di Navier-Stokes e sull' equazione di continuità, e trascurando i termini viscosi otteniamo (Raupach (1982)):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \right\rangle - g_i + \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial t} + \langle \bar{u}_j \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}'_i \bar{u}'_j \rangle}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $p$  è la pressione,  $u_i$  è la velocità del fluido,  $t$  è il tempo,  $x_i$  il vettore posizione, e  $g_i$  è l'accelerazione di gravità. Per motivi di convenienza, si utilizzano due rappresentazioni alternative per indicare il vettore posizione,  $x_i$  o  $(x,y,z)$ , e la velocità di flusso,  $u_i$  o  $(u,v,w)$ .

La barretta e l'apice denotano rispettivamente la media temporale in un singolo punto e le fluttuazioni, le parentesi angolari indicano la media spaziale eseguita su una piccola area di riferimento orizzontale che comprende i cilindri, e la tilde indica la differenza tra la media temporale di una variabile e la sua media spaziale (ad esempio  $\tilde{u}_j = \bar{u}_j - \langle \bar{u}_j \rangle$ ).

Il secondo termine nell'equazione di conservazione della quantità di moto dà la resistenza per unità di massa esercitata dai cilindri; gli ultimi due termini sono rispettivamente gli sforzi dispersivi e di Reynolds.

Avendo fatto l'approssimazione di acque basse possiamo trascurare l'accelerazione e gli sforzi in direzione verticale ( $z$ ) così da ottenere distribuzione idrostatica delle pressioni:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial z} - g = 0 \quad (6)$$

Integrando sulla profondità da  $z$  alla superficie libera ( $z=h$ ) l'equazione (6) otteniamo  $\langle \bar{p} \rangle = \rho(h - z)$  che viene utilizzata per eliminare la pressione  $\langle \bar{p} \rangle$  nell'equazione (4).

Riscriviamo perciò l'equazione (4) in direzione  $x$  e  $y$  come segue:

$$g \frac{\partial h}{\partial x} - f_x + \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial t} + \langle \bar{u} \rangle \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial x} + \langle \bar{v} \rangle \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \tilde{\nabla} \cdot \langle \mathbf{T}_x \rangle = 0 \quad (7)$$

$$g \frac{\partial h}{\partial y} - f_y + \frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial t} + \langle \bar{u} \rangle \frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial x} + \langle \bar{v} \rangle \frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \tilde{\nabla} \cdot \langle \mathbf{T}_y \rangle = 0 \quad (8)$$

in cui  $\mathbf{f}=(f_x, f_y)$  è la forza orizzontale di drag esercitata dai cilindri per unità di massa,  $\mathbf{T}=(\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y)$  sono le componenti in  $x$  e  $y$  del tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$  che contiene sia gli sforzi di Reynolds ( $-\rho \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle$ ) che quelli dispersivi ( $-\rho \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle$ ) and  $\tilde{\nabla}$  è il gradiente tridimensionale.

Mediando l'equazione (7) sulla profondità otteniamo:

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{h} \int_0^h f_x dz + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho h} \int_0^h \tilde{\nabla} \cdot \langle \mathbf{T}_x \rangle dz = 0 \quad (9)$$

La forza di drag media per unità di massa può essere scritta come:

$$\frac{1}{h} \int_0^h f_x dz = \frac{n_c}{\rho h} F_x \quad (10)$$

in cui  $F_x$  è la forza di drag integrata sulla verticale che ciascun cilindro esercita sul fluido e  $n_c$  è il numero di cilindri per unità di area orizzontale.

Integrando sulla verticale gli sforzi otteniamo (Defina (2000)):

$$\frac{1}{\rho h} \int_0^h \tilde{\nabla} \cdot \langle \mathbf{T}_x \rangle dz = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{t}_x + \tau_{sx} - \tau_{bx}) \quad (11)$$

dove  $\mathbf{t}_x$  indica gli sforzi orizzontali in direzione  $x$  mediati sulla profondità,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  è il gradiente orizzontale,  $\tau_{sx}$  e  $\tau_{bx}$  sono gli sforzi orizzontali in direzione  $x$  agenti rispettivamente sulla superficie libera e sul fondo.

Sostituendo le equazioni (10) e (11) in (9) otteniamo:

$$g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{n_c}{\rho h} F_x + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{t}_x + \tau_{sx} - \tau_{bx}) = 0 \quad (12)$$

Il trasporto laterale di quantità di moto nelle correnti che attraversano degli ostacoli non è stato ancora compreso a fondo; inoltre la presenza di un'onda trasversale aggiunge complessità al fenomeno. Pertanto per semplicità nel nostro caso il termine di sforzo  $\mathbf{t}_x = (t_{xx}, t_{xy})$  è descritto in termini di un'opportuna viscosità efficace,  $\nu_e$ , che si assume isotropa:

$$\mathbf{t}_x = \left[ 2\rho\nu_e \frac{\partial u}{\partial x}, \rho\nu_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (13)$$

Agendo in maniera analoga a quanto già descritto sull'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione  $y$  si ottiene:

$$g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{n_c}{\rho h} F_y + \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{t}_y + \tau_{sy} - \tau_{by}) = 0 \quad (14)$$

con

$$\mathbf{t}_y = \left[ \rho\nu_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), 2\rho\nu_e \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (15)$$

Integrando l'equazione di continuità (5) sulla profondità, con l'equazione cinematica alla superficie libera (vedi Defina (2000)) si ottiene:

$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

con  $\theta$  area orizzontale occupata dal fluido per unità di area, ovvero  $\theta = 1 - n_c d^2 \pi / 4$ , con  $d$  diametro del cilindro. Nel modello si assumono condizioni di moto uniforme nella direzione del flusso principale ( $x$ ), ovvero  $u = u(y, t)$ ,  $v = v(y, t)$ ,  $\partial h / \partial x = -S_b$ , con  $S_b$  pendenza del fondo in direzione  $x$ . Si assume inoltre  $n_c d^2 \ll 1$  cosicchè  $\theta \approx 1$  e si trascura lo sforzo tangenziale in corrispondenza della superficie libera. Con queste approssimazioni le equazioni alla base del modello diventano:

$$-gS_b + \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} - v_e \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{bx} = \frac{F_x n_c}{\rho h} \quad (17)$$

$$g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} - 2v_e \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \tau_{by} = \frac{F_y n_c}{\rho h} \quad (18)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

La forza  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  che ciascun cilindro trasmette al fluido è data da una combinazione delle forze di lift ( $\mathbf{F}_L$ ) e di drag ( $\mathbf{F}_D$ ) (vedi **Fig. 8**):

$$F_x = \rho dh \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2} [C_L(y, t)v - C_D u] \quad (20)$$

$$F_y = \rho dh \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2} [C_L(y, t)u - C_D v] \quad (21)$$

dove  $C_L$  e  $C_D$  sono rispettivamente i coefficienti di lift e di drag.



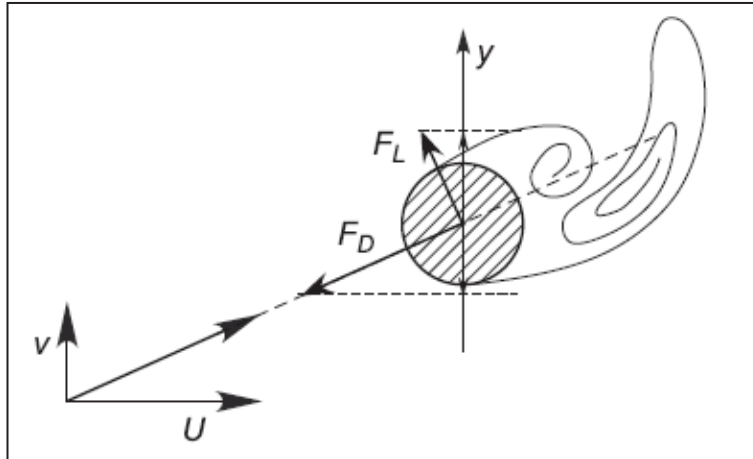


Fig. 8 Schema delle forze che ciascun cilindro trasmette al fluido

### 3.2 SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI

Per trovare una soluzione analitica semplice dell'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione  $y$ , si sono introdotte alcune ipotesi per linearizzare le equazioni del modello e renderle indipendenti l'una dall'altra.

E' interessante osservare che l'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione  $y$  dipende dalla velocità longitudinale  $u$  solo attraverso lo sforzo tangenziale al fondo  $\tau_{by}$  e la forza di drag trasversale  $F_y$ . Per fare in modo che l'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione  $y$  sia indipendente da quella in direzione  $x$ , trascuriamo lo sforzo tangenziale al fondo  $\tau_{by}$ , essendo esso piccolo rispetto alle forze di drag e di lift indotte dal cilindro, e approssimiamo la velocità longitudinale  $u(y,t)$  con il suo valore medio  $U$ .

Linearizziamo poi la forza  $F_y$  mediando il termine  $\sqrt{U^2 + v^2}$  sia nello spazio (sulla larghezza del canale,  $B$ ) sia nel tempo (su un periodo di oscillazione,  $P$ ). Poichè possiamo scrivere  $v=U \cdot f(y,t)$ , con  $f(y,t)$  una qualche funzione periodica dello spazio ( $y$ ) e del tempo ( $t$ ), la procedura di media ci consente di sostituire  $\sqrt{U^2 + v^2}$  con  $k_0 U$ , dove  $k_0 = \frac{1}{PB} \int_0^P \int_0^B \sqrt{1 + f^2(y,t)} dy dt$  è una costante.

Per completare la linearizzazione dell'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione  $y$  trascuriamo l'accelerazione convettiva; nel fare ciò limitiamo l'applicazione del modello al campo dei numeri di Froude piccoli.

L'equazione di continuità è linearizzata assumendo l'approssimazione di onde di piccola ampiezza cosicchè  $vh \approx vh_0$ , con  $h_0$  profondità media della corrente.

Con queste approssimazioni e introducendo l'elevazione di superficie  $\eta=h-h_0$ , le equazioni del modello diventano:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{2v_e}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{k_0 U d n_c}{2g} [C_L(y, t)U - C_D v] \quad (22)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (23)$$

Differenziando l'equazione (22) rispetto a  $y$  e l'equazione (23) rispetto a  $t$  e di nuovo rispetto a  $y$  e combinando i risultati si ottiene

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{1}{gh_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{2v_e}{gh_0} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial y^2} = \frac{k_0 U d n_c}{2g} \left[ \frac{C_D}{h_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial C_L(y, t)}{\partial y} U \right] \quad (24)$$

che è un'equazione d'onda modificata.

Assumiamo poi che il coefficiente di lift possa essere scritto nel modo seguente

$$C_L(y, t) = C_{L0} \beta(y) \sin(\omega_v t) \quad (25)$$

dove  $\omega_v = 2\pi f_v$ , con  $f_v$  frequenza effettiva di distacco dei vortici,  $\beta(y)$  funzione di forma ( $-1 \leq \beta(y) \leq 1$ ) che descrive il comportamento del coefficiente di lift in direzione trasversale e  $C_{L0} = \sqrt{2} C_L'$ , dove  $C_L'$  è lo scarto quadratico medio del coefficiente di lift (vedi Norbert (2003)).

La funzione di forma  $\beta(y)$  viene scritta come una serie di Fourier

$$\beta(y) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{\sin(m_i y)}{m_i} \quad (26)$$

dove  $m_i = i\pi n/B$ , con  $n$  modo di oscillazione e  $B$  larghezza della canaletta.

L'equazione (24) con l'equazione (25) e l'equazione (26) è riscritta come:

$$\begin{aligned} -gh_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2v_e \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial y^2} \\ = -\frac{k_0 U h_0 d n_c}{2} \left[ C_{L0} U \sin(\omega_v t) \sum_i b_i \cos(m_i y) + \frac{C_D}{h_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Poichè la soluzione dell'equazione (27) può essere scritta come  $\eta = \sum_i \eta_i$ , con  $\eta_i = \zeta_i(t) \cos(m_i y)$ , l'equazione (27) può essere riscritta nella

seguinte equazione differenziale parziale non omogenea di secondo ordine

$$\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial t^2} + 2\psi_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \omega_{Di}^2 \zeta_i = -\frac{k_0 C_{L0} dn_c h_0 U^2}{2} b_i \sin(\omega_v t) \quad (28)$$

con

$$\omega_{Di} = m_i \sqrt{gh_0} \quad \psi_i = \frac{k_0 U dn_c C_D}{4} + v_e m_i^2 \quad (29)$$

La forma della soluzione all'equazione (28) è

$$\eta_i = e^{-\psi_i t} [C_1 \sin(\omega_{Di} t) + C_2 \cos(\omega_{Di} t)] \cos(m_i y) + \zeta_{pi}(t) \cos(m_i y) \quad (30)$$

dove l'integrale particolare  $\zeta_{pi}(t)$  è

$$\zeta_{pi}(t) = a_i \sin(\omega_v t + \varphi_{vi}) \quad (31)$$

con

$$a_i = \frac{k_0 C_{L0} dn_c h_0 U^2 b_i}{2 \sqrt{(\omega_v^2 - \omega_{Di}^2)^2 + (2\psi_i \omega_v)^2}} \quad (32)$$

$$\varphi_{vi} = \arctan\left(\frac{2\psi_i \omega_v}{\omega_v^2 - \omega_{Di}^2}\right) \quad (33)$$

Le due costanti  $C_1$  e  $C_2$  vengono determinate imponendo le condizioni iniziali. E' opportuno ricordare che, poichè la soluzione è periodica in direzione trasversale, le condizioni al contorno sono intrinsecamente soddisfatte.

Prima di procedere introduciamo una semplificazione all'equazione generica precedente. Siamo infatti interessati alla soluzione periodica stazionaria che si realizza quando  $t \rightarrow \infty$ : in questo caso otteniamo  $\eta_i = \zeta_{pi}(t) \cos(m_i y)$ . Pertanto non abbiamo bisogno di specificare le due costanti  $C_1$  e  $C_2$ .

La velocità trasversale  $v$  è scritta come  $v = \sum_i v_i$  con  $v_i$  ottenuta sostituendo  $\eta_i$  nell'equazione (23) e integrando in  $y$

$$v_i = -a_i \frac{\omega_v}{h_0 m_i} \sin(m_i y) \cos(\omega_v t + \varphi_{vi}) \quad (34)$$

Ulteriori sviluppi sono possibili una volta che viene specificata la funzione di forma  $\beta(y)$ , il cui andamento è ipotizzato pari a quello di una funzione d'onda quadrata, poichè non si hanno informazioni sulla distribuzione trasversale del coefficiente di lift

$$b_i = 2n \frac{1 + (-1)^{i-1}}{B} \quad m_i = \frac{\pi n}{B} i \quad (35)$$

L'analisi di sensitività mostra che in condizioni prossime a quelle di risonanza la differenza tra la soluzione completa di  $\eta$  e  $v$  e la sola prima armonica  $\eta_1$  e  $v_1$  è relativamente piccola. Pertanto nel seguito si assumerà che sia la profondità che la velocità siano descritte dalla sola prima armonica. In queste condizioni, prossimi alla risonanza (ovvero con  $\omega_v = \omega_{D1}$ ) lo sfasamento è

$$\varphi_{v1} = \frac{\pi}{2} \quad (36)$$

e la massima ampiezza d'onda è

$$A = \frac{A_m}{1 + \frac{A_D}{dBn_c}} h_0 F_0 \quad (37)$$

con

$$A_m = \frac{8 C_{L0}}{\pi C_D} \quad A_D = \frac{4v_k \pi^2 n}{C_D} \quad (38)$$

dove  $F_0 = U/\sqrt{gh_0}$  è il numero di Froude che, come già osservato da Zima e Ackermann, gioca un ruolo fondamentale nella determinazione della massima ampiezza d'onda relativa. La viscosità adimensionale  $v_k$  è pari a  $v_k = \nu v_e / (k_0 U B)$ .

L'elevazione di superficie  $\eta = h - h_0$  e la velocità sono date da

$$\eta = \frac{A}{2} \cos(my) \cos(\omega_v t) \quad (39)$$

$$v = U \frac{A}{2h_0 F_0} \sin(my) \sin(\omega_v t) \quad (40)$$

dove  $m = m_1$ .

### 3.3 APPLICAZIONE DEL MODELLO AI DATI DI LETTERATURA

L'applicazione delle formule di letteratura, che verranno brevemente richiamate nel seguito, ai dati sperimentali dei diversi studi non conduce a risultati soddisfacenti (vedi **Fig. 9**): ciascuna formula proposta si adatta discretamente bene ai dati misurati dagli stessi autori ma fallisce quando viene applicata negli altri contesti. Da qui è derivata la necessità di costruire un modello matematico più rigoroso e generale (vedi paragrafi 3.1 e 3.2) che ci consenta di descrivere al meglio le ampiezze d'onda misurate nelle varie circostanze. Il modello proposto quindi, risolvendo le equazioni linearizzate delle onde lunghe in acque basse in condizioni non stazionarie, ci ha permesso di inquadrare il fenomeno in maniera più precisa e di ottenere un'espressione di  $A/h$  che meglio si adatta ai dati sperimentali (vedi **Fig. 10**).

Zima e Ackermann (2002) hanno proposto un' equazione per la stima dell'ampiezza massima della sessa,  $A$ , per il primo modo di oscillazione. L'equazione è stata ricavata imponendo l'equilibrio tra la forza di pressione dovuta alla superficie libera inclinata in direzione trasversale e la forza di lift dovuta ai cilindri. Gli autori riconoscono che il loro modello non riesce a prendere in considerazione l'amplificazione dell'onda nel tempo dovuta alla risonanza. Tuttavia, nel derivare la loro equazione, la risonanza è parzialmente considerata, in quanto essi presuppongono che la frequenza naturale di oscillazione del sistema coincida con la frequenza di Strouhal.

L'espressione proposta da Zima e Ackermann (2002), estesa ai modi  $n$  superiori ad 1 e riarrangiata con l'utilizzo dell'attuale notazione è:

$$\frac{A}{h_0} = 2.255 \left( \frac{d}{B} \right) n_c d^2 n \frac{1}{S_t^2}$$

dove  $d$  è il diametro del cilindro,  $n_c$  è il numero di cilindri per unità di superficie,  $S_t$  è il numero di Strouhal e  $B$  è la larghezza della canaletta.

I lavori di Ghomeshi et al. (2007) e di Jafari et al. (2010) propongono delle semplici espressioni per la stima della massima ampiezza relativa basate sull'applicazione dell'analisi dimensionale. In particolare in ciascuna espressione  $A/h$  viene fatta dipendere da una serie di gruppi adimensionali di parametri attraverso relazioni ottenute da una regressione lineare multiparametrica sui dati misurati.

L'equazione proposta da Ghomeshi et al. (2007), riscritta utilizzando la presente notazione, risulta:

$$\frac{A}{h_0} = \begin{cases} 1.41 \left(\frac{d}{B}\right)^{1/3} \left(\frac{d}{T}\right)^{1/6} \sqrt{n_c d^2} n^{2/3} \frac{1}{\sqrt{S_t}} & \frac{T}{d} > 5 \\ 0.078 \left(\frac{d}{T}\right)^{-5/6} \sqrt{n_c d^2} n^{2/3} \frac{1}{\sqrt{S_t}} & \frac{T}{d} < 5 \end{cases}$$

dove  $T$  è la distanza media tra i cilindri in direzione trasversale.

