UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Sede Amministrativa: Università degli Studi di Padova
Sede Consorziata: Università degli Studi di Trieste

Dipartimento di SCIENZE DELL'EDUCAZIONE

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN : Scienze pedagogiche, dell'educazione e della formazione
CICLO XXIII

Un'indagine sulle concezioni del contenuto pedagogico della matematica di insegnanti di scuola dell'obbligo. Indicazioni per una progettazione della formazione matematica per l'insegnamento

Direttore della Scuola : Ch.ma Prof.ssa Marina Santi

Supervisore :Ch.mo Prof. Paolo Sorzio

Dottorando : Marco Bardelli

INDICE

Abstract in italiano

La ridefinizione delle competenze degli insegnanti è una questione che ha investito la politica educativa degli ultimi decenni a seguito dei cambiamenti socioeconomici che la learning society ha imposto (Hutchins, 1968; Husén, 1974; Argyris & Schön, 1998; Tomassini, 1993; Quaglino,1999). Contemporaneamente la ricerca educativa sulla scuola ha spostato il suo principale centro di interesse sull'insegnante per una serie di questioni inerenti i cambiamenti dei saperi richiesti dalla società contemporanea e l'insoddisfazione verso i risultati dei precedenti approcci alla ricerca educativa che interpretavano l'insegnamento come causa diretta dell'apprendimento (Altet, 2008; Damiano, 2006; Groppo, 1975) . Il fattore insegnante con le sue concezioni e la trasformazione del sapere che mette in atto nel pensiero e nella pratica era stato per troppo tempo lasciato sullo sfondo. In particolare il sapere dell'insegnante relativo alla disciplina insegnata ha avuto quasi nessun interesse per la ricerca fino alla fine degli anni '80 in cui Shulman (1986; 1987), in una sua ormai famosa serie di articoli, ha posto la questione sul tipo di sapere disciplinare che è in possesso degli insegnanti come una questione vitale per la comprensione dei processi di insegnamento/apprendimento. Le nuove competenze richieste agli insegnanti dalla società contemporanea definita della conoscenza contemplano anche una più esplicita e definita assunzione di quella che sono le tipiche competenze dell'insegnante rispetto alla disciplina (Baldacci, 2010; Magnoler e Sorzio in corso di stampa). Due sono i settori di ricerca a cui questa indagine si è rivolta per acquisire conoscenze sul sapere disciplinare degli insegnanti di matematica della scuola primaria: le ricerche sul contenuto pedagogico per l'insegnamento della matematica e le ricerche sulle convinzioni degli insegnanti rispetto alla matematica, al suo insegnamento e al suo apprendimento. Questi tipi di ricerche sono raramente combinati perche afferiscono a domini differenti e peraltro non chiaramente definiti in ricerca educativa (Graeber & Tirosh, 2008). Quello che però la ricerca ha acquisito è che c'è una relazione tra i due domini e che questi

interagiscano uno con l’altro (Mason, 2001, 2006, Philipp, 2007, Handal, 2003).

L’indagine sul sapere disciplinare si è rivolta al sapere degli insegnanti di matematica di scuola primaria ritenendo che, al giorno d’oggi, la matematica abbia un’importanza fondamentale nella formazione del cittadino (UMI, 2001; NRC, 2001). Inoltre le concezioni della matematica degli esperti sono tuttora, seppur variegate, alquanto distanti dal tipo di matematica che viene condotta nelle classi scolastiche (Schoenfeld, 1988; 1991; 1992). Crediamo che un punto di partenza per definire meglio le competenze dei docenti e il loro sapere specifico inerente alla disciplina sia comunque quello di conoscere la posizione di chi in matematica è esperto e può fornire una visione di tipo epistemologico del sapere in oggetto (Ernest, 1988; Speranza, 1996). Il problema di ricerca è stato delineato attorno alla domanda seguente: **la descrizione di quale sia la conoscenza del contenuto pedagogico dell’insegnamento della matematica degli insegnanti di matematica di scuola primaria e di come gli stessi insegnanti lo utilizzino alla luce delle personali convinzioni sulla disciplina e sul suo insegnamento.**

Per rispondere a questa domanda base sono state definite domande più di dettaglio a cui gli strumenti di indagine utilizzati potevano fornire delle risposte adeguate.

La ricerca ha coinvolto nove insegnanti di scuola primaria e una insegnante di scuola secondaria di I grado in servizio in tre diversi Istituti Comprensivi di tre diverse province delle regione Friuli Venezia Giulia. Le insegnanti hanno partecipato alla ricerca facendosi intervistare per due volte ciascuna su temi riguardanti il contenuto pedagogico dell’insegnamento della matematica e le loro convinzioni sulla matematica, il suo insegnamento e il suo apprendimento.

Inoltre le insegnanti hanno partecipato alla ricerca sulla base di un progetto di ricerca-formazione elaborato dallo scrivente che comprendeva anche la videoregistrazione di lezioni, che sono state effettuate ma non utilizzate nella presente ricerca di dottorato, e di seminari estesi a tutte le insegnanti di matematica degli istituti comprensivi che hanno aderito al progetto. Inoltre nel corso dell’indagine sono stati svolti degli incontri per discutere alcuni dei risultati della prima fase delle interviste. Ciò ha permesso alle insegnanti partecipanti di essere maggiormente consapevoli degli obiettivi della ricerca.

Le interviste sul contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica consistono in scenari di classe ipotetici validi per sondare il pensiero dei docenti rispetto al pensiero matematico degli studenti, attraverso la interpretazioni dei loro errori o delle difficoltà che incontrano quando sono chiamati ad affrontare argomenti di matematica presenti nel curricolo di scuola primaria (Markovitz & Even, 1999; Biza & al.2007). Il secondo gruppo di interviste sono state organizzate in modo semi-strutturato per far emergere la soggettività delle insegnanti rispetto alle loro convinzioni e atteggiamenti nei riguardi dell'insegnamento e apprendimento della matematica (Trinchero, 2002; Sorzio, 2005).

L'analisi delle interviste sul PCK è stata condotta utilizzando il concetto di PCK per come è definito nelle letteratura in particolare rispetto alla dimensione della interpretazione del pensiero degli studenti da parte degli insegnanti (Even & Tirosh, 1995; Peng & Luo, 2009). L'analisi delle interviste semi-strutturate ha seguito una procedura di codifica guidata dai temi che sono stati oggetto di indagine per giungere alla costruzione di categorie che fossero le più rappresentative delle convinzioni e atteggiamenti degli insegnanti (Soldana, 2009).

Inoltre uno scenario ipotetico sul PCK è stati appositamente ideato per sondare le convinzioni delle insegnanti rispetto alla matematica come disciplina (Markovits & Even, 1999b).

Gli scenari di situazioni didattiche ipotetiche sono degli strumenti che trovano un impiego oltre che nella ricerca sul pensiero degli insegnanti anche nella formazione dei docenti di matematica perché permettono di penetrare il pensiero dei docenti al cospetto di situazioni ideali ma plausibili che danno la possibilità di organizzare una riflessione sui temi proposti che l'attività concreta in classe non consente (Markovitz & Even, 1999; Biza & al.2007).

I risultati dell'indagine hanno evidenziato come le insegnanti tendenzialmente non approfondiscano il pensiero degli studenti attraverso un' analisi degli errori e ancora meno attraverso l'attuazione di specifici rimedi. Piuttosto tendono ad avvalersi di schemi rapidi di risoluzione dell’errore che hanno validità per classi molto ampie di errori. Uno schema molto utilizzato è l’esposizione all’evidenza dell’esempio concreto per agganciare la matematica all’esperienza reale dello studente ritenendo in questo modo che l’apprendimento sia facilitato. La facilitazione dell’apprendimento è una delle preoccupazioni delle insegnanti che ritengono fondamentalmente innata la propensione per la matematica. La capacità di apprendimento può migliorare principalmente per maturazione cognitiva degli alunni. Il fattore insegnante ha un influenza limitata solo per gli studenti con minori capacità. La matematica è percepita come fondamentalmente procedurale e l’aspetto concettuale non è sempre valorizzato nei suoi aspetti pedagogici. Le insegnanti esprimono ovviamente posizioni con sfumature diverse sui temi indagati; una costante è la presenza di tensioni nell’insegnante tra il tentare di cambiare il modo di insegnare la matematica e la preoccupazione che questo possa arrecare disinteresse o portare a carenze negli apprendimenti degli alunni. Alcune proposte di carattere formativo vengono formulate per risolvere in parte tali tensioni.

Abstract in inglese

The redefinition of the teacher's competences is an issue which has raised in the educational system in the last decades following socioeconomic changes imposed by the learning society (Hutchins, 1968; Husén, 1974; Argyris & Schön, 1998; Tomassini, 1993; Quaglino,1999). At the same time the educational research on the school system shifts its key interest on teachers due to issues relating the changes of the knowledge required by the contemporary society and the discontent towards the results of the previous approach to the educational research, considering the teaching as the direct cause of learning (Altet, 2008; Damiano, 2006; Groppo, 1975). The teacher factor, with his ideas and transformation of knowledge effecting his thought and action, has been left on the background for too long. Specifically the teacher's knowledge of the subject taught had almost not interested the research until the late 80s, when Shulman (1986. 1987) in his well known seminal papers considered the issue of the kind of subject-matter knowledge of teachers as the key issue in order to understand the pedagogy/learning processes. The new competences required from teachers by the contemporary society of knowledge cover also a more explicit and clear assumption of typical competences on the subject taught (Baldacci, 2010; Magnoler e Sorzio in corso di stampa). In order to obtain information on the subject-matter knowledge of the teachers of mathematics at the primary school, this investigation addressed two fields of research: the research relating the pedagogical content knowledge (PCK) of mathematics and the research relating the teacher's belief on the mathematics and on teaching and learning mathematics. Very seldom are combined this kinds of researches because they pertain to different fields and also are not clearly defined by the educational research (Graeber & Tirosh, 2008). The knowledge gained, however, is that there exist a relationship between the two fields and they interact between each other (Mason, 2001, 2006, Philipp, 2007, Handal, 2003).

The investigation on the subject-matter knowledge addressed on the knowledge of the teachers of mathematics in the primary school, based on

the fact that nowadays mathematics are a key subject for the education of citizens (UMI, 2001; NRC, 2001). Moreover the mathematics conception of the specialists is still distant, though variegated, from the kind of mathematics taught at school (Schoenfeld, 1988; 1991; 1992). We believe that a starting point to better define the teacher's competences and mathematical knowledge for teaching is to know the position of those specialist in mathematics who can provide an epistemological view of that kind of knowledge (Ernest, 1988; Speranza, 1996). The issue of the research was defined around the following question: **the description of which is the pedagogical content knowledge (PCK) of mathematics by the teachers of mathematics in the primary school e how they use it in view of their personal ideas on this subject and its teaching.**

In order to address this basic question, more detailed questions have been formulated to which the employed investigation tools could provide appropriate answers.

The research involved nine teachers of primary school and one teacher of secondary school, first grade, working in three different schools in different provinces in Friuli Venezia Giulia. The teachers have been interviewed twice on issues relating the PCK of mathematics and their beliefs on mathematics, its teaching and its learning.

Moreover the teachers took part in the research on the basis of a research project of education developed from the undersigned which included also the videorecording of lessons, held but not used in this doctoral research, and workshops addressed to all the teachers of mathematics of the schools which contributed to this project. Moreover, in the course of the investigation, meetings have been organized aiming at discussing some of the results of the first step of the interviews. Thanks to this the participant teachers could be more aware of the scope of the research.

The interviews on the PCK of mathematics were based on hypothetic scenarios of classroom useful for investigating the thought of the teachers on the mathematical thought of the students through the interpretation of their mistakes or difficulties when facing the mathematical issues of the primary school (Markovitz & Even, 1999; Biza & al.2007). The second set of interviews were organized semi-structurally in order to bring to light the subjectivity of the teachers in relation to their beliefs and attitudes on the teaching and learning of mathematics (Trinchero, 2002; Sorzio, 2005).

The analysis of the interviews on PCK was based on the PCK concept known in literature, particularly in relation to the area of interpretation of the student's thought by teachers (Even & Tirosh, 1995; Peng & Luo, 2009). The analysis of the semi-structured interviews was based on a coding process conducted by issues which have been the subject matter of investigation aiming at formulating categories best representing the beliefs and attitudes of the teachers(Soldana, 2009).

Moreover a hypothetic scenario on PCK has been expressly developed in order to investigate the beliefs of teachers on the mathematics as subject matter (Markovits & Even, 1999b)..

The scenarios of hypothetic teaching situations are tools used not only in the investigation on the thought of teachers but also in the education of the teachers of mathematics, because they help to get in the teacher's thought in relation to situations which are ideal but plausible and give the opportunity to organize a consideration on the proposed issues not possible during the practical activities in the classroom (Markovitz & Even, 1999; Biza & al.2007).

The results of the investigation pointed out that the teachers are not likely to go deep to the thought of the students through an analysis of their mistakes or specific corrective measures. Instead they tend to use rapid schemes of resolution of the mistakes which apply to broad class of mistakes. A very common scheme is the presentation of the practical example in order to link mathematics to the real life of the students, considering this an easier way to learn. To make the learning easier is one of the concerns of the teachers, who consider the inclination towards the mathematics essentially innate. The learning skills can improve mainly thanks to the cognitive maturity of the students. The teacher factor only affects less skilled students. The mathematics is perceived often as procedural and not always the conceptual aspect is appreciated in its pedagogical aspects. Evidently teachers express slightly different positions on the issues investigated; however a constant element for the teachers is the conflict between try to change the way to teach mathematics and the fear that this can bring to a lack of interest or learning deficiencies for the students. In order to partially solve said conflict, some proposals relating to education have been suggested.

Introduzione

Il valore formativo della matematica è riconosciuto a livello internazionale nella ricerca educativa, a livello di politiche educative e di esperti della disciplina: « Nel fare matematica non è utilizzata un'unica forma di pensiero (deduttivo) ma anche: modellizzazione, astrazione, ottimizzazione, logica, inferenze da dati e uso di simboli [...]. La matematica ci rende più efficaci nel capire meglio il mondo carico di informazioni in cui viviamo» (National Research Council, 1989 p.24). Inoltre l'OCSE, che ha inserito la matematica come una delle tre discipline da monitorare ogni tre anni nelle scuole di numerosi paesi del mondo, individua la competenza matematica come « la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione» (OCSE, 2003).

La concezione degli esperti della disciplina, seppur avvicinabile a quelle espresse dalle istituzioni educative internazionali e più prestigiose, è quasi sempre differente da quella posseduta e applicata dagli insegnanti nelle aule scolastiche (Schoenfeld, 1988, 1991, 1992; Putnam, 1992; Philipp, 2007; Forgasz & Leder, 2008). Secondo gli esperti la matematica è soluzione di problemi (Polya, 1954, 1961; Halmos 1980; Schoenfeld, 1992; Cellucci, 2006), scienza di modelli (Freudenthal, 1961; Steen, 1988; Hoffman,1989; Schoenfeld, 1992), disciplina quasi empirica dell'ordine (Lakatos, 1977, 1978), impresa sociale e collaborativa (Albers & Alexanderson, 1985; Steen 1988,). La ricerca sulle concezioni matematiche dei docenti, nell'intento di definirle con più precisione, ha seguito diversi approcci che stanno confluendo verso la definizione di una matematica specifica della professionalità dei docenti (Ball & al. 2008; Rowland et al. 2009; Hill & al. 2008; An & al. 2004). Tra le diverse prospettive di ricerca a cui si è guardato alle conoscenze matematiche degli insegnanti ricordiamo quelle basate sulla ricerca del tipo di contenuti matematici posseduti effettivamente dagli insegnanti (Tirosh, Graeber & Glover, 1986; Hiebert, 1987), gli studi orientati a delineare le concezioni o convinzioni degli insegnanti di matematica (Thompson, 1982, 1992; Cooney, 1985; Ernest, 1989), studi riferiti alle conoscenze esperte, di derivazione cognitivista (Leinhardt, 1988, 1991; Carpenter & Fennema, 1989; Schoenfeld, 2007) e studi riferiti al concetto di contenuto pedagogico dell'insegnamento (PCK) (Shulman, 1986, 1987; Askew et L. 1997; Ball, 1988a, 1988b, 1990a; Ball & al. 2008; Marks, 1990; Fennema & Franke, 1992; Wilson & al. 1987; An & al. 2004). E' su questo concetto che la ricerca di dottorato focalizza la sua attenzione. Il concetto è stato definito per primo da Shulman (1986) come « uno speciale amalgama di contenuti e pedagogia che è di peculiare proprietà degli insegnanti, la loro speciale forma di conoscenza professionale» (pag.8). In seguito numerosi studi sono stati condotti per definire meglio a partire dalle indicazioni di Shulman quale possa definirsi la peculiare conoscenza matematica (ma il concetto è applicabile a tutte le discipline) degli insegnanti che a questo punto entra a pieno titolo a far parte dell'insieme di competenze specifiche degli insegnanti di matematica. Le ultime ricerche nel settore si indirizzano verso la definizione di una vera e propria conoscenza professionale relativa alla disciplina, nel nostro caso la matematica, di pertinenza degli insegnanti (Ball & al. 2008; Rowland & al. 2009; Even & Tirosh, 1995).

L'idea e il problema che ha segnato la direzione della ricerca di dottorato riguarda la ricerca di una migliore definizione delle competenze degli insegnanti in relazione alle conoscenze disciplinari per l'insegnamento. Nel concetto di competenza esistono componenti non esclusivamente cognitive, ma che riguardano aspetti inerenti, la meta cognizione, le convinzioni, le attitudini e i contesti di esercizio o apprendimento (Baldacci, 2010; Magnoler e Sorzio in corso di stampa). Abbiamo scelto di indagare le conoscenze disciplinari secondo il costrutto di PCK unitamente alle convinzioni degli insegnanti sulla disciplina, il suo insegnamento e il suo apprendimento perché pensiamo che sia una direzione di ricerca promettente nell'ottica della definizione del sapere insegnante competente e perché è tuttora un settore di ricerca poco esplorato (Graeber & Tirosh, 2008).

Nel primo capitolo della tesi è stato presento un inquadramento generale sulle spinte di carattere politico e sociale che indirizzano la ricerca verso la definizione più precisa delle competenze disciplinari dei docenti e di come queste siano ritenute rilevanti in tutti i documenti internazionali.

Nel secondo capitolo si è dato un sintetico quadro delle definizioni di competenze secondo le prospettive della psicologia e delle scienze dell'educazione.

Nel terso capitolo abbiamo tracciato un breve excursus su come la ricerca educativa si sia sempre più interessata al fenomeno insegnamento adeguando nel tempo i propri paradigmi di ricerca a questo "nuovo" oggetto di studio considerato non più una costante nell'apprendimento (Altet, 2008; Damiano, 2006).

Nel quarto capitolo è stato descritto in dettaglio il modello di conoscenza professionale di Shulman e molti dei principali filoni di ricerca che ne sono seguiti. Inoltre sono state presentate le ricerche specifiche sull'interpretazione degli insegnanti sul pensiero matematico degli studenti. Questo è uno degli aspetti del concetto di contenuto pedagogico dell'insegnamento (PCK) su cui ci siamo specificamente soffermati nell'indagine.

Nel quinto capitolo sono state presentate le ricerche sulle convinzioni matematiche degli insegnanti sulla matematica e sul suo insegnamento/apprendimento.

Nel sesto capitolo sono state descritte le concezioni degli esperti sulla matematica es è stato affrontato il problema della differenza tra matematica scolastica e matematica dal punto di vista disciplinare. Inoltre sono stati analizzati i tentativi, per lo più falliti, di riforme dell'insegnamento della matematica e proposto alcuni fattori che determinano le difficoltà nel cambiamento.

Nel settimo capitolo è stato esposto lo scopo della ricerca e descritti la genesi del progetto, i partecipanti e la conduzione dell'indagine. E'stato presentato anche l'assunto epistemologico di tipo interpretativo.

Nell'ottavo capitolo sono stati presentati i metodi di indagine.

Nel nono capitolo sono stati analizzati e discussi i dati relativi al primo gruppo di interviste per i nove soggetti partecipanti analizzando tutti i 9 scenari ipotetici proposti singolarmente, per un totale di 81 scenari. Gli scenari sono focalizzati sulla ricerca del PCK dei docenti

Nel decimo capitolo è stata condotta una discussione complessiva su tutto il corpo delle prime 9 interviste.

Nel undicesimo capitolo sono stati presentati i risultati delle interviste ai nove insegnanti su uno scenario per sondare le convinzioni sulla matematica come disciplina.

Nel dodicesimo capitolo sono state analizzate le nove interviste semi-strutturate relative alle convinzioni e atteggiamenti degli insegnanti rispetto alla matematica al suo insegnamento e al suo apprendimento.

Nel tredicesimo capitolo sono stati discussi i risultati delle interviste semi-strutturate.

Infine nel quattordicesimo capitolo sono state formulate le conclusioni e le proposte di percorsi di formazione per insegnanti di scuola primaria in matematica tenendo conto delle risultanze della ricerca.

A conclusione di questa breve introduzione voglio ringraziare il prof. Paolo Sorzio, mio supervisore per la continua disponibilità dimostratami e per gli incoraggiamenti che mi ha dato anche nei momenti più difficili di questi anni di lavoro. Ringrazio inoltre la Scuola di Dottorato dell'Università di Padova tutta e in particolare la prof.ssa Semeraro per le opportunità fornitemi di formarmi sia in sede sia fuori sede. In particolare voglio ringraziare la Scuola per aver consentito la mia partecipazione alla Summer School dell'ERME (*European Society for Research in* Mathematics *Education*) a Palermo nel 2010 che ha dato un contributo fondamentale all'inquadramento teorico della ricerca. In particolare sono debitori di preziosi suggerimenti alla prof.ssa Barbara Jaworski tutor del mio working group. Inoltre devo ancora ringraziare la Scuola di dottorato per avermi dato un'altra opportunità, quella di usufruire di un soggiorno di studi a Cambridge ospite del prof. Tim Rowland con cui è in corso una collaborazione di ricerca che utilizza dati di video registrazioni di lezioni che ho effettuato durante gli anni di scuola di dottorato ma che non hanno fatto parte del presente studio. La collaborazione con il team del prof. Rowland si fonda sulla stesura di un manuale ad uso di ricerca del modello denominato Knowledge Quartet ideato all'interno del progetto SKIMA delle università di Cambridge, Londra e York per l'analisi delle pratiche di insegnamento della matematica focalizzate sulla gestione dei contenuti di insegnamento da parte dell'insegnante.

Inoltre ringrazio la dott.ssa Daniela Cellie per l'interesse prestato nel contattare le scuole che hanno partecipato alla ricerca e tutte le insegnanti che hanno dato gratuitamente la loro disponibilità.

Infine ringrazio sentitamente la mia famiglia, mia moglie i miei due bambini e i nonni che, soprattutto nell'ultima fase hanno dimostrato grande pazienza e senso di responsabilità nei miei confronti perché potesse concludersi questo studio. Un ultimo ringraziamento alla dott.ssa Margherita Corso per i suggerimenti nelle numerose traduzioni dall'inglese che sono state necessarie per lo svolgimento della tesi.

1 La necessità di ripensare il sapere disciplinare e la formazione degli insegnanti

I cambiamenti sociali ed economici dei paesi industrializzati avvenuti negli ultimi decenni hanno investito anche i sistemi scolastici e di conseguenza gli insegnanti. La scuola non è apparsa più in grado di soddisfare tutte le istanze relative al raggiungimento delle competenze dei suoi studenti e per questo i decisori politici hanno attuato una serie di interventi volti a modificare l'assetto dell'istituzione scolastica con l'intenzione da renderla più efficace nel soddisfacimento delle esigenze degli ambiti socioeconomici. Una delle componenti scolastiche che è stata maggiormente investita da questa serie di innovazioni è quella dei docenti.

A livello dei decisori politici, con riferimento all'Europa, il primo obiettivo strategico prefissato dalla cosiddetta *Strategia di Lisbona* è la qualità della scuola, intesa come motore per lo sviluppo di una società della conoscenza, che permette ai paesi industrializzati di allinearsi con le nuove esigenze del mondo globalizzato e post-industriale «per realizzare una crescita economica sostenibile con nuovi e migliori posti di lavoro e una maggiore coesione sociale» (Grion, 2008). La società entro cui la scuola esercita il suo servizio è definibile al giorno d'oggi come una *learning society* in cui il capitale umano è al centro dello sviluppo (Hutchins, 1968; Husén, 1974; Argyris & Schön, 1998; Tomassini, 1993; Quaglino,1999). I sistemi educativi e gli insegnanti risultano i soggetti più adeguati per fare in modo che gli individui raggiungano la consapevolezza personale, la capacità di autopromozione e autorealizzazione (Varisco, 2004). Per ottenere quindi una scuola di qualità il ruolo degli insegnanti risulta centrale in quanto le loro competenze vincolano l'ottenimento degli elevati standard necessari per i cambiamenti richiesti al sistema scuola (Imberciadori, 2007). All'interno di questo quadro di riferimento si sono mossi i decisori politici della Commissione Europea quando nel 1995 hanno stilato il *White Paper on Education and Training Teaching and Learning. Towards the Learning*

Society (1995) in cui lo sviluppo e la valorizzazione dell'autonomia dell'individuo erano evidenziati come caratteri che permettono una scelta consapevole, una flessibilità alle situazioni mutevoli e la fiducia in sé stessi. Nella lettura del documento il Parlamento Europeo rileva, per quanto riguarda la funzione degli insegnanti, il loro duplice ruolo di erogatori e fruitori della formazione, quest'ultima nell'ambito dello sviluppo professionale continuo (Grion, 2008), e aggiunge alle indicazioni del *White Paper* che per adeguare i sistemi di istruzione è necessaria una miscela più equilibrata tra conoscenza teorica e capacità pratica in tutti gli iter formativi (Waddington, 1997). Infatti nel rapporto del Consiglio di Istruzione del 2001 (Consiglio d'Europa, 2001), dove vengono fissati gli obiettivi dei sistemi di istruzione e di formazione, un posto in primo piano ottengono la formazione di insegnanti e formatori per il miglioramento della qualità dei sistemi educativi.

Nel 2007 la Commissione delle Comunità Europee ha elaborato un documento rivolto alla formazione degli insegnanti in cui si delinea come la professione docente si debba sviluppare anche attraverso: qualifiche specifiche che comportano la conoscenza approfondita della disciplina di insegnamento e una formazione pedagogica che sviluppi competenze per comprendere le dimensioni sociali e culturali dell'istruzione (Grion, 2008) e ciò in quanto una delle specificità degli insegnanti è quella di saper identificare le esigenze specifiche di ciascun discente e rispondere a queste esigenze con un'ampia gamma di strategie didattiche (OCSE, 2007).

A livello istituzionale si è sviluppato quindi il dibattito sul nuovo profilo dei docenti e quindi sulle competenze che questi dovrebbero possedere per rendere più efficace la loro azione di insegnamento nella *learning society*. Senza soffermarci qui ad elencare e commentare l'elenco completo delle competenze individuate come fondamentali per la professionalità insegnante da organismi istituzionali quali il CERI (Centre for Educational Research and Innovation), l'OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development) e l'OCSE, si sottolinea qui come, tra queste, siano sempre presenti: le competenze relative al sapere disciplinare e al know-how pedagogico:

«Nei profili degli insegnanti devono figurare le conoscenze approfondite della disciplina insegnata, i “saper fare” pedagogici, la capacità di lavorare efficacemente con allievi, la capacità di perseguire la propria formazione» (OCSE, 2005 p.11).

Rispetto alla specifica situazione italiana il dibattito istituzionale sulla professionalità docente e sulle competenze richieste non ha coinvolto più di tanto il livello politico (Grion, 2008), per cui gli insegnanti hanno intrapreso un percorso autonomo di riflessione e discussione sulla propria professionalità. In questo senso l’ADI (Associazione Docenti Italiani), associazione di docenti che si ispira al General Teaching Council anglosassone come organismo autonomo professionale, basandosi sulla formulazione del National Board of Professional Teaching Standard per quanto riguarda la ricerca di un modello di eccellenza professionale, ha individuato in esso alcune competenze relative a:

- una approfondita conoscenza delle discipline insegnate e al sapere insegnarle;
- una capacità di riflessione sistematica sulla pratica didattica in modo da essere in grado di imparare dall’esperienza;
- la capacità di monitorare e organizzare l’apprendimento degli studenti.

Con il *D. Lgs.17/10/2005, n.227* si fa richiamo esplicito al profilo professionale degli insegnanti per indirizzare la riformulazione dei curricoli universitari con i quali produrre una formazione più coerente e integrata con il profilo professionale richiesto per gli insegnanti in modo da superare i modelli «centrati sulle discipline accademiche, quasi sempre disconnesse dalle corrispondenti materie scolastiche e comunque con obiettivi e compiti differenti dall’insegnamento e dall’apprendimento a bambini e adolescenti nei contesti scolastici» (Galliani, 2005 p.15).

In conclusione, tra le numerose e articolate competenze che sono richieste agli insegnanti nella scuola odierna si impongono ancora quelle relative alle conoscenze disciplinari e pedagogiche, con una particolare centratura sulla gestione dell’apprendimento degli alunni, che sono viste come fondamentali per la professione docente e che evidentemente sono da ripensare per risultare più efficaci nella scuola che cambia.

2 La competenza come concetto per fondare il sapere sul processo di insegnamento/apprendimento delle discipline

Bisogna premettere che il termine competenza non ha ancora un significato ben definito; si tratta di un termine polisemico,dotato di una certa dose di ambiguità, che viene usato per indicare generalmente cose da imparare o da insegnare (Roletto e Ghirardi, 2005). Tale ambiguità è presente soprattutto nel linguaggio comune dove si tende a identificare il termine abilità con il termine competenza utilizzandoli come sinonimi quando «sembra invece che nella competenza sia inclusa una qualche forma di consapevolezza dei principi dell’arte pratica, che non è necessariamente implicata nella nozione di abilità» (Baldacci, 2010, p.5). Il termine nel dibattito scientifico, in contrapposizione alla prestazione intesa come comportamento, è stato introdotto nel campo della linguistica generativa da Chomsky come facoltà innata di utilizzare parole consone alla singolarità di ogni situazione (Roletto e Ghirardi, 2005; Baldacci, 2010). Tale accezione è certamente distante dagli interessi di chi si occupa di problematiche educative e formative che sono orientati alla natura contingente e trasversale delle competenze e ai problemi del loro insegnamento e apprendimento che non sono indipendenti dalla loro natura (Roletto e Ghirardi, 2005); ha però in sé la caratteristica peculiare della produttività. «Chi possiede la competenza è capace di produrre una molteplicità di prestazioni imprevedibili entro un certo campo di attività» (Baldacci, 2010, p.15), queste prestazioni sono collegate, in un’ ottica cognitivista, al possesso di conoscenze dichiarative e abilità (Bara, 1998), che unitamente alla consapevolezza della loro esecuzione e agli aspetti affettivi, quali atteggiamenti e motivazioni, (Cornoldi, 1995; De

Beni e Moè, 2000) sostanziano l'aspetto psicologico della struttura di una competenza.

2.1 Contributi dalla psicologia cognitiva e neovygotskijana alla competenza: l'expertise.

La psicologia cognitiva di derivazione neo-piagetiana ha contribuito alla definizione di competenza attraverso le ricerche sull'expertise focalizzandosi sulle prestazioni intelligenti avvalendosi della metodologia del problem solving, «ossia sottoponendo al soggetto un problema afferente all'ambito specifico di sua competenza» (Ajello, 2003 p.82), giungendo a concludere che il fattore principale che contraddistingue la prestazione dell'esperto, rispetto a quella del novizio, risiede nella diversa organizzazione delle conoscenze acquisite o da acquisire disponendole in forma gerarchica in base alla loro generalizzabilità (Ajello, 2003).

La soluzione dei problemi è determinata dal complesso rapporto tra: un sistema di elaborazione delle informazioni (strategie), l'ambiente del compito (specificità del problema) e lo spazio del problema (decodificazione e rappresentazione) (Job & Rumiati, 1984). Così le strutture cognitive e le funzioni percettive e analitiche del soggetto consentono di interpretare e comprendere il problema, ma un'influenza la giocano gli aspetti rilevanti che emergono dal contesto del compito (Ajello, 2003). Inoltre la comprensione del problema non coincide con la sua soluzione come evidenziato da Greeno (1978), ciò viene collegato alla distinzione tra conoscenza schematica e conoscenza strategica, quadro entro il quale «la competenza è caratterizzata più dalla specificità dei processi e strategie cognitive richiamate dal soggetto che dalla generalità delle abilità di elaborazione dei dati emergenti dal contesto» (Ajello, 2003 p.85).

Le ricerche sui differenti processi di soluzione a problemi ben strutturati messi in atto da novizi ed esperti, hanno messo in luce come nelle loro rappresentazioni i novizi fossero più legati a dati oggettivi ed espliciti, mentre negli esperti la rappresentazione si orientava ai principi sottostanti ai dati oggettivi esplicitati (Chi, et al. 1981; 1982; Glaser, 1985) ha confermato che:

«le rappresentazioni dei due tipi di soggetti si distinguono per il diverso tipo di organizzazione delle nozioni richiamate, alcune delle quali si pongono alla base della rappresentazione dell'esperto proprio perché si riferiscono ad una conoscenza procedurale che dà senso al tipo di problema in esame, collocandolo all'interno dei principi delle discipline» (Ajello, 2003 p.88).

Il contributo alla ricerca sulle competenze di orientamento neovygotskiano si distingue dal precedente neo-piagetiano per il rifiuto dell'idea che la mente sia nel cervello ma, al contrario, la mente è considerata come qualcosa di distribuito tra persone e artefatti (Resnick et al.1997). A differenza della prospettiva sulla competenza esposta in precedenza che ricollegando il concetto a quello di expertise ne mette in evidenza le caratteristiche "verticali" dei livelli di acquisizione (Chi et al. 1988; Collins, 1990), Engestrom e collaboratori (1995) propone di considerare la competenza in un prospettiva definita orizzontale che, non escludendo quella verticale, è altrettanto fondamentale in quanto permette di comprendere la competenza sia in termini di complessità che di acquisizione (Engstrom et al. 1995). La prospettiva si fonda sul fatto che nella realtà quotidiana ben difficilmente l'esperto opera su uno specifico compito, ma in diversi contesti e compiti parallelamente e per fare questo ciò che risulta rilevante sono le interazioni con gli altri e con gli artefatti con i quali vengono di volta in volta negoziate le soluzioni. Nel delineare la nuova concezione di competenza Engstrom individua due caratteristiche peculiari: la policontestualità e l'attraversamento dei confini.

Entrambi questi approcci alla competenza hanno come elemento comune la flessibilità che è interpretata come uso flessibile delle conoscenze in relazione al contesto di esercizio o come attraversamento di confini, una modalità cognitiva flessibile che è richiesta ai soggetti nel passare normalmente da un ambito all'altro cambiando regole, concetti e sistemi di riferimento (Ajello, 2003). Lo sviluppo delle competenze è implicato in un modo:

«dinamico e flessibile di acquisire conoscenze e abilità, ma anche nello sviluppo di concezioni che riguardano la natura e la crescita del sapere avanzate e produttive…Inoltre i soggetti competenti sono più consapevoli dei processi di mobilizzazione del sapere acquisito per costruire schemi anticipatori per nuove esperienze e revisione degli stessi schemi per valutare gli esiti di quelle esperienze» (Magnoler & Sorzio in corso di stampa).

Un altro elemento comune è la contestualizzazione delle conoscenze che «può rappresentare la dimensione operativa di tale flessibilità» (Ajello, 2003 p.104).

2.1.1 I contributi della psicologia cognitiva nelle ricerche sull'expertise degli insegnanti. Il caso della matematica

Leinhardt (1987) notò la carenza di studi che documentassero come fosse insegnata e appresa la matematica e iniziò uno studio di mappatura sulle relazioni tra la conoscenza dei docenti di matematica e l'istruzione, comparando le competenze tra novizi ed esperti nell'insegnamento di particolari gruppi di docenti con determinate classi di allievi.

L'ambiente di una classe scolastica è dinamico e complesso, e richiede il bilanciamento delle differenti esigenze di venti-trenta alunni con il procedere della programmazione disciplinare prevista dall'insegnante (Leinhardt 1989). Il compito principale di un insegnante è comunicare nuove informazioni, correggere i compiti, rielaborare il materiale per le lezioni in modo comprensibile agli alunni e valutare le conoscenze degli studenti. Tutto ciò è vincolato dal fatto di dovere mantenere gli studenti attivi, interessati e impegnati ad imparare così come dal particolare ambiente d'apprendimento, la disponibilità di tempo e di altre risorse. Sempre secondo l'autrice, (Leinhardt 1989; Leinhardt et al. 1991) due importanti nuclei di conoscenze, tra gli altri, per gli insegnanti riguardano la struttura della lezione e la conoscenza disciplinare. La conoscenza disciplinare sul numero, ad esempio, include concetti, algoritmi, connessioni tra differenti algoritmi e procedure, il sottoinsieme delle conoscenze sul sistema numerico, la comprensione degli errori comuni e non comuni dei propri alunni e la presentazione appropriata degli argomenti curricolari. La conoscenza riguardante la struttura della lezione comprende il saper condurre una lezione, le routine, il gestire le di interazione con gli studenti, il coordinamento di differenti segmenti di un argomento nel corso di un‘ unica lezione o di un insieme di lezioni in tempi diversi. La conoscenza disciplinare supporta la conoscenza di come si struttura una lezione determinandone i contenuti da esporre, la loro pianificazione prima della lezione e nel corso dell’attività d’insegnamento.

Questo quadro di nuclei di competenze dei docenti ha prodotto la descrizione di una lezione nei termini di agenda del docente o di complessiva pianificazione dinamica della lezione con i propri scopi e azioni: lo script o delineamento del contenuto da presentare che comporta dei sottobiettivi e azioni che si vengono a formare nel corso dell’azione di insegnamento; spiegazioni che includono ciò che i docente dice, fa o dimostra esplicitamente; e le rappresentazioni dei concetti matematici, procedure, o idee che possono essere di tipo fisico, verbale, concreto o numerico (Leinhardt et al. 1991). Incluse nell’agenda poi vi sono le principali attività della lezione come: controllo degli elaborati degli studenti, la presentazione di nuovi materiali anche di tipo didattico, ripassi degli argomenti già trattati, pratiche di insegnamento guidate, monitoraggio da parte del docente del lavoro autonomo degli studenti, esercitazioni per l’apprendimento di regole e algoritmi e attività di tutoring.

In termini di strutturazione ogni segmento di lezione ha il suo proprio sistema di obiettivi e sottobiettivi che influenza la selezione di particolari relazioni insegnante-allievi. Uno dei principali segmenti di azione docente è la presentazione dato che è in questa fase che il docente introduce i nuovi concetti , esemplifica i nuovi algoritmi, ripete o estende gli argomenti già trattati ed è disponibile per ulteriori spiegazioni. In questa fase l’azione del docente è maggiormente legata alle sue competenze di tipo disciplinare. Il sistema di obiettivi e azioni coinvolte nell’esposizione di un argomento è stata ideata da Stein, Baxter e Leinhardt (1990) ed è di solito utilizzata durante il segmento di presentazione della lezione. Ciò comporta l’identificazione degli obiettivi del docente, il monitoraggio dei segnali che indicano un progresso verso gli obiettivi predeterminati, ed esempi di casi che richiedono il loro uso.

Le mosse chiave di questa attività riguardano le dimostrazioni di tipo verbale, spesso accompagnate o seguite da dimostrazione a carattere aritmetico/numerico e concreto e comprendenti parallelamente l'utilizzo di varie modalità di rappresentazione. Infine si dovrebbe arrivare alla legittimazione del nuovo concetto o procedura nei termini di principi già noti e collegandolo ai concetti precedentemente acquisiti in modo da estendere la rete concettuale con i nuovi elementi aggiunti.

Leinhardt (1993) ha sottolineato l'importanza dell'introspezione per gli insegnanti rispetto al significato e alla natura dell'insegnamento identificando due fenomeni chiave nei seguenti:

1. l'insegnamento come processo che affronta dilemmi, come una rete in cui molteplici percorsi per ogni successivo passo sono sempre disponibili, e allo stesso tempo riconoscendo che ogni scelta comporta dei prezzi da pagare;
2. l'insegnamento come un compito nel quale l'insegnante arriva a comprendere il reale significato delle risposte di un alunno piuttosto che a stabilirne la semplice correttezza.

L'apprezzamento di questi fenomeni può permettere al docente un atteggiamento meno valutativo, nei termini di adeguatezza a obiettivi prefissati, rispetto alla classe, il sollevarsi da responsabilità nel senso di farne partecipi anche gli studenti e quindi l'essere capace di rendere il corso del'istruzione meno prevedibile sia per studenti sia per insegnanti (Ball, 1988; Lampert 1985).

2.2 Approccio della ricerca pedagogico educativa alle competenze nell'apprendimento/insegnamento

Vi sono varie definizioni di competenze in letteratura pedagogica che focalizzano i diversi aspetti del concetto che i vari autori intendono evidenziare. Le caratteristiche che possono ritrovarsi in queste definizioni possono essere in parte riassunte nelle seguenti:

- una competenza comprende più conoscenze messe in relazione;
- una competenza è applicabile a una famiglia di situazioni;
- una competenza è orientata all'ottenimento di uno scopo (Roletto e Ghirardi, 2005).

Inoltre per il punto di vista che intendiamo assumere nella ricerca adottiamo le seguenti definizioni di competenza in relazione all'apprendimento scolastico:

«ciò che un soggetto sa fare in una situazione complessa, sulla base di un sapere, per raggiungere un obiettivo atteso e condiviso; quindi è la disposizione mentale a scegliere, utilizzare e applicare la conoscenze idonee in un contesto determinato per impostare e risolvere un problema per il quale non si hanno procedure di soluzione predefinite» (D'Alfonso, 1999 p.142)

e inoltre le competenze:

«si configurano altresì come strutture mentali capaci di trasferire la loro valenza in diversi campi, generando così dinamicamente anche una spirale di altre conoscenze e competenze. Una specifica competenza disciplinare comporta infatti anche l'acquisizione di una forma mentis utilizzabile nelle più diverse situazioni. In quanto tali, le competenze favoriscono la connessione in termini dialetticamente calibrati della propria duplice dimensione» (Bertonelli & Rodano, 2000 p.238).

In questi termini la competenza, sostiene Sorzio (in stampa), «è un'idea che mette al centro del processo di insegnamento/apprendimento le strutture concettuali degli allievi».

Come indicato da Roletto e Ghirardi allora:

«per organizzare un insegnamento efficace ciò che conta non è tanto assicurarsi delle acquisizioni nozionistiche o metodologiche disciplinari già presenti, i cosiddetti prerequisiti, quanto piuttosto l'esistenza e il livello di consapevolezza (e quindi di controllo) delle "competenze metodologiche" che hanno permesso l'acquisizione significativa delle conoscenze, concettuali e procedurali, che l'allievo già possiede e che gli permetteranno di costruirne altre» (Roletto & Ghirardi, 2005 p.63).