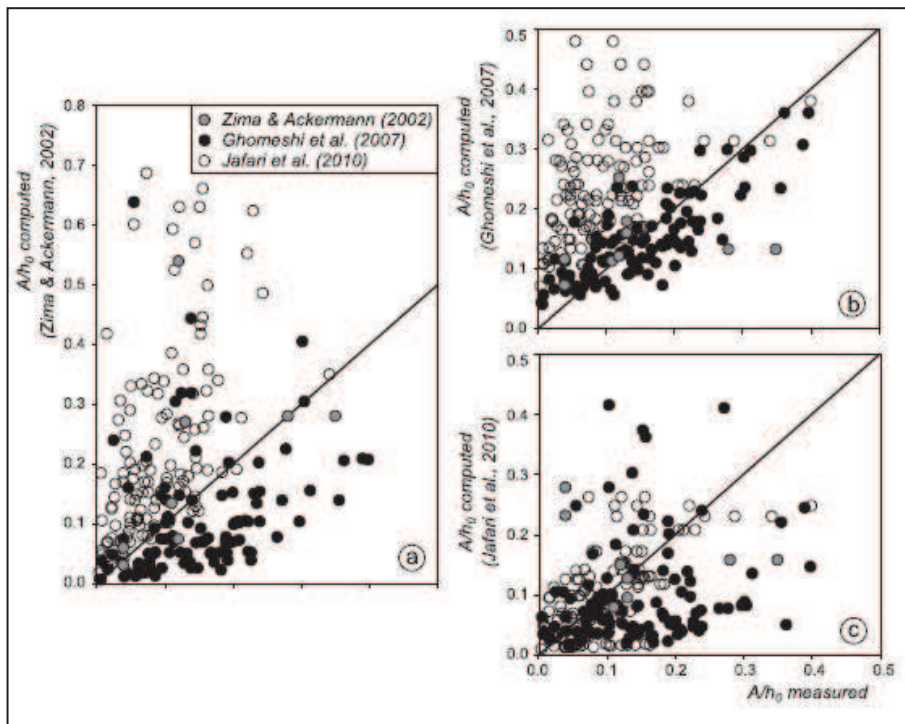
L'equazione proposta da Jafari et al. (2010) invece risulta:

$$\frac{A}{h_0} = 0.835K \left(\frac{d}{B}\right)^{1.16} \left(\frac{d}{T}\right)^{-1.42} (n_c d^2)^{0.7} n^{0.26} \frac{1}{S_t^{0.53}}$$

con  $k=4.27$  per la configurazioni dei cilindri in linea e  $k=1.47$  per la configurazione dei cilindri sfalsata.

Un confronto tra le diverse formule proposte fa subito emergere l'influenza diversa e talvolta perfino opposta dei vari parametri sull'ampiezza dell'onda prodotta: questo è un sintomo del fatto che questo fenomeno, nonostante la sua apparente semplicità, è in realtà molto complesso.

In **Fig. 9** si riporta la sintesi dei risultati ottenuti dall'applicazione di ciascuna formula descritta ai tre set di dati misurati dai tre autori.



**Fig. 9** Applicazione delle formule di letteratura ai dati di letteratura

Il nostro modello teorico è stato applicato ai tre data sets di Zima (2002), Ghomeshi (2007) e Jafari (2010). In Tab. 1 si riporta un riassunto delle condizioni sperimentali di ciascun set di dati, mentre in Fig. 10 è riportato il risultato del confronto tra i valori di  $A/h$  calcolati con l'equazione (37) e i valori di  $A/h$  misurati nei tre studi.

	SET 1	SET 2	SET 3
$B$ (m)	0.15/0.45	0.4/0.8/1.2	0.72
$h_0$ (m)	0.05–0.225	0.077–0.309	0.028–0.371
$U$ (m/s)	0.10–0.25	0.05–0.20	0.03–0.24
$d$ (mm)	12.7/25.4	24	5/12/25
$T/d$	3.9–17.7	2.5–15.0	2.4–7.2
$L/d$	3.0–6.0	4.4–17.5	2.4–12.0
$n_c$ (1/m <sup>2</sup> )	14.6–363.6	9.3–166.7	40.5–1041.7
$n_c d^2$	0.009–0.085	0.005–0.091	0.013–0.174
$n$	1–2	1–4	1–10
$n. exp.$	8	103	126
$A/h_0$	0.04–0.35	0.006–0.40	0.004–0.40
$Re$	1300–6394	1096–4183	153–5987
$F_0$	0.09–0.23	0.03–0.23	0.02–0.26

Tab. 1 Caratteristiche sperimentali degli studi di Zima e Ackermann (SET1), Ghomeshi et al. (SET 2) e Jafari et al. (SET 3).

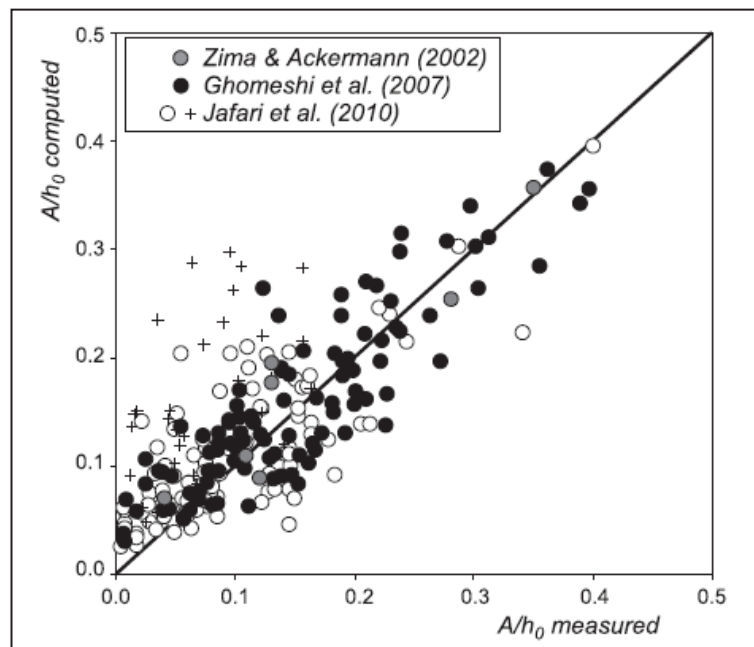


Fig. 10 Confronto tra  $A/h$  calcolato con l'equazione (37) e  $A/h$  misurato (le croci indicano i dati sperimentali di Jafari et al. con  $n > 5$ ).

Prima di presentare il confronto tra il modello di previsione teorica e i dati sperimentali è bene discutere l'enorme impatto dei disturbi, anche



piccoli, presenti nel campo di moto, i quali possono fortemente ridurre l'ampiezza dell'onda trasversale.

Diversi disturbi possono influenzare il campo di moto. Per esempio Zima e Ackermann (2002) hanno osservato onde longitudinali progressive e battimenti che si sovrapponevano alla sessa trasversale: queste onde venivano ridotte mettendo un materiale fibroso assorbente all'estremità di valle del canale artificiale, ma non potevano essere completamente rimosse.

Anche Zhao, Cheng e Huang (2014) ricordano nel loro studio che l'osservazione dell'onda trasversale stazionaria è stata sempre accompagnata dalla comparsa di un'onda longitudinale progressiva.

Le onde longitudinali possono essere causate dalla forza longitudinale indotta sul fluido dai cilindri. In realtà infatti, questa forza è periodica sia perché il coefficiente di drag oscilla con frequenza  $2f_v$ , cioè, due volte la frequenza di distacco dei vortici (vedi ad esempio Blackburn e Henderson (1999)), sia perché la sessa trasversale induce una forza longitudinale periodica,  $F_x$ , come indicato dalla equazione (20), in cui i coefficienti di lift e di drag, nonché la velocità trasversale, sono periodici.

Inoltre si generano onde longitudinali a causa dell'interazione tra l'oscillazione trasversale promossa dai cilindri e la superficie libera quasi orizzontale imposta dallo sbarramento a valle utilizzato negli esperimenti per controllare la profondità della corrente.

Nei nostri esperimenti abbiamo osservato onde longitudinali sovrapposte all'oscillazione trasversale. Queste onde hanno la stessa frequenza dell'onda trasversale e si propagano verso monte con una velocità molto superiore a quella prevista dalla teoria lineare. La ragione di questa onda longitudinale è probabilmente legata ad una sincronizzazione imperfetta, cioè al fatto che i vortici quando si staccano dai cilindri non sono tutti in fase l'uno rispetto all'altro; questa mancanza di sincronizzazione induce un'onda metacronale.

Sfortunatamente, nessuna indagine teorica o sperimentale è disponibile su queste onde che possono avere un impatto sull'oscillazione trasversale fornendo o sottraendo quantità di moto al fluido. Questo scambio di quantità di moto è un altro delle possibili cause di riduzione dell'ampiezza dell'onda trasversale.

L'impatto delle perturbazioni sull'ampiezza dell'onda è stata studiata da Ziada e Oengören (1992,1993,1998, 2000), che hanno eseguito due serie di esperimenti misurando le oscillazioni della superficie libera con e senza una griglia posta a monte del gruppo di cilindri. Essi hanno scoperto che l'ampiezza dell'onda in presenza della griglia, ovvero con un disturbo esterno, era circa la metà di quella in sua assenza.



Un primo aspetto di cui discutere parlando dell'applicazione del modello è sicuramente quello relativo ai parametri di calibrazione  $A_m$  ed  $A_D$ .

L'ampiezza massima dell'onda, come indicato dalla equazione (37), dipende dai coefficienti di drag e di lift che, a loro volta, dipendono dal numero di Reynolds, dalla disposizione dei cilindri e dalla loro spaziatura.

Nonostante il grande volume di lavori sperimentali e numerici volti a valutare l'impatto della configurazione dei cilindri e dei loro interassi sui coefficienti di lift e di drag, non sono ancora disponibili dei risultati precisi. Inoltre, nella fattispecie, la presenza di un flusso periodico trasversale influenza probabilmente il meccanismo di distacco dei vortici, e pertanto i valori dei coefficienti  $C_{L0}$  e  $C_D$ .

Come regola generale, il coefficiente di drag per un cilindro in una schiera si riduce mentre il coefficiente di lift aumenta rispetto ai valori del singolo cilindro (vedi Lam e So (2003), Lam e Zou (2007), Sumner (2010)).

Pertanto data la grande incertezza che affligge sia  $C_{L0}$  che  $C_D$ , in questa analisi si considera il rapporto  $C_{L0}/C_D$ , e quindi  $A_m$ , come parametro di calibrazione, indipendentemente dal numero di Reynolds, dalla disposizione dei cilindri e dalla loro spaziatura.

Considerato che le condizioni di flusso, il diametro dei cilindri, la spaziatura e la disposizione sono circa le stesse per i tre insiemi di dati (vedi Tab. 1), e al fine di ridurre l'eccessiva parametrizzazione, si impone che  $A_m$  sia lo stesso per tutti i dati disponibili. Al contrario abbiamo scelto differenti valori per  $A_D$  per i diversi insiemi di dati, perchè  $A_D$  dipende fortemente anche dalla presenza e dall'intensità dei disturbi e dalle caratteristiche del set-up sperimentale: infatti  $A_D$  è proporzionale alla viscosità turbolenta adimensionale  $\nu_k$ .

Poichè il set-up e le procedure sperimentali utilizzati nei tre studi sono differenti, disturbi di diversa natura possono influenzare le rilevazioni.

A questo proposito è interessante osservare in **Fig. 9** che le equazioni del modello proposto da Ghomeshi et al. (2007) sovrastimano in gran parte i dati sperimentali misurati da Jafari et al. (2010). Ciò suggerisce che disturbi maggiori hanno influenzato gli esperimenti eseguiti da Jafari et al. (2010) smorzando l'oscillazione trasversale.

Al fine di ottenere il miglior accordo tra le previsioni del modello e i dati sperimentali è stata utilizzata una procedura di regressione iterativa per stimare i parametri del modello.

La procedura è la seguente: lasciamo  $A_m$  variare entro un range ragionevole e, per ogni valore di  $A_m$ , troviamo l' $A_D$  che dà il miglior accordo tra le previsioni del modello e i dati sperimentali, separatamente per ogni set di dati.

Nel corso di questa procedura, per ciascun valore di  $A_m$ , abbiamo anche verificato la presenza di una eventuale correlazione tra  $A_D$  e le

variabili adimensionali significative che governano il fenomeno (ad esempio,  $F_0$ ,  $n$ ,  $B/h_0$ ;  $d/B$ ;  $n_c d^2$ ), tuttavia, non è stata trovata nessuna correlazione significativa. La mancanza di tale correlazione suggerisce che la dispersione osservata nei dati non può essere completamente attribuita alle ipotesi semplificative alla base del modello ma deriva anche da un gran numero di processi secondari, che influenzano il fenomeno e non sono contabilizzati nel modello.

Abbiamo pertanto assunto valori costanti per i parametri del modello, e la procedura iterativa ci ha fornito  $A_m = 5.6$  e  $A_D = 2$  per il data-set di Ghomeshi et al. (2007) e  $A_D = 13$  per il set di dati di Jafari et al. (2010).

Poichè le condizioni di flusso, il diametro dei cilindri, la loro spaziatura e la loro disposizione sono circa le stesse per i due insiemi di dati, la grande differenza tra i valori assunti da  $A_D$  conferma che il set-up sperimentale e la procedura utilizzata negli esperimenti può influenzare notevolmente l'ampiezza dell'onda.

I dati sperimentali di Zima e Ackermann (2002) invece sono pochi e non consentono una regressione significativa.

Il confronto tra l'ampiezza relativa dell'onda misurata e calcolata con l'equazione (37) è riportato in **Fig. 10** e mostra un accordo piuttosto buono, rispetto ai modelli proposti in precedenza (vedi **Fig. 9**).

Per valutare quantitativamente la precisione del modello proposto si utilizza il coefficiente di efficienza di Nash-Sutcliffe definito come

$$E = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M (m_i - p_i)^2}{\sum_{i=1}^M (m_i - \mu)^2}$$

dove  $m_i$  sono i dati misurati,  $p_i$  le corrispondenti previsioni del modello,  $\mu$  è la media dei dati misurati e  $M$  è la dimensione del campione.

Nella fattispecie si trova  $E=0.67$ , valore che conferma la buona accuratezza del modello: secondo un recente criterio proposto da Allen, Somerfield e Gilbert (2007) infatti il modello può essere considerato eccellente se  $E > 0.65$ .

Tuttavia è chiaro che il modello sovrastima le piccole ampiezze d'onda relativa e che la dispersione dei punti attorno alla linea di perfetto accordo è ancora elevata.

Per cercare di spiegare le ragioni dello scatter osservato abbiamo analizzato l'impatto delle ipotesi semplificative del modello.

In primo luogo si è analizzato l'effetto dell' approssimazione che il modello assume utilizzando le equazioni delle onde lunghe in acque basse nonostante, per la maggior parte dei dati sperimentali, il rapporto  $h_0/\lambda$  (con  $\lambda=2B/n$  lunghezza d'onda trasversale) sia vicino a 0.5 ma superiore a tale limite (siamo cioè in condizioni comprese tra acque basse

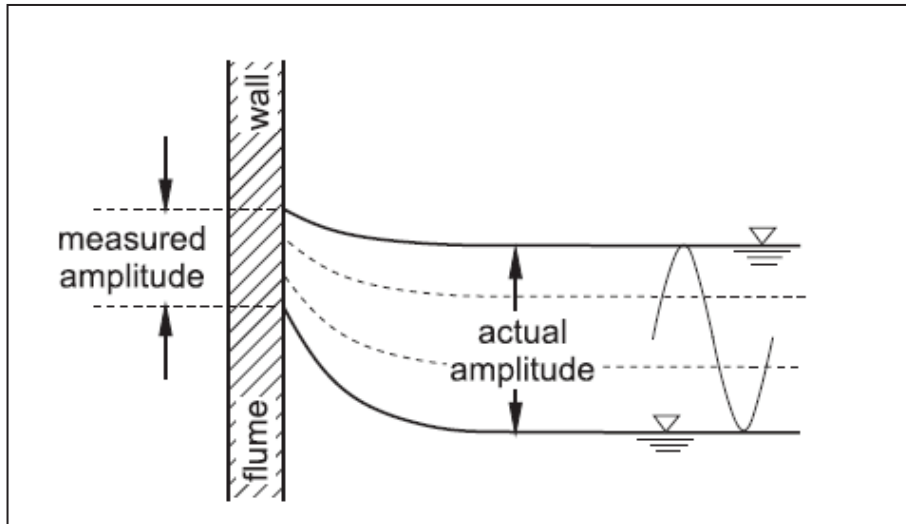
e acque di transizione). Tuttavia non si rileva alcuna correlazione tra la dispersione osservata e il rapporto  $\tanh(h_0/\lambda)/(h_0/\lambda)$ , che fornisce una misura della bontà dell'approssimazione di acque basse.

Il modello proposto inoltre non tiene conto delle diverse configurazioni di cilindri, ma questo fattore potrebbe essere importante soprattutto per piccoli interassi per i quali è probabile che si verifichino interferenze tra le scie vorticose che possono influenzare la frequenza di distacco dei vortici, il meccanismo di sincronizzazione e la diffusione di quantità di moto che, a loro volta, possono influenzare l'ampiezza dell'onda. Tuttavia nuovamente non si trova alcuna correlazione significativa tra i parametri del modello e la configurazione dei cilindri (in linea o sfalsata) o il rapporto tra interasse trasversale e longitudinale ( $T/L$ ). Questo risultato non è in realtà sorprendente poiché la distanza tra i cilindri nella maggior parte degli esperimenti è grande abbastanza per evitare significative interferenze di scia.

Concludiamo che le ipotesi del modello non sono responsabili della grande dispersione osservata in **Fig. 10** e che le differenze osservate sono probabilmente causate da fenomeni diversi dalle onde trasversali e dalla sensibilità delle stesse al set-up sperimentale.

Si è visto come il modello sovrastimi le più piccole  $A/h$  (vedi **Fig. 10**), cosa che può essere dovuta alla tecnica di misura utilizzata: l'ampiezza dell'onda è stata infatti misurata visivamente con l'aiuto di un righello graduato fissato alla parete esterna del canale artificiale.

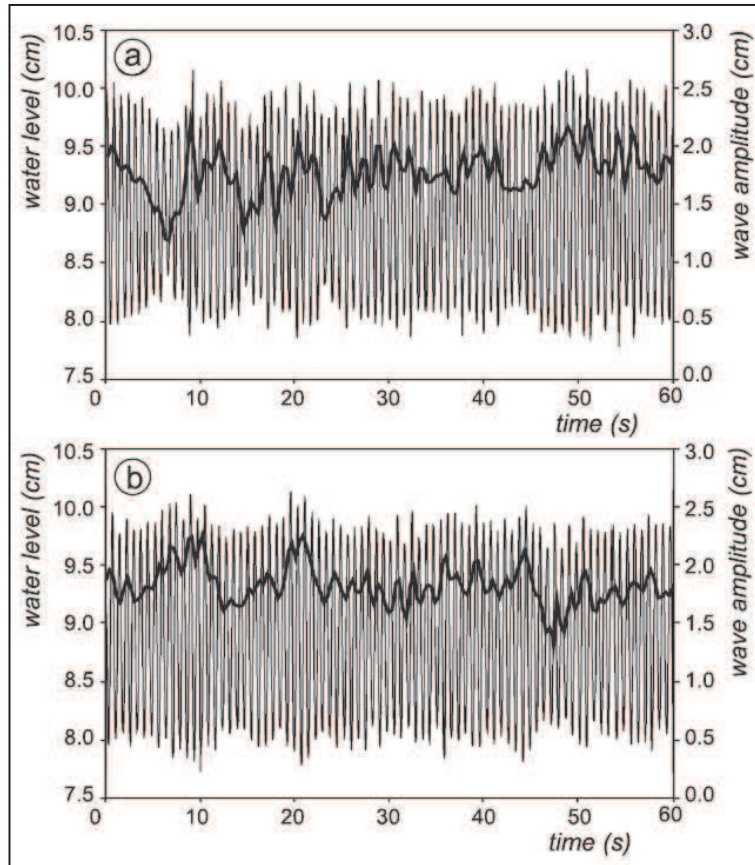
Probabilmente infatti in condizioni di flusso instabile oscillante l'ampiezza d'onda alla parete viene influenzata dalla tensione superficiale, ovvero dal menisco alla parete: infatti, la linea di contatto risultante dall'intersezione della superficie dell'acqua con la parete del canale artificiale oscilla con ampiezza più piccola di quella della scia (vedi **Fig. 11**), con la conseguenza che le misure sottostimano l'ampiezza dell'onda, soprattutto quando essa è piccola.



**Fig. 11** L'oscillazione della superficie libera alla parete è più piccola di quella della sessa a causa della tensione superficiale

Un' ulteriore, meno evidente, fonte di smorzamento dell'ampiezza d'onda è data dalla sincronizzazione imperfetta, ovvero dal fatto che il distacco dei vortici da ciascun cilindro non avviene perfettamente in fase con quello dai rimanenti cilindri. La **Fig. 12a** mostra un esempio di oscillazione della superficie dell'acqua registrata nel corso dei nostri esperimenti alcuni minuti dopo l'inizio dell'esperimento (cioè, quando si raggiungono condizioni stazionarie). Il livello dell'acqua viene misurato con una sonda ultrasonica ad una piccola distanza dalla parete del canale artificiale e le condizioni sono prossime a quelle di risonanza. Si osservano brevi periodi in cui l'ampiezza d'onda è minore di quella rilevata in condizioni stazionarie nel resto della registrazione: ipotizziamo che questa riduzione di ampiezza sia causata da una " perdita di ritmo " nel sistema, cioè da una imperfetta sincronizzazione nel distacco dei vortici da tutti i cilindri della schiera. Questo fenomeno è meno pronunciato in condizioni di perfetta risonanza, quando l' ampiezza di oscillazione è grande (vedi **Fig. 12b**). Infatti una velocità trasversale maggiore influenza più significativamente la sincronizzazione. Tuttavia anche in questo secondo caso l'ampiezza dell'onda non è costante nel tempo e la sua variazione non è trascurabile (**Fig. 12b**).