Tra le numerose proposte relative al tipo di definizione delle competenze per gli insegnanti si delineano due prospettive: la prima maggiormente ancorata a un modello più statico, classificatorio, di derivazione tecnico-razionalista che ha il suo punto di forza nella standardizzazione e codificazione delle componenti dell'ambito scolastico quali: l'insegnante, la classe, i contenuti e la visione dell'insegnamento/apprendimento (Perrenoud, 2002) e la seconda legata invece maggiormente a una epistemologia socio-costruttivista e situazionista (Varisco, 2004) che tende a cogliere le dinamiche e il flusso delle interazioni in cui è situato il docente e che ne orientano le possibili evoluzioni professionali.

Nella proposta di Perrenoud (2002), che si riferisce alle dieci competenze individuate per la formazione continua a Ginevra nel 1996, la prima competenza indicata è il sapere «organizzare e animare situazioni di apprendimento», in cui vengono mobilizzate competenze più specifiche come:

- conoscere, per una data disciplina, i contenuti da insegnare e la loro traduzione in obiettivi di apprendimento;
- lavorare a partire dalle rappresentazioni degli alunni;
- lavorare a partire dagli errori e ostacoli all'apprendimento;
- costruire e pianificare dispositivi e sequenze didattiche;
- impegnare gli alunni in attività di ricerca, in progetti di conoscenza.

A tale scopo viene richiesto all'insegnante di padroneggiare il suo sapere e «che abbia più di una lezione di vantaggio sugli alunni e sia capace di ritrovare l'essenziale sotto molteplici apparenze, in contesti diversi» (Perrenoud, 2002 p.27). In altre parole l'insegnante deve possedere una padronanza personale di concetti, questioni e paradigmi che strutturano il sapere di una disciplina (Develay, 1992) per estrarre le nozioni fondamentali, le nozioni-nocciolo (Meirieu, 1990), sulle quali organizzare gli apprendimenti e fissare le diverse priorità.

Nella seconda prospettiva le competenze dipendono da comprensioni e consapevolezze ancorate alle stesse pratiche emergenti in un determinato contesto, per cui l'interpretazione delle pratiche influenza le modalità e l'organizzazione delle specifiche conoscenze e abilità all'interno di specifiche competenze messe in atto (Grion, 2008) e non è quindi di ausilio per la formazione e la ricerca tentare di definire le competenze dei docenti in modo troppo specifico e determinato come nella prospettiva precedente.

3 La ricerca sull'insegnamento e i fattori che influenzano le concezioni dell'insegnante sull'insegnamento

Il paradigma a cui la ricerca didattica ha fatto quasi esclusivamente riferimento per lungo tempo è stato quello della razionalità tecnica (Damiano, 2006). La ricerca sull'apprendimento determinava l'azione d'insegnamento da sviluppare in aula da parte degli insegnanti. Uno degli approcci che si sono riferiti a questa impostazione è definito come *process-product* (Damiano, 2006) il cui obiettivo è quello di determinare gli aspetti dell'insegnamento che consentono di prevedere il miglior effetto, cioè «di valutare la funzionalità dell'insegnamento studiando le relazioni tra la misura dei comportamenti degli insegnanti in classe (processi) e la misura degli apprendimenti degli alunni (prodotti)» (Damiano, 2006 p.48; Begle, 1979). La pedagogia per obiettivi rappresenta l'applicazione di questo modello come pianificazione razionale per ottenere dei cambiamenti nei soggetti in apprendimento. In questa prospettiva l'insegnante tiene sotto osservazione il lavoro d'aula e misura, attraverso apposite tassonomie, l'effetto ottenuto presso l'alunno e su questi dati può «apprezzare la portata degli interventi posti in opera e decidere come perfezionarli» (Damiano, 2006 p.48).

Le ricerche empiriche sulla relazione tra sapere disciplinare e risultati dell' apprendimento degli studenti che erano state condotte nei decenni precedenti gli anni '80 del secolo scorso identificavano, come insegnamento efficace quello che dava risultati di apprendimento misurabili in modo apprezzabile negli studenti ma, contrariamente alle attese, non furono in grado di evidenziare alcune relazione significativa tra le caratteristiche dell'insegnamento e i risultati raggiunti dagli studenti (Ball, 1988a). Il fatto che una più ampia conoscenza disciplinare fosse indicatore di migliori performance degli studenti era di fatto più una convinzione che un'evidenza supportata dai dati empirici (Begle, 1979). In realtà ciò che in seguito fu posto in questione fu proprio il tipo di dati su cui queste prime ricerche empiriche si basavano ovvero: il numero di corsi seguiti dai docenti, i risultati conseguiti dai docenti agli esami, gli anni di insegnamento etc.. (Ball, 1988a) che non erano da ritenere dei buoni proxy per ciò che si intendeva ricercare. Successivamente le ricerche, ritenendo di maggiore importanza ciò che l'insegnante fa in classe piuttosto di quello che sa (Medley 1979), considerarono più da vicino il comportamento degli insegnanti in classe, la loro capacità di condurre la lezione, di gestire gli interventi e prendere decisioni ma in questo modo la conoscenza disciplinare usciva dal focus dell'indagine. Gli apprendimenti in questi tipo di ricerche venivano visti come pura applicazione degli argomenti presenti nei curricoli ed erano conseguenti a una rigida applicazione di regole, a lezioni frontali, a test a risposta rapida (Ball 1988a) dimostrando come per i risultati della ricerca fosse critica l'assunzione sulla disciplina e gli scopi del suo insegnamento e del suo apprendimento.

I parziali insuccessi dell'applicazione più ortodossa del modello *process-product* (Groppo, 1975), dovuti in parte alla limitatezza dello sguardo della ricerca ai soli comportamenti osservabili dell'insegnamento, favorirono già a partire dagli anni sessanta, attraverso vari periodi, una ricerca sull'insegnamento che ha avuto come oggetto di studio: le resistenze degli insegnanti al cambiamento (Miles, 1964), i limiti stessi della teoria educativa nel comprendere le caratteristiche rilevanti dell'insegnamento (Bolster, 1983), i costrutti personali (Candy, 1986), la conoscenza implicita (Polanyi, 1962), l'analisi dell'insegnamento in classe (Rosenshine e Furst, 1971; Gauthier, 1997) fino ad approdare a individuare il «fattore insegnante» (Shulman, 1987;

Damiano, 2006) come elemento chiave per una più fruttuosa comprensione di quelle che sono le ragioni dei risultati dell'azione di insegnamento, anche in termini di apprendimento degli studenti.

La ricerca comprese meglio la complessità della situazione didattica in cui l'insegnante si trova ad agire e le diverse esigenze dei singoli studenti a cui deve far fronte, il focus delle ricerche si è così spostato dal comportamento degli insegnanti all'esame del pensiero, delle decisioni e delle azioni degli insegnanti anche rispetto a tutto ciò che è in relazione ai contenuti di insegnamento per cui è risultato un approccio semplicistico quello di individuare un'unica strategia efficace per l'insegnamento (Clark & Yinger, 1979; Peterson, 1979). Ne è risultato che, per quanto riguarda ad esempio la matematica, le modalità di comprensione della disciplina da parte degli insegnanti e le loro credenze su di essa influenzano le opportunità di apprendimento degli allievi (Ferrini-Mundi, 1986; Thompson, 1984). Si impone l'idea, fondata su basi empiriche e, come vedremo filosofiche (Buchmann, 1984), oltre che su considerazioni di senso comune, che un certo modo di comprendere la disciplina e nello specifico la matematica da parte degli insegnanti, influenza l'efficacia della loro azione didattica.

Le competenze dei docenti per l'insegnamento sono state identificate come costruite attorno ad un nucleo di conoscenze specifiche e complesse, di carattere cognitivo e ideativo (Shulman, 1987), «che si strutturano intorno alle polarità del soggetto in apprendimento, delle materie d'insegnamento e delle regole costitutive della scuola come istituzione» (Damiano, 2006 p.28-29), portando a un modello ecologico dell'insegnamento (Doyle, 1986) entro il quale agiscono anche i pensieri dell'insegnante sull'insegnamento. Queste polarità agiscono a loro volta sull'insegnante che attribuisce significato alla propria azione didattica e ai propri saperi reinterpretandole. Ad esempio gli alunni non sono solo i destinatari dell'insegnamento ma soggetti relativamente indipendenti dell'apprendimento che possono influenzare a loro volta l'insegnamento adattandolo ai propri tempi e peculiarità (Porter e Brophy, 1988). Le regole dell'istituzione scolastica nel quadro di relazioni specifiche e distintive modificano il sapere disciplinare in sapere di tipo normativo per cui: anche quando lo si voglia presentare come aperto, provvisorio, i requisiti del contesto scolastico lo rendono vincolato ad altri riferimenti valoriali quali le finalità assegnate alle stesse istituzioni scolastiche (Damiano, 2006). Si vuole sottolineare in questa sede l'interrelazione di queste polarità sul sapere disciplinare degli insegnanti che si trova all'incrocio di questi fattori che ne caratterizzano la peculiarità e la possibilità di innovazione.

4 L'analisi concettuale ed empirica della conoscenza pedagogico disciplinare degli insegnanti

Le conoscenze disciplinari per l'insegnamento come parte del bagaglio delle numerose competenze dei docenti sono state oggetto di un'analisi concettuale di tipo filosofico che si è sviluppata per lungo tempo, anche se con fasi di interessamento alterne, lungo tutto il ventesimo secolo. Già Dewey (1961) argomentò come la conoscenza nell'insegnamento delle discipline conferiva una comprensione sul funzionamento della mente. Per Dewey la conoscenza disciplinare consisteva in conoscenza di fatti e dei metodi di indagine e in conoscenza dei processi di apprendimento propri della disciplina stessa, per cui poteva fornire anche la conoscenza dei metodi di insegnamento. Inoltre era una risorsa che andava esplorata in forma sistematica dato che molti docenti sono ottimi insegnanti senza studiare pedagogia. La posizione assunta da Dewey si fondava sulla distinzione inerente alla sua filosofia, tra apprendimento e conoscenza. L'intelletto è guidato da problemi che si originano nell'esperienza concreta. Questi problemi provocano indagini e azioni come risultati delle indagini che forniscono le basi per la loro soluzione. Quindi gli insegnanti che utilizzano questa modalità scientifica di pensare sono capaci di condurre indagini e di insegnare ai loro studenti come condurle in quel determinato campo disciplinare. L'insegnamento che stimola le personali pratiche di ricerca degli studenti trasforma l'insegnamento in scienza basata sulla profonda conoscenza della disciplina che quindi incorpora la conoscenza dei processi educativi.

Per il filosofo dell'educazione Wilson il significato o la logica dei concetti utilizzati forniscono una guida all'insegnamento. Lo studioso ha cercato di definire le caratteristiche richieste logicamente a un insegnante e, secondo la sua analisi (Wilson, 1975), è emerso che l'insegnante deve possedere: una conoscenza disciplinare in una modalità tale che faciliti l'apprendimento agli studenti, la conoscenza di principi e di fatti e inoltre «una chiara comprensione di ciò che porta a progredire nella disciplina, il tipo di ragionamenti richiesto, la sua struttura logica, il suo sviluppo storico (scientifico, matematico etc.)» (Wilson , 1975 p.111). In secondo luogo insegnare vuol dire tenere conto seriamente di come portare a condividere la conoscenza e infine richiede un addizionale conoscenza di tipo interpersonale sempre indirizzata allo scopo di condurre gli altri all'apprendimento. In comune con Dewey quindi, Wilson credeva che la preparazione degli insegnanti comprendesse una chiara e sicura conoscenza disciplinare e un sincero interesse per la disciplina accomunati da un'attenzione per i concetti e dalla consapevolezza dell'importanza e dell'impegno richiesto dalla professione. In altre parole l'acquisizione di queste caratteristiche era una questione di conoscenze da parte del docente e dunque di educazione. Seguendo una prospettiva di ricerca che utilizza insieme ragionamento di carattere filosofico e analisi empirica Gage (1978; 1985), in contrasto con Dewey e Wilson, ritiene che il punto debole della preparazione degli insegnanti risieda nella loro carente conoscenza della pedagogia. Secondo l'autore gli insegnanti di qualunque ordine e grado conoscono la loro disciplina molto di più di quanto gli serva per la loro attività scolastica d'insegnamento. Il problema quindi risiederebbe nella scarsa competenza dei metodi di insegnamento che è fondamentale per strutturare i propri corsi durante l'anno scolastico, pianificare le lezioni e interagire in maniera appropriata con gli alunni. Le difficoltà fin a quel momento incontrate nel formare insegnanti con adeguate conoscenze metodologiche sarebbero dovute a una non appropriata ricerca di base. L'insegnamento non è però una applicazione di regole e tecniche prefissate ma richiede abilità che si apprendono attraverso una conoscenza su base empirica, che includono flessibilità, capacità di giudizio e intuizione. Per Gage i risultati della ricerca costituiscono un costruttivo punto di partenza piuttosto che delle prescrizioni per la pratica. Il punto controverso sta nell'assunzione che la ricerca di base automaticamente possa predisporre apprendimenti validi per gli studenti, inoltre è presente l'assunzione che una volta adeguatamente applicate le abilità di insegnamento l'apprendimento sarà efficace e quindi l'insegnamento sarà necessariamente efficace, *un buon insegnamento* (Aubrey, 1997; Damiano, 2006).

Buchmann (1982; 1984) sposta nuovamente l'attenzione dalle tecniche e metodologie di insegnamento all'importanza delle conoscenze disciplinari. Oltre ad argomenti che emergono dallo sviluppo di ragionamenti basati sull'analisi concettuale dell'insegnamento, la ricerca empirica supporta questa posizione sottolineando l'importanza di conoscere come gli studenti sviluppano la propria conoscenza disciplinare e come affrontare in forma appropriata misconcezioni ed errori degli studenti. Questi fatti però presuppongono competenze che vanno oltre la conoscenza disciplinare. Inoltre Buchmann pone il problema dell'inadeguatezza, secondo la propria prospettiva, dei corsi di formazione per gli insegnanti. Gli insegnanti hanno bisogno di conoscenza flessibile della loro disciplina che comprenda conoscenza del suo sviluppo storico, dell'organizzazione dei concetti e dei metodi di indagine. Purtroppo l'analisi della studiosa non indica con sufficiente precisione la natura e l'estensione della conoscenza disciplinare richiesta per l'insegnamento (Aubrey, 1997). Buchmann fa notare inoltre che, nel momento in cui l'insegnante si focalizza sui problemi di gestione della classe ciò può risultare da carenze nelle proprie conoscenze disciplinari e dall'interpretazione di risposte inattese da parte degli studenti sia come sfide per l'insegnante sia come opportunità per l'apprendimento. Risultati dello stesso tenore sono stati raggiunti da Doyle (1986) che ha messo in evidenza come il maggiore impegno degli studenti sui contenuti disciplinari comporta una riduzione di problemi di gestione della classe da parte del docente. Di fatto le correnti di pensiero che affidavano un primato alla conoscenza disciplinare dei docenti formulavano assunzioni a priori sul tipo di apprendimento auspicabile nei discenti che doveva essere del tipo di quello posseduto dagli esperti della disciplina e che quindi diventava il principale obiettivo educativo. Le risultanze empiriche su questo tipo di associazione restavano comunque limitate (Floden & Buchmann, 1990).

L'analisi concettuale del sapere degli insegnanti evidenzia come il sapere disciplinare e pedagogico siano due domini fondanti del sapere degli insegnanti e tende a dare maggior risalto ora a l'uno ora a l'altro per lo svolgimento di un'azione didattica efficace. I due domini nelle analisi fin ad ora riportate rimangono complessivamente separati pur cercando di definire un sapere che si esprime in un'attività di insegnamento in cui quello che emerge è l'interazione fra le diverse conoscenze dell'insegnante nello svolgimento della sua pratica didattica.

4.1 Il modello di Shulman sulle conoscenze dei docenti

Un tratto cruciale di un valido modello della conoscenza insegnante è l'estensione con la quale identifica quella conoscenza necessaria per l'apprendimento e la comprensione della disciplina da parte degli studenti (Greaber & Tirosh, 2008). Per questo il modello di Shulman è stato il punto di partenza di numerose ricerche sul campo, soprattutto nel mondo anglosassone, e anche uno stimolo per revisioni e critiche del sapere sulla conoscenza dei docenti collegata alle discipline. Gli studi precedenti sulle conoscenze disciplinari dei docenti evidenziano la necessità di una migliore articolazione e analisi delle componenti del sapere tipico dei docenti. Con un articolo fondamentale Shulman (1986) ha fornito un'esposizione analitica e approfondita del dominio delle conoscenze disciplinari dei docenti e di altri aspetti ad esse correlati.

Il lavoro di Shulman è stato un nuovo punto di partenza per le ricerche empiriche sui docenti in cui a differenza delle precedenti la disciplina insegnata non era più una componente del contesto entro cui si sviluppava la ricerca ma il suo focus. Infatti sebbene i precedenti studi fossero condotti in classi in cui erano insegnati matematica, lettura o altre materie, l'attenzione per la disciplina e per il ruolo che giocava nell'insegnamento o nel pensiero dei docenti non era considerato (Aubrey, 1997). Shulman indicò questa scarsa attenzione per il ruolo delle disciplina come *the missing paradigm* (il paradigma mancante) (Shulman, 1986).

Un altro aspetto innovativo sottolineato da Shulman fu l'idea che il sapere disciplinare dei docenti fosse una speciale conoscenza tecnica chiave per la professione insegnante. Nel suo progetto *Knowledge growth in teaching* il gruppo di ricerca da lui condotto esaminò un gruppo di studenti in formazione di varie discipline cercando di cogliere quanto, delle conoscenze disciplinari possedute, fosse riformulato e riutilizzato in conoscenza necessaria all'insegnamento. Una finalità ulteriore di questi studi riguardava lo sviluppo di un sistema di certificazione professionale che si basasse sulle capacità dei docenti di riflettere sul proprio insegnamento e sull'insegnamento di specifiche materie in modo tale contribuire allo sviluppo delle conoscenze sulla professionalità docente (Shulman, 1987).

Shulman nella sua analisi criticava la superficialità e l'incompletezza della definizione di insegnamento che non fornivano certo aiuto a una seria formulazione delle conoscenze di base per l'insegnamento (Shulman, 1987). La caratterizzazione della conoscenza professionale secondo Shulman e i suoi collaboratori si divideva nelle seguenti tipologie:

1. *Conoscenze pedagogiche generali, con specifico riferimento ai principi generali e strategie di gestione e organizzazione della classe che non dipendono dalla specifica disciplina insegnata.*
2. *Conoscenza degli studenti e delle loro caratteristiche.*
3. *Conoscenza dei contesti educativi che riguarda: il lavoro in classe, la conoscenza dell'organizzazione e reperimento dei finanziamenti dei distretti scolastici, il carattere delle comunità e culture che fanno riferimento alla scuola.*
4. *Conoscenza dei fini, scopi e valori dell'educazione e delle loro giustificazioni storico-filosofiche.*

5. *Conoscenza della disciplina insegnata (Subject Matter Knowledge SMK)*.

6. *Conoscenza del curricolo*, **con particolare attenzione ai materiali e programmi che servono come "ferri del mestiere" per i docenti.**

7. *Conoscenza del contenuto pedagogico dell'insegnamento della disciplina* **(Pedagogical Content Knwledge, PCK), uno speciale amalgama di contenuti e pedagogia che è di peculiare proprietà degli insegnanti, la loro speciale forma di conoscenza professionale.**

(Shulman, 1987)

Di queste categorie le prime quattro riguardano dimensioni generali della conoscenza dell'insegnante, mentre le ultime tre sono dimensioni di conoscenze collegate al sapere disciplinare specifico del docente, ed è proprio a queste che fa riferimento con l'espressione *paradigma mancante*. Nel programma di Shulman particolare rilievo è dato alle ultime tre anche se le prime quattro restano come punti fermi della conoscenza docente tali proprio da supportare le conoscenze legate alla disciplina, infatti «la semplice conoscenza disciplinare è probabile che sia inutile dal punto di vista pedagogico come lo sono le abilità prive di contenuto specifico» (Shulman, 1986 p.8).

Analizzando le tre categorie relative alle dimensioni del sapere disciplinare docente, la prima si riferisce alla conoscenza della materia e alle sue strutture organizzative (Grossman, Wilson, Shulman, 1989; Shulman, 1986, 1987; Wilson, Shulman, Rickert, 1987) infatti: «pensare correttamente riguardo ai contenuti richiede di andare oltre la mera conoscenza di fatti o concetti. Richiede la comprensione delle strutture della disciplina al modo di studiosi come ad esempio Joseph Schwab» (Shulman, 1986 p.9). Nella disamina di Schwab (1978) la struttura di una disciplina include sia le strutture fattuali sia quelle sintattiche. Le prime riguardano la varietà di modi nei quali i concetti base e i principi sono organizzati per incorporare le conoscenze fattuali, mentre la struttura sintattica riguarda i modi nei quali la verità o validità vengono stabiliti o meno. In questa visione la conoscenze delle disciplina per un insegnante comprende anche il sapere come sono organizzati principi e strutture e le regole per stabilire cosa è legittimo fare e dire nel campo disciplinare in oggetto. Sempre Shulman (1986, pag.13) suggerisce che:

«l'insegnante bisogna che sappia non solo che una tale cosa è così com'è; l'insegnante deve inoltre comprenderne il perché su quali presupposti la sua giustificazione può essere formulata e sotto quali circostanze le nostre credenze in tale giustificazione può essere indebolita o negata. Inoltre si può richiedere che l'insegnante comprenda perché un particolare argomento è di importanza rilevante per la disciplina mentre un altro può essere in qualche modo periferico».

La seconda categoria, *la conoscenza del curricolo* è "rappresentata dall'ampia gamma di programmai preposti per l'insegnamento di particolari materie e argomenti ad un dato livello, dalla varietà dei materiali didattici disponibili in relazione a tali programmi e dall'insieme di caratteristiche che servono sia come indicazioni sia come controindicazioni per l'utilizzo di un particolare curriculum o programma in determinate circostanze" (Shulman ,1986 pag.14).

Inoltre questa categoria viene suddivisa in conoscenza curricolare laterale e conoscenza curricolare verticale. La prima è relativa alle conoscenze curricolari disciplinari collegate ai curricoli insegnati in altre materie, mentre la verticale include «familiarità con argomenti e questioni che sono state insegnate o lo saranno nella medesima disciplina durante gli anni precedenti e successivi, nonché con la strumentazione didattica che ne dà forma concreta» (Shulman, 1986, p.14).

L'ultima categoria delle tre collegate ai contenuti disciplinari è il nuovo concetto di *pedagogical content knowledge* che può essere tradotto come *conoscenza del contenuto pedagogico della disciplina (PCK)* (Damiano, 2006) e che Shulman (1986, p.15) definisce così:

«la più utile forma di rappresentazione delle idee, le migliori analogie, esempi, spiegazioni e dimostrazioni, in una parola le più efficaci vie di rappresentazione e riformulazione delle disciplina che la rendono comprensibile agli altri».

La competenza pedagogica nell'insegnamento disciplinare include anche una comprensione di ciò che rende l'apprendimento di specifici argomenti facile o difficile: le concezioni e preconcezioni che studenti di età e prerequisiti differenti possiedono e che quindi condizionano l'apprendimento degli argomenti più frequentemente insegnati a scuola. L'idea del PCK è fondata sulle osservazioni di studi (Carlsen, 1988; Grossman,1990; Marks,1990; Shulman, 1986; Wilson et al., 1987; Wilson, 1988) in cui insegnanti efficaci rappresentano idee chiave con l'utilizzo di metafore, diagrammi e spiegazioni che sono allo stesso tempo sintonizzate sull'apprendimento degli studenti e sull'integrità della disciplina.

Le rappresentazioni, in questi casi, si riferiscono ai diversi modi in cui può essere organizzato un contenuto o essere formulato durante una lezione in classe per essere presentato agli studenti. A differenza delle conoscenze disciplinari in senso stretto, la conoscenza delle rappresentazioni è un aspetto della conoscenza disciplinare in modalità fruibili per la sua presentazione agli studenti (Grossman, 1989; Grossman, 1991; Wilson et al. 1987).

Un importante aspetto del modello è relativo alle rappresentazioni dei docenti che devono essere conformi alle concezioni della disciplina possedute dagli studenti. Una focalizzazione sugli studenti e un interesse per le loro misconcezioni, porta al riconoscimento che la comprensione da parte del docente di come uno studente si rappresenta le conoscenza è una competenza chiave dell'insegnamento. Grossman (1990 p.29) indica che queste idee «sono inerenti all'ammonimento di Dewey che gli insegnanti devono imparare a psicologizzare la loro disciplina per ripensare gli argomenti di insegnamento per renderli accessibili ai loro studenti». Come concetto la conoscenza del contenuto pedagogico della disciplina (PCK), con il suo focus sulle rappresentazioni e concezioni/misconcezioni, allarga l'idea di come la conoscenza si adatti all'insegnamento, suggerendo che non è solo conoscenza di contenuti, da una parte, e conoscenza pedagogica generale, dall'altra, ma un' amalgama di conoscenza di contenuti e pedagogia che è centrale per la conoscenza necessaria all'insegnamento. Questo amalgama è in sintonia con il senso comune che la conoscenza disciplinare pratica del docente non è articolabile in distinte categorie disciplinari ma richiede una comprensione dell'interazione che avviene ai confini tra conoscenze teoriche dei diversi domini di sapere e nelle relazioni che avvengono nel loro utilizzo (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Il gruppo di ricerca di Shulman sottopose le categorie sopraesposte a numerose revisioni successive evidenziando come più che un framework stabilito il valore del modello sia di tipo euristico, uno strumento di supporto per identificare distinzioni nelle conoscenze dei docenti che possono valere per un insegnamento efficace (Aubrey, 1997). In questo modo viene sottolineato l'aspetto dell'insegnamento che è più peculiare, quello legato alla gestione dei contenuti nei confronti dell'apprendimento.

4.2 Ricerche sulla conoscenza disciplinare degli insegnanti (SMK) e conoscenza del contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica (PCK): risultati positivi e aspetti critici.

Il lavoro di Deborah Ball sulla conoscenza matematica degli insegnanti in formazione è stato di grande influenza negli U.S.A. e in altri paesi. Ball riprende distingue tra conoscenza della matematica (significati e sottostanti procedure) e conoscenza sulla matematica (ciò che rende qualcosa vero o plausibile in matematica). Nella sua attività di ricerca e nei suoi studi sulla comprensione del significato della divisione per docenti di scuola primaria e secondaria in formazione (Ball, 1990a) la studiosa ha messo in evidenza come questi avessero difficoltà con il significato della divisione tra frazioni. La maggior parte era in grado di svolgere i calcoli ma le loro spiegazioni erano vincolate alla ripetizione di regole con una preminenza della memorizzazione sull'apprendimento concettuale. Gli insegnanti in formazione credevano che la matematica potesse essere significativa ma mancavano della conoscenza relativa ai significati matematici. La conclusione era che oltre a rivedere i programmi di formazione dei docenti, questi dovessero come «disimparare» quello che sapevano e credevano sull’insegnamento e l’apprendimento della matematica.

In Inghilterra Prestage e Perks (1999) mettono in questione l’assunzione che gli insegnanti abbiano pieno accesso alla conoscenza disciplinare. Le ricercatrici argomentano che sia per insegnanti esperti sia novizi la conoscenza resta simile a quella posseduta da un discente e non si trasforma in conoscenza propria di un docente (Rowland & al. 2000). La capacità di trasformare la personale conoscenza dipende da ciò che il docente porta con sé in classe come conoscenza. Molti insegnanti esperti usano la loro esperienza matematica come studenti come fondamento per prendere le decisioni. Ci sono poche evidenze che suggeriscono che la conoscenza disciplinare degli insegnanti progredisca come conseguenza dell’insegnamento (McNamara et al.2002). Anche i risultati delle ricerche di Aubrey (1997) vanno nella stessa direzione e indicano come mentre la conoscenza relativa all’apprendimento, all’insegnamento e agli studenti si incrementa con l’esperienza non è così per la conoscenza relativa alla disciplina.

La proposta di Shulman affronta in modo diretto la questione del sapere insegnante che abbiamo visto svilupparsi e delinearsi fin ora. La ripartizione del sapere legato alla disciplina in disciplinare, curricolare e sapere sul contenuto pedagogico per l’insegnamento (PCK), dà una prima distinzione di quello che è lo specifico terreno su cui si articola il sapere di chi insegna in modo tale da rispondere in modo più pertinente e utile alle varie domande che la ricerca sull’insegnamento focalizzata sulle discipline e i problemi della pratica di insegnamento si pongono.

4.3 Rilievi critici al concetto di PCK

Vi sono state anche diverse critiche al modello di Shulman. Ne indichiamo alcune anche perché a partire da esse si sono sviluppate altre ricerche per includere nel modello aspetti della conoscenza che erano stati trascurati o per dettagliare in modo più preciso il modello proposto.

Bennet e Carré (1993, p.7) hanno osservato come le relazioni costruite sulle basi delle categorie di Shulman e la natura delle connessioni di queste con le prestazioni degli studenti fosse un «utile punto di partenza per la concettualizzazione ma non fosse del tutto chiara: in ogni caso confermarono come il frame work fosse un punto di partrenza per l'analisi dell'apprendimento di chi deve imparare a insegnare (insegnanti in formazione)». Il modello di Shulman ha subito anche critiche per non essere sufficientemente dinamico da permettere una visione della matematica non-assolutista (Meredith, 1995), per essere decontestualizzato (Stones, 1992) e per presentare una visione trasmissiva dell'insegnamento (Meredith, 1993; McNamara, 1991; McEwan & Bull, 1991). McNamara (1991) si chiede ad esempio se la distinzione tra conoscenza dei contenuti e PCK possa essere fatta dato che tutta la matematica è essa stessa una forma di rappresentazione.

Queste critiche vanno considerate però di fronte la ammissione dello stesso Shulman (1987) che il suo framework è da considerarsi provvisorio, come ancora un tentativo incompleto. Resta comunque una innegabile profondità e acutezza nell'analisi di Shulman, una miscela di ragionamento empirico e filosofico, che non può essere annullata da queste critiche, come dimostrano anche studi sulla formazione dei docenti (Turner-Bisset, 1999) fondati su rielaborazioni dello schema di Shulman.

4.4 Risultati delle ricerche focalizzate sulla conoscenza disciplinare per l'insegnamento (SMK)

Maggiormente orientate alla definizione della specificità della conoscenza disciplinare dei contenuti oggetto di insegnamento da parte degli insegnanti sono le ricerche di Ma (1999) e Ball e al. (2008). In questo settore di indagine si cerca di delineare quale sia la modalità efficace in cui i contenuti di insegnamento sono posseduti dai docenti e come siano espressi nell'azione di insegnamento. Le ricerche di Ma confrontano la conoscenza matematica SMK e il PCK di insegnanti elementari della Cina e degli U.S.A. I risultati mostrano come la conoscenza degli insegnanti statunitensi fosse meccanica, senza connessioni e priva di sostegno concettuale. Gli insegnanti cinesi invece, con meno anni di educazione formale e inferiori qualifiche in matematica, avevano acquisito una forte struttura concettuale in matematica (Ma la definisce PUFM: profonda comprensione della matematica di base), che influenzava il loro modo di lavorare con i bambini, infatti «gli insegnanti che comprendono la matematica elementare in questo modo (PUFM) non inventano le connessioni tra le idee matematiche ma le rivelano e rappresentano tramite l'insegnamento e l'apprendimento della matematica» (Ma, 1999 p.122). La PUFM degli insegnanti possiede quattro caratteristiche che la distinguono:

- Connessione: la capacità di connettere le idee matematiche (concetti e procedure) dal semplice al complesso. Quando questa caratteristica è presente previene che l'apprendimento degli studenti sia frammentato. Invece che apprendere argomenti isolati gli studenti apprendono un corpo unificato di conoscenze.
- Molteplicità di prospettive: gli insegnanti con PUFM apprezzano i diversi approcci alle idee e alle soluzioni matematiche e i loro vantaggi e svantaggi. Sono capaci di fornire spiegazioni matematiche a questo. In questo modo possono condurre i loro studenti verso un apprendimento flessibile della disciplina.
- Idee di base: gli insegnanti con PUFM mostrano attitudini matematiche e sono consapevoli dei semplici ma potenti concetti di base e principi della matematica. Tendono a rivedere e rinforzare le loro idee di base. Focalizzando l'insegnamento attorno a queste idee gli studenti sono incoraggiati e guidati a condurre reali attività matematiche.
- Coerenza longitudinale: gli insegnanti con PUFM non si limitano a conoscere ciò che deve essere insegnato in una certa classe, ma devono avere una profonda conoscenza di tutta la matematica presente nel curricolo della primaria. Gli insegnanti con PUFM sono pronti a sfruttare le opportunità di rivedere i concetti fondamentali che gli studenti hanno imparato in precedenza. Sanno

quello che gli studenti dovranno imparare in seguito e organizzano opportunità di apprendimento e le colgono per preparare il terreno per il futuro apprendimento (Ma, 1999)

Il gruppo di ricerca coordinato da Ball è approdato alla dettagliata stesura di un modello denominato “*conoscenza matematica per l’insegnamento*” che è stato ricavato dall’analisi empirica dell’attività di insegnamento in classe. Il problema da cui origina la serie di ricerche di Ball e collaboratori deriva dal fatto che «mentre il termine conoscenza del contenuto pedagogico per l’insegnamento (PCK) è largamente usato, le sue potenzialità restano ancora sfruttate in modo insufficiente. Il suo nucleo concettuale essenziale è stato dato per scontato troppo spesso, e dunque resta poco differenziato e specificato» (Ball e al., 2008 p.389). In altre parole, Ball e collaboratori (2008) argomentano che negli anni passati il termine PCK è stato usato in molti modi differenti nella ricerca sulla conoscenza degli insegnanti nei termini relativi a cosa comprende e a come è usato per mettere in relazione la conoscenza dei contenuti di insegnamento con la pratica di insegnamento. La prospettiva di ricerca usata da questi ricercatori sottolinea come in molti casi si è cercato di usare argomenti di ordine logico-concettuale per supportare le argomentazioni sull’esistenza di una conoscenza specifica dell’insegnamento relativa ai contenuti, mentre pochi studi provano a sviluppare strumenti di misura per testare le diverse definizioni delle categorie relative alla conoscenza dei contenuti di insegnamento (Hill e Ball, 2004; Hill e al. 2005).

Sulla base di dati sia qualitativi sia quantitativi raccolti nell’arco di quindici anni il Michigan’s mathematics education research team coordinato da Ball propone un modello di conoscenza che separa le due categorie di Shulman (1986; 1987) sulla conoscenza disciplinare in quattro categorie: due relative alla conoscenza della disciplina (SMK) e due relative alla conoscenza del contenuto pedagogico dell’insegnamento della matematica (PCK). Le due categorie in cui è stato suddiviso il sapere disciplinare sono: la conoscenza comune dei contenuti (matematici) (common content knowledge; CCK) e la conoscenza specialistica dei contenuti (matematici) (specialized content knowledge; SCK), mentre le due categorie in cui è stata separata la conoscenza sul contenuto pedagogico dell'insegnamento è stata separata in conoscenza dei contenuti (matematici) e degli studenti (knowledge of content and students; KCS) e conoscenza dei contenuti (matematici) e dell'insegnamento (knowledge of content and teaching; KCT) (Ball e al. 2008). La categoria della conoscenza comune dei contenuti CCK si riferisce a conoscenze e abilità matematiche che sono utilizzate in qualsiasi contesto e non necessariamente nel contesto d'insegnamento scolastico e include la capacità di un individuo di calcolare un'operazione o risolvere un problema di matematica correttamente. La conoscenza specialistica dei contenuti è una conoscenza tipica dei contesti di insegnamento ed è necessaria agli insegnanti per insegnare in modo efficace (Ball e al.2008). La conoscenza dei contenuti e degli studenti è «una conoscenza che combina la conoscenza sugli studenti con il conoscere sulla matematica» (Ball e al., 2008 p.401). Ciò significa che l'insegnate deve essere capace di: anticipare le difficoltà e gli ostacoli che possono incontrare gli studenti, ascoltare e rispondere ai pensieri ancora incompleti degli studenti e infine scegliere le appropriate rappresentazioni ed esempi nel suo insegnamento. In più gli insegnanti devono avere consapevolezza delle concezioni e misconcezioni degli studenti su un determinato argomento. La conoscenza dei contenuti e dell'insegnamento KCT è «la conoscenza che combina la conoscenza sulla matematica con la conoscenza sull'insegnamento» (Ball e al., 2008, p.401). Si riferisce alle decisioni che prendono gli insegnanti: sulla sequenza delle attività e degli esercizi, sulla consapevolezza dei vantaggi e degli svantaggi che posseggono determinate rappresentazioni usate nell'insegnamento e alla decisione di interrompere una discussione in classe per ottenere maggiori chiarimenti, o all'utilizzo delle osservazioni degli studenti per fare degli approfondimenti o delle sottolineature (Ball e al., 2008). Uno dei risultati più interessanti e accolti con favore dalla comunità scientifica è che la conoscenza per l'insegnamento include una specifica conoscenza dei contenuti dell'insegnamento tipica di chi insegna, configurabile quindi in termini di competenza specifica dell’insegnante. Inoltre, con il concetto di PCK suddiviso in due parti, una che combina conoscenza matematica e conoscenza dell’insegnamento e l’altra che combina conoscenza matematica e conoscenza degli studenti, la conoscenza degli insegnanti si esplica all’intersezione dei due domini di conoscenza restando patrimonio dell’attività professionale dei docenti (Ball e al. 2008).

4.5 Ricerche sul PCK focalizzate sulla comprensione del pensiero matematico degli studenti

Molte ricerche nell’area della conoscenza disciplinare per l’insegnamento, in inglese Subject Matter Knowledge (SMK), e del PCK sono focalizzate sulla nozione chiave di trasformazione dell’SMK per l’insegnamento in relazione alla conoscenza degli insegnanti sulle spiegazioni, compiti, attività, e stili di insegnamento e apprendimento. Shulman (1987) riporta un episodio in cui, secondo la sua opinione, la carenza di conoscenza dei contenuti disciplinari era la ragione sottostante per un insegnamento meno efficace. Il programma di ricerca dell’Università Stanford mostra che gli insegnanti utilizzano diverse strategie di “appoggio” quando non conoscono adeguatamente l’argomento, incluso l’utilizzo esclusivo del libro di testo e l’evitare discussioni e domande.

A partire dalle ricerche empiriche condotte da Shulman e collaboratori che sono già state esposte, altri ricercatori hanno utilizzato il costrutto di conoscenza del contenuto pedagogico dell’insegnamento della matematica, d’ora in poi (PCK), focalizzando ora l’uno ora un altro aspetto del concetto ampliandone di volta in volta il significato a seconda dell’orientamento presente nelle ricerche (Graeber & Tirosh, 2008). Marks (1990) ad esempio ha incluso nelle 4 componenti in cui ha articolato il concetto di PCK anche aspetti della conoscenza curricolare. Inoltre lo stesso autore ha contribuito ad elaborare la nozione di comprensione del pensiero degli studenti da parte degli insegnanti per includere i processi di apprendimento degli studenti, le modalità di comprensione più tipiche, gli errori più comuni e tutto ciò che gli studenti trovano più facile o più difficile. Un aspetto che è stato molto indagato dalla ricerca è stato di conseguenza quello relativo alla conoscenze delle modalità di pensiero e delle rappresentazioni degli studenti da parte degli insegnanti. Infatti la conoscenza delle modalità di pensiero degli studenti e dei loro processi di apprendimento impatta sulla presa di decisione degli insegnanti, permette ai docenti di considerare le esigenze degli studenti e influenza i risultati educativi (Fennema & Franke, 1992). Allo stesso tempo sono indagate le risorse della conoscenza che i docenti usano per rispondere alle domande dei loro studenti o alle loro idee fino a distinguere tra: la conoscenza dei docenti di quali siano le concezioni comuni e i modi di pensare la disciplina da parte degli studenti e la conoscenza sull'origine di queste concezioni e la comprensione di specifiche reazioni degli studenti nell'affrontare specifiche situazioni didattiche relative alla matematica (Even & Tirosh, 1995).

In Inghilterra Aubrey (1997) ha svolto ricerche nelle classi osservando i processi che spiegano le relazioni tra la conoscenza informale della matematica nei bambini; la conoscenza della disciplina e del curricolo dei docenti; valori e convinzioni; e le pratiche di classe. In una analisi di quattro docenti in servizio della scuola primaria la ricercatrice illustra la coordinazione e l'uso della conoscenza di docenti e bambini nella complessità delle continue pratiche di insegnamento. La conclusione è stata che la conoscenza disciplinare ha un effetto cruciale sulle pratiche didattico/pedagogiche di classe fin dalla prima elementare. In un caso la conoscenza sicura della disciplina e della pedagogia dava a una insegnante la confidenza di predisporre esplorazioni, trattare relazioni matematiche e spiegarle in vari modi. Un'altra docente priva di queste caratteristiche non era in grado di proporre spiegazioni o di rispondere a domande in modo efficace. Aubrey mette in evidenza l'importanza la centralità della conoscenza disciplinare e la conoscenza delle competenze dei bambini (la ricerca si è svolta in una prima elementare) per quello che lei definisce PCK. Il processo dinamico di formazione della conoscenza richiede agli insegnanti di possedere una ricca e profonda comprensione dei principali campi concettuali e una consapevolezza della loro interconnessione.

Un modello recente che amplia il concetto di PCK è quello di An, Kulm e Wu (2004) in cui sono inclusi aspetti della conoscenze dei contenuti disciplinari, della conoscenza del curricolo e, più importante degli altri, della conoscenza dell'insegnamento. Anche in questo modello si sottolinea l'importanza della conoscenza del pensiero degli studenti in una prospettiva di insegnamento per la comprensione della disciplina. Le categorie del pensiero degli studenti sviluppate da An e colleghi sono: costruire conoscenza a partire dalle idee degli studenti, prendere in carico le misconcezioni degli studenti, impegnare gli studenti nell'apprendimento della matematica e promuovere negli studenti il pensiero matematico.