Il comportamento irregolare esibito dall'oscillazione del livello dell'acqua appena descritto è la regola piuttosto che l'eccezione e ci dà un'idea più chiara delle incertezze che possono influenzare i dati misurati visivamente e non utilizzando strumentazioni più sofisticate.



**Fig. 12** Oscillazione della superficie libera (linea sottile) e ampiezza d'onda (linea spessa) in condizioni prossime a quelle di risonanza (a) e di perfetta risonanza (b)



# CAPITOLO 4: STUDIO SPERIMENTALE

Come ricordato in precedenza i dati ricavati dagli studi presenti in letteratura sono stati considerati affetti da una buona dose di incertezza, perchè misurati a vista con l'ausilio di una scala graduata. Si è ritenuto pertanto utile provvedere all'installazione di un apparato sperimentale nel laboratorio di Idraulica e Costruzioni Idrauliche del dipartimento ICEA dell'Università di Padova che consentisse misure dell'oscillazione del livello idrico molto più precise ed affidabili, in particolare con l'impiego di sonde ultrasoniche.

## 4.1 APPARATO SPERIMENTALE

Nel corso del mio studio sperimentale ho utilizzato due diverse canalette in plexiglass:

- la più piccola è larga 30 cm e lunga 5 m;
- la più grande è larga 38,5 cm e lunga 20 m.

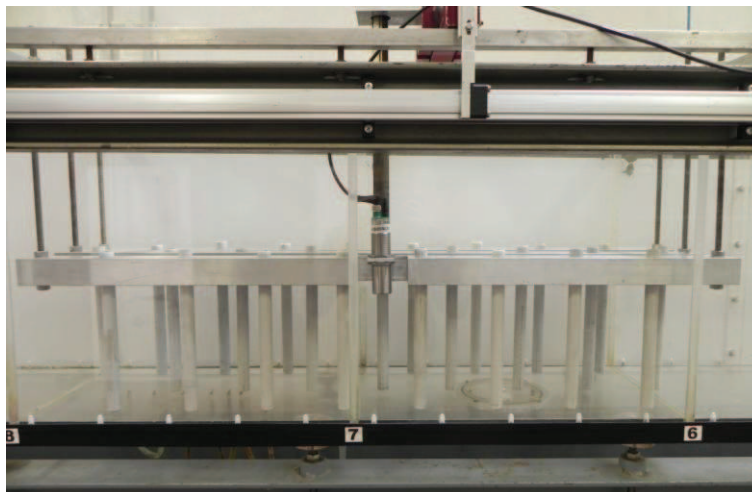
Per entrambe le canalette è possibile variarne la pendenza del fondo.

All'interno di ciascuna canaletta è stata collocata una schiera di cilindri rigidi verticali sostenuti superiormente da una struttura a montanti. In particolare ai bordi della canaletta è fissato un supporto metallico costituito da quattro barre di alluminio cave, a sezione quadrata, disposte longitudinalmente come illustrato nelle **Fig. 14** e **Fig. 15**: in appositi fori ricavati nelle barre sono stati infissi i cilindri. Questi ultimi sono costituiti di PVC rigido ed hanno un diametro di 2 cm. La lunghezza dei cilindri era nelle prime prove sperimentali pari a 30 cm ed è stata in seguito aumentata fino a 50 cm per procedere a sperimentazioni con tiranti idrici più elevati.



**Fig. 13 Cilindro in PVC rigido**

Nella canaletta più piccola la schiera di cilindri è costituita da tre file ed occupa una lunghezza di un metro; i cilindri sono sistemati simmetricamente, l'interasse longitudinale fra i cilindri è di 12 cm mentre l'interasse trasversale risulta di 5 cm tra le file e di 7,5 cm dal bordo della canaletta. Il numero massimo di cilindri collocabili è 25.



**Fig. 14 Canaletta piccola: la schiera di cilindri**

Nella canaletta più grande invece la schiera di cilindri è costituita da quattro file ed occupa una lunghezza di sei metri; il numero massimo di cilindri collocabili è 200 e in questa configurazione gli interassi longitudinale e trasversale tra i cilindri sono rispettivamente 12 cm e 7.7 cm.





**Fig. 15 Canaletta grande: supporto metallico, sbarre in alluminio e cilindri in PVC**

Per controllare la profondità della corrente nelle due canalette vi sono due diversi dispositivi:

- una paratoia a stramazzo nel caso della canaletta più piccola;
- una paratoia a battente nel caso della canaletta più grande.

La prima è migliore nel controllo del livello dell'acqua perché permette di ottenere anche piccole variazioni di livello dell'acqua nel canale artificiale ma causa un aumento nella formazione e propagazione delle onde longitudinali.

La portata in canaletta viene fissata e misurata tramite un misuratore elettromagnetico di portata.

In ciascun esperimento la portata viene mantenuta costante e il livello dell'acqua viene fatto variare, agendo sulla paratoia posta al termine della canaletta, al fine di trovare le condizioni di flusso in cui l'ampiezza dell'onda è massima.

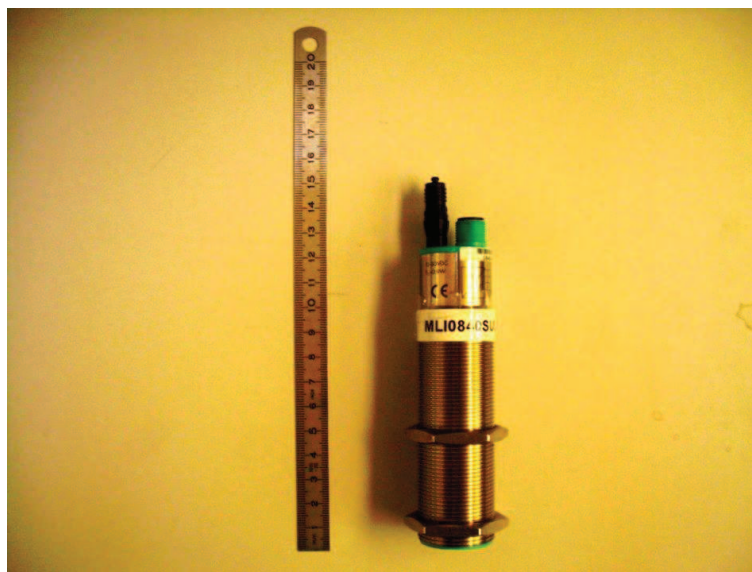
Le oscillazioni del pelo libero sono state misurate con tre sonde ad ultrasuoni situate immediatamente a monte, in mezzo e immediatamente a valle del gruppo di cilindri. Operazione preliminare all'acquisizione dei dati è il processo di taratura delle sonde consistente nel ricavare un legame tra i valori di misura di tensione forniti dagli strumenti e le quote del pelo libero. Per fare questo si definisce una retta di calibrazione acquisendo le misure di tensione rilevate dalla sonda in due differenti posizioni a una

diversa distanza dal fondo nota perché misurata con un righello: dalla conoscenza di questi dati è possibile ricavare una retta di calibrazione per ciascuna delle sonde che consente di trasformare immediatamente le misure di tensione espresse in volt in misure di lunghezza (distanza) espresse in centimetri.

Le sonde hanno una frequenza di acquisizione di 30 rilevazioni al secondo e sono caratterizzate da una forma cilindrica con diametro di base di 25 mm e lunghezza del corpo di 114 mm, filettate sui lati in modo da poterle bloccare in posizione verticale per mezzo di due bulloni. La presenza di tre sonde che rilevano contemporaneamente acquisizioni riferite a punti diversi della canaletta ci ha consentito di osservare anche la celerità e la direzione di propagazione dell'onda longitudinale.

Ottenere un segnale di livello idrico quasi continuo nel tempo ci ha permesso inoltre di effettuare alcune analisi importanti:

- innanzitutto l'analisi di Fourier per determinare la frequenza di oscillazione dell'onda trasversale;
- inoltre un'analisi zero crossing per determinare l'ampiezza media dell'onda.



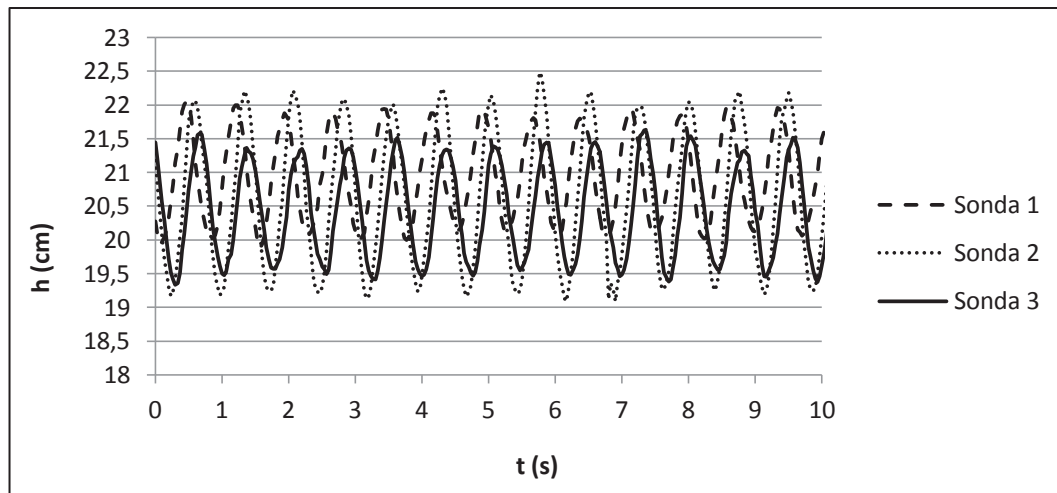
**Fig. 16 Sonda ad ultrasuoni**

#### 4.2 MODALITA' DI ESECUZIONE DELLE PROVE

Nel corso di ciascuna prova sperimentale si mantiene costante il valore della portata e si fa variare il tirante all'interno della canaletta agendo sulla paratoia posta al termine della stessa. In particolare, individuate in modo speditivo le condizioni di risonanza sono stati fatti variare i livelli in un intervallo a cavallo di queste condizioni in qualche caso a partire da livelli inferiori, in qualche caso a partire da livelli superiori. Per qualche prova i

livelli sono stati fatti variare in entrambe le direzioni per controllare la correttezza dei risultati e l'assenza di eventuali fenomeni di isteresi.

Ciascuna acquisizione sperimentale viene protratta per una durata pari a 70 secondi. Un esempio di output sperimentale relativo ai primi 10 s di una prova generica ( $Q=15$  l/s in condizioni di massima ampiezza d'onda relativa) è fornito in **Fig. 17** in cui si osservano chiaramente le oscillazioni della superficie libera rilevate dalle tre sonde ultrasoniche.



**Fig. 17** Oscillazioni della superficie libera misurate dalle tre sonde ( $Q=15$  l/s)

#### 4.3 DESCRIZIONE QUALITATIVA DEI RISULTATI SPERIMENTALI

Le prove hanno confermato l'esistenza di condizioni in cui si verifica la risonanza e l'oscillazione trasversale mostra ampiezze sensibilmente elevate. In tutte le prove sperimentali inoltre sono sempre state rilevate oscillazioni di modo uno.

Due sono gli aspetti importanti e che non erano stati precedentemente evidenziati negli studi presenti in letteratura.

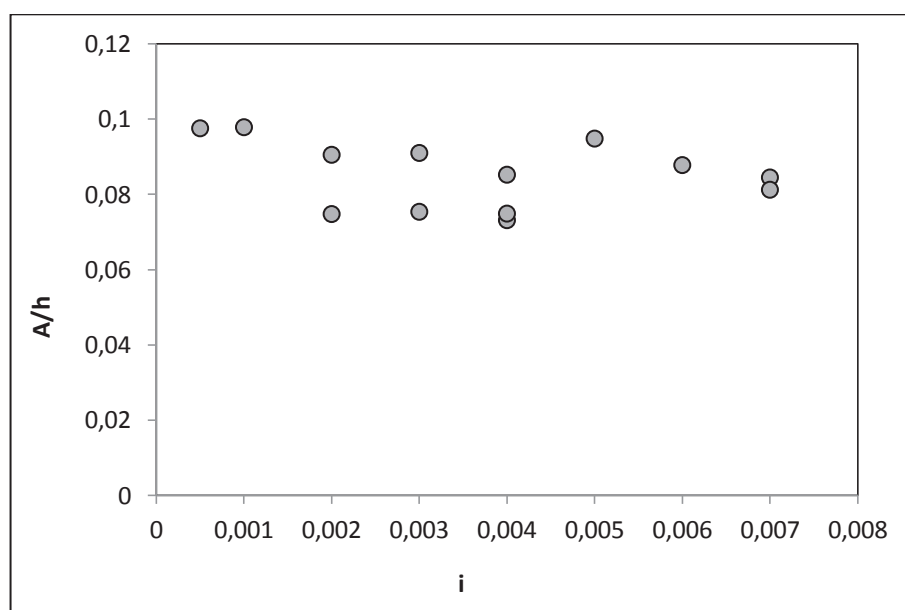
Il primo riguarda la formazione di un'onda longitudinale che si sovrappone alla sessa. Queste perturbazioni longitudinali erano state segnalate già da Zima e Ackermann (2002): gli autori dichiarano però che si tratta di disturbi che potevano essere ridotti mediante l'impiego un materiale assorbente collocato al termine della canaletta sperimentale.

Nelle nostre indagini preliminari avevamo tentato di eliminare queste perturbazioni mediante degli assorbitori senza grande successo. Ci siamo resi conto che non si tratta di disturbi ma di un fenomeno intimamente associato a quello principale che produce la sessa.

Anche nel recente lavoro di Zhao, Cheng e Huang (2014) la presenza di queste onde longitudinali è sempre osservata in contemporanea alla sessa, la giustificazione che gli autori danno della loro presenza, come vedremo, non è però corretta.

Il secondo aspetto, che non è mai stato segnalato in letteratura, riguarda il fatto che ci sono due distinte frequenze di distacco dei vortici (o meglio due distinti valori del numero di Strouhal) in corrispondenza dei quali si ha risonanza. Di questa condizione ci siamo resi conto solo nella più recente fase delle prove sperimentali per cui molti dei dati che saranno discussi fanno riferimento all'una o all'altra delle due condizioni di risonanza.

Prima di illustrare e commentare nel dettaglio i risultati delle prove sperimentali, si anticipano qui alcuni risultati preliminari volti a verificare l'influenza delle condizioni di moto non uniforme sull'ampiezza dell'onda di sessa. Defina e Pradella (2014) avevano segnalato la possibilità che, in condizioni di moto non uniforme, con profondità variabile nella direzione del moto, l'ampiezza dell'onda di sessa potesse risultare inferiore a quella che si realizza in condizioni di moto uniforme con una profondità d'acqua costante e pari alla media di quella del moto non uniforme. Sono state fatte alcune prove sperimentali mantenendo la portata costante pari a 12 l/s e modificando la pendenza del fondo da 0.5 per mille a 7 per mille. Per ciascuna diversa pendenza si sono misurati i tiranti che si realizzavano in corrispondenza delle tre sonde collocate all'inizio della schiera di cilindri, in mezzzeria e alla fine della schiera di cilindri, calcolando la pendenza della superficie libera come rapporto tra la differenza dei valori estremi dei tiranti e la loro distanza reciproca. In **Fig. 18** si mette in relazione la massima ampiezza relativa misurata nel corso di queste prove con la pendenza del pelo libero che, come si evince dalla figura, non risulta avere alcuna influenza su  $A/h$ . Per questa ragione le successive indagini sono state effettuate senza preoccuparsi di realizzare condizioni di moto uniforme.



**Fig. 18** Legame tra ampiezza relativa e pendenza del pelo libero

Con riferimento ai risultati delle prove sperimentali, gli aspetti che saranno discussi nel proseguo della trattazione riguardano le frequenze caratteristiche del fenomeno, le ampiezze relative dell'onda di sessa e le caratteristiche dell'onda longitudinale che sovrapponendosi alla sessa determina di fatto un'onda metacronale.

#### 4.4 ANALISI DELLE FREQUENZE CARATTERISTICHE

La frequenza di oscillazione dell'onda trasversale viene determinata tramite due metodologie:

- un'analisi qualitativa basata sulla sovrapposizione del segnale misurato con quello calcolato tramite la formula che descrive l'oscillazione di una sinusoide;

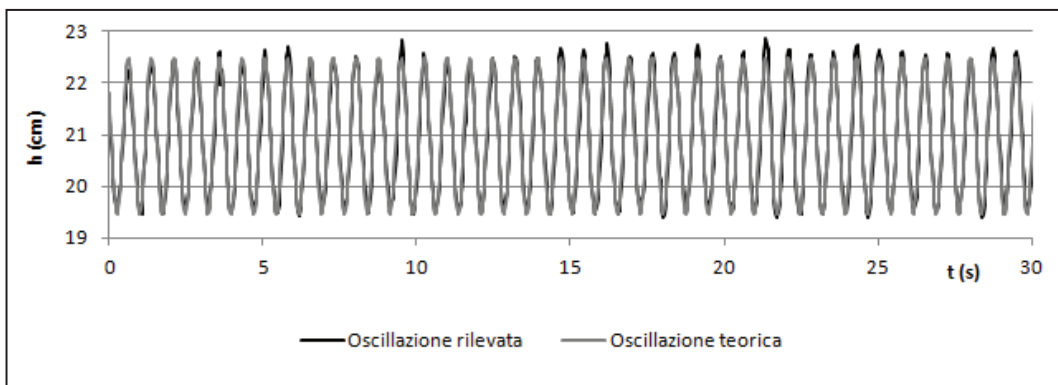
- un'analisi di Fourier sul segnale dato dal livello idrico misurato che ci fornisce in output le frequenze caratteristiche del fenomeno.

I dati ottenuti tramite le due metodologie sostanzialmente si equivalgono.

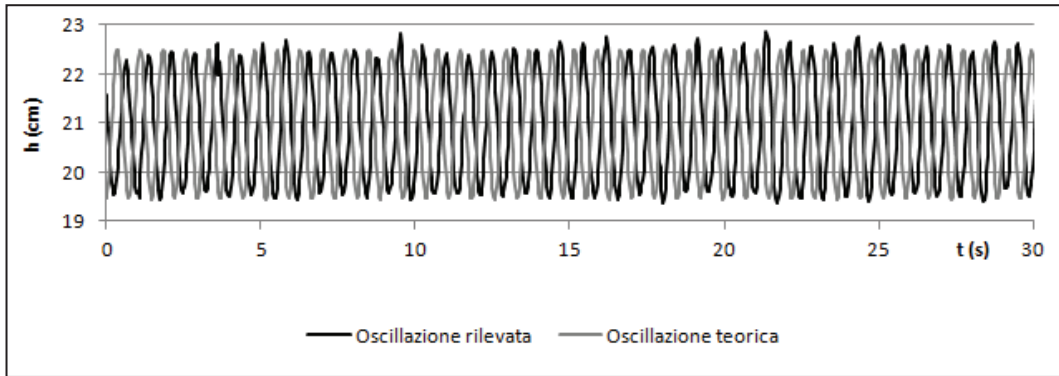
Per quanto riguarda la prima procedura si ricorda come l'oscillazione della superficie libera  $h$  possa essere descritta dalla formula seguente:

$$h = h_0 + a \sin(\omega t + \varphi)$$

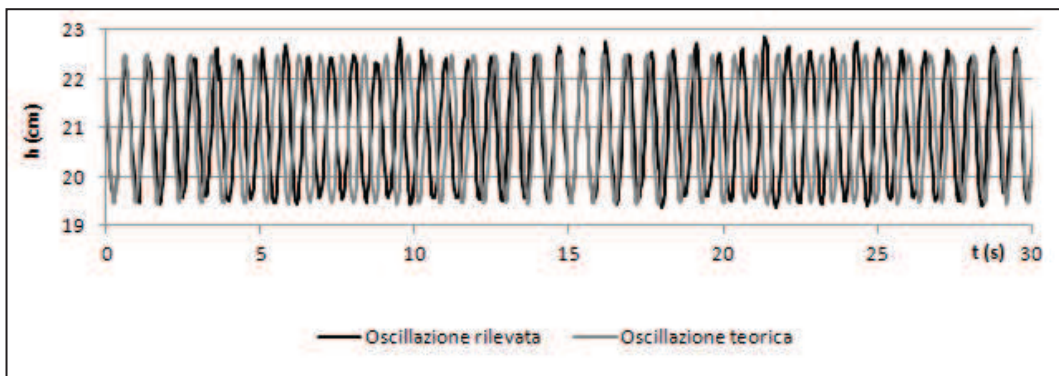
in cui  $\omega=2\pi/T$  è la pulsazione,  $\varphi$  è l'angolo di sfasamento iniziale,  $h_0$  è il valore medio del tirante e  $a$  è la semiampiezza dell'oscillazione. I valori di  $h_0$  e  $a$  sono noti perchè misurati, mentre quelli di  $\omega$  e  $\varphi$  si ottengono da una procedura di calibrazione che mira a sovrapporre in maniera quanto più buona possibile il segnale misurato con quello calcolato (vedi **Fig. 19**).