4.6 Domande ancora aperte per una migliore concettualizzazione della conoscenza del contenuto pedagogico della matematica

La direzione in cui è stato riconcettualizzato PCK è stata quella di ampliarne la definizione. In esso sono stati inclusi aspetti della conoscenza disciplinare per l'insegnamento e della conoscenza curricolare. Manca ancora una definizione ampiamente accettata del concetto che viene individuato attraverso liste di caratteri o esempi invece che con una precisa concettualizzazione (Graeber & Tirosh, 2008). Le domande a cui il modello di Shulman (1986) cercava di rispondere restano in parte ancora inevase: da dove derivano le spiegazioni degli insegnanti?, come gli insegnanti decidono come insegnare e come rappresentare i contenuti (Shulman, 1986)? Inoltre vi sono ancora delle questione da risolvere ad esso correlate come il ruolo delle credenze e valori nello sviluppo del PCK dei docenti (Graeber & Tirosh, 2008), la relazione tra conoscenza disciplinare degli insegnanti di matematica e l'insegnamento/apprendimento della matematica, in particolare nella scuola primaria (le ricerche di Shulman e collaboratori erano condotte presso scuole secondarie), e al tipo di conoscenza matematica che gli insegnanti elementari necessitano (Askew, 2008). Si continua comunque a supporre, anche a livello di politiche educative, che ci sia una relazione almeno indiretta tra conoscenze disciplinari e insegnamento efficace e ciò fornisce la spinta per condurre ricerche sul tipo di conoscenze che gli insegnanti di matematica possiedono o dovrebbero possedere. Ciò che fino ad ora sembra assodato dalla ricerca internazionale è che una carenza di conoscenze disciplinari è associabile a un insegnamento meno efficace e a peggiori risultati degli studenti. Il contrario è ancora tutto da dimostrare, non è al momento sicuro se una maggiore conoscenza disciplinare, comunque la si voglia intendere, migliori i risultati degli studenti e ciò probabilmente anche per questioni legate alle metodologie di indagine (Askew, 2008).

Il riconoscimento della complessità della ricerca sul tipo di conoscenza posseduta dagli insegnanti, sulle influenze che convinzioni, attitudini e pratiche hanno su di essa e su come questa interagisca con i risultati dell'apprendimento si sviluppa parallelamente alla comprensione che il sapere degli insegnanti è qualche cosa di specifico, di qualitativamente differente dal sapere degli esperti nella disciplina (Freudenthal, 1975; Askew, 2008); ormai la concezione di origine medioevale per la quale non c'era distinzione tra conoscenze disciplinare e conoscenze dell'insegnamento della disciplina non viene più riconosciuta come valida (McNamara et al., 2002; Askew, 2008; Rowland e al., 2000) e l'insegnamento è riconosciuto come una pratica in se stessa che non è completamente assorbita dalla conoscenza disciplinare.

4.7 La conoscenza degli insegnanti sull'apprendimento della matematica

E' ormai largamente riconosciuto che gli insegnanti dovrebbero essere consapevoli e informati sulle modalità dell'apprendimento della matematica da parte degli studenti poiché contribuiscono in modo significativo a vari aspetti dell'attività di insegnamento (Tirosh e Graeber, 2003).

Negli ultimi decenni la ricerca sull'apprendimento degli studenti in matematica, oltre che sulla cultura della classe come comunità di apprendimento in matematica (Cacciamani, 2009; Llenares, 2004), ha posto l'accento su due aspetti:

1. le concezioni degli studenti;
2. le loro differenti forme di conoscenza e comprensione;

(Tirosh e Graeber, 2003).

4.7.1 La ricerca sulle concezioni dell'apprendimento matematico degli studenti

Numerose ricerche hanno investigato le idee e le concezioni matematiche degli studenti così come il loro sviluppo. I risultati di questi studi dimostrano che l'apprendimento della matematica è complesso, richiede tempo e spesso non è semplice (Bishop e al., 2003; English, 2002; Grouws, 1992; Gutierrez e Boero, 2006; Nesher e Kilpatrick, 1990; Schoenfeld e al.1993).

Tre linee di ricerca si sono rivelate particolarmente feconde in quest'ambito: la costruzione di teorie sulle idee e concezioni degli studenti, l'analisi degli errori e misconcezioni e l'indagine delle capacità e conoscenze degli studenti (Tirosh e Graeber, 2003).

- Per quanto riguarda la prima linea ci sono tentativi promettenti che includono lo sviluppo di teorie globali che descrivono come gli studenti apprendono specifici domini o concetti della matematica (ad esempio la teoria di van Hiele relativa all'apprendimento della geometria, Van Hiele, 1986) e la costruzione di teorie che non sono specifiche di un dominio matematico ma piuttosto suggeriscono principi generali sull'apprendimento della matematica (ad esempio l'acquisizione dei concetti matematici. Davis, 1975; Dubinsky, 1991; Gray & Tall,1994; Sfard, 1991).
- Rispetto a errori e misconcezioni questo è uno degli ambiti di ricerca più importanti. La maggior parte di questi studi è focalizzata

sull’analisi di concetti specifici, relativi a determinati argomenti e non di concetti generali. Di conseguenza sono prodotte ricerche che analizzano in dettaglio errori su argomenti specifici (Gutierrez & Boero, 2006; Nesher & Kilpatrick, 1990). Altri studi esplorano altre dimensioni quali l’evoluzione delle misconcezioni con l’età e l’istruzione (Fischbein e Schnarch, 1997; Hershkowitz, 1987; Vosniadou & Verschaffel, 2004). Nell’ambito di errori e misconcezioni una distinzione che viene fatta è tra conflitti, misconcezioni, modelli intuitivi (D’Amore, 1999) ed errori che sono spesso sintomo di misconcezioni, le quali però possono anche condurre a risultati corretti. Lo studente nel tempo costruisce un concetto e se ne fa un’immagine che può essere validata dal curricolo scolastico ma successivamente rivelarsi inadeguata e in contrasto con la precedente reputata come definitiva (D’Amore, 1999). Una misconcezione in questo caso è «un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare» (D’Amore, 1999 p.124) anche se nel corso della costruzione del concetto può far parte di un passaggio momentaneo. Se però il concetto assume una sua stabilità nello studente per cui la modifica del concetto verso forme matematicamente più adeguate e potenti risulta particolarmente difficile da superare, anche perché di fatto risponde in modo soddisfacente a determinate richieste cognitive, si ha la formazione di un modello precoce o parassita, come può essere ad esempio il modello di moltiplicazione tra numeri naturali (D’Amore, 1999). Alcuni modelli teorici infine, tentano di descrivere le origini che sottostanno alle risposte incorrette degli studenti (Stavy & Tirosh, 2000).

- L’indagine delle capacità e conoscenze degli studenti mette in luce la continuità nella conoscenza tra novizi ed esperti (Lamon, 2006; Smith e al., 1993; Streetfland, 1993). Per esempio Smith e collaboratori hanno evidenziato similarità tra novizi ed esperti nelle caratteristiche della conoscenza sulle frazioni. Entrambi i gruppi tendevano a costruire strategie specifiche per risolvere determinate classi di problemi invece di utilizzare le strategie più generali che erano state insegnate a scuola.

4.7.2 Le differenti forme di conoscenza e comprensione degli studenti in matematica

Nella letteratura sull'educazione matematica vengono proposti vari tipi di conoscenza e comprensione della matematica (strumentale, relazionale, concettuale, procedurale, implicita, esplicita, elementare, avanzata, algoritmica, formale, intuitiva, visuale, situata, sapere che, sapere come, sapere perché, sapere per) (Tirosh e Graeber, 2003), che spesso sono descritti in modo simile e sono raggruppati in modo da evidenziarne le specifiche caratteristiche. Le stesse tipologie di conoscenza e comprensione della matematica vengono utilizzate nella ricerca sugli insegnanti. Schematizzando in modo molto sintetico si possono raggruppare le diverse tipologie in tre raggruppamenti più ampi:

1. <u>Comprensione strumentale e relazionale</u>. Questa coppia di categorie è stata proposta all'origine da Skemp (1978) e da essa sono sorte altre simili categorie quali ad esempio quelle di conoscenza procedurale e concettuale (Hiebert & Lefevre, 1986). Skemp ha presentato la comprensione relazionale come quella che permette di conoscere cosa fare e perché farlo, mentre la comprensione strumentale come «regole senza comprensione» (pag.9). In realtà Skemp ha considerato questi due diversi tipi di conoscenze come diversi tipi di matematica. L'insegnamento orientato alla comprensione relazionale per studenti il cui obiettivo è la comprensione strumentale e viceversa può generare problemi di comprensione matematica (Skemp, 1978). Il lavoro di Skemp ha contribuito in modo significativo al tuttora presente dibattito sull'importanza relativa tra abilità di calcolo e comprensione concettuale, che sono viste talora in forma dicotomica ma sempre più spesso come polarità su un continuo (Hiebert & Lefevre, 1986; Nesher, 1986; Resnick & Ford, 1981).

2. Dimensioni algoritmiche, formali e intuitive della matematica**.** Fischbein (1993) ha proposto che ogni attività matematica richiede queste tre dimensioni: algoritmica (procedure di soluzione e loro giustificazione teorica), formale (assiomi, definizioni, teorie e dimostrazioni) e intuitiva (modelli mentali più comuni, idee e credenze sulle entità matematiche). Inoltre secondo Fischbein le tre dimensioni si sovrappongono notevolmente e in modo ideale, queste dovrebbero operare in modo armonizzato nell'acquisizione dei concetti, nella comprensione loro comprensione e nel problem solving. Nella realtà dei fatti ci sono molte incoerenze tra le tre dimensioni della conoscenza matematica degli studenti. Queste incoerenze sono espresse come misconcezioni e ostacoli (Fischbein, 1993).

3. Sapere sul (Knowing-about) e sapere per (Knowing-to). Un fenomeno molto discusso e problematico per la ricerca e l'insegnamento, riguarda l'incapacità troppo spesso ravvisata degli studenti di risolvere problemi non "familiari" pur possedendo tutte le conoscenze matematiche per risolverlo (Tirosh e Graeber, 2003). Una spiegazione di questo fenomeno viene fornita da Mason e Spence (1999) con la definizione di una speciale forma di conoscenza come *knowing-to act in the moment*. Questa conoscenza permette di agire in modo creativo invece di reagire ai comportamenti con comportamenti abitudinari. I due studiosi affermano che questo tipo di conoscenza richiede una sensibilità per le caratteristiche della situazione e un certo grado di consapevolezza del momento in cui va mobilizzata. E' quindi la forma principale di conoscenza che gli studenti è necessario che utilizzino nel problem solving in contesti nuovi in cui non ci sono soluzioni rutinarie (Mason & Spence, 1999).

4.7.3 L'importanza della consapevolezza sulle modalità di apprendimento degli studenti da parte degli insegnanti

Indipendentemente dalle prospettive da cui l'insegnante possa guardare all'apprendimento degli studenti, è comunque importante che conosca le loro modalità di apprendimento e conoscenza della matematica. Le prospettive dominanti sull'apprendimento degli studenti da parte degli insegnanti sono quella comportamentista e quella di derivazione cognitivo costruttivista, mentre la prospettiva partecipatoria ancora non gode di un adeguato seguito nelle classi scolastiche (Tirosh e Graeber, 2003).

<u>La conoscenza delle concezioni degli studenti.</u> Il comportamentismo interpreta l'apprendimento come la creazione di associazioni stabili tra le risposte dell'individuo agli stimoli del suo ambiente (Cacciamani, 2009). L'assunzione di fondo è che anche le associazioni scorrette possono essere rinforzate con il loro utilizzo (Tirosh e Graeber, 2003). Nella prospettiva comportamentista è impossibile sapere cosa accade all'interno delle menti degli studenti per cui gli insegnanti sono invitati a determinare la correttezza delle risposte degli studenti e non le loro concezioni. L'obiettivo è quello di fare in modo che lo studente costruisca un repertorio di risposte adeguate agli stimoli che ricevano un feedback, «in quanto il controllo dell'esattezza delle acquisizioni diviene un elemento rinforzante» (Cacciamnai, 2009 p.12). Nelle prospettive cognitivo costruttivista la conoscenza dei bambini differisce da quella degli adulti dai punti di vista qualitativo e qualitativo. L'assunzione di fondo è che la conoscenza non è trasmessa ma costruita dai singoli individui (Cacciamani, 2009). Nell'insegnamento della matematica l'insegnante dovrebbe prendersi cura del pensiero degli studenti, formarsi un modello adeguato del modo in cui gli studenti si rappresentano un'idea matematica e infine tentare di costruire un percorso lungo il quale gli studenti dovrebbero "muoversi" per giungere a costruirsi un'idea matematica (Tirosh e Graeber, 2003). Quindi l'essenza di quest'ultima prospettiva nell'insegnamento sta nel comprendere e conoscere le concezioni degli studenti.

<u>Il sapere sul tipo di conoscenza</u>. Il comportamentismo interpreta la conoscenza come un accumulo di fatti, abilità e procedure (Cacciamani,

2009). Di conseguenza questi sono i tipi di conoscenza che gli insegnanti tendono a enfatizzare nel loro insegnamento (Tirosh e Graeber, 2003). Il cognitivismo e il costruttivismo pongono enfasi sulle differenti forme di conoscenza come la conoscenza concettuale, le strategie di problem solving e le abilità metacognitive (Cacciamani, 2009). Di conseguenza gli insegnati devono essere informati sulle diverse forme di conoscenza di cui momento per momento gli studenti possono essere in possesso. (Tirosh e Graeber, 2003).

5 Le credenze degli insegnanti sull'insegnamento, sull'apprendimento e sulla matematica

5.1 Sistemi di credenze e di conoscenze

L'antropologia, la psicologia sociale e la filosofia sono in accordo nel considerare le credenze come «comprensioni, premesse o proposizioni a livello psicologico che riguardano il mondo e che sono avvertite come vere» (Richardson, 1996 p.103). La nozione che una credenza può essere pensata come vera fa sorgere la necessità di distinguere conoscenze e credenze indirizzando gli studiosi a ritenere le conoscenze come «credenze certe, definizione che non si discosta molto da quella data da Platone come credenze giustificate come vere» (Furinghetti & Pehkonen, 2002 p.42). La differenza tra le due risiede nel fatto che, nella definizione di Platone, col termine *vera* è implicata l'esistenza di una realtà esterna chi si può conoscere con certezza (Phillip, 2007). Secondo von Glaserfeld la visione di Platone della conoscenza prevale ancora oggi in quanto in molte persone «regna la convinzione che la conoscenza è conoscenza solo se riflette il mondo così come è» *(*von Glaserfeld, 1984 p.20). La nozione che la conoscenza debba essere associata alla verità ha influenzato molte delle definizioni di conoscenza e di conseguenza la distinzione tra conoscenza e credenza, lasciando però l'arduo compito di definire i mezzi con i quali determinare la verità (Wilson & Cooney, 2002). La storia delle scienze infatti indica come una verità in un dato momento storico può essere successivamente modificata o sussunta all’interno di una teoria più comprensiva (Philipp, 2007). Ad esempio la prospettiva costruttivista radicale di von Glaserfeld si oppone al concetto di conoscenza come rappresentazione della realtà affermando quindi che non abbia senso parlare di un accesso alla conoscenza vera (von Glaserfeld, 1984). Al di là del dibattito sulle definizioni dei termini per i quali ancora non si è raggiunta una sufficiente chiarezza (Festenrmacher, 1994) è importante per la ricerca sulle credenze che siano chiare le posizioni su come vengono intese le credenze, in modo che poi l’operazionalizzazone del costrutto possa essere conseguente e chiara (Philipp, 2007).

Ogni credenza così come ogni conoscenza non è posseduta isolata rispetto alle altre ma va a costituire parte di un sistema di credenze o conoscenze per cui il termine «sistema di credenze è una metafora per esaminare e descrivere come sono organizzate le credenze di un individuo» Thompson, 1992 p. 130). Gli studi di Green (1971) sulle credenze avevano già posto enfasi su questo aspetto descrivendo i sistemi di credenze come forniti di struttura “quasi logica”.

Dal punto di vista della psicologia cognitiva le ricerche in questo settore hanno evidenziato la presenza di alcune caratteristiche tipiche dei sistemi di credenze che secondo Abelson sono: a) gli elementi (concetti, proposizioni, regole ecc.) di un sistema di credenze non sono consensuali; b) i sistemi di credenze riguardano in parte l’esistenza o meno di alcune entità concettuali; c) i sistemi di credenze spesso includono rappresentazioni di “mondi alternativi”; d) i sistemi di credenze si basano fortemente su componenti valutative e affettive; e) i sistemi di credenze tendono a includere una quantità considerevole di episodi; f) l’insieme dei contenuti incluso in un sistema di credenze è generalmente molto “aperto”; g) le credenze possono essere mantenute con gradi diversi di certezza (Abelson, 1979).

Nespor (1987), basandosi sull’analisi di Abelson, ha studiato i sistemi di credenze degli insegnanti evidenziando i tratti distintivi delle credenze rispetto alle conoscenze. I tratti sono definiti come segue:

- presunzioni esistenziali. «Un insegnante di matematica può utilizzare i termini abilità, maturità, pigrizia non tanto come termini descrittivi, bensì come etichette riferite a delle vere e proprie entità presenti negli studenti» (Mason, 2001 p.25);

- alternatività. Un insegnante può agire in base a un modello ideale di insegnamento di cui magari non ha fatto mai esperienza ma che guida obiettivi e organizzazione dell'attività di classe (Mason, 2001);
- aspetti affettivi e valutativi. Le attese nei confronti degli studenti e le credenze nei confronti della disciplina risultano importanti regolatori della quantità di energia profusa nella loro attività (Mason, 2001);
- immagazzinamento episodico. «Particolari episodi della propria esperienza di studenti possono continuare a inquadrare la comprensione degli eventi anche molto tempo dopo l'accadimento, quando magari si è diventati insegnanti» (Mason, 2001 p.25);
- non consensualità. «Caratteristica di un sistema di credenze composto da proposizioni, concetti, argomenti per principio discutibili, ne sottolinea la minore malleabilità e dinamicità rispetto a un sistema di conoscenze in quanto il mutamento di un sistema di convinzioni appare quasi come una sorta di conversione piuttosto che l'effetto di una buona contro-argomentazione o della raccolta di evidenze contrarie» (Mason, 2001 p.25-26);
- apertura. Non sono presenti chiare regole logiche per determinare la pertinenza delle credenze sugli eventi del mondo reale (Mason, 2001).

Volendo sintetizzare si può concludere che le credenze sono caratterizzate da un elemento valutativo, mentre le conoscenze da un elemento tipicamente informativo, anche se è ormai acquisito dalla ricerca psicologica che le conoscenze non sono assolutamente prive di elementi valutativi o affettivi, e le credenze sono contraddistinte anche da elementi cognitivi, per cui la loro distinzione risulta ancora un po' forzata (Dole e Sinatra 1994; Boscolo, 1997; Mason, 2001).

5.2 Risultati delle ricerche sulle concezioni e credenze degli insegnanti in relazione all'insegnamento e alla matematica

A.G. Thompson (1992), ricercatrice che tra le prime ha investigato questo campo di studio aprendo la strada a numerose successive ricerche, ha sottolineato l'importanza per i ricercatori che studiano le credenze matematiche degli insegnanti di rendere esplicite le prospettive che posseggono sull'insegnamento, l'apprendimento e la natura della matematica in quanto tali prospettive influenzano gli approcci dei ricercatori nel loro lavoro. Nella prospettiva di questa ricercatrice le credenze sono intese come un sottoinsieme delle concezioni e inoltre afferma che «condurre ricerche sulle credenze matematiche degli insegnanti e sulle loro concezioni isolate dalle ricerche sulla loro conoscenza matematica fornirà per forza un quadro incompleto dell'oggetto di studio» (Thompson, 1992 p.).

Thompson ha definito la concezione della matematica da parte degli insegnanti come «quelle credenze, concetti, significati, regole immagini mentali e preferenze conscie o subconscie che concernono la disciplina della matematica» (Thompson, 1992, p.132). Inoltre ha proposto una visione del sistema di credenze degli insegnanti come un sistema dinamico di strutture mentali suscettibili di cambiamenti in seguito all'esperienza. Infine ha notato come fossero ancora troppo scarse le ricerche che investigavano le interazioni tra insegnanti e studenti nel corso dell'istruzione (Thompson, 1992).

Conoscere la matematica implica il fare matematica e l'adesione a quest'idea della disciplina da parte degli insegnanti della scuola può essere fatta risalire alla combinazione di diverse credenze riguardo alla disciplina, al suo insegnamento e a sé stessi come insegnanti. Il numero delle credenze di un individuo può essere ridotto per mezzo della riflessione su di esse che permette di portare a livello esplicito quelle che sono le credenze implicite e quindi più difficilmente ravvisabili e controllabili.

Secondo Ernest (Ernest, 1988) la convinzione fondamentale del sistema di credenze degli insegnanti sulla matematica riguarda la concezione sulla natura della matematica come disciplina. L'importanza delle convinzioni può spiegare il fatto che, insegnanti con conoscenze simili ma con concezioni della disciplina differenti possano enfatizzarne aspetti molto diversi, orientando così il loro insegnamento ad apprendimenti di tipo differente (Ernest, 1988). Un insegnante può dare maggiore importanza alla manipolazione di simboli e procedure, trascurando i processi e il fatto che spesso la conoscenza matematica emerge dall'affrontare problemi (problem solving), mentre un altro insegnante può avere una concezione della matematica da insegnare meno tradizionale ed enfatizzarne l'aspetto creativo e di scoperta (Ernest, 1988). Le convinzioni sulla natura della matematica sono associate con credenze sulla disciplina interpretata in forma assolutista o costruttivista (Roulet, 1988). Queste sono le forme più comuni in cui viene interpretata da parte degli insegnanti sia la matematica da insegnare (Thompson, 1984) sia la matematica come disciplina (Ernest, 1988). Gli insegnanti con una concezione assolutista intendono i contenuti della matematica come una vasta collezione di concetti e abilità fissate e incontrovertibili (Romberg, 1992) e un utile insieme di fatti e regole privo però di collegamenti (Ernest, 1988). In questa concezione la matematica forma un corpo di conoscenze certe e vere. Nella descrizione che ne dà Ernest la

«visione assolutista della matematica non intende descrivere la matematica o la conoscenza matematica….Così la conoscenza matematica è senza tempo…è oltreumana…è pura e separata ed è utile per la sua validità universale; per la stessa ragione è libera da giudizi di valore e libera da condizionamenti culturali» (Ernest, 1988 p.250).