**Fig. 19** Scegliendo gli opportuni  $\omega$  e  $\varphi$  si ottiene una perfetta corrispondenza tra oscillazione misurata e calcolata ( $Q=15$  l/s  $\omega=8.49$  1/s  $\varphi=3.6$ ).



**Fig. 20** Un diverso valore di  $\varphi$  produce una traslazione della curva teorica ( $Q=15$  l/s  $\omega=8.49$  1/s  $\varphi=6.0$ ).

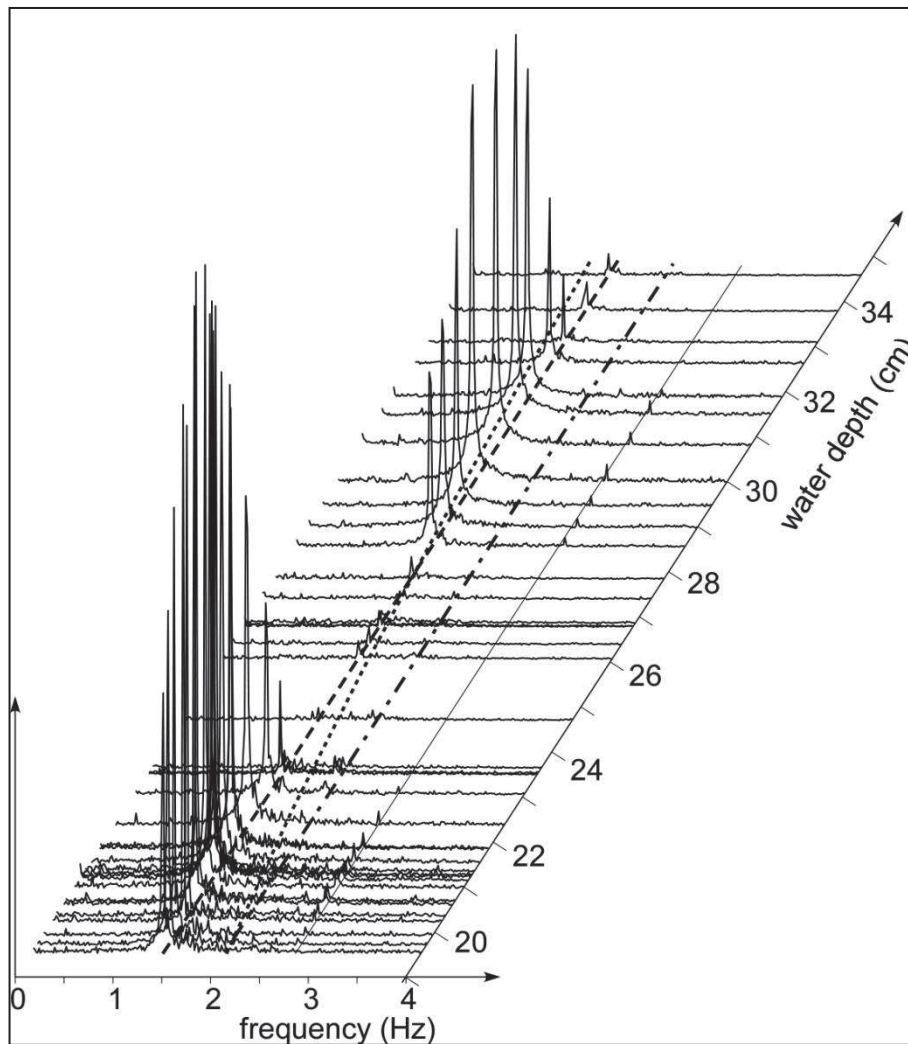


**Fig. 21** Un diverso valore di  $\omega$  produce una dilatazione o una contrazione della sinusoide calcolata ( $Q=15$  l/s  $\omega=8.90$  1/s  $\varphi=3.6$ ).

Nella **Fig. 22** si riporta il risultato relativo all'analisi di Fourier effettuata per la prova con portata pari a 15 l/s, essendo tale prova esemplificativa del comportamento in genere assunto dal fenomeno.

L'asse delle ascisse riporta le frequenze mentre quello delle ordinate l'ampiezza dell'onda: viene riportato un grafico per ogni diverso tirante analizzato.





**Fig. 22 Risultato dell'analisi di Fourier sulla prova con  $Q=15$  l/s (la linea puntinata rappresenta la frequenza di Strouhal, quella tratteggiata nera la frequenza naturale a modo 1, quella a tratto e punto la frequenza naturale a modo 2)**

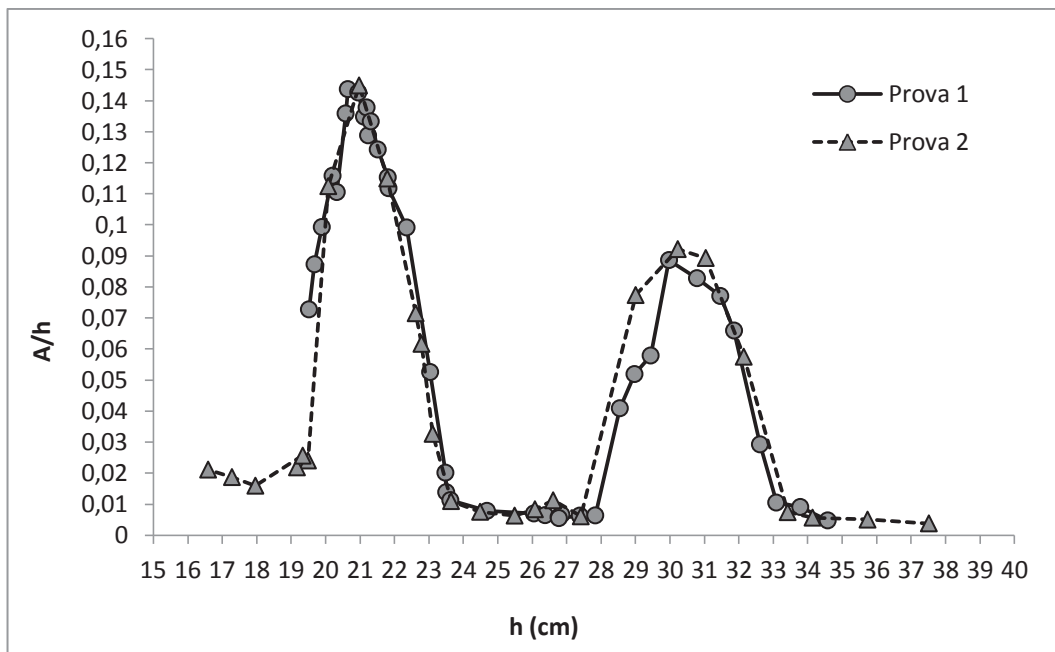
Si osservano distintamente due picchi di massima ampiezza d'onda:

- l'ampiezza d'onda inizia a crescere non appena la frequenza di Strouhal (rappresentata dalla linea puntinata) eguaglia quella naturale corretta (rappresentata dalla linea tratteggiata) e si mantiene elevata finché il rapporto  $f_s/f_{nat}$  non raggiunge all'incirca il valore pari a 0.8: è questo il cosiddetto range di lock-in in cui la frequenza di distacco dei vortici viene influenzata dal moto trasversale dell'onda (vedi Oerengoren e Ziada (1992,1993,1998, 2000)).
- il secondo picco di ampiezza si realizza invece per  $f_s/f_{nat}$  compreso tra 1.2 e 1.5: l'esistenza di questo secondo massimo è dovuta alla presenza di due frequenze caratteristiche di distacco dei vortici quando abbiamo a che fare con più cilindri disposti in tandem (vedi Alam e Zhou (2008)): in particolare accanto al consueto numero di Strouhal pari a 0.2 compare un secondo numero di Strouhal più basso.

Per la prova con portata pari a 15 l/s si riportano inoltre i grafici (**Fig. 23** e **Fig. 24**) relativi alla variazione di ampiezza relativa  $A/h$  con il tirante  $h$  e con il rapporto tra le frequenze  $f_s/f_{nat}$  ( $f_{nat}$  è stata corretta per tener conto della porosità data dai cilindri).

Nel primo grafico si riportano i risultati relativi a due diverse prove effettuate a mesi di distanza per dimostrare la buona ripetibilità della prova.

Si segnala come in tutte le prove con densità di cilindri pari a  $86.58 \text{ 1/m}^2$  il primo picco di  $A/h$ , cioè quello caratterizzato da una frequenza minore, è risultato sempre inferiore al secondo.



**Fig. 23** Andamento di  $A/h$  al variare di  $h$  ( $Q=15 \text{ l/s}$ )



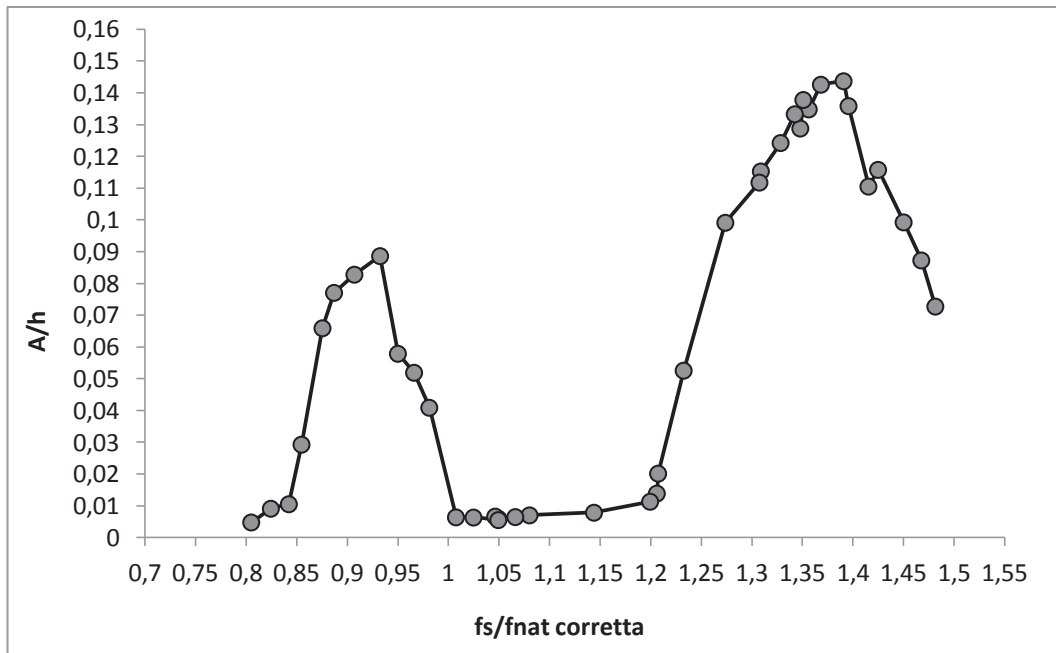


Fig. 24 Andamento di  $A/h$  al variare di  $f_s/f_{nat}$  ( $Q=15$  l/s)

#### 4.4.1 ANALISI DEL PRIMO PICCO DI $A/h$

In tutte le prove effettuate si è visto come partendo da una condizione in cui non si verificano onde trasversali e andando ad innalzare progressivamente il tirante si osserva che non appena il rapporto  $f_s/f_{nat}$  corretto raggiunge un valore prossimo a 1 l'ampiezza dell'onda cresce bruscamente, mantenendosi poi elevata fino a rapporti  $f_s/f_{nat}$  pari a circa 0.8: è questo il cosiddetto range di lock-in.

Il fenomeno del lock-in è stato ampiamente studiato nel caso di corpi investiti da una corrente che, in virtù del vortex shedding, entrano in vibrazione aumentando sempre più l'ampiezza delle oscillazioni.

L'esistenza di tale fenomeno anche nel caso di onde di superficie eccitate dal distacco di vortici è stata confermata nei numerosi studi condotti da Oengören e Ziada (1992,1993,1998, 2000).

Iniziamo dapprima con l'analisi del lock-in nel caso di cilindri che vibrano. Una vibrazione del cilindro perpendicolare alla direzione della corrente con una frequenza prossima a quella di distacco dei vortici ha un grande effetto sul distacco dei vortici stessi. La frequenza di distacco dei vortici può infatti spostarsi verso quella di vibrazione del cilindro dando luogo ad un fenomeno chiamato lock-in, il quale può avvenire anche per frequenze di vibrazione pari ad un multiplo o ad un sottomultiplo della frequenza di distacco dei vortici.

L'aumento dell'ampiezza della vibrazione trasversale  $A_y$  aumenta la capacità di sincronizzazione tra le frequenze. La lock-in band è il range di frequenze nel quale la frequenza di vibrazione del cilindro controlla quella di distacco dei vortici. La **Fig. 25** mostra la lock-in band fondamentale:

ampiezze elevate di vibrazione del cilindro possono spostare la frequenza di distacco dei vortici a  $\pm 40\%$  della frequenza di distacco dei vortici di un cilindro stazionario (vedi Blevins (1990)).

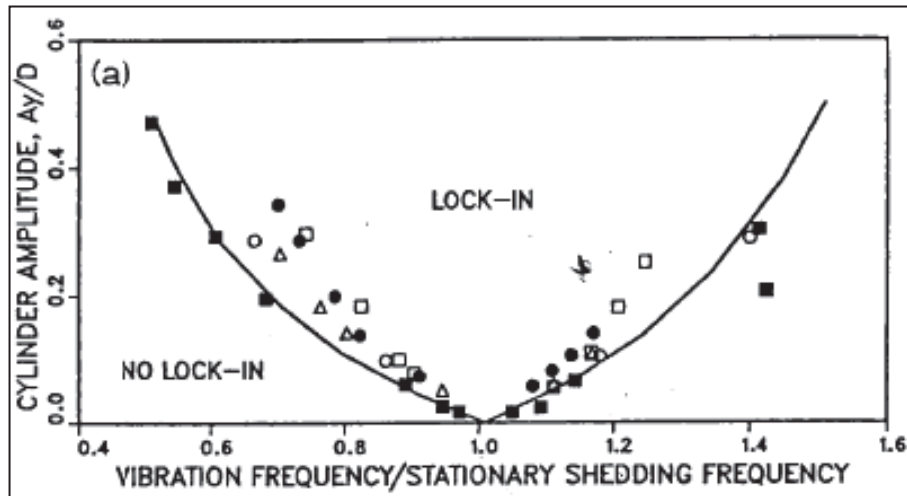


Fig. 25 Lock-in band (Blevins (1990))

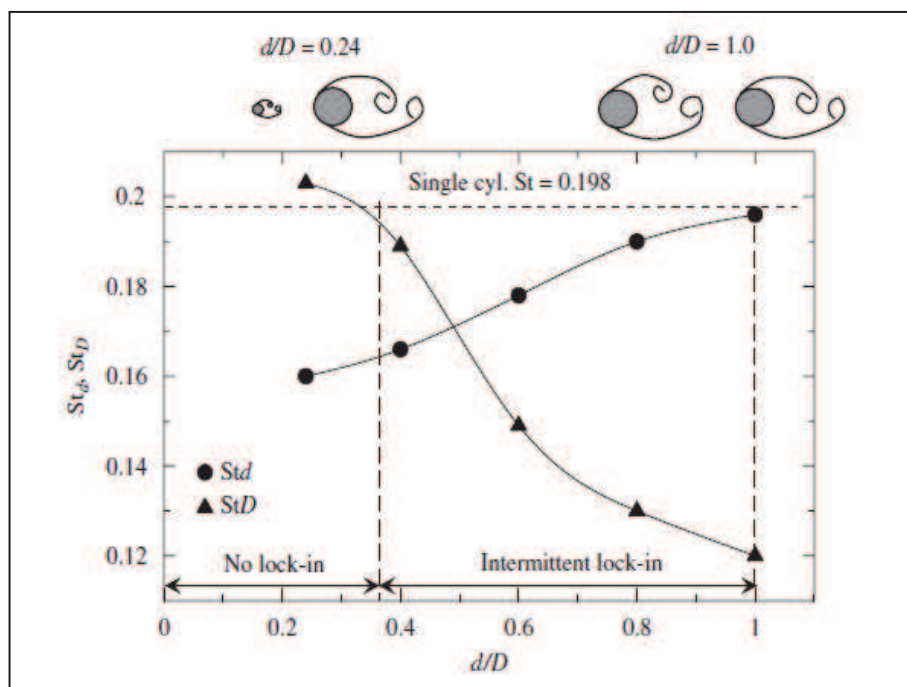
Vibrazioni del cilindro con frequenze prossime alla frequenza di distacco dei vortici, influenzano la configurazione dei vortici e la loro fase. I vortici tendono a staccarsi dal cilindro dalla parte in cui esso è circa al suo massimo spostamento. Si ha un brusco sfasamento pari a  $180^\circ$  tra il distacco dei vortici e il movimento del cilindro quando la frequenza di vibrazione del cilindro passa attraverso la frequenza naturale di distacco dei vortici. Zdravkovich (1982) ha osservato che per frequenze di vibrazione leggermente inferiori alla frequenza naturale di distacco dei vortici, il vortice si stacca dal lato opposto del cilindro rispetto a quello che sperimenta il massimo spostamento. Per frequenze di vibrazione leggermente superiori alla frequenza naturale di distacco dei vortici invece, il vortice si stacca dallo stesso lato del cilindro che sperimenta il massimo spostamento. Questo cambiamento di fase contribuisce a produrre un effetto di isteresi cosicché il range di lock-in dipende in un certo qual modo dal fatto che la frequenza di distacco dei vortici sia avvicinata da sopra o da sotto. Nel nostro caso tuttavia questo effetto di isteresi non è stato osservato, producendosi l'intervallo di lock-in sempre tra  $f_s/f_{nat}$  corretta 1 e 0.8 sia avvicinandosi da tiranti più elevati che da tiranti più bassi.

#### 4.4.2 ANALISI DEL SECONDO PICCO DI $A/h$

Il lavoro di Md. Mahbub Alam e Y. Zhou (2007) presenta un'indagine dettagliata sui numeri di Strouhal, le forze e le strutture di flusso che si realizzano in prossimità di due cilindri di diverso diametro disposti in tandem. Mentre il diametro del cilindro a valle,  $D$ , è fissato a 25 mm, il

diametro del cilindro di monte,  $d$ , è stato variato da  $0.24D$  a  $D$  (per il nostro caso è interessante la sola situazione in cui  $d=D$ ). La distanza tra i cilindri è stata fissata a  $5.5d$  (pari a quella che si realizza nel nostro studio), distanza per la quale i vortici si staccano da entrambi i cilindri. Nel caso di due cilindri dello stesso diametro posti in tandem sono state individuate due distinte frequenze di vortex shedding a valle del secondo cilindro. La prima è la stessa che si osserva nel caso di un cilindro isolato, con un numero di Strouhal all'incirca pari a 0.2; tale frequenza è inoltre l'unica osservata nello spazio compreso tra i due cilindri. La seconda è più bassa e corrisponde ad un numero di Strouhal circa pari a 0.12 (vedi **Fig. 26**).

La differenza tra le frequenze di distacco dei vortici dietro il cilindro di monte e quello di valle può essere dovuta alle diverse condizioni del flusso incidente. Il persistere della prima frequenza di distacco dei vortici anche a tergo del secondo cilindro può essere dovuta al trasporto dei vortici già staccatesi dal cilindro di monte o ad un fenomeno di lock-in intermittente per il quale la frequenza di vortex shedding dal cilindro di valle è portata alternativamente ad accordarsi con quella di monte. Non vi sono tuttavia studi che chiariscano esaustivamente le cause di questa compresenza tra due differenti numeri di Strouhal.