Un'altra concezione della matematica che si sta affermando tra gli insegnanti è quella costruttivista (Roulet, 1998). In questa visione vengono sottolineate tre proprietà dell'attività matematica:

1) i contenuti (oggetti) della matematica sono inventati o creati dall'uomo;

2) la creazione di questi contenuti non è arbitraria, ma sorge da un'attività che comprende oggetti matematici già esistenti e dalle necessità delle altre scienze e della vita sociale;

3) una volta creati gli oggetti matematici hanno proprietà ben determinate , che però possono essere scoperte anche a costo di grandi difficoltà, poiché possono essere possedute indipendentemente dalla conoscenza che ne abbiamo. (Hersh, 1986)

La visione costruttivista sottolinea l'importanza della pratica matematica e della ricostruzione della conoscenza matematica. Gli insegnanti che possiedono questa visione intendono la matematica come un linguaggio sviluppato dall'uomo per descrivere il mondo. La loro è un'epistemologia in cui la matematica è una conoscenza in continuo sviluppo e che riflette sul miglioramento delle conoscenze acquisite perché non sono necessariamente perfette e incontrovertibili (Ernest, 1988).

La comprensione della natura della matematica condiziona il modo di insegnarla, le attività che prendono corpo in una classe, gli obiettivi dell'apprendimento e la natura dell'ambiente che si crea in classe (Thompson, 1984).

Secondo Ernest tre sono i fattori cruciali che influenzano il modo di praticare matematica a scuola riguardo agli insegnanti: le credenze sulla matematica e sul suo insegnamento/apprendimento, il contesto sociale della situazione di insegnamento e il livello di riflessione dell'insegnante.

Gli insegnanti che possiedono una visione assolutista della matematica e del suo insegnamento/apprendimento è più probabile che creino un ambiente di istruzione centrato sull'insegnante, insegnino la matematica come un insieme di regole da memorizzare e delineino la matematica come una disciplina infallibile. Poiché l'obiettivo è la padronanza di alcune abilità matematiche, la presentazione dei contenuti e procedimenti viene condotta passo dopo passo in semplici e brevi unità e viene enfatizzata di conseguenza la risposta di tipo "giusto" o "sbagliato" senza un approfondimento del perché sia così e non altrimenti (Ernest, 1988).

Rispetto all'insegnamento della matematica e alla natura della disciplina è interessante riportare le convinzioni di tipo assolutista di un insegnante di scuola media (Thompson, 1985):

- l'insegnante deve stabilire e mantenere un atmosfera di ordine, rispetto e cortesia in classe;
- il ruolo dell'insegnante è quello di presentare i contenuti in modo chiaro, logico e in forma precisa. Per ottenere ciò si deve sottolineare le ragioni soggiacenti le regole matematiche e i procedimenti, nonché enfatizzare le connessioni logiche tra i concetti;
- è responsabilità dell'insegnante dirigere e controllare tutte le attività di istruzione, incluse le discussioni in classe. A questo scopo bisogna avere un piano preciso di conduzione della lezione;
- l'insegnante ha un preciso compito: presentare la lezione preparata, e deve compierlo senza digressioni o cambiamenti che possano pregiudicarne l'efficacia;
- il ruolo degli studenti è di assimilare i contenuti. Assimilare significa che gli studenti colgono le relazioni tra i nuovi argomenti e quelli spiegati in precedenza;
- gli studenti assimilano meglio seguendo le lezioni dell'insegnante e rispondendo alle sue domande;
- gli studenti non dovrebbero essere soddisfatti solo dalla conoscenza della manipolazione delle procedure, ma dovrebbero cercare di comprendere la logica che sta dietro le procedure.

Una delle principali preoccupazioni dell'insegnante con questo orientamento era quella di mantenere il controllo della classe (Thompson, 1985). Ciò avveniva anche evitando digressioni dal piano prestabilito della lezione. L'approccio centrato sul problem solving invece, non permette un controllo così stretto della situazione, e contrasta con le convinzioni sul ruolo dell'insegnante in classe che sono state sopra descritte.

Gli insegnanti che possiedono una visione costruttivista della matematica adottano una modalità di interazione studente-docente che permetta allo studente di investigare la materia mentre l'insegnante svolge maggiormente la funzione di facilitatore. Il problem solving è un aspetto centrale di questa pratica di insegnamento, in cui le attività dense di significato sorgono da situazioni problematiche che richiedono pensiero razionale e creativo, la raccolta di informazioni, scoperta, comunicazione e verifica di idee (Thompson, 1992).

Ricerche svolte sulle credenze degli insegnanti di diversi paesi (Germania, Francia e Gran Bretagna) riguardo alla matematica (Pepin, 1999), hanno evidenziato che l'istruzione matematica ricevuta a scuola, quando gli insegnanti attuali erano studenti, influenza il modo di concepire e insegnare la disciplina. Inoltre lo stile pedagogico degli insegnanti è una risposta personale all'insieme di assunzioni riguardo alla materia e al suo insegnamento/apprendimento, alla tradizione educativa e filosofica e all'insieme di condizionamenti dovuti alla società e all'istituzione in cui si è inseriti professionalmente.

Il contesto della situazione di insegnamento in relazione alle credenze sulla matematica è stato studiato da Archer (2000) che ha riportato notevoli differenze tra le prospettive di insegnanti sui scuola primaria e secondaria rispetto alla natura della matematica e al suo ruolo nel curriculum. Mentre gli insegnanti di scuola primaria mettono in relazione la matematica con l'esperienza della vita quotidiana degli studenti e riconoscono le relazioni della matematica con le altre materie del curricolo, gli insegnanti di scuola secondaria considerano la matematica come autonoma rispetto alle altre materie e non collegata in modo rilevante con la vita quotidiana degli studenti. Le prospettive degli insegnanti di scuola primaria erano quindi considerate coerenti con l'approccio olistico dell'educazione primaria e quello degli insegnanti di secondaria coerente con l'organizzazione centrata sulle materie della scuola secondaria.

L'influenza del tipo di insegnamento ricevuto è un'altra dimensione che è collegata con l'insegnamento praticato (Forgasz e Leder, 2008). Uno stesso strumento di rilevazione quantitativa somministrato da Collier (1972) sulle credenze rispetto alla natura della matematica è stato somministrato a una coorte di insegnanti sempre di scuola primaria nel

1998. I risultati hanno evidenziato come le credenze sulla matematica di quest'ultima coorte fossero più informali nel senso di più allineate a una prospettiva costruttivista (Seaman et al. 2005). Ciò è stato spiegato con l'influenza sulle credenze delle esperienze scolastiche come alunni (Lindgren, 2000) e che le differenze tra le coorti riflettono cambiamenti nel tempo nelle esperienze di apprendimento (Seaman et al. 2005).

Le ricerche empiriche hanno messo in luce anche l'interazione tra diverse credenze degli insegnanti che influenzano la loro visione della matematica come disciplina (Forgasz e Leder, 2008). Due surveys sono stati condotti su un ampio campione di dati in Australia (Beswick, 2005) e Grecia (Barkatsas &Malone, 2005) su insegnanti di scuola secondaria hanno dimostrato come «le credenze matematiche degli insegnanti non possano essere separate dalle credenze dalle credenze sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica» (Barkatsas & Malone, 2005 p.80). Inoltre Beswick (2005) ha evidenziato che anche le credenze sugli studenti e sulle loro abilità possono influenzare le pratiche di insegnamento in differenti contesti e questo per insegnanti a solido orientamento epistemologico di tipo costruttivista. Inoltre ben pochi insegnanti possedevano credenze sulla matematica coerenti con l'interpretazione di Ernest centrata sul problem solving (Beswick, 2004).

Altre ricerche (Teo,1997) hanno sondato il grado di consapevolezza degli insegnanti riguardo all'influenza delle loro credenze sulla matematica e rispetto alle pratiche di insegnamento. Ne è risultato che la quasi totalità dei soggetti della ricerca (15 su 16) erano consapevoli delle loro proprie credenze sulla matematica e dell'influenza che aveva sulla pratica scolastica.

E' difficile provare che ci sia una relazione causa effetto tra credenze e pratiche, ma in ogni caso numerose ricerche sono in accordo sul fatto che le credenze influenzano l'azione (Abelson, 1979). L'immagine che un insegnante si fa della disciplina influenza sia l'interpretazione dei contenuti (Kitchener, 1986) sia l'approccio dato all'istruzione (Pope & Scott, 1984). I mancati accordi tra credenze e pratiche vengono

imputati a influenze del sistema scuola che influenza le pratiche di classe tramite il controllo dei curricoli, la gestione dei tempi e la necessità di determinate tipologie di valutazione (Forgasz e Leder, 2008).
La resistenza al cambiamento delle credenze sulla matematica e sul suo insegnamento/apprendimento è stata studiata per insegnanti di scuola elementare (Putnam, 1992). Docenti con credenze di tipo assolutista hanno utilizzato come unica guida un testo di matematica che rispettava gli standard dell'NCTM (National Council of Teachers Mathematics, 1989) e avrebbero dovuto quindi impostare una programmazione secondo gli standard riformati.

«Gli insegnanti soggetti della ricerca credevano che gli algoritmi di calcolo che pervadono il tradizionale curriculum della scuola elementare costituissero il nucleo della matematica. Gli insegnanti avevano differenti visioni su cosa significasse comprendere quegli algoritmi e su quanto fosse importante la loro comprensione, ma comunque erano gli algoritmi dell'aritmetica a definire la loro matematica» (Putnam, 1992 pag. 170).

Posti di fronte al nuovo libro di testo con l'attesa di incoraggiare gli studenti a sviluppare quello che l'NCTM indica come *capacità matematica* e definisce come

«l'abilità di congetturare, esplorare e ragionare in forma logica per comunicare sulla matematica e attraverso la matematica; di risolvere problemi non routinari; di connettere idee all'interno della matematica e tra la matematica e altri domini intellettuali» (NCTM, 1998 p.23),

questi insegnanti hanno modificato il programma riformato per regolare le pratiche di insegnamento in forma compatibile alle loro convinzioni (Putnam, 1992). Infatti, nonostante le lezioni seguissero strettamente il libro di testo, l'insegnante sottolineava gli aspetti procedurali dei contenuti e minimizzava gli aspetti che potevano essere occasione di riflessione o discussione. Le lezioni erano condotte con l'obiettivo di fornire la sequenza di passi per ottenere il giusto risultato (Putnam, 1992).

In conclusione le convinzioni assolutiste degli insegnanti sulla matematica, che sono quelle più comuni, sono influenzate dal percorso di studi svolto in precedenza a scuola, da una formazione in servizio che spesso non educa in matematica ma insegna solo contenuti (Thompson, 1985) e dalle costrizioni a livello di istituzioni e società (Stigler &Perry, 1989).

5.3 Credenze degli insegnanti sui contenuti della matematica

Le ricerche su questo tema sono ancora molto ridotte in numero e recenti (Kyleve & Williams, 1996; Mingus & Grassel, 1999; Lloyd, 2002; Beswick e al. 2006; Anderson et al. 2005). Comunque dai risultati si evince quanto segue:

- le esperienze di formazione con materiali innovativi modificano le credenze su specifici contenuti matematici del curricolo;
- gli insegnanti sono convinti dell'importanza di possedere solide conoscenze su specifici contenuti quali frazioni, decimali e percentuali;
- il problem solving e i problemi aperti con domande "poco familiari" sono importanti per l'apprendimento ma più adatti per studenti che raggiungono risultati elevati in termini di valutazione:
- le dimostrazioni dovrebbero essere affrontate abbastanza presto nelle scuole (questo secondo insegnanti sia di scuola primaria sia di scuola secondaria) (Forgasz e Leder, 2008).

5.4 Le credenze degli insegnanti sull'apprendimento e il pensiero degli studenti in matematica

Le ricerche sul pensiero matematico degli studenti rispetto a specifici domini di contenuti sono state condotte per lungo tempo e hanno permesso di ottenere un cospicuo numero di conoscenze sull'argomento (Philipp, 2007). Inoltre i risultati di queste ricerche sono stati anche alla base di percorsi di formazione per insegnanti (Grouws, 1992; National Research Council, 2001). Gli insegnanti di scuola primaria sono preoccupati soprattutto dell'educazione dei bambini, ma non necessariamente della matematica (Darling-Hammond & Sclan, 1996), così un importante aspetto della formazione degli insegnanti è rivolto ad aiutare l'apprendimento dei modi di pensare la matematica da parte degli studenti (Philipp, 2007). Allo stesso modo questo tipo di formazione sul pensiero degli studenti può mettere in grado gli insegnanti di creare ambienti di apprendimento che promuovono l'indagine matematica e la sua comprensione e che conducono a documentati migliori risultati scolastici (Wilson & Berne, 1999).

Uno studio molto influente nell'ambito della ricerca in educazione matematica è stato condotto nel programma, della durata di quattro anni, denominato CGI (Cognitively Guided Instruction) (Carpenter et al., 1999) ed ha riguardato lo sviluppo professionale di insegnanti in servizio sulla comprensione e sviluppo del pensiero matematico degli studenti, attraverso l'interazione di uno specifico modello teorico ricavato dalla ricerca. Le credenze degli insegnanti sono state misurate prima e dopo l'intervento con test su scala Likert in cui i livelli, attraverso vari gradi, variavano dalla convinzione che gli studenti non potevano risolvere problemi senza istruzione, alla convinzione che gli studenti possono risolvere problemi senza bisogno di istruzione sui contenuti matematici e che l'insegnante debba usare la conoscenza del pensiero dei singoli alunni per adeguare le proprie scelte didattiche nell'interazione con gli alunni e nella gestione del curricolo (Fennema et al. 1996). La ricerca ha concluso che su 21 partecipanti 18 hanno modificato le loro credenze verso i livelli più sofisticati, anche se non c'è stata chiara correlazione tra modifica delle credenze e dell’istruzione (Fennema et al. 1996). Un altro risultato della ricerca è stato che sebbene molti fattori avessero contribuito al cambiamento delle credenze degli insegnanti, i due che sono apparsi più critici sono stati i seguenti: gli insegnanti hanno imparato lo specifico modello sul pensiero degli studenti fornito dal corso di formazione e, successivamente, lo hanno usato in classe (Fennema et al. 1996). Infine i miglioramenti dei risultati degli studenti nel problem solving e nell’utilizzo dei concetti matematici erano direttamente collegati a modifiche nel tipo di istruzione ricevuta (Fennema et al. 1996). Stessi risultati si sono avuti in una replica della ricerca condotta in Germania (Staub e Stern, 2002) dove gli studenti che miglioravano le prestazioni in problem solving non peggioravano quelle relative alle abilità algoritmiche.

La CGI è stata utilizzata anche per insegnanti in formazione (Vacc e Bright, 1999). La conclusione è stata che nonostante le ricerche indichino generalmente che le convinzioni degli insegnanti siano difficili da modificare «i dati rivelano che la possibilità di fruire di un’ esperienza intensiva con un focus sul pensiero matematico degli studenti è la chiave per permettere la modifica delle convinzioni degli insegnanti» (ivi pag. 108).

Un altro aspetto che è emerso dalla ricerca sulle credenze degli insegnanti in questo specifico settore è che agli insegnanti va data l’opportunità di riflettere sulle proprie credenze e pratiche perché queste possano essere modificate e rese più coerenti le une con le altre (Clarke, 1997; Raymond; 1997; Senger, 1998; Steele, 2001). Gli ostacoli al cambiamento risiedono: nelle preconcezioni sulle necessità degli studenti date dal loro status socio-economico (Sztajn, 2003), nell’enfasi riguardo ai vincoli dell’organizzazione scolastica che non permette l’adeguamento tra credenze e pratiche (Quinn & wilson, 1997), in una limitata conoscenza matematica degli insegnanti (Halai, 1998; Raymond, 1997; Steele, 2001). Inoltre, contrariamente a quanto descritto per il programma CGI, numerosi studi rivelano come sia di poco impatto sulla modifica delle credenze e pratiche la frequentazioni di corsi di formazione (Archer, 2000; Raymond, 1997) rispetto al peso fornito dalle precedenti esperienze scolastiche come studenti.

Quando invece la formazione è concepita in modo da fornire ambienti di lavoro strutturati, con esperienze d'aula accoppiate con tempi adeguati per la riflessione le ricerche, come nel caso CGI, hanno fornito risultati positivi per il cambiamento delle credenze (Carpenter et. al, 1999; Ambrose, 2004; Mewborn, 1999; Vacc e Bright, 1999). La conclusione di Ambrose (2004) è rappresentativa di questi risultati:

> «fornire agli insegnanti in formazione esperienze intensive che li coinvolgano da vicino con i bambini fornisce promettenti strade per il cambio delle convinzioni. Accoppiare queste esperienze con la riflessione permette alle credenze che emergono da queste esperienze di essere riesaminate e rifinite» (ivi p.117).

Durante corsi di formazione per insegnanti sono usati vari strumenti per ottenere le modifiche delle loro credenze sugli studenti: l'uso di letteratura per identificare le posizioni ideologiche che sono riflesse nelle strategie di istruzione (Cotti & Schiro, 2004) e più di frequente l'organizzazione di corsi a orientamento costruttivista sull'apprendimento (Anhalt et al. 2006; Quinn & Wilson, 1997; Scott, 2005; Spielman & Lloyd, 2004; Timmermann, 2004; Vacc & Bright, 1999). L'attenzione però è posta dai ricercatori nel non affrettarsi a concludere che cambi nelle credenze siano riflessi in cambi nella pratica di insegnamento e ciò spesso a causa dei limiti di tempi entro cui sono vincolati i percorsi di formazione (Forgasz & Leder, 2008). Secondo Ambrose (2004) le nuove credenze spesso si aggiungono, piuttosto che rimpiazzare, le precedenti, in quanto «è richiesto un considerevole tempo di riflessione per gli insegnanti che molte volte i corsi di formazione non possono fornire» (Vacc & Bright, 1999 p.107).

6 La matematica tra sapere disciplinare e materia di insegnamento

6.1 Le concezioni della matematica secondo gli esperti

L'etimologia del termine matematica rimanda al greco mathesis, ma anche al termine mtihema "insegnamento" che ci ricorda, anche se ormai l'uso del termine ha occultato il significato originario, come la dimensione didattica della matematica sia di primaria importanza fin dalle origini della civiltà (Speranza, 1996).

Il termine epistemologia deriva da episteme "filosofia o teoria della conoscenza scientifica", che richiama il problema della fondazione del sapere (matematico), ormai non più riconducibile a un unico punto di vista definibile per via assiomatica, ma ricavabile dall'utilizzo di concetti e strumenti a carattere filosofico. I diversi orientamenti epistemologici informano la visione della matematica che ognuno può avere e per questo sono ravvisabili anche nel linguaggio adottato, come ad esempio nell'espressione "scoprire un teorema ", in cui diamo per scontato che questo esista già e quindi, dal punto di vista filosofico/epistemologico, si assume una posizione realista (Speranza, 1996). Questa posizione è stata preminente nell'Ottocento, fino a che nel novecento di fronte alla nota crisi dei fondamenti della matematica, si sviluppò la risposta formalista, che interpretava la matematica come un gioco di simboli. Accade allora che una persona che apprende la matematica si trovi a volte in un ambiente nominalista, e altre volte in ambiente realista, e ciò con conseguenti fraintendimenti e conflitti. Il maggiore pericolo però è che queste filosofie restino implicite: «è necessario analizzare le proprie concezioni della matematica nelle situazioni che incontriamo, rendere esplicito l'implicito, nei limiti in cui ciò è possibile» (Speranza, 1996 p. 36). Un'altra posizione in termini epistemologici è il concettualismo, per il quale gli universali (matematici) sono costruzioni della nostra mente, dotate di un certo grado di libertà, e che in qualche modo dovranno però fare i conti con l'esperienza. Questa concezione si è evoluta nel tempo, attraverso Kant, nel costruttivismo che nelle sue diverse versioni è la concezione che più è diffusa nell'ambito della didattica della matematica e tra gli epistemologi interessati ai problemi di didattica (Speranza, 1996). Secondo Speranza le linee fondamentali per un fondamento dell'epistemologia matematica si dividono in diversi approcci:

1) l'approccio storico può dare indicazioni per capire il significato della matematica;
2) l'approccio culturale studia la matematica come una componente della cultura generale di un'epoca, nelle sue relazioni con altri campi dell'attività umana;
3) l'approccio riflessivo cerca di comprendere la matematica nelle sue varie articolazioni;
4) l'approccio genetico è interessato al sorgere delle idee in una mente in formazione;
5) l'approccio fondazionale studia le articolazioni logiche della disciplina considerandola nel suo aspetto formalizzato;
6) l'aspetto sociologico che cerca di capire come la società "esterna" possa condizionare lo sviluppo scientifico.

Nel campo della didattica di questi ultimi decenni gli approcci più utilizzati sono stati: lo storico, il riflessivo e il sociologico-culturale (Speranza, 1996), anche se nel passato tutti questi aspetti hanno avuto una ricaduta più o meno invasiva sulla didattica e sulla scuola.