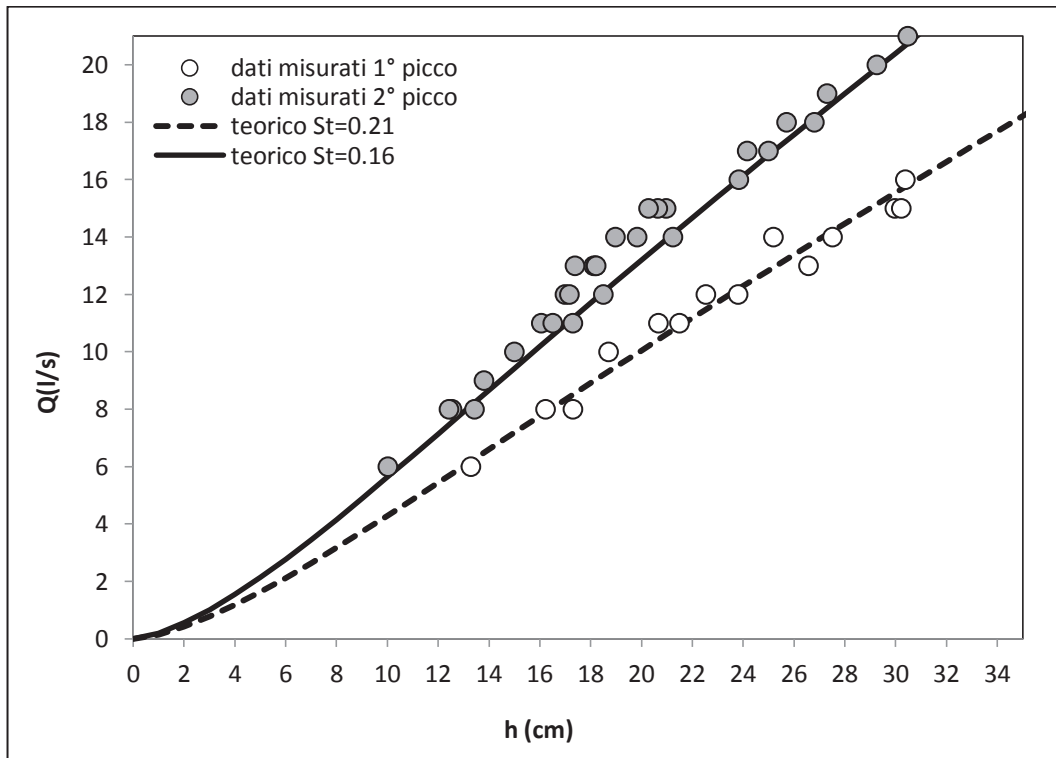


**Fig. 26** Valori di  $St$  per due cilindri disposti in tandem.

Uguagliando le espressioni di  $f_s$  e di  $f_{nat}$  date rispettivamente dalle equazioni (3) e (1) si ottiene il legame teorico tra  $Q$  e  $h$  che deve realizzarsi in condizioni di risonanza al variare del numero di Strouhal:

$$Q = \left( \frac{gnBh^2d^2}{4\pi S_t^2} \tanh \frac{n\pi h}{B} \right)^{1/2}$$

Tale legame è stato plottato in **Fig. 27**, accompagnato dai dati sperimentali misurati: dalla figura emerge che il primo picco si realizza per un numero di Strouhal circa pari a 0.2-0.21 (cilindro isolato) mentre il secondo picco avviene per un numero di Strouhal più basso, circa pari a 0.16.



**Fig. 27** Legame teorico tra  $Q$  e  $h$  e punti sperimentali

#### 4.4.3 CONFRONTO CON LO STUDIO DI ZIMA E ACKERMANN (2002)

La **Fig. 28** descrive due serie di esperimenti condotti dai Zima e Ackermann (2002) in una canaletta larga 15 cm dove il rapporto tra la lunghezza  $B$  occupata dai cilindri e la larghezza  $l$  della canaletta è pari a 18.3 e il numero di righe è pari a 48. La profondità  $h$  è stata mantenuta costante in ciascuna singola serie di esperimenti mentre la portata è stata fatta variare: le due profondità scelte sono 50 e 110 mm.

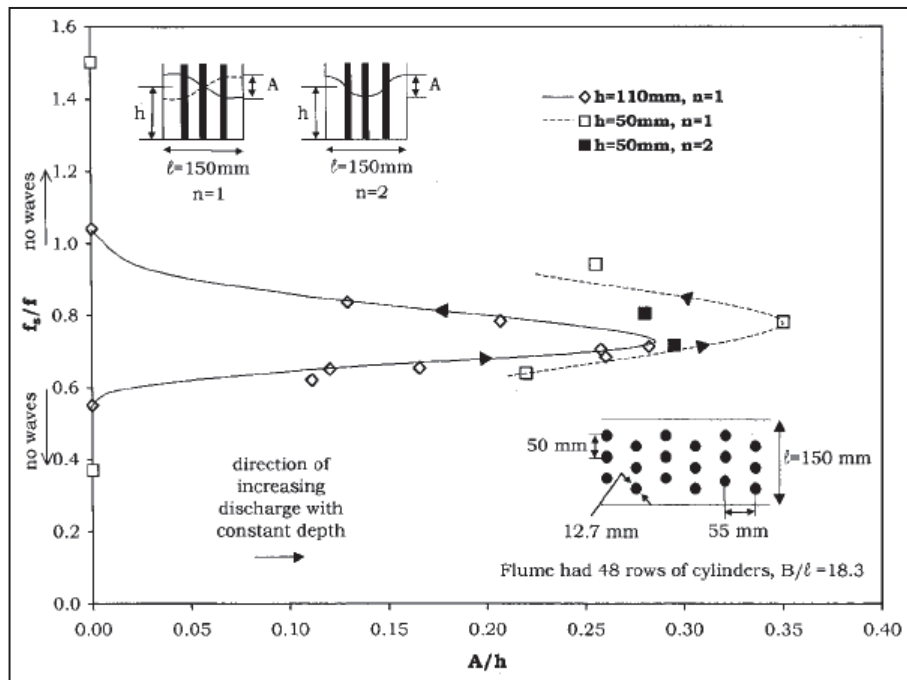


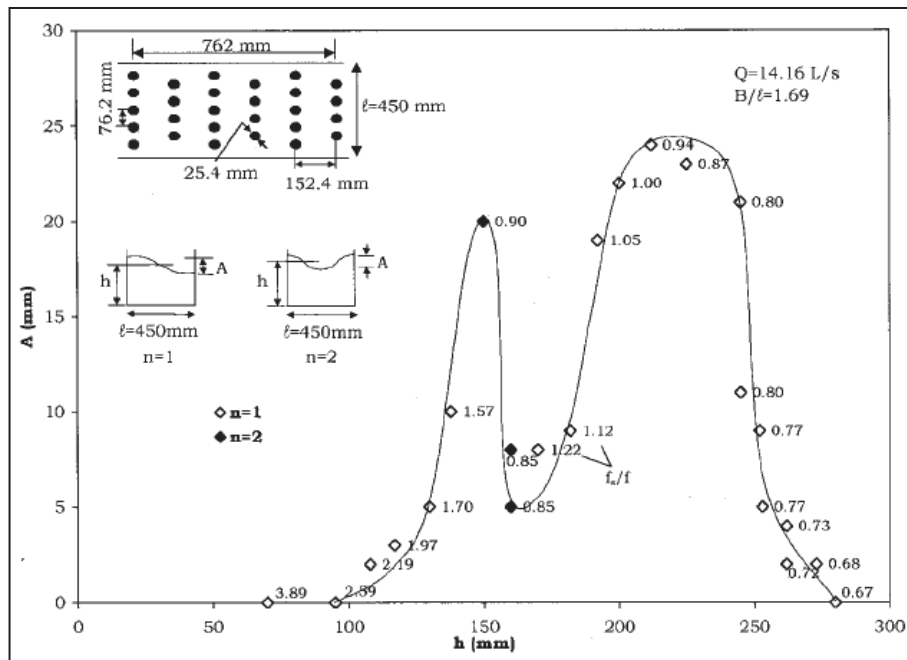
Fig. 28 Legame tra  $A/h$  e  $f_s/f$  per esperimenti con due profondità e portata variabile.

La Fig. 28 mostra che, analogamente a quanto osservato nei nostri esperimenti, l'ampiezza d'onda relativa  $A/h$  subisce una brusca crescita allorchè il rapporto  $f_s/f$  raggiunge il valore unitario e si mantiene elevata per un intervallo all'incirca pari a quello da noi osservato ovvero finchè  $f_s/f$  raggiunge un valore pari a 0.6.

Analogamente a quanto da noi osservato si deduce come il massimo valore di  $A/h$  sia molto sensibile alle variazioni del rapporto  $f_s/f$ : una piccola variazione di  $f_s/f$  produce un grande cambiamento di  $A/h$  se le altezze d'onda sono vicino ai loro massimi valori.

Zima e Ackermann (2002) hanno inoltre condotto una serie di esperimenti simili a quelli da noi svolti, mantenendo costante il valore della portata  $Q$  e variando il tirante  $h$ .

Il risultato di tali prove è rappresentato in Fig. 29.



**Fig. 29** Relazione tra  $A$ ,  $h$  e rapporto  $f_s/f$  per una schiera di 27 cilindri con portata pari a 14.16 l/s.

La **Fig. 29** mostra che quando la schiera è collocata in una regione del canale dove il rapporto  $f_s/f$  è pari a circa 0.94 l'ampiezza d'onda ha un massimo locale. Si osserva come si abbiano due di questi massimi locali, uno per ciascun modo  $n=1$  e  $n=2$ . Come si osserva dalla figura sono stati rilevati solo tre punti con modo di oscillazione pari a 2. Si vede inoltre che non si hanno onde generate dai vortici per profondità più grandi di 280 mm o più piccole di 95 mm visto che condizioni di risonanza caratterizzate da modi maggiori o uguali a tre non vengono osservate.

Il picco di  $A$  corrispondente ad  $f_s/f=0.94$  è perfettamente coerente con quanto da noi osservato. Nel nostro caso però non viene rilevato un picco a modo 2, bensì un secondo picco a modo 1 proprio in corrispondenza dei rapporti  $f_s/f$  a modo 1 indicati in figura in corrispondenza del picco di modo 2: si ipotizza che siano intervenute delle difficoltà nella rilevazione della superficie libera che hanno impedito agli autori di distinguere la comparsa di un secondo picco a modo 1.

#### 4.5 ANALISI DELLE MASSIME AMPIEZZE DELL'ONDA TRASVERSALE

Nei precedenti paragrafi è stata descritta nel dettaglio la singola prova in cui si mantiene costante la portata e si fa variare il tirante per individuare le condizioni di massima ampiezza d'onda.

Nel seguito si procederà invece a descrivere le varie prove effettuate variando la portata fluente in canaletta e in particolare l'effetto determinante che gioca il numero di Froude. L'analisi verrà condotta parallelamente sui risultati ottenuti in canaletta piccola e in canaletta grande.

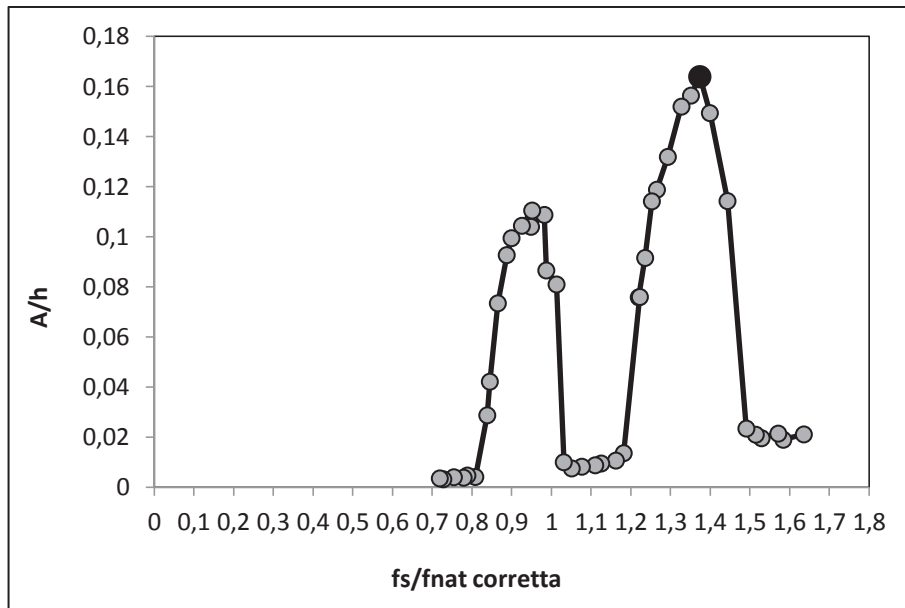
Un ultimo paragrafo sarà invece dedicato all'influenza della densità dei cilindri sull'ampiezza dell'onda prodotta.

In Tab. 2 si riporta il riassunto delle caratteristiche delle prove sperimentali effettuate rispettivamente in canaletta piccola e in canaletta grande.

	<b>Canaletta piccola</b>	<b>Canaletta grande</b>
<b><i>B</i> (m)</b>	0.3	0.385
<b><i>h0</i> (m)</b>	0.079-0.194	0.10-0.314
<b><i>U</i> (m/s)</b>	0.156-0.201	0.155-0.194
<b><i>d</i> (cm)</b>	2	2
<b><i>T/d</i></b>	2.5	3.85
<b><i>L/d</i></b>	6	6-12
<b><i>nc</i> (1/m<sup>2</sup>)</b>	86.67	43.29-86.58
<b><i>ncd<sup>2</sup></i></b>	0.035	0.017-0.035
<b><i>n</i></b>	1	1
<b><i>n. exp.</i></b>	70	>200
<b><i>if</i></b>	0-0.01	0.004
<b><i>A/h</i></b>	0.083-0.191	0.040-0.186
<b><i>Re</i></b>	3115-4026	3094-3884
<b><i>F0</i></b>	0.140-0.191	0.103-0.157

Tab. 2

L'analisi riportata nel proseguo della trattazione riguarderà i massimi valori di ampiezza relativa che sono stati isolati per ciascuna prova effettuata, in corrispondenza del secondo picco di ampiezza relativa che, nel caso di densità di cilindri pari a 86.58 1/m<sup>2</sup>, risulta essere sempre il più pronunciato (vedi **Fig. 30**).

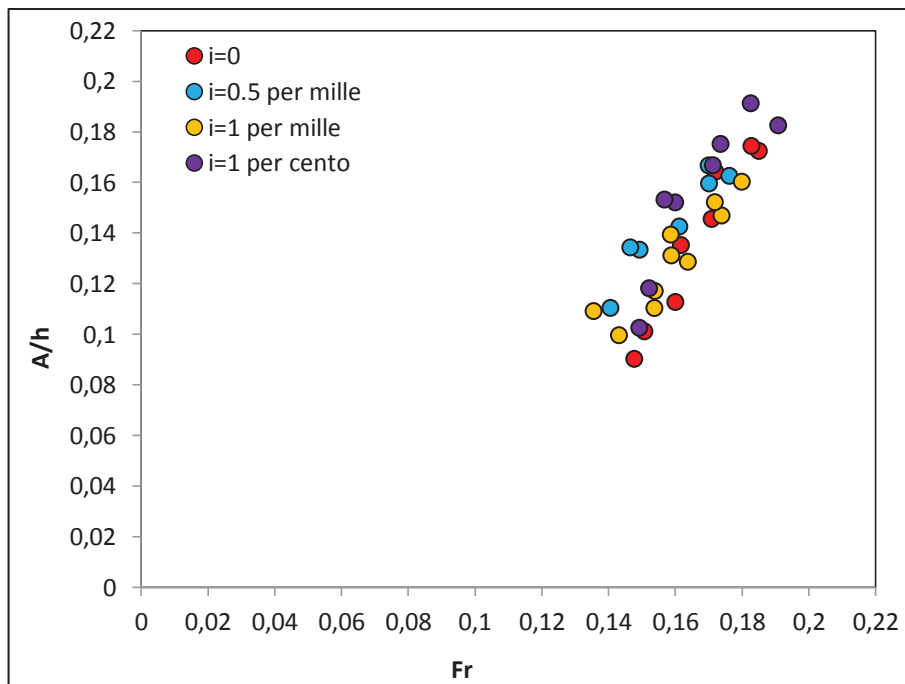


**Fig. 30** Definizione di  $A/h$  massimo (canaletta grande  $Q=12$  l/s)

Per la canaletta piccola sono state effettuate diverse prove con portata variabile da 4 l/s a 11 l/s variando per ciascuna portata la pendenza del fondo da 0 (pendenza nulla) a 5 per mille, a 1 per mille ed infine a 1 per cento. Effettuando una regressione lineare multiparametrica sui valori di  $A/h$  raccolti è stato dimostrato come la pendenza del fondo giochi un ruolo del tutto trascurabile.

In **Fig. 31** si riporta il grafico che lega i valori massimi di  $A/h$  misurati in ciascuna prova al numero di Froude: si osserva chiaramente che al crescere di  $Fr$  aumenta  $A/h$  massimo.





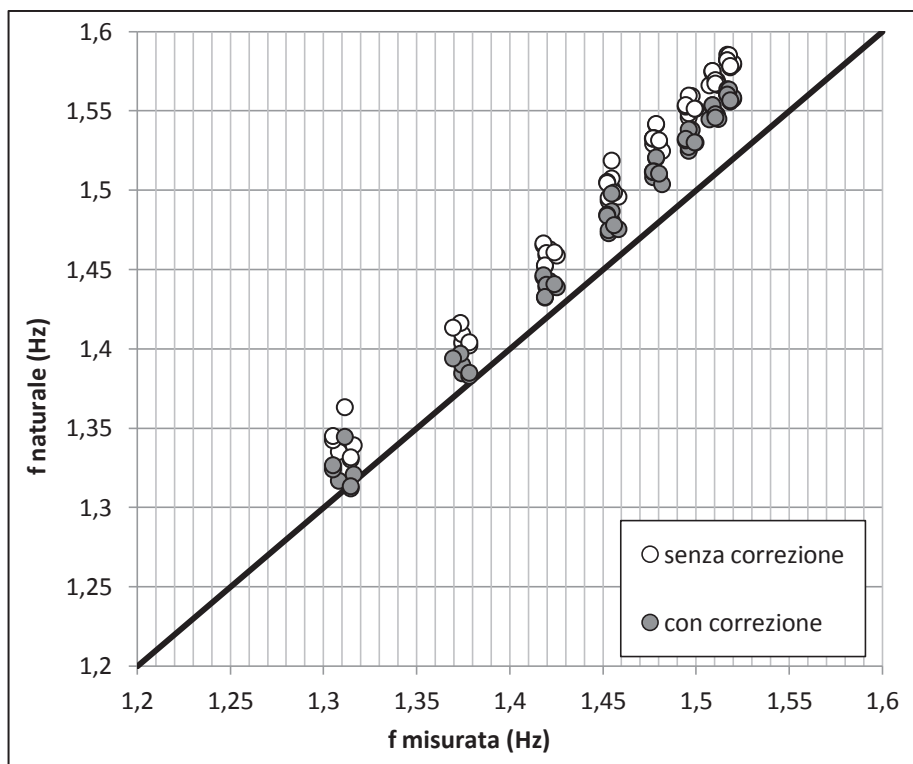
**Fig. 31** Legame tra  $A/h$  max e numero di Froude (canaletta piccola)

Questo comportamento di  $A/h$  che tende a crescere con il numero di Froude è una costante che vedremo essere confermata dagli esperimenti effettuati nella canaletta grande. Inoltre conferma la validità del modello descritto nel capitolo 3 secondo il quale appunto al crescere di  $Fr$  cresce anche  $A/h$ .

Per quanto riguarda invece il confronto tra frequenza dell'onda trasversale misurata tramite i procedimenti descritti nei capitoli precedenti (sovrapposizione della sinusoide teorica all'oscillazione sperimentale e analisi di Fourier) e la frequenza naturale calcolata con la formula delle onde di piccola ampiezza (vedi equazione (1)) si rimanda alla **Fig. 32**.

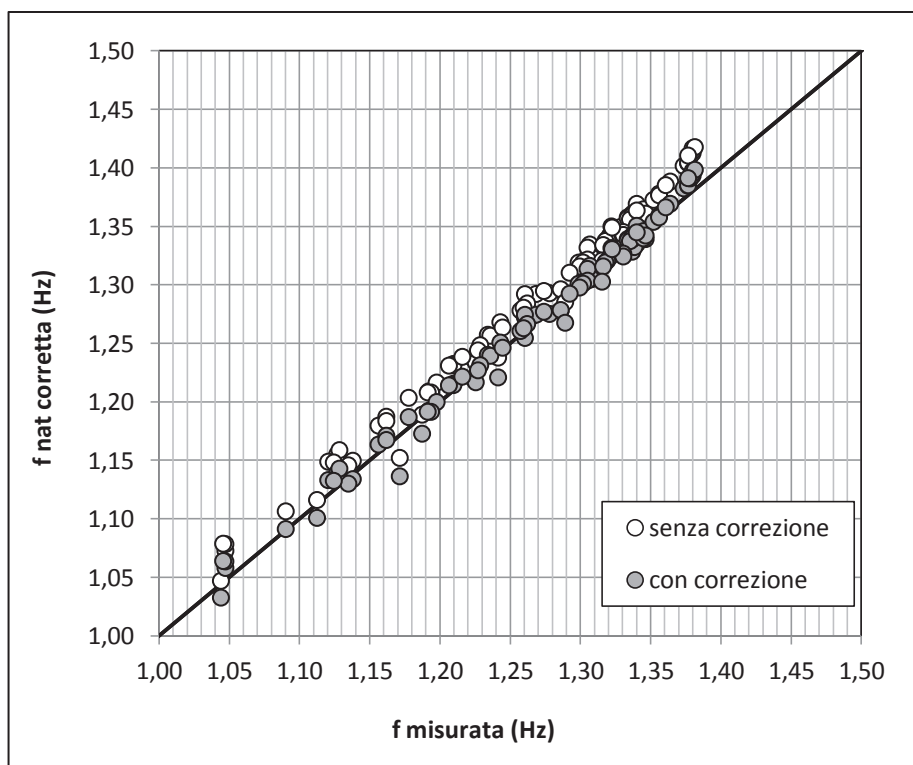
La **Fig. 32** mostra come la formula (1) sovrastimi sistematicamente la frequenza misurata. Questa sovrastima può essere parzialmente corretta se introduciamo una modifica alla formula stessa che infatti è applicabile solo quando l'effetto della densità dei cilindri è trascurabile. Zhao, Cheng e Huang (2014) propongono di considerare l'effetto dei cilindri, trattando la schiera come un mezzo poroso e pervengono ad un'espressione corretta della frequenza naturale (vedi equazione (2)).

Come si osserva dalla **Fig. 32** (confronto pallini grigi e pallini bianchi) la sovrastima viene ridotta se si utilizza la correzione proposta.



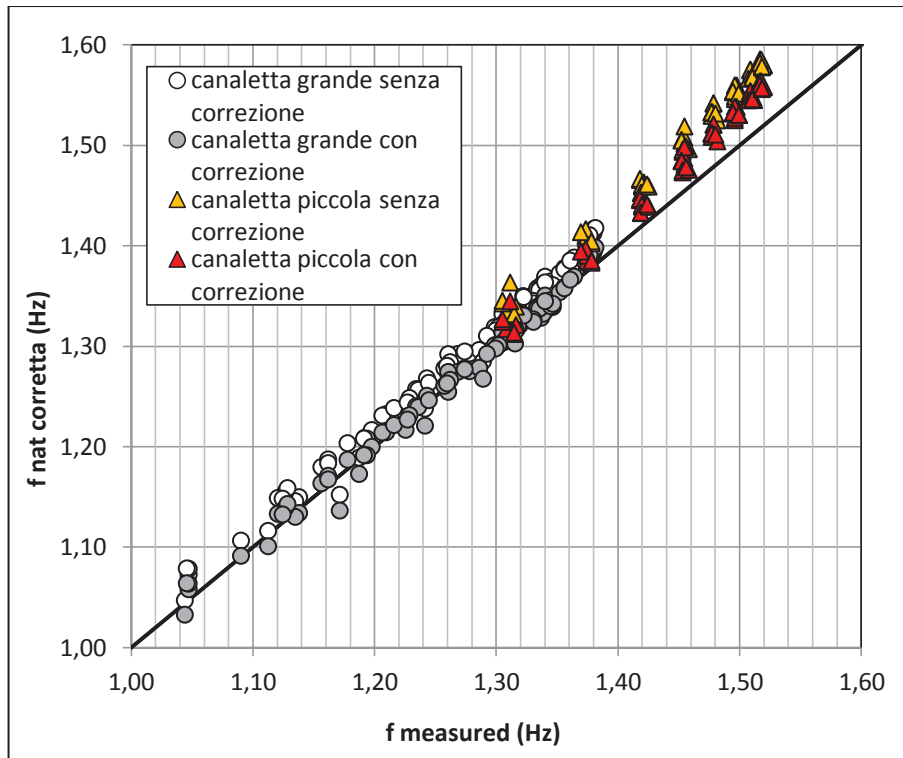
**Fig. 32** Confronto tra frequenza misurata e frequenza calcolata (canaletta piccola)

Se si considerano le prove effettuate nella canaletta grande (vedi **Fig. 33**) si osserva come la correzione alla formula annulli la sovrastima che la vecchia formula dà.



**Fig. 33** Confronto tra frequenza misurata e frequenza calcolata (canaletta grande)

Se andiamo a plottare in un unico grafico i dati relativi alle due canalette (vedi **Fig. 34**) ci accorgiamo che le frequenze realizzatesi in canaletta piccola sono superiori a quelle che si realizzano in canaletta grande. Sembra pertanto che la formula produca un errore tanto maggiore quanto maggiori sono le frequenze misurate.



**Fig. 34 Confronto tra frequenza misurata e frequenza calcolata (canaletta grande e piccola).**

Nella canaletta grande sono state effettuate diverse prove facendo variare la portata da 4 l/s a 25 l/s e mantenendo la pendenza del fondo costante pari a 4 per mille. Sono state inoltre indagate due diverse densità di cilindri:

- nel primo caso sono stati collocati 200 cilindri ricoprenti un area rettangolare di  $6\text{m} \times 0,385\text{m} = 2.31 \text{ m}^2$  con una densità risultante pari a  $n_c=86.58 \text{ 1/m}^2$  (vedi **Fig. 35**);
- nel secondo caso invece il numero dei cilindri è stato dimezzato rimuovendo in senso longitudinale un cilindro ogni due; poichè l'area ricoperta risulta sempre pari a  $6\text{m} \times 0,385\text{m} = 2.31 \text{ m}^2$  ne consegue che la densità risultante viene dimezzata, in particolare  $n_c=43.29 \text{ 1/m}^2$  (vedi **Fig. 36**).

C'è da ricordare inoltre che nella canaletta grande sono state effettuate prove nelle medesime condizioni variando solamente la configurazione dei cilindri da sfalsata ad allineata non riscontrando tuttavia nessuna differenza nè per quanto riguarda le massime ampiezze relative

raggiunte nè i numeri di Froude e le frequenze per i quali esse venivano raggiunte.

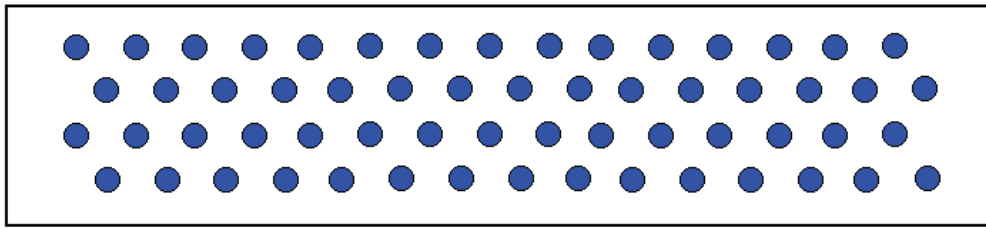


Fig. 35 Configurazione dei cilindri con  $n_c=86.58 \text{ 1/m}^2$

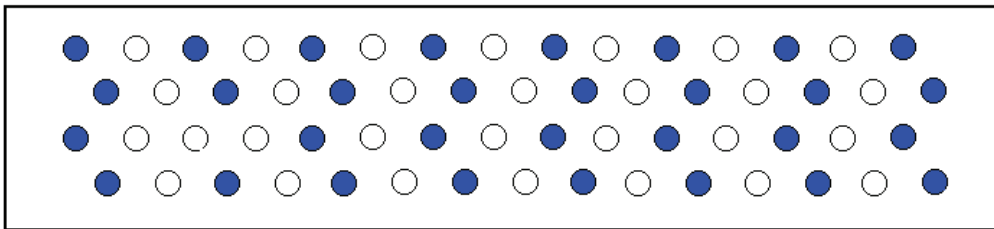


Fig. 36 Configurazione dei cilindri con  $n_c=43.29 \text{ 1/m}^2$

In **Fig. 37** si riporta, analogamente a quanto fatto per la canaletta piccola, il legame tra  $A/h$  massima in condizioni di risonanza e numero di Froude: anche stavolta si osserva come all'aumentare di  $Fr$  aumenti  $A/h_{max}$ , comportamento esibito dai dati relativi ad entrambe le densità dei cilindri. Dal grafico è già intuibile il fatto, che verrà approfondito nel seguito, che a parità di numero di Froude la densità dei cilindri gioca un ruolo fondamentale nella determinazione dell'ampiezza dell'onda.

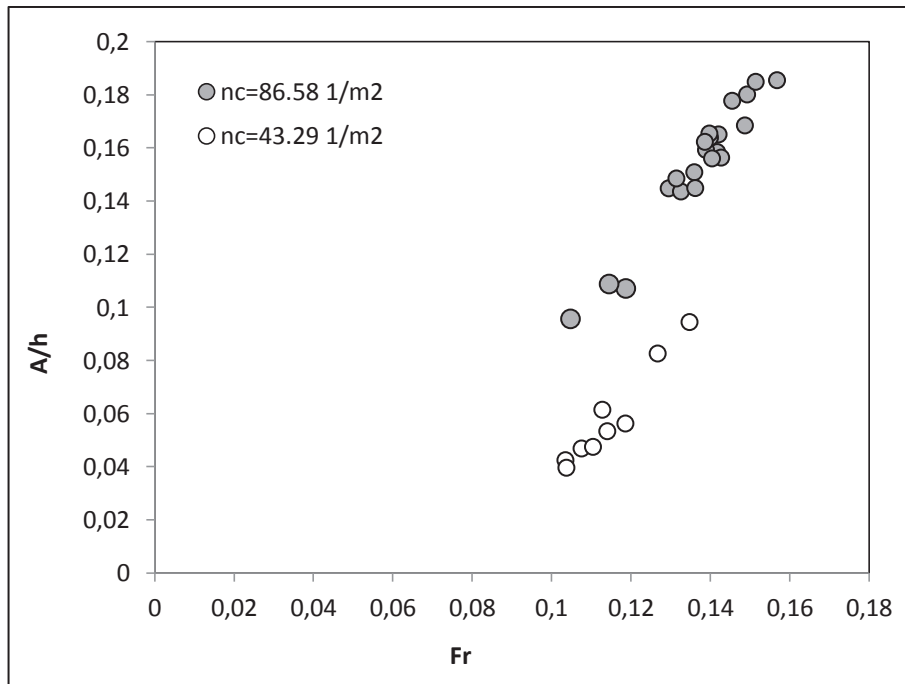


Fig. 37 Legame tra  $A/h$  massime e numero di Froude (canaletta grande)

#### 4.5.1 EFFETTO DELLA DENSITA' DEI CILINDRI SU $A/h$

Per descrivere l'effetto che ha la densità dei cilindri sulla massima ampiezza d'onda relativa è bene confrontare l'esito di due prove effettuate con la stessa portata e con densità rispettivamente l'uno il doppio dell'altra (vedi Fig. 38). La Fig. 38 si riferisce alla prova con portata di 12 l-s ma ha caratteristiche simili a tutte le altre prove effettuate. Nel passaggio alla densità dimezzata si riscontrano i seguenti mutamenti:

- i massimi valori di  $A/h$  si riducono, soprattutto per quanto riguarda il secondo picco, su cui si è concentrata l'analisi finora effettuata delle massime ampiezze d'onda;
- il primo picco viene ad essere più pronunciato del secondo;

Il secondo aspetto evidenziato è probabilmente causato dal fatto che se sono maggiori gli interassi longitudinali tra i cilindri, il comportamento degli stessi si avvicina a quello di un cilindro isolato con la presenza di una frequenza ben distinta associata al numero di Strouhal 0.2 (che dà infatti origine al primo picco); la seconda frequenza di distacco dei vortici invece, associata al numero di Strouhal più basso che dava origine al secondo picco, potrebbe essere meno evidente.

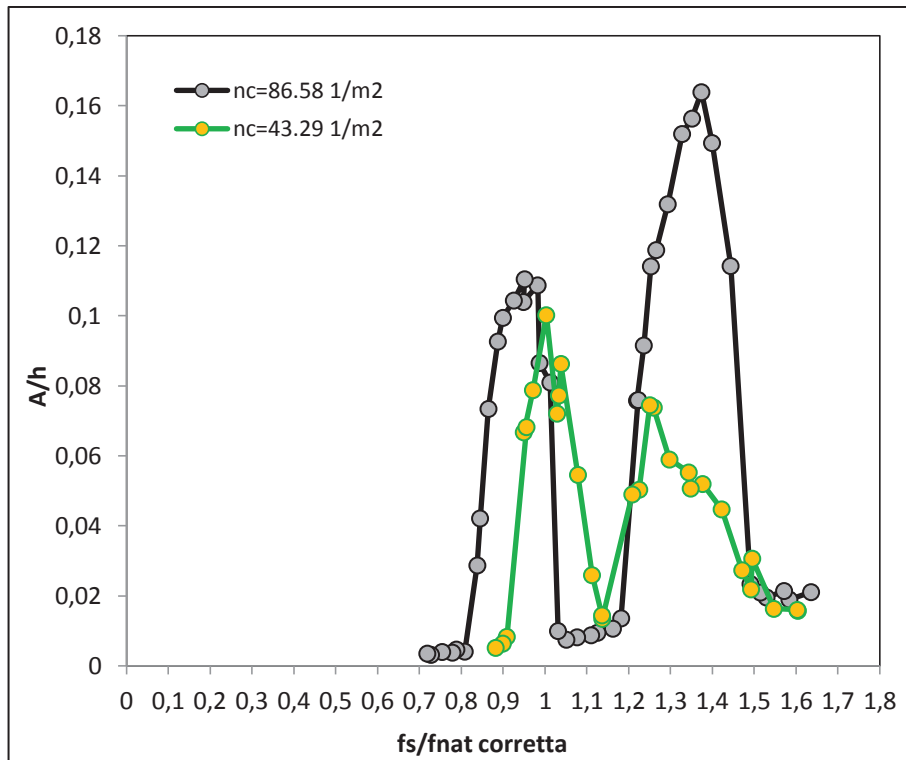


Fig. 38  $A/h$  al variare di  $f_s/f_{nat}$  per diverse densità (canaletta grande  $Q=12$  l/s)

La Fig. 39 mostra infine per ogni portata analizzata il valore di  $A/h$  al variare di  $n_c$ : si osserva come  $A/h$  aumenti al crescere di  $n_c$  in modo analogo per tutte le portate studiate.

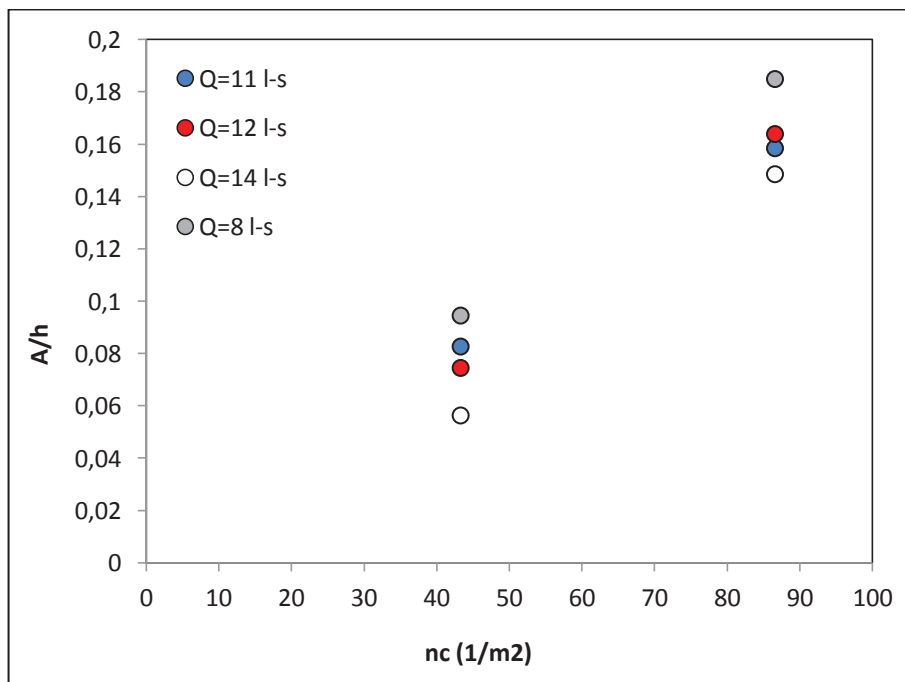


Fig. 39  $A/h$  al variare di  $n_c$

# CAPITOLO 5: APPLICAZIONE DEL MODELLO TEORICO AI DATI SPERIMENTALI

Si è visto nel capitolo precedente che per ciascuna prova effettuata è stato isolato il massimo di ampiezza relativa  $A/h$  e si è plottato mettendolo in relazione con il corrispondente numero di Froude. Si è osservato senza ombra di dubbio come al crescere di  $Fr$  cresca anche  $A/h$  così come previsto dal modello teorico descritto nel capitolo 3. Tuttavia la dipendenza di  $A/h$  dal numero di Froude non è lineare (come invece prevedeva l'equazione (37)), pertanto si è deciso di modificare la formula come di seguito riportato.

L'equazione (37) è stata ottenuta ipotizzando che la viscosità  $\nu_e$  fosse proporzionale alla velocità trasversale  $k_0 U$  e scegliendo come lunghezza scala di riferimento il rapporto tra la larghezza della canaletta e il modo di oscillazione, ovvero  $\nu_e = \nu_k k_0 U B/n$ .

Ricordando che  $A_D = \frac{4 \nu_k \pi^2 n}{C_D}$  e  $\nu_e = \nu_k k_0 U B/n$ , invertendo la seconda formula si ottiene  $\nu_k = \frac{n \nu_e}{k_0 U B}$  che sostituita in  $A_D$  fornisce:

$$A_D = \frac{4 \nu_k \pi^2 n}{C_D} = \frac{4 n \nu_e \pi^2 n}{C_D k_0 U B}$$

Si ipotizza questa volta che la velocità di riferimento per  $\nu_e$  non sia più la velocità trasversale  $k_0 U$  ma sia la celerità di propagazione di una piccola perturbazione gravitazionale, ovvero  $\sqrt{gh_0}$ :

$$\nu_e = \bar{k} \sqrt{gh_0} B/n$$

Sostituendo in  $A_D$  si ottiene:

$$A_D = \frac{4 \pi^2 n^2 \bar{k} \sqrt{gh_0} B/n}{C_D k_0 U B} = \frac{4 \pi^2 n \bar{k}}{C_D k_0 F} = \frac{A'_D}{F}$$

L'equazione (37) diviene allora:

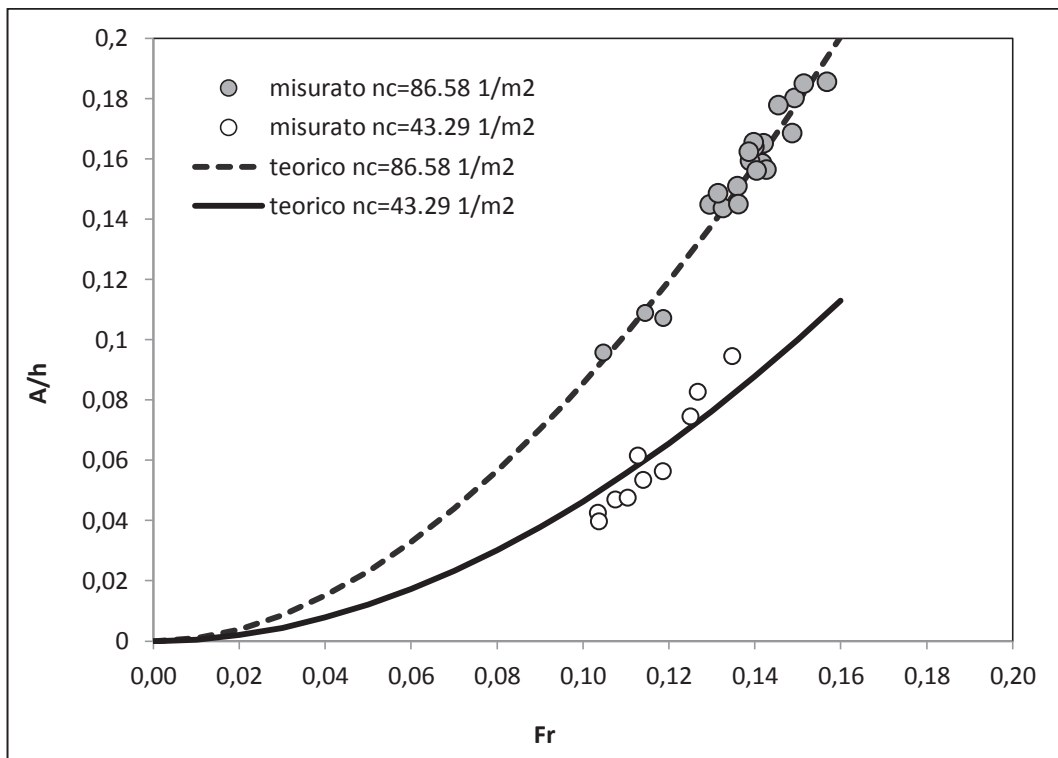
$$\frac{A}{h_0} = \frac{A_m}{1 + \frac{A_D'}{dBn_c F_0}} F_0 \quad (41)$$

I vantaggi che si ottengono con la presente formulazione sono:

- la struttura della formula è rimasta immutata;
- $A_D'$  ed  $A_m$  mantengono la loro natura di parametri di calibrazione;
- si introduce un numero di Froude a denominatore che consente di descrivere al meglio la dipendenza di  $A/h$  da  $Fr$ .