I tentativi di caratterizzare la matematica in modo da valorizzare i suoi aspetti didattici hanno dato vita, seguendo un approccio riflessivo, a una concezione della matematica come scienza dei modelli (Hoffman, 1989; Steen, 1988). Secondo Schoenfeld (Schoenfeld, 1992), la matematica rivela modelli nascosti che ci aiutano alla comprensione del mondo che ci circonda. La matematica di oggi, anche quella quotidiana, è molto più della classica aritmetica e geometria: riguarda infatti misure, osservazioni scientifiche, inferenze, dimostrazioni e modelli matematici dei fenomeni naturali, del comportamento e dei sistemi sociali. C'è un ciclo che è ricorrente, ed è quello tra dati, deduzioni e applicazioni come accade quando programmiamo un lungo viaggio in automobile o a livello maggiore di complessità quando viene pianificato il traffico aereo o gestito un portafoglio di titoli (Schoenfeld, 1992). Il processo del fare matematica è molto più che semplice calcolo o deduzione, richiede osservazione di modelli, verifica di congetture e stima di risultati.

Secondo il National Research Council in America,

«oltre che a teoremi e teorie, la matematica offre diversi modi di pensiero che sono versatili ed efficaci e che includono modellamento, astrazione, ottimizzazione, logica, inferenze da dati e uso di simboli. L'esperienza con questi modi di pensiero matematico accresce l'efficacia matematica, una capacità della mente di crescente importanza in un età tecnologica che ci rende capaci di migliori letture critiche di dati, di identificare fallacie nei ragionamenti, di individuare andamenti, di valutare rischi e di suggerire alternative. La matematica ci rende più efficaci nel capire meglio il mondo carico di informazioni in cui viviamo» (National Research Council, 1989 p.45).

Ciò che viene allora sottolineato, soprattutto per l'importanza a livello didattico, è che la matematica insegnata deve essere più una questione di processi che una questione di contenuti. Focalizzando meglio la definizione per un più proficuo utilizzo didattico, si può pensare che ciò che rende matematica la scienza dei modelli è il dominio sul quale la modellizzazione e l'astrazione viene svolta, e la scelta di strumenti e metodi tipicamente impiegati. La matematica consiste di operazioni sistematiche, basate su osservazioni, studi e sperimentazioni, per determinare la natura o i principi delle regolarità in sistemi definiti assiomaticamente o teoreticamente (matematica pura) o modelli di sistemi astratti dal mondo reale (matematica applicata). Gli strumenti della matematica sono l'astrazione, la rappresentazione e la manipolazione simbolica (Schoenfeld, 1992).

Un altro aspetto nella concezione della matematica da insegnare, che si è sviluppata negli anni recenti, riflette una crescente comprensione della matematica come una disciplina empirica dell'ordine (Lakatos, 1977). Una disciplina per mezzo della quale coloro che stanno imparando la matematica raccolgono dati allo stesso modo in cui lo fanno gli scienziati. Questo tema deriva dalle ricerche di Lakatos (Lakatos, 1977, 1978) che notava come la matematica non procede sistematicamente dalle deduzioni da un ristretto numero di assiomi, ma procede anche per congetture, confutazioni e prove ed errori; piuttosto è la comunità dei matematici a decidere cos'è assiomatico ridefinendo gli assiomi se quelli precedentemente utilizzati hanno portato a conclusioni contraddittorie. Concorda con questa concezione Watson (2009) per cui in matematica la disciplina e la modalità di indagine intellettuale coincidono per cui i metodi di indagine diventano parte della disciplina fino al punto che «tesi in matematica non hanno capitoli relativi alla metodologia e ai metodi impiegati» (Watson, 2009 p.4).

Infine la matematica è sempre più vista come un'impresa sociale e collaborativa. Numerose conquiste della matematica recente sono state ottenute con lo sforzo intellettuale di gruppi di scienziati che collaboravano a risolvere un determinato problema (Steen, 1988). E' interessante riportare alcune considerazioni di matematici riguardo al loro lavoro insieme a colleghi. Citiamo ad esempio Peter Hilton:

«prima di tutto devo dire che mi diverto. Mi diverto molto a collaborare con amici. In secondo luogo credo che sia una cosa efficiente da fare perché…da solo puoi esaurire le forze…. ma in due, quello che tende ad accadere è che se uno dei due ha un calo di interesse, l'altro può fornire stimoli… La terza cosa è che se scegli qualcuno con cui collaborare in modo complementare, piuttosto che duplicare i contributi che sei in grado di dare, probabilmente ne sortirà un risultato migliore» (Albers & Alexanderson, 1985, p. 141).

In contrasto col relativo isolamento della matematica e dei matematici dei secoli passati adesso esiste una comunità di matematici divisa in sottocomunità che nel mondo sono a conoscenza dello stato della conoscenza della matematica nei diversi settori in cui è divisa. Al giorno d'oggi esistono oltre 3000 sottocategorie di matematiche, vengono scoperti circa 100 teoremi all'anno:

«si può parlare di matematica come di una singola scienza? La raccolta di fondi per la ricerca matematica non dipende dalla decisione dei matematci ma ha altri criteri socioeconomici e risente dell'opinione pubblica. La nozione di ciò che è valido in matematica è basata sulla nostra nozione della natura e scopi della matematica» (Davis e Hersh, 1981 p.22-23).

L’essere membro di una comunità matematica è senza dubbio un’importante parte della propria vita di matematico. Inoltre un altro argomento di carattere epistemologico testimonia che la collaborazione e la comunicazione per i matematici ha un ruolo fondamentale: l’essere membro di una comunità che pratica la matematica è parte di ciò che costituisce il pensiero e la conoscenza matematica (Schoenfeld, 1992).

L’idea di pratica collaborativa contrasta in parte con i soliti modi di pensare la conoscenza. Spesso la conoscenza è vista come un insieme di contenuti situati nella mente di qualcuno, incluse le strutture mentali e le procedure. Una pratica è invece un’attività quotidiana, condotta in un contesto socialmente significativo in cui l’attività dipende dalla comunicazione e collaborazione con gli altri, e dalla conoscenza di come utilizzare le risorse che sono disponibili in una data situazione. Questo punto di vista ritrova i suoi fondamenti nello sviluppo di un’epistemologia della matematica che ha come concetto guida proprio la pratica matematica (Kitcher, 1984), da cui derivare una comprensione della conoscenza matematica. Una pratica matematica include la comprensione del linguaggio che le è proprio e dei risultati che sono generalmente accettati dalla comunità matematica. Nella pratica vengono inclusi anche la conoscenza dei problemi dibattuti attualmente nella disciplina, i metodi di ragionamento presi come validi per stabilire nuovi risultati e il punto di vista metamatematico che comprende la conoscenza degli scopi generali della ricerca matematica e l’apprezzamento dei criteri di rilevanza ed eleganza (Greeno, 1989).
Quindi avere un punto di vista matematico ed essere un membro della comunità dei matematici sono aspetti centrali per avere una conoscenza di tipo matematico. Avere un punto di vista matematico più che possedere un certo numero di competenze significa avere subìto un processo di acculturazione con il quale si diviene membri di una

comunità e se ne accettano regole e valori (Schoenfeld, 1992). Questa prospettiva epistemologica si collega a una prospettiva della conoscenza a carattere socio-culturale, che concepisce l'apprendimento della matematica come inerentemente sociale oltre che come un'attività cognitiva, un apprendimento di tipo costruttivo piuttosto che trasmissivo di contenuti assorbiti dagli studenti (Baursfeld, 1979; Resnick, 1989).

6.2 L'insegnamento/apprendimento della matematica

Da molto tempo e da più parti si levano autorevoli e pertinenti voci critiche nei riguardi dell'insegnamento della matematica. Già A.N. Whitehead nel suo libro "*Un introduzione alla matematica*" (1962, edizione originale 1911), disapprova la pedanteria dell'insegnamento tradizionale della matematica che oscura le idee fondamentali della disciplina sotto una «massa di dettagli che non sono illuminati da alcuna concezione generale» (Whithead, 1962, p.2), e impedisce di far apprezzare la potenza e il significato della matematica come sistema di conoscenze elaborato dall'attività del pensiero umano. Ironicamente, la più logica delle discipline del sapere umano è spesso trasformata, a causa di un insegnamento che ne deforma il significato, in un insieme di precetti e fatti da ricordare "perché l'insegnante ha detto che è così". A dispetto della sua potenza, della ricchezza delle sue tradizioni e della sua bellezza, la matematica è troppo spesso sconosciuta, incompresa e resa inaccessibile (Davis & Hersh, 1981).

Nella sua forma peggiore la matematica scolastica è quasi una forma di «intimidazione cognitiva» (Ball, 1988) che non sviluppa i modi naturali di pensare in direzioni vantaggiose né conduce verso competenze matematiche come sono possedute dagli esperti (Watson, 2009). L'attività è svolta con sottoinsiemi ristretti di compiti che conducono a essere semiesperti in contesti sociali ed emotivi negativi senza scopi e contesti che siano ricchi e significativi (Freudenthal, 1994, Schoenfeld, 1992; Watson, 2009).

Il problem solving a scuola di solito significa risolvere problemi che sono spesso simboli vestiti con parole a hanno poco a che fare sia con la vita reale sia con la matematica (Lave, 1988; Zan, 1998). Di base il libro acquisisce un'autorità epistemica: molti docenti insegnano agli studenti dicendo: "questo è quello che si vuole facciate qui, e le risposte giuste sono date nelle soluzioni". In questo tipo di insegnamento conoscere la matematica significa ricordare le definizioni, le regole e le formule e il fare matematica è inquadrato in un semplice processo che comporta l'esecuzione successiva passaggi ben definiti. Imparare le "regole del gioco" spesso comporta nella matematica scolastica una sospensione della ricerca del senso (Davis, 1986; Lave 1988; Schoenfeld 1985; Stodolsky 1985). La matematica è prima di tutto uno strumento che ha applicazioni «nella vita di ogni giorno sia per la gente comune che deve far quadrare i propri bilanci sia per gli esperti che in qualche modo misterioso usano la matematica per costruire ponti e inviare satelliti nello spazio» (Ball, 1988 p.7).

6.2.1 L'insegnamento/apprendimento della matematica in Italia

Anche in Italia il problema dell'insegnamento scolastico tradizionale della matematica è stato avvertito nella sua scarsa efficacia anche se affrontato in forme non sempre adeguate (Ciarrapico, 2002), in quanto le modifiche erano sempre identificate come un adeguamento dell'insegnamento alle nuove proposte espresse dai programmi ministeriali.

Di volta in volta il rinnovamento della didattica della matematica è stato coinvolto e ha contribuito a dare respiro alle questioni che hanno agitato i movimenti scolastici:

- la democratizzazione dell'insegnamento per il quale si sono espressi i promotori di una matematica alla portata di tutti, e non di una élite di intelligenza o di attitudini speciali;
- l'attivismo all'interno del quale gli esponenti di spicco di questa corrente hanno fornito esemplificazioni brillanti

della capacità di far matematica con riferimento all'esperienza diretta e di stimolare l'iniziativa spontanea dei soggetti in apprendimento;

- le tecnologie educative a cui la didattica della matematica ha fornito un ventaglio di materiali e sussidi strutturati fino all'approdo informatico;
- il formalismo che è stato comunque, con dosi di ragione, legittimato dai matematici come parte ineliminabile di una disciplina vista non solo come strumentale ma come base per stimolare e organizzare l'elaborazione di processi mentali di carattere generale (Damiano, 1988).

Relativamente a quest'ultimo punto, verso la metà degli anni '60, a seguito del Bourbakismo, movimento nato in Francia e diffusosi in molti paesi d'Europa e negli Stati Uniti d'America, che auspicava una visione della matematica e del relativo insegnamento ispirata al rigore, all'indagine sui fondamenti, all'adozione del punto di vista strutturalista, a una presentazione della matematica che prescindesse da ogni riferimento a situazioni reali, al tentativo di far discendere tutta la matematica dal concetto di insieme, si iniziò a parlare nella scuola italiana di *insiemistica* per indicare la teoria ingenua degli insiemi, anche se di fatto l'aspetto più significativo adottato dalla "matematica moderna bourbakista" fu il punto di vista strutturalista. Ma da subito vennero individuate difficoltà da parte degli insegnanti nell'adeguamento della didattica a questa nuova visione della disciplina sia per il mancato riconoscimento da parte di buona parte dei docenti e genitori della disciplina in questa nuova veste, sia perché la sensibilità didattica di quegli anni è ancora ridotta (Ciarrapico, 2002) e, infine perché vi è una «fiducia eccessiva in un quasi automatico sviluppo intellettuale collegato all'introduzione di alcune strutture matematiche a scapito di una più incisiva capacità di matematizzazione di situazioni grezze» (Pellerey, 1979 pag.4).

A partire dalla metà degli anni settanta si impose nell'insegnamento della matematica di molti paesi europei fra cui l'Italia, un punto di vista che, in contrapposizione alla tendenza franco-belga del decennio precedente, è stato definito come “anglosassone”: statistica e probabilità, insegnamento per problemi e non per strutture, matematica come strumento di interpretazione del reale, punto di vista algoritmico (Ciarrapico, 2002). E’ l’ispirazione per i programmi della scuola media del 1979. Si valorizza lo:

«sviluppo dell’intuizione, sostenuto da ragionamenti sempre più organizzati, l’acquisizione di capacità di comunicazione in modo chiaro e preciso mediante il linguaggio naturale, ma anche simbolico e grafico, la conquista di capacità di sintesi attraverso l’osservazione di analogie strutturali in situazioni diverse» (Ciarrapico, 2002 pag.6)

e dal punto di vista metodologico l’insegnamento per problemi come attività di matematizzazione della realtà. A livello di contenuti compaiono le trasformazioni geometriche, la probabilità e la statistica ma, nonostante le stimolanti novità contenutistiche e metodologiche proposte, spesso i nuovi contenuti non sono stati nella pratica sviluppati adeguatamente in classe dagli insegnanti che si sono rifugiati «nell’inerzia dell’insegnamento tradizionale» (Ciarrapico, 2002 pag6).

6.2.2 La matematica nei programmi dell’85 per la scuola elementare

I curricoli dell’85 sono stati preceduti e influenzati da numerose altre proposte le principali provenienti dall’estero. Ricordiamo i curricoli: Dienes (1979-81), Nuffield (1967-68), Papy (1971-75) e Ricme (1979-82) con le date che si riferiscono ala loro pubblicazione in Italia. Questi quattro curricoli possono essere analizzati attraverso delle coppie di coordinate che sono di volta in volta focalizzate all’interno dei curricoli stessi e li distinguono tra loro permettendo di ricavarne anche gli elementi comuni:

- realismo/costruttivismo;
- disciplinarità/interdisciplinarità;
- cardinalità/ordinalità (riferite al numero);
- azione/percezione, (Damiano, 1988).

Tutti questi curricoli si sono allontanati dall'aspetto pratico della matematica; inoltre la controffensiva all'ondata bourbakista è presente nei programmi per la scuola elementare del 1985 divisi in cinque temi:

Problemi – Aritmetica - Geometria e Misura - Logica -Probabilità, statistica, informatica.

che sono messi tutti sullo stesso piano anche se non tutti sono riconducibili a dei contenuti precisi come i Problemi e la Logica. In essi si afferma che «la simbolizzazione formale di operazioni logico insiemistiche non è necessaria, in via preliminare, per l'introduzione degli interi naturali e delle operazioni aritmetiche» (Programmi Scuola Elementare 1985), insistendo di pervenire a essi non solo attraverso l'approccio cardinale ma da diversi punti di vista, rigettando la moda dell'insiemistica. Anche l'insegnamento della geometria è ricondotto al suo riferimento con la realtà fisica.
Nei programmi dell'85 questo orientamento è stato confermato legittimando la matematica ad educare competenze generali di ordinamento e modellizzazione della realtà. Questo ultimo aspetto è sottolineato anche con l'importanza assegnata ai *problemi* nel curricolo fino a «mirare ad elaborare atteggiamenti affettivi e socialmente positivi nei riguardi di questa forma di sapere» (Damiano, 1988 p.77).

Inoltre vengono sottolineati alcuni aspetti, già presenti nei curricoli Dienes e Ricme quali: lo sforzo di tenere assieme in modo complementare i percorsi dell'invenzione con quelli dettati dalle regole, la variabilità della stimolazione percettiva in modo da favorire i processi di astrazione, l'uso di schematismi grafici come base per formalismi più astratti e l'avvertenza a non indugiare troppo sulla manipolazione ripetuta perché «non è l'azione in sé che produce conoscenza» (Damiano, 1988 p.77).

I programmi dell'85 sono stati considerati quasi all'unanimità dei "buoni programmi", che tenevano conto delle posizioni diversificate presenti a quel tempo nel dibattito, anche a livello internazionale, sui curricoli in matematica. Il limite a questo impianto può ravvedersi nella prescrittività dell'impianto in quanto:

«con la loro minuziosità, e non senza una venatura di paternalismo, presumibilmente hanno creduto di far fronte all'impegno di tracciare una strada sicura per insegnanti che, in genere, non possono contare su una apprezzabile formazione matematica di base. Sotto questa angolatura, non pare si possa sostenere che segnino un cambiamento di rotta rispetto alla tradizione dei programmi come "grida manzoniane", fondati sull'idea di valere come sostituti della formazione professionale dei maestri. Ed anche il fatto di non indicare gli obiettivi minimi da raggiungere –carenza che non consente di operare alcuna verifica dei risultati- non è un limite del capitolo matematica, ma molto più generale, riferibile alla concezione della programmazione centrale del nostro sistema scolastico» (Damiano, 1988 p.78).

Di fatto, nel complesso della classe docente, le riforme non hanno spostato di molto il baricentro dell'attività di insegnamento che sostanzialmente è rimasto ancorato alla presentazione di argomenti da parte dell'insegnante, all'esecuzione di esercizi da parte degli alunni, alla ripetizione dei contenuti da parte degli studenti a un apprendimento di tipo fondamentalmente meccanico e poco significativo.

6.2.3 Le indicazioni nazionale del 2007 per la matematica: i traguardi per le competenze

«Le 'Indicazioni Nazionali per il Curricolo', approvate con decreto ministeriale del 2007 stabiliscono che lo scopo dell'istruzione è la formazione alla competenza degli allievi, realizzando le 'Raccomandazioni' per lo sviluppo delle competenze- chiave della Commissione Europea (2006) »(Magnoler e Sorzio in corso di stampa). Il curricolo si sviluppa secondo quattro assi culturali: asse dei linguaggi, asse matematico, asse scientifico-tecnologico e asse storico-sociale che si configurano come il tessuto su cui costruire le competenze le competenze chiave che sono il risultato che è possibile conseguire attraverso la reciproca integrazione e interdipendenza tra i saperi e le competenze contenuti negli assi culturali (Decreto MPI 22,08,2007). L'integrazione e interdipendenza richiamata nel decreto pone enfasi sulla necessità di organizzare il curricolo sulla base di alcuni nuclei fondanti. Questa prospettiva permette di strutturare il curricolo in relazione alla significatività «e generatività di alcuni concetti, anziché secondo una sequenza lineare di unità elementari» *(*Magnoler e Sorzio in corso di stampa*)*. Le ‘Indicazioni Nazionali per il Curricolo’ parlano di *traguardi per lo sviluppo della competenza*, intesi come mete concretamente raggiungibili da distinguere dalle finalità che possono essere intese come forme ideali a cui tendere (Baldacci, 2010). Inoltre «la competenza è considerata come qualcosa che si sviluppa, come legata a un processo di incremento che richiede un certo periodo di tempo» (Baldacci, 2010 p.18). I traguardi infatti sono posti come terminali riferendosi all’uscita dei diversi gradi scolatici, per cui «il raggiungimento di un dato livello di competenza esige un intero grado scolastico» (Baldacci, 2010 p.19). Prendendo come esempio la matematica alcuni concetti come ‘strutture moltiplicative’, ‘strutture numeriche’ e problem solving’ diventano «organizzatori concettuali che permettono di predisporre una serie di attività didattiche varie, di connettere ulteriori concetti in un quadro articolato e di sviluppare forme di pensiero che possono essere applicate in diversi contesti per risolvere problemi significativi» (Magnoler e Sorzio in corso di stampa). La competenza allora diventa un costrutto di natura causale e generativa rispetto a una classe di prestazioni (Baldacci, 2010). In matematica per stabilire un sapere sugli organizzatori concettuali si usa il termine ‘nuclei fondanti’ (UMI, 2001) per individuare i quali occorrono «solidi strumenti nella storia ed epistemologia della disciplina» (Sbaragli, 2010 p.149). «I nuclei fondanti possono definirsi tali quando assumono un esplicito valore formativo rispetto alle competenze di cui sono i supporti. Per poterli individuare, non possiamo rimanere solo sul piano storico-epistemologico, ma dobbiamo impiegare contemporaneamente anche gli strumenti della ricerca psicopedagogica e didattica» (Arzarello e Robutti 2002, citato in Sbaragli, 2010 p.149-150). Questa citazione dai curatori delle proposte dell’UMI (Unione Matematica Italiana) del 2001 per i curricoli della scuola primaria e secondaria, che si strutturano attorno all’individuazione di nuclei concettuali in base ai quali sono predisposte tutta una serie di attività per lo sviluppo delle competenze, conferma come sia fondamentale, anche per proposte strutturate nel dettaglio in termini di attività, conoscenze, abilità, il ruolo dell'insegnante che trasforma il sapere costituito in un sapere da insegnare per usare la terminologia di D'Amore (1999). Anche Sorzio conferma la svolta richiesta all'insegnamento per poter approdare allo sviluppo delle competenze negli studenti:

«L'applicabilità della conoscenza e delle abilità implica un processo che non può essere ridotto alla semplice esecuzione corretta di procedure routinarie nella vita quotidiana, né nella riduzione di un sapere complesso alle esigenze contingenti: la matematica, al contrario della proposta del calcolo vivente di Freinet, non si riduce al suo uso per far compere; si tratta invece di una comprensione della matematica flessibile e articolata per poter costruire rappresentazioni e significati con cui vedere sotto una diversa prospettiva la vita quotidiana, per comprimere una serie di dati in un modello comprensibile che aiuta il ragionamento di situazioni complesse, aumentando la plausibilità delle inferenze, il rigore e la logica» (Magnoler e Sorzio in corso di stampa).