In **Fig. 40** l'espressione teorica di  $A/h$  (equazione (41)) è stata plottata al variare di  $Fr$  per le due diverse densità di cilindri analizzate negli esperimenti effettuati nella canaletta grande. Alle curve teoriche vengono sovrapposti i dati sperimentali relativi alle massime ampiezze d'onda relative misurate in corrispondenza del secondo picco con i relativi numeri di Froude. Si osserva come i punti sperimentali vengano ben approssimati dalla curva teorica, in particolare la formula proposta ben descrive l'abbattimento di  $A/h$  prodotto da una ridotta densità di cilindri.

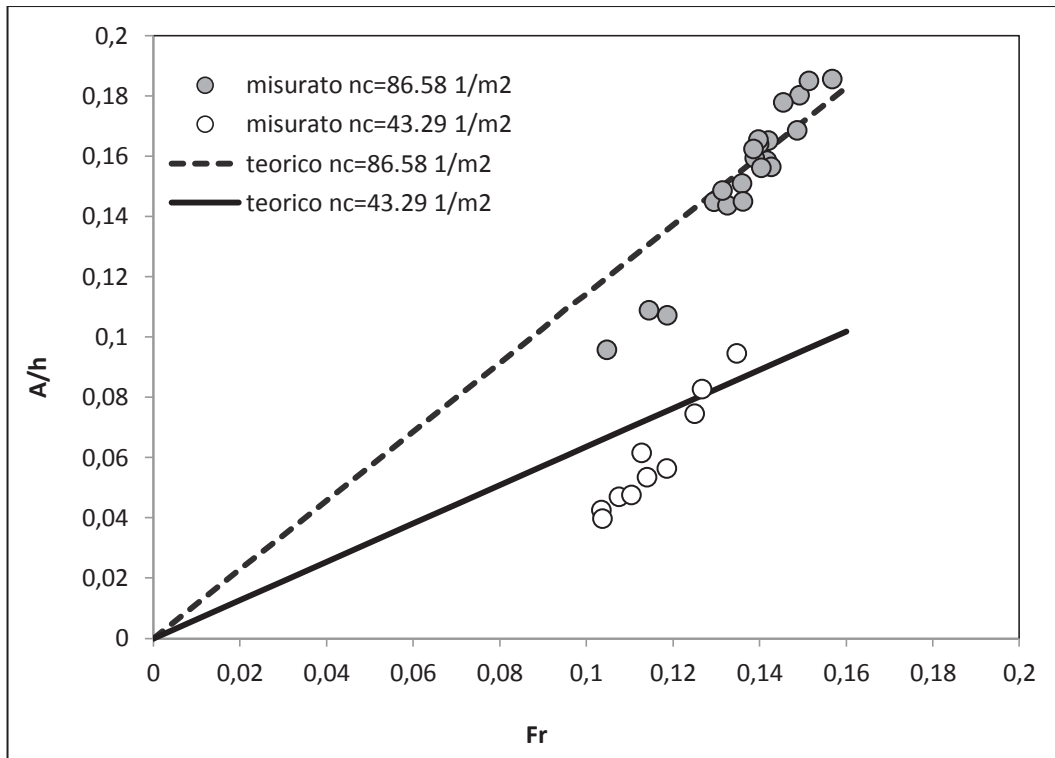
I parametri di calibrazione  $A_m$  e  $A_D'$  sono stati fissati rispettivamente a 5.6 e 0.37 servendosi della medesima procedura iterativa descritta nel capitolo 3.



**Fig. 40** Legame tra  $A/h$  e  $Fr$  teorico dato dall'equazione (41) e punti sperimentali (canaletta grande)



La **Fig. 41** mostra invece quale sarebbe stato il legame teorico tra  $A/h$  massimo e  $Fr$  se si fosse utilizzata l'equazione (37) in cui ovviamente il parametro  $A_m$  è stato mantenuto pari a 5.6 mentre il parametro  $A_D$  è stato modificato a 2.6 essendo variata la sua definizione. Si osserva come sia per  $n_c=86.58 \text{ 1/m}^2$  sia per  $n_c=43.29 \text{ 1/m}^2$  i valori misurati si adattino meno bene al legame teorico.



**Fig. 41** Legame tra  $A/h$  e  $Fr$  teorico dato dall'equazione (37) e punti sperimentali (canaletta grande)

Infine la **Fig. 42** mostra il confronto tra valori di  $A/h$  misurati sperimentalmente in canaletta grande in corrispondenza del secondo picco per le due diverse densità di cilindri e valori di  $A/h$  teorici calcolati con la formula (41) in cui i parametri  $A_m$  e  $A_D'$  sono stati fissati rispettivamente a 5.6 e 0.37 come precedentemente ricordato.

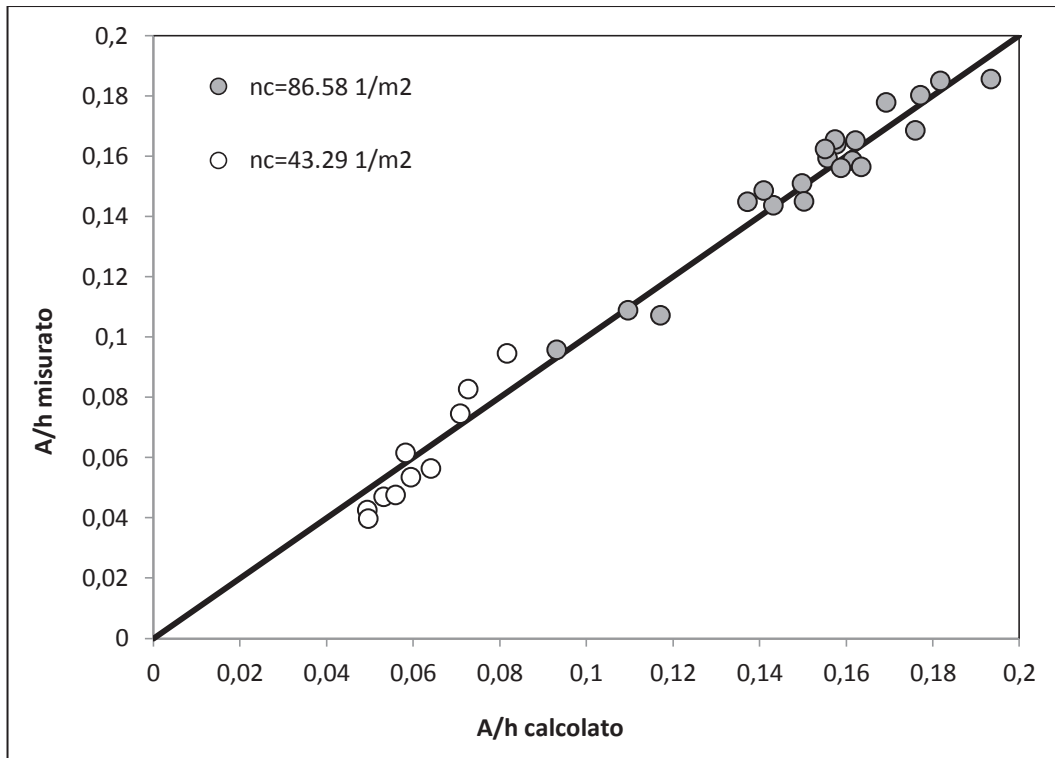
La figura mostra che i dati si dispongono lungo la bisettrice indicando l'ottima approssimazione con cui i valori teorici si avvicinano a quelli sperimentali.

Come già descritto nel capitolo 3 per valutare quantitativamente la precisione del modello proposto si utilizza il coefficiente di efficienza di Nash-Sutcliffe definito come

$$E = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M (m_i - p_i)^2}{\sum_{i=1}^M (m_i - \mu)^2}$$

dove  $m_i$  sono i dati misurati,  $p_i$  le corrispondenti previsioni del modello,  $\mu$  è la media dei dati misurati e  $M$  è la dimensione del campione.

Nella fattispecie si trova  $E=0.983$ , valore che conferma l'ottima accuratezza del modello: secondo un recente criterio proposto da Allen, Somerfield e Gilbert (2007) infatti il modello può essere considerato eccellente se  $E>0.65$ .

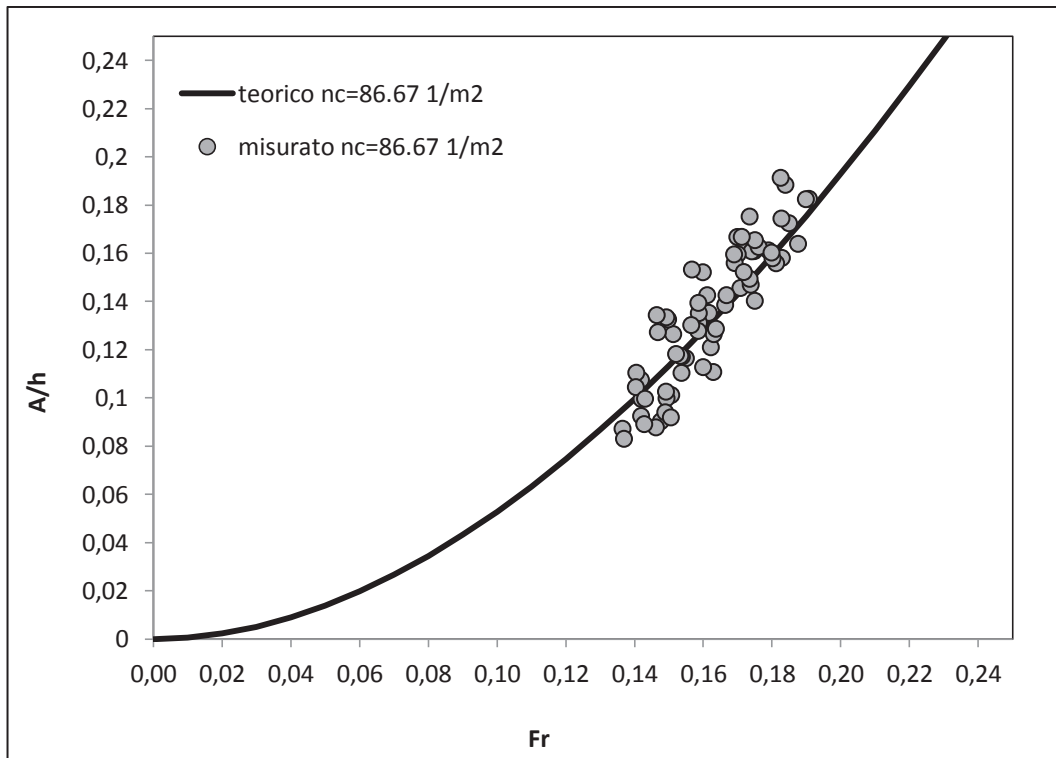


**Fig. 42** Confronto tra valori di  $A/h$  max misurati e calcolati con la formula (41) (canaletta grande)

La medesima analisi viene ripetuta per i dati misurati in canaletta piccola.

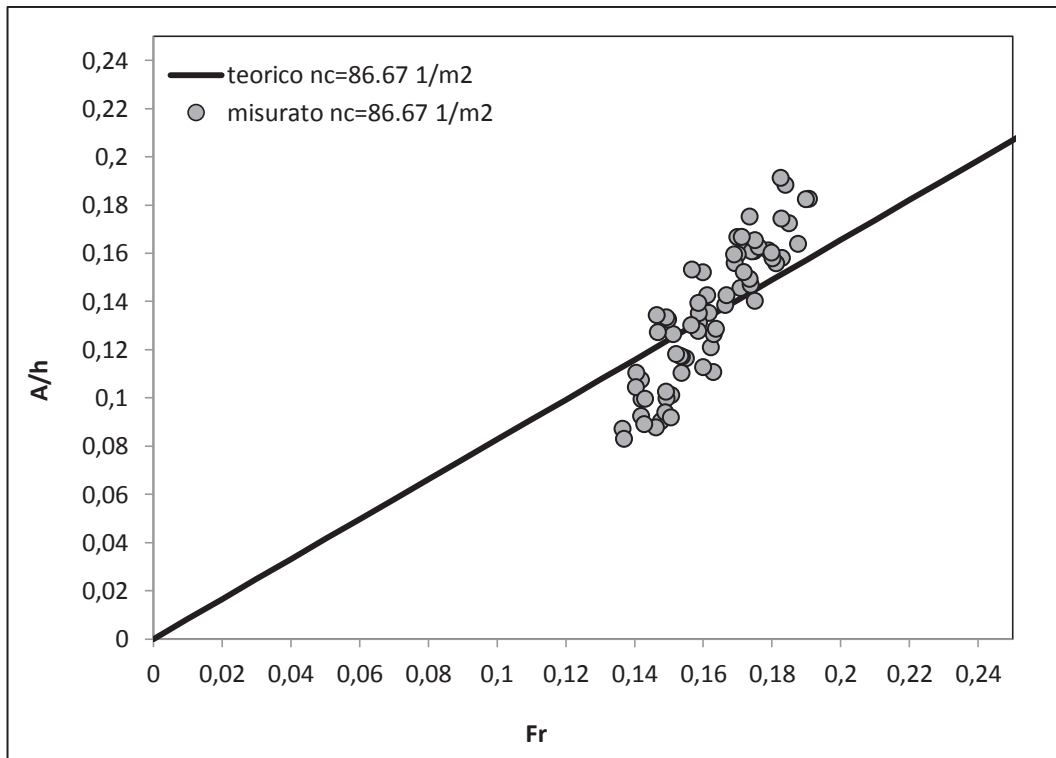
In **Fig. 43** l'espressione teorica (41) di  $A/h$  è stata plottata al variare di  $Fr$ . Alla curva teorica vengono sovrapposti i dati sperimentali relativi alle massime ampiezze d'onda relative misurate in canaletta piccola con i relativi numeri di Froude. I parametri di calibrazione  $A_m$  e  $A_{D'}$  sono stati fissati rispettivamente a 5.6 e 0.5 servendosi della medesima procedura iterativa descritta nel capitolo 3. Come ricordato sempre nel capitolo 3 un diverso valore del parametro  $A_{D'}$  tra le due canalette è imputabile al fatto che l'ampiezza relativa risente di eventuali disturbi introdotti nel campo di moto i quali sono a loro volta dipendenti dalla diversa configurazione dell'apparato sperimentale utilizzato.

Ancora una volta si osserva una buona corrispondenza tra curva teorica e valori misurati.



**Fig. 43** Legame tra  $A/h$  e  $Fr$  teorico dato dalla formula (41) e punti sperimentali (canaletta piccola)

La **Fig. 44** mostra invece quale sarebbe stato il legame teorico tra  $A/h$  massimo e  $Fr$  se si fosse utilizzata la formula (37) in cui ovviamente il parametro  $A_m$  è stato mantenuto pari a 5.6 mentre il parametro  $A_D$  è stato modificato a 3.0 essendo variata la sua definizione. Si osserva come l'accordo tra dati sperimentali e curva teorica non sia buono in quanto i primi non seguono un andamento lineare come previsto dalla formula.

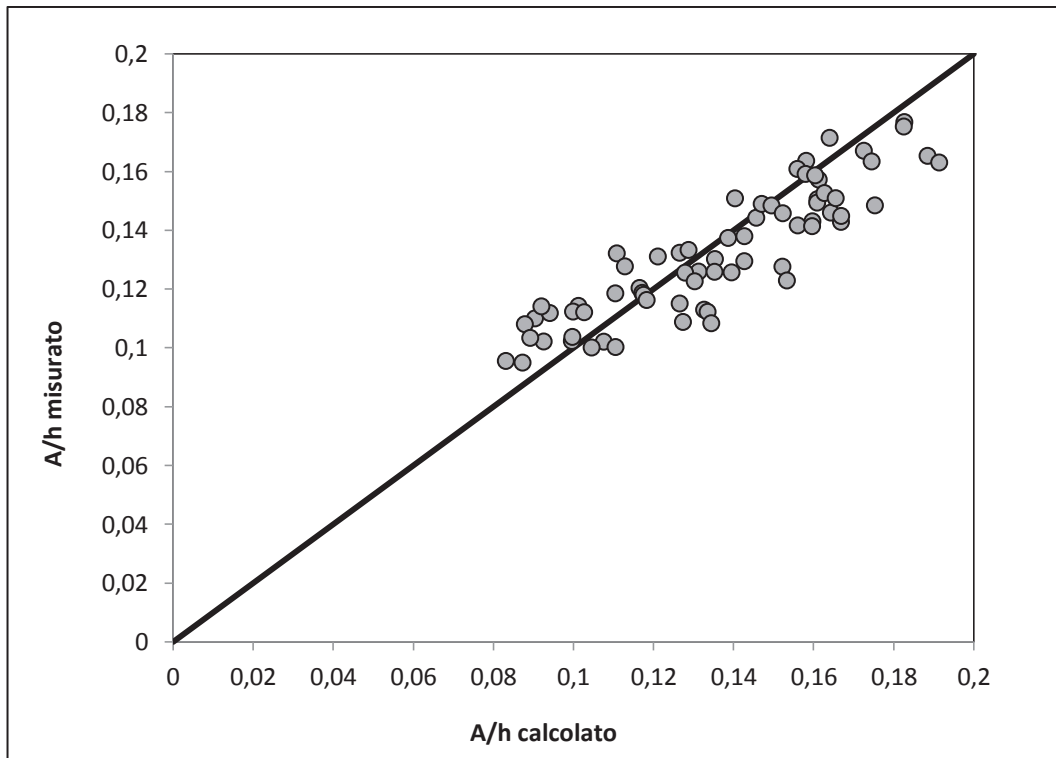


**Fig. 44** Legame tra  $A/h$  e  $Fr$  teorico dato dalla formula (37) e punti sperimentali (canaletta piccola)

Infine la **Fig. 45** mostra il confronto tra valori di  $A/h$  misurati sperimentalmente in canaletta piccola e valori di  $A/h$  teorici calcolati con la formula (41) in cui i parametri  $A_m$  e  $A_D'$  sono stati fissati rispettivamente a 5.6 e 0.5 come precedentemente ricordato.

La figura mostra che i dati si dispongono lungo la bisettrice indicando l'ottima approssimazione con cui i valori teorici si avvicinano a quelli sperimentali.

Il valore del coefficiente di efficienza di Nash-Sutcliffe è in questo caso pari a  $E=0.768$ , valore che conferma la buona accuratezza del modello.



**Fig. 45** Confronto tra valori di  $A/h$  max misurati e calcolati con la formula (41) (canaletta piccola)

E' evidente come, rispetto ai dati relativi alla canaletta grande, quelli afferenti alla canaletta piccola siano caratterizzati da una maggiore dispersione attorno alla bisettrice. Questo fatto è spiegabile nel modo seguente. Quando infatti viene effettuata una prova sperimentale con una determinata portata fissata si ricercano le condizioni di massima ampiezza d'onda trasversale relativa andando a modificare la profondità della corrente in canaletta. Tuttavia non si riesce ad ottenere una variazione continua del tirante pertanto le condizioni di massima ampiezza relativa potrebbero verificarsi in corrispondenza di un tirante compreso tra i due tiranti misurati cosicchè verrebbe mancata l'acquisizione del valore di massima ampiezza relativa assoluta. In particolare questo fenomeno è molto evidente quando si è in corrispondenza della risonanza perchè a piccole variazioni di profondità della corrente corrispondono grandissime variazioni di ampiezza relativa.

Si osservi a questo proposito la **Fig. 46** in cui vengono riportate tre diverse prove effettuate ciascuna a distanza di mesi dall'altra nelle medesime condizioni di portata, densità dei cilindri ecc. Si osserva chiaramente come nella prima e seconda prova vengano rilevate le condizioni di massima ampiezza relativa, mentre nella terza prova no essendosi misurati due stati a cavallo della massima ampiezza.

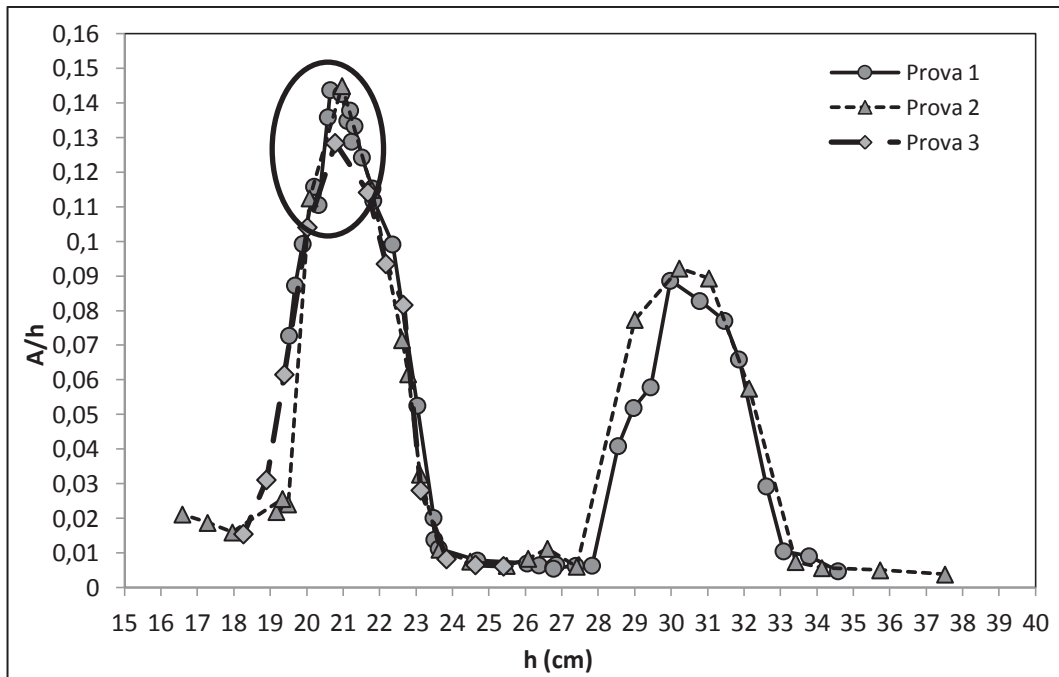


Fig. 46 Confronto tra diverse prove (Q=15 l/s)

# CAPITOLO 6: EFFETTO DELL' ONDA LONGITUDINALE

In tutti gli esperimenti effettuati la comparsa dell'oscillazione trasversale era sempre accompagnata dalla contemporanea presenza di un'onda longitudinale, non stazionaria ma progressiva, che si propagava verso monte. Quest'onda sembra avere un effetto sull'ampiezza dell'onda trasversale prodotta poiché le due oscillazioni, trasversale e longitudinale, si compongono causando un'onda metacronale (una sorta di "ola").

Già Zima e Ackermann (2002), nel corso dei loro esperimenti, avevano osservato onde longitudinali progressive e battimenti che si sovrapponevano alla sessa trasversale: queste onde venivano ridotte mettendo un materiale fibroso assorbente all'estremità di valle del canale artificiale, ma non potevano essere completamente rimosse.

Anche Zhao, Cheng e Huang (2014) ricordano nel loro studio che l'osservazione dell'onda trasversale stazionaria è stata sempre accompagnata dalla comparsa di un'onda longitudinale progressiva, la quale si propagava verso monte. I tre studiosi infatti osservano quattro condizioni di flusso identiche a quelle da noi osservate:

- superficie libera piana;
- oscillazione trasversale;
- oscillazione longitudinale;
- superficie libera disturbata.

Tuttavia la seconda e la terza condizione si verificano sempre simultaneamente con prevalenza talvolta di una componente e talvolta dell'altra.

Zhao, Cheng e Huang (2014) spiegano la comparsa dell'onda longitudinale come una perturbazione di piccola ampiezza che, essendo sempre in condizioni subcritiche, si propaga verso monte. Questa piccola perturbazione avrebbe origine dalla repentina riduzione di velocità del fluido nel passaggio al tratto a valle della schiera di cilindri caratterizzato da una sezione liquida maggiore proprio per l'assenza dei cilindri. Tuttavia seri dubbi su questa interpretazione vengono avanzati in quanto nel corso dei nostri esperimenti si è misurata la celerità di propagazione dell'onda longitudinale la quale è risultata essere molto superiore a quella prevista dalla teoria lineare in presenza di quel tirante. La ragione della comparsa

di questa onda longitudinale potrebbe invece essere legata ad una sincronizzazione imperfetta, cioè al fatto che i vortici quando si staccano dai cilindri non sono tutti in fase l'uno rispetto all'altro; questa mancanza di sincronizzazione induce un'onda metacronale.

Le onde longitudinali inoltre possono essere causate dalla forza longitudinale indotta sul fluido dai cilindri. In realtà infatti, questa forza è periodica sia perché il coefficiente di drag oscilla con frequenza  $2f_v$ , cioè, due volte la frequenza di distacco dei vortici (vedi ad esempio Blackburn e Henderson (1999)), sia perché la sessa trasversale induce una forza longitudinale periodica,  $F_x$ , come indicato dalla equazione (20), in cui i coefficienti di lift e di drag, nonché la velocità trasversale, sono periodici. Inoltre si generano onde longitudinali a causa dell'interazione tra l'oscillazione trasversale promossa dai cilindri e la superficie libera quasi orizzontale imposta dallo sbarramento a valle utilizzato negli esperimenti per controllare la profondità della corrente.

Queste onde longitudinali possono avere un impatto sull'oscillazione trasversale fornendo o sottraendo quantità di moto al fluido.

Si è cercato di studiare il comportamento dell'onda longitudinale misurandone la lunghezza e la celerità di propagazione nel modo di seguito descritto.

Si ipotizza che l'andamento spazio-temporale della superficie libera possa essere descritto dalla equazione  $h=h_0+\text{sen}(\omega t+kx+\varphi_0)$ , in cui rispetto alla formulazione introdotta nel capitolo 4 è stato aggiunto il termine  $kx$ , dove  $k$  rappresenta il numero d'onda longitudinale e  $x$  la distanza relativa delle sonde rispetto alla prima assunta come riferimento. Il valore di  $k$  viene calcolato sperimentalmente a partire dalle rilevazioni delle tre sonde: in particolare si scelgono i valori di  $\omega$ ,  $k$  e  $\varphi_0$  che permettono la simultanea sovrapposizione delle tre rilevazioni effettuate dalle tre sonde con le tre sinusoidi calcolate (i valori di  $\omega$ ,  $k$  e  $\varphi_0$  sono gli stessi per le tre sonde mentre, come già detto,  $x$  è la posizione relativa delle sonde rispetto alla prima assunta come riferimento). La celerità dell'onda longitudinale si ottiene dal rapporto tra  $\omega$  e  $k$ .

In **Fig. 47** viene riportato il legame tra numero di Froude e lunghezza d'onda longitudinale  $\lambda$  adimensionalizzata con la profondità della corrente  $h$ , misurata in corrispondenza dei massimi valori di  $A/h$ . Si osserva che all'aumentare del numero di Froude la lunghezza d'onda adimensionalizzata  $\lambda/h$  aumenta.

Dai dati raccolti non è emerso nessun altro legame tra  $\lambda/h$  e altre grandezze adimensionali in gioco quali il numero di Reynolds o la massima ampiezza d'onda relativa. Nemmeno le celerità di propagazione di quest'onda longitudinale sembrano in alcun modo legate ai vari parametri idraulici e geometrici.



Possiamo affermare pertanto che il fenomeno di formazione di quest'onda longitudinale, ben lungi dall'essere compreso appieno, necessiterebbe di ulteriori indagini sperimentali.

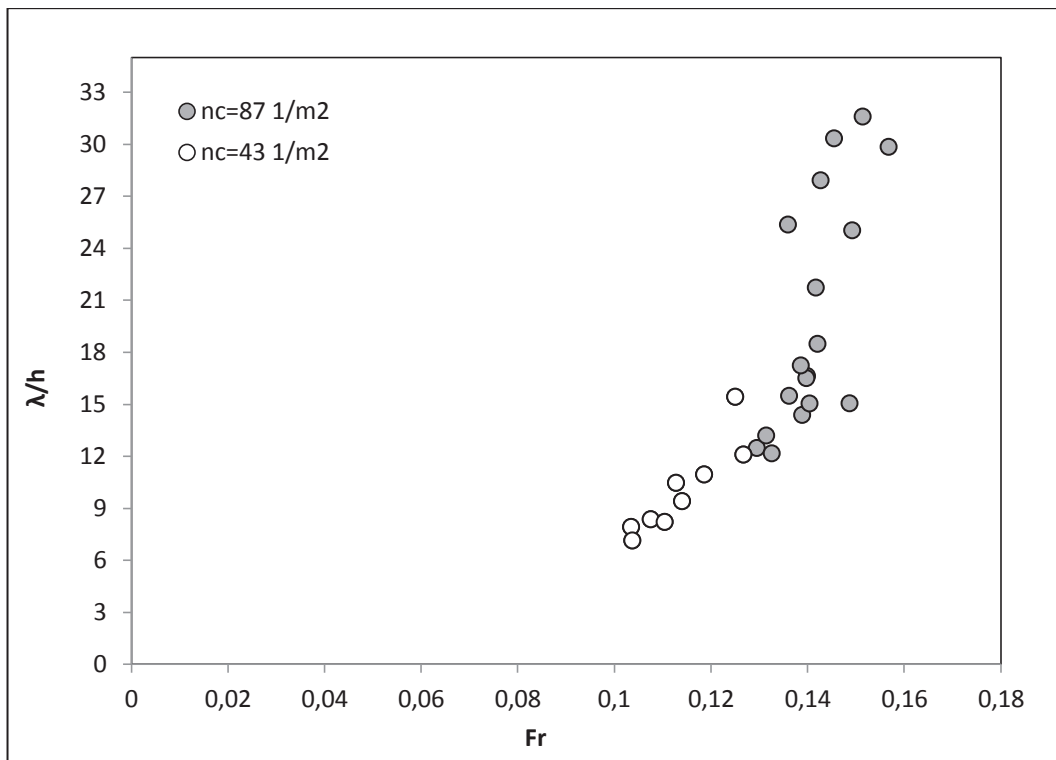


Fig. 47 Legame tra  $\lambda/h$  e  $Fr$



# CAPITOLO 7: CONCLUSIONI

Il lavoro descritto nella presente tesi di dottorato mira a comprendere il fenomeno di formazione di un'onda trasversale stazionaria che si realizza quando una corrente a superficie libera incontra una schiera di cilindri verticali.

Si è già detto come il problema oggetto di studio sia stato scarsamente studiato in letteratura, nonostante negli ultimi tempi l'attenzione si sia risvegliata soprattutto perchè il fenomeno causa fastidi nei numerosi esperimenti che vengono condotti per studiare il moto dell'acqua attraverso la vegetazione.

L'approccio adottato nel mio lavoro è stato duplice, sia teorico che sperimentale. Per quanto riguarda il modello teorico, esso, per la prima volta, si basa su una risoluzione delle equazioni caratteristiche dell'idraulica e non su semplici considerazioni statistiche come riscontrato in alcuni degli studi presenti in letteratura (vedi Ghomeshi et al. (2007) e Jafari et al. (2010)). Anche lo studio sperimentale presenta notevoli miglioramenti rispetto agli studi passati, soprattutto per quanto riguarda l'acquisizione della quota del pelo libero che non viene effettuata a vista ma con l'uso di sonde ultrasoniche. Inoltre la mole dei dati sperimentali raccolti è notevole e si spinge ad un grado di precisione elevato.

I risultati raggiunti sono molteplici.

Si è dimostrata la dipendenza della massima ampiezza d'onda relativa da parametri idraulici, quali il numero di Froude, e da parametri geometrici, quali la densità dei cilindri. L'effetto di entrambi questi parametri è correttamente incluso all'interno della formula proposta per  $A/h$  massima (vedi equazione (41) che si accorda molto bene con i dati sperimentali raccolti nel corso dei nostri esperimenti di laboratorio. Inoltre il modello proposto consente di descrivere in maniera sufficientemente buona anche i dati di letteratura raccolti dai vari studiosi che si sono occupati di questo fenomeno.

Si è dimostrata poi la validità della correzione introdotta da Zhao, Cheng e Huang (2014) per tener conto della porosità data dai cilindri nel calcolo della frequenza dell'onda trasversale.

Un'ulteriore scoperta effettuata nel corso dello studio è che si è rilevata per la prima volta la presenza di due distinti picchi di ampiezza

relativa a modo 1. Come ricordato nei capitoli precedenti questo fatto suggerisce la contemporanea presenza di due distinte frequenze di distacco dei vortici, associate a due differenti valori del numero di Strouhal, che danno luogo a due diverse condizioni di risonanza.

Infine, come già rilevato in diversi studi presenti in letteratura, è stata osservata la formazione di un'onda longitudinale progressiva che si sovrappone all'oscillazione trasversale. Di quest'onda longitudinale però è stata data per la prima volta un'interpretazione diversa, associandola ad una mancanza di sincronizzazione nel distacco dei vortici dai vari cilindri in senso longitudinale. Questo fatto sarebbe appunto all'origine dell'onda metacronale osservata.

# BIBLIOGRAFIA

Alam M., Zhou Y. Strouhal numbers, forces and flow structures around two tandem cylinders of different diameters. *Journal of Fluids and Structures* 24 (2008) 505–526.

Allen JI, Somerfield PJ, Gilbert FJ. Quantifying uncertainty in high-resolution coupled hydrodynamic-ecosystem models. *J Mar Syst* 2007; 64:3–14.

Blackburn HM, Henderson RD. A study of two-dimensional flow past an oscillating cylinder. *J Fluid Mech* 1999;385:255–86.

Blevins, R.D. *Flow-Induced Vibrations*. 1990. Van Nostrand Reinhold, New York.

Clay D. e G. Tison. Vortex-induced oscillations at low-head weirs. *J. Hydraulic Div. Am. Soc. Civil Eng.*, 1968, 94: 1160-1160.

Crassé. About Oscillation phenomenon on water surface Part 1: Flow around obstacle form piles of bridge. 1939.

Defina A. Two dimensional shallow flow equations for partially dry areas. *Water Resour Res* 2000;36(11): 3251–64.

Defina A, Peruzzo P. Floating particle trapping and diffusion in vegetated open channel flow. *Water Resour Res* 2010; 46:W11525.

Defina A, Peruzzo P. Diffusion of floating particles in flow through emergent vegetation: further experimental investigation. *Water Resour Res* 2012; 48:W03501.

Defina A., Pradella I. Vortex induced cross-flow seiching in cylinder arrays. *Advances in Water Resources*, 2014, Vol. 71, pp.140–148.

Falvey HT. Discussion of wave generation in open channels by vortex shedding from channel obstructions by Laura Zima and Norbert Ackermann. *J Hydraul Eng* 2003; 129:919.

Fey U, König M, Eckelmann H. A new Strouhal-Reynolds-number relationship for the circular cylinder in the range  $47 < Re < 2 \times 10^5$ . *Phys Fluids A* 1998;10:1547–9.

Fitz-Hugh J.S. Flow induced vibration in heat exchangers. *Proceedings of the UKAEA/NPL International Symposium on Vibration Problems in Industry*, April 1973, Keswick, England, pp: 1-17.

Ghomeshi M, Mortazavi-Dorcheh SA, Falconer R. Amplitude of wave formation by vortex shedding in open channels. *J Appl Sci* 2007;7:3927–34.

Hanko ZG. Vortex-induced oscillations at low-head weirs. *J Hydraul Div* 1967;93(6):255–70.

Howes A.M. Canal Wave Oscillation Phenomena Due to Column Vortex Shedding. Master of Science, Utah State University (2011).

Jafari A, Ghomeshi M, Bina M, Kashefipour SM. Experimental study on ten modes of transverse waves due to vertical cylinders in open channels. *J Food Agri Env* 2010;8:949–55.

Lam K, Li JY, So RMC. Force coefficients and Strouhal numbers of four cylinders in cross flow. *J Fluids Struct* 2003;18:305–24.

Lam K, Zou L. Experimental and numerical study for the cross-flow around four cylinders in an in-line square configuration. *J Mech Sci Technol* 2007;21:1338–43.

Norbert C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *J Fluids Struct* 2003;17:57–96.

Oengören A, Ziada S. Vorticity shedding and acoustic resonance in an in-line tube bundle. Part II: acoustic resonance. *J Fluids Struct* 1992;6:293–309.

Oengören A, Ziada S. An in-depth study of vortex shedding, acoustic resonance and turbulent forces in normal triangle tube arrays. *J Fluids Struct* 1998;12:717–58.

Peruzzo P, Defina A, Nepf MH. Capillary trapping of buoyant particles within regions of emergent vegetation. *Water Resour Res* 2012;48:W07512.

Raupach MR, Shaw RH. Averaging procedures for flow within vegetation canopies. *Boundary Layer Meteorol* 1982;22:79–90.

Sarkar A. Vortex-excited transverse surface waves in an array of randomly placed circular cylinders. *J Hydraul Eng* 2012;138(7):610–8.

Stone B. M., Shen H. T. Hydraulic resistance of flow in channels with cylindrical roughness. *J. Hydraulic Eng.* 2002; 128(5), 500-506.

Sumner D. Two circular cylinders in cross-flow: a review. *J Fluids Struct* 2010;26:849–99.

Tsujimoto, T. Spectral analysis of velocity and water-surface fluctuations appearing in an open channel with vegetated and nonvegetated regions in a cross-section. Proc., 6th IAHR Int. Symposium on Stochastic Hydraulics, 1992, Taipei, Taiwan, 361–368.

Tsujimoto, T., e Kitamura, T. Transverse mixing associated with surface wave in open channel flow with longitudinal zone of vegetation. Proc. Hydraulic Engineering, JSCE, 1992, 36, 273–280.

Williamson CHK, Govardhan R. Vortex-induced vibrations. *Annu Rev Fluid Mech* 2000;36:413–55.

Williamson CHK, Govardhan R. A brief review of recent results in vortex induced vibrations. *J Wind Eng Ind Aerodyn* 2008;96:713–35.

Yu X., Chwang A. Wave motion through porous structures. *J. Eng. Mech.* 1994; 120(5), 989-1008.

Zdravkovich M. M. Modification of Vortex Shedding in the Synchronization Range. *J. Fluids Eng.* 1982, 104, pp. 513–517.

Zhao K., Cheng N.S., Huang Z. Experimental study of free-surface fluctuations in open-channel flow in the presence of periodic cylinder arrays. *Journal of Hydraulic Research* 2014, 52:4,465-475.

Ziada S, Oengören A. Vorticity shedding in an in-line tube bundle with large tube spacings. *J Fluids Struct* 1993;14:197–219.

Ziada S, Oengören A. Flow periodicity and acoustic resonance in parallel triangle tube bundles. *J Fluids Struct* 2000;7:661–87.

Zima L, Ackermann NL. Wave generation in open channels by vortex shedding from channel obstructions. *J Hydraul Eng* 2002;128:596–603.

Zukauskas A., R. Ulinskas e V. Katinas. *Fluid Dynamics and Flow-Induced Vibrations of Tube Banks.* 1988. Hemisphere, New York, pp: 290.