Le indicazioni per il curricolo rispetto all'area matematico scientifico-tecnologica recitano che è «elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico, sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati e a confrontarli con le ipotesi formulate, negozia e costruisce significati interindividuali, porta a conclusioni temporanee e nuove aperture la costruzione di conoscenze personali e collettive» (Indicazioni per il Curricolo, 2007 p.51).

Inoltre viene posto rilievo su alcuni altri aspetti:

- attività pratiche non episodiche da inserire in percorsi di conoscenza;
- impostare e risolvere problemi per aumentare le personali conoscenze e abilità;
- l'uso di sensazioni e percezioni;
- il gioco per la condivisione delle regole;
- l'uso della comunicazione per costruire storie, schemi interpretativi e argomentare;

- la riflessione sui percorsi di apprendimento.

Rispetto alla sola matematica viene sottolineato come il cuore dell’attività risieda nella soluzione di problemi intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo. Si sottolinea l’importanza di imparare le diverse rappresentazioni e delle esplorazioni matematiche e dell’acquisizione della fiducia e del controllo nell’affrontare problemi. Infine è sottolineata l’estrema importanza dedicata all’atteggiamento corretto verso la matematica, «inteso come un’adeguata visione della disciplina, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire affascinanti relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell’uomo» (Indicazioni per il Curricolo, 2007 p.52).

Di tenore simile sono le indicazioni del NCTM (National Council of Teachers of Mathematica) proposte a seguito: dell’analisi della matematica da apprendere a scuola, dei risultati delle ricerche in psicologia cognitiva e in educazione matematica, e delle conoscenze e abilità che un cittadino del mondo industrializzato deve possedere (NCTM, 2001). Per cogliere in un unico quadro tutti gli aspetti di quella che chiameremmo competenza matematica e competenza in matematica (Fandino Pinilla, 2003) è stato coniato il termine *Mathematical Proficiency*, che viene descritta come il possesso di cinque caratteri (strands):

- comprensione concettuale: la comprensione dei concetti, operazioni e relazioni;
- fluenza nelle procedure: abilità nel condurre le procedure in modo flessibile, accurato, efficiente e appropriato;
- competenza strategica: abilità nel formulare, rappresentare e risolvere problemi matematici;
- capacità di adattare il ragionamento: capacità di pensiero logico, riflessione, fornire spiegazioni e giustificazioni;

- disposizione produttiva: inclinazione o abito nel percepire la matematica come sensata, utile e apprezzabile insieme a una convinzione nell'importanza dell'impegno e nella personale efficacia.

Queste caratteristiche, nell'intenzione dei loro proponenti, sono intrecciate (di qui l'immagine dei fili che viene fornita per rappresentarle) e interdipendenti e sono viste come i nuclei attorno cui si costruiscono sia l'apprendimento degli studenti, sia insegnamento dei docenti. Le stesse caratteristiche infatti sono presentate come necessarie per un insegnamento in funzione dell'acquisizione della *proficiency* negli studenti. Insegnanti che non possiedono le cinque caratteristiche che si vuole che tutti gli studenti acquisiscano nel percorso di scolarizzazione difficilmente potranno essere insegnanti efficaci. Il documento oltre a fornire indicazioni sui nuclei fondanti della matematica scolastica dà anche delle indicazioni su quali debbano essere le conoscenze che un insegnante debba possedere per arrivare al livello della *proficiency* e fornisce suggerimenti per la formazione in tal senso (NCTM, 2001).

6.3 Le interpretazioni della matematica scolastica da parte dei matematici

Come abbiamo già potuto osservare la definizione di matematica all'interno della comunità dei matematici non è univioca e altrettanto si può dire per quel che riguarda la matematica scolastica. Dal punto di vista di cosa fa un matematico c'è un sostanziale accordo sul fatto che un'autentica attività matematica permette l'acquisizione del senso della matematica come un prodotto dell'attività umana, (Davis & Hersh, 1986; Watson, 2009), come un abito mentale (Cuoco et al. 1996) più impegnativo e significativo di imparare un susseguirsi di fatti, dati, metodi e domande stereotipate (Watson, 2009). Secondo Burton (2004) il matematico nella sua attività:

- usa l'immaginazione;
- fa e si pone domande;

- fa sbagli e li usa per imparare cose nuove;
- è organizzato e sistematico;
- descrive, spiega e discute il suo lavoro;
- cerca configurazioni e connessioni;
- insiste nelle difficoltà;
- lavora in una comunità che gli permette di migliorarsi

Watson (2009) indica le caratteristiche predominanti del fare matematica: fare esplorazione empirica, dedurre logicamente, cercare variazioni e invarianze, scegliere ed escogitare rappresentazioni, fare esempi, osservare casi estremi, fare congetture, cercare relazioni, verificare, formalizzare, reificare, identificare isomorfismi, riflettere sulle risposte per formulare nuove congetture, comparare argomenti, trovare controesempi e confutazioni, trovare soluzioni a problemi, modellizzare, dimostrare (Watson, 2009). Ciò può essere fatto anche a scuola «ma il modo in cui tutto questo è coordinato rende l'attività complessivamente differente» (Watson, 2009 pag.4). In ogni caso la maggior parte delle conquiste matematiche non sorge in modi isolati e indipendenti ma è un prodotto del suo tempo, entro il corrente paradigma, coemergente con i bisogni e artefatti economici e tecnologici e con lo spirito del tempo (Davis & Hersh; Burton, 2004; Watson, 2009).

La matematica scolastica secondo Watson (2009) non è un sottoinsieme della disciplina matematica perché ha differenti garanzie, autorità, forme di ragionamento, nuclei di attività, scopi, concetti unificanti e necessariamente separa l'attività matematica in modi che sono differenti da quelli della disciplina. L'autrice con matematica disciplinare intende la forma di impegno matematico che aumentano la conoscenza matematica, con matematica scolastica la forma di impegno matematico in contesti formali di insegnamento per novizi (Watson, 2009).

Inoltre i curricoli di matematica non possono mantenere l'integrità della disciplina presentando degli spostamenti *shift* nel tipo di lavoro matematico richiesto in quanto vengono introdotti standard di argomentazione differenti fino a chiedere in certi casi agli studenti di abbandonare forme di ragionamento che sono valide in altri (Zaslavsky & Ron, 1998). Altri *shift* nella comprensione matematica che sono individuate come importanti sono: il passaggio dal ragionamento additivo al ragionamento moltiplicativo, l'acquisizione del ragionamento probabilistico, l'acquisizione del ragionamento geometrico (Watson, 2009). Un'altra differenza riguarda il ruolo dei concetti unificanti che nella matemayica scolastica richiedono un coordinamento verticale di insegnamento negli anni tra insegnanti che hanno costruito un esperienza condivisa di come tali concetti vadano approcciati e appresi (Watson, 2009).

Queste posizione sono in parte contraddette da Zazkis (2009) che afferma che se la matematica scolastica non è un sottoinsieme della matematica come disciplina non è detto che non ci siano esempi di possibili intersezioni. Ciò è confermato dalle esperienze e studi di (Boaler, 1997; Lockhart, 2008; Zack & Reid, 2003, 2004) in cui si descrivono insegnamenti della matematica in linea con le caratteristiche della disciplina matematica. Secondo Harel la matematica scolastica, per avvicinarsi a quella disciplinare, dovrebbe farsi carico nei curricoli, attraverso gli studi messi a disposizione dalla ricerca, di implementare i modi di pensare la matematica tipici dei matematici e obietta che come nella matematica si progredisce attraverso errori anche nella matematica scolastica non si debba fare altrettanto (Harel, 2009). Secondo Povey (2009) anche chi fa matematica come professione adotta comportamenti matematici che non sono del tutto inlinea con quelli tipizzati dalla Watson, chi fa matematica comunque prova a comprendere la matematica già esistente e ciò attraverso esercizi anche ripetitivi, accettando istruzioni da chi è più competente, chiusure definitive su problemi che non sempre conducono necessariamente all'apertura di nuovi problemi e accettano anche che un modello matematico funzioni senza comprenderne il perché in modo adeguato.

Inoltre si pongono questioni di carattere sociologico rispetto al fatto che gli studenti si dovrebbero comportare a scuola come dei matematici. Infatti:

«gli studenti a scuola non sono pagati per fare matematica, non fanno alcuna domanda per avere l'opportunità di svolgere un'atività matematica e, anche quando hanno un'identità che è investita per essere favorita in ciò, gli studenti non definiscono la matematica allo stesso modo in cui la può definire un adulto che fa matematica» (Mendick, 2009 p. 15).

Inoltre il modello della matematica disciplinare non è giustificato che sia il modello per la matematica scolastica, «gli *shift* individuati non sono assoluti ma sono tali dal punto di vista storico, quello che è importante è insegnare agli studenti le "regole del gioco" e come essere critici su tali regole» (Mendick, 2009 p.15).

Dal dibattito emerge come il problema degli *shift* sia ancora da considerarsi oggetto di ricerca per riuscire ad ottenere che gli studenti armonizzino il loro percorso matematico in modo che non risulti in un insieme frammentato di argomenti. Inoltre risulta la forma dei contenuti di insegnamento assunti nella matematica scolastica sia ancora lontana perché le due forma di matematica abbiano *un'intersezione in comune* che sia un valido punto di partenza per costruire un pensiero matematico degli studenti che sia avvicinabile a quello degli esperti. Vedremo in seguito quale ruolo in questo problema di avvicinamento delle due concezioni della matematica possono giocare gli insegnanti e l'istituzione scolastica.

6.4 Raggiungere cambiamenti nell'insegnamento della matematica

A dispetto di seri tentativi di riformare l'insegnamento della matematica negli ultimi 50 anni, la matematica continua ad essere insegnata come lo è sempre stata con al massimo pochi cambiamenti. Ognuno di noi probabilmente conosce qualche insegnante che propone genuini problemi matematici agli studenti o che si approccia concettualmente all'algebra o le cui concezioni su quale sia la matematica valida da insegnare comprendono la presenza di argomenti quali probabilità e la geometria delle trasformazioni. Più rari sono insegnanti per i quali la logica della scoperta matematica e la logica della giustificazione siano di uguale importanza nella conoscenza matematica. Nel loro libro "*L'esperienza matematica*" Davis e Hersh (1981) caratterizzano una tipica lezione di matematica:

"il programma è semplice e chiaro. Ci sono problemi da risolvere e metodi di calcolo da spiegare o un teorema da dimostrare. La maggior parte del lavoro è scritta, di solito alla lavagna. Se i problemi sono risolti, i teoremi dimostrati e i calcoli svolti allora l'insegnante e gli studenti sanno che quel giorno hanno compiuto il loro lavoro." (ivi p.3)

Quando gli studenti non capiscono allora l'insegnante tende a rimediare a queste incomprensioni con «strazianti e precise spiegazioni», più lente e a volte più forti nel tono (Davis & Hersh, 1981 p.279). In questo insegnamento, sebbene gli input dati dagli studenti siano importanti ciò che più determina l'insegnamento sono gli argomenti del curriculum (Putnam, 1987).

Questo modello è vecchio e predominante. Non si può addebitare a una singola causa il fallimento dei passati sforzi di riformare l'insegnamento della matematica dove ancora il modello delle lezioni ordinarie continua a prevalere. In parziale accordo con Ball (1988) vi sono certamente almeno tre aspetti che contribuiscono alla stabilità del contesto:

a. I modelli culturali che strutturano l'insegnamento e la conoscenza
b. L'organizzazione scolastica e le condizioni di insegnamento
c. La conoscenza e la formazione degli insegnanti di matematica

6.4.1 Aspetto a. I modelli culturali che strutturano l'insegnamento e la conoscenza.

L'insegnamento ordinario della matematica riflette un epistemologia fondata culturalmente- quella che Jackson (1986) definisce la tradizione mimetica. La conoscenza è fissa: gli insegnanti danno la conoscenza agli alunni che la immagazzinano e la ricordano. Questa tradizione è

fermamente incorporata nella tradizione occidentale. Da secoli la maggior parte dell'insegnamento procede come se l'apprendimento fosse un passivo processo di assimilazione, ci si aspetta che gli studenti seguano rigorosamente le indicazioni degli insegnanti per cui studiare era considerato un processo di imitazione (Cohen, 1988; D'Amore, 2007).
Approcci innovativi all'insegnamento/apprendimento incorporano assunzioni sull'insegnamento/apprendimento e sulla conoscenza che comportano un radicale distacco dalle inerenti idee e pratiche della nostra cultura occidentale (Cohen, 1988).
In Italia, agli inizi del XX secolo, a causa delle spinte di ispirazione neoidealista, si consolidò una tradizione secondo la quale la matematica essendo una scienza:

- ha solo valore pratico;
- è una disciplina arida e morta;
- gli scienziati si devono occupare solo del proprio campo;
- per insegnare basta conoscere i contenuti della propria disciplina.

Purtroppo tali principi vengono applicati ancora oggi. La scienza ha acquisito rispetto per la sua utilità, la matematica è presentata come un insieme di conoscenze stabilito una volta per tutte, da apprendere così com'è, la matematica viene concepita come forma di astrazione che dà risposte a situazioni standard di cui spesso non è chiaro il senso. Queste concezioni della matematica purtroppo danno origine a distorsioni nell'apprendimento (Schoenfeld, 1985; Zan, 1998; D'Amore & Sandri, 1996) ed errate convinzioni sulla matematica come disciplina. Del resto anche nella coscienza di riformatori scolastici come Don Milani la matematica veniva concepita come la disciplina "meno riformabile":

«l'unico che avrebbe motivo di lamentarsi d'una scuola senza bocciature è l'insegnante di matematica. La lezione di seconda o di terza è inutile per chi non sa le cose di prima (...) Del resto sulla matematica si può fare un discorso come quello che è stato fatto alle camere per il latino. Quali sono i calcoli che ognuno deve saper fare per le necessità immediate di casa o di un lavoro qualsiasi o per la lettura di un giornale? Quale parte della matematica ricorda un uomo colto non specializzato? Tutta quella che è nel programma degli otto anni escluse le espressioni numeriche e l’algebra” e in seguito “La seconda materia sbagliata è matematica. Per insegnarla alle elementari basta sapere quella delle elementari (...) non è vero che occorre la laurea per insegnare matematica alle medie. E’ una bugia inventata dalla casta che ha i figli laureati. E’ la cattedra dove si lavora di meno (16 ore settimanali). E’ quella in cui non occorre aggiornarsi. Basta ripetere le stesse cretinate che ogni bravo ragazzo di terza media conosce. La correzione dei compiti si fa in un quarto d’ora. Quelli che non sono giusti sono sbagliati.» (Scuola di Barbiana, 1967 pag.29)

Se queste erano le concezioni sulla matematica di uno dei più accreditati e migliori riformatori della pedagogia italiana del secolo scorso non ci si può troppo meravigliare dell’immobilismo del suo insegnamento scolastico.

La matematica è invece una scienza viva, come sostengono tutti gli esperti, che però paradossalmente, tende a produrre, quando raggiunge il livello dell’insegnamento apprendimento formale delle teorie morte:

«Le teorie matematiche nascono e crescono su cantieri di problemi, ed i concetti si formano intorno alle questioni che essi devono risolvere, ai ragionamenti nei quali essi intervengono. (...) Talvolta servono secoli prima che [la teoria] trovi il suo fondamento e la sua forma assiomatica deduttiva, quella che si vede nei trattati. A questo stadio la teoria ha spesso perduto ogni traccia della sua origine problematica, delle questioni che l’hanno motivata. Per di più i concetti sono introdotti nel punto loro assegnato dalla deduzione, e che è spesso lontano da quello nel quale si potrebbe riconoscere meglio la loro importanza. La teoria è così, trasformata, per obbedire alle esigenze del pensiero razionale, in un monumento molto bello ma statico.» (CREM, 1999 p.15)

Nell’insegnamento della matematica si perde il processo del fare matematica che conduce alla costruzione e invenzione di nuove idee e teoremi a vantaggio della statica, ma spesso poco significativa, presentazione delle idee accettate come definitive e vere. L’elemento dell’attività umana nella matematica viene quindi a dissolversi.

Nella consapevolezza dell’importanza dell’elemento culturale le indicazioni nazionali dell’UMI CIIM invece recitano che:

«l’educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenza del cittadino, al cui raggiungimento concorre l’educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni di incertezza. La conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per una corretta acquisizione di una capacità di giudizio. In particolare l’insegnamento della matematica, deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l’allievo, all’uso del linguaggio e ragionamento matematico, come strumenti di interpretazione del reale e non deve costituire unicamente un bagaglio ristretto di nozioni» (UMI-CIIM, 2003 p.10).

La matematica secondo questa prospettiva è da vedersi come un aspetto della conoscenza che promuove il processo globale di crescita attraverso l’interpretazione del reale. In una società complessa ed estremamente dinamica, la matematica fornisce strumenti per una interpretazione critica e consapevole della realtà che permette lo sviluppo di una cultura personale e l’affermazione di un cittadino attivo pienamente inserito in una democrazia. Le capacità matematiche da considerare essenziali a questo compito non possono essere apprese come affini a loro stesse, ma come sviluppo di concetti, metodi e atteggiamenti cui l’insegnamento dovrà dedicare la maggior quantità di spazio ed energia.

Un'altra tradizione culturale tipicamente americana ma che si è riflessa un po’ in tutto il mondo occidentale, Italia compresa, e che ha contribuito a rinforzare le pratiche dell’insegnamento più tradizionale della matematica è l’individualismo (Ball, 1988). In questa tradizione culturale sono valorizzati il lavoro indipendente e la rappresentazione personale delle cose. Infatti le usuali pratiche scolastiche come: verifiche, recuperi, programmi di istruzione individualizzati, riflettono questa tradizione. Si parla di differenza individuali e di differenti stili di apprendimento personali. «La psicologia, la scienza che più spesso è ritenuta fondamentale per l’insegnamento, riflette questo assunto rinforzando il tradizionale focus sull’individuo» (Ball, 1988). Le ordinarie classi in cui si svolge la lezione di matematica riflettono ciò nell'imporre il lavoro silenzioso e ordinato e l'interpretazione e la collaborazione come chiacchiericcio (Jackson, 1986). Inoltre le risposte corrette sono estremamente incentivate in queste classi, il modo di guadagnare privilegio e rispetto. Anche questa competitività intellettuale è incorporata nelle assunzioni culturali come le prospettive sulla conoscenza e l'insegnamento viste prima.

L'individualismo inoltre, non corrisponde all'immagine di una comunità di discussione accademica (Kuhn, 1962). Gli scienziati non si trovano d'accordo ed eliminano nuove comprensioni nel perseguimento del loro lavoro e nel risolvere nuovi dilemmi. Una matematica che non sia *mimetica* ma metta al centro la sua funzione culturale implica una comunità di apprendimento (Schwab, 1978), una collaborazione di gruppo nel divertente perseguimento della comprensione matematica (Bardelli et al, 2010).

6.4.2 Aspetto b. L'organizzazione scolastica e le condizioni di insegnamento.

Anche i fattori istituzionali e organizzativi presentano ostacoli al cambiamento. La scuole sono caricate da scopi molteplici e in competizione, non ultimo dei quali è quello di promuovere le eccellenze individuali e il progresso degli apprendimenti assicurando allo stesso tempo equità e accesso. La retorica dell'individualismo è dominante per molti insegnanti; tuttavia sanno che ci si aspetta che soddisfino i bisogni individuali e che garantiscano l'equità. La spinta alla standardizzazione e all'evitare i rischi degli esperimenti è grande, alla luce di queste pressioni (Goodlad, 1984). Gli insegnanti nel timore di essere giudicati negativamente dalle performance dei loro studenti si concentrino sulle abilità di base, sul calcolo e sulla memorizzazione di fatti. La struttura della giornata scolastica prevede che gli insegnanti lavorino isolati gli uni dagli altri e che abbiano poco tempo e aiuto per implementare innovazioni. Il tempo è segmentato in blocchi di 50-60 minuti, gli argomenti previsti devono essere fatti, gli alunni devono essere preparati sia per le verifiche che per la classe successiva. Inoltre lavorare con gruppi di quasi 30 bambini rende le sperimentazioni rischiose per insegnanti che devono mantenere anche l'ordine e la routine. Gli insegnanti elementari devono insegnare anche altre materie oltre alla matematica e gli insegnanti delle scuole medie devono insegnare in classi più numerose. Spesso gli insegnanti non hanno il tempo di pianificare ed organizzare ricche sperimentazioni per gli alunni, né possono fornire le libertà di un curriculum più esplorativo. Sentono le pressioni che tendono a volere che gli alunni siano capaci di gestire i contenuti richiesti. Per esempio, il tempo richiesto agli studenti per approfondire un contenuto come la misura può sembrare essere in contrasto col fatto che gli studenti debbano conoscere anche altri argomenti. La spinta verso un curriculum ordinato e algoritmico è molto forte. Insegnare le misure fornendo formule per il calcolo di semplici superfici piane risulta più semplice e più efficiente che manipolare e far manipolare agli studenti sussidi didattici ed esplorare con gli studenti diverse modalità di risposta alle domande "quanto grande" e "quanti". Anche quando possiedono prospettive alternative a quelle dominanti per l'insegnamento della matematica il contesto scolastico obbliga gli insegnanti a mantenere l'insegnamento su binari tradizionali (Handal, 2003; Perry & al., 1999; Sosniak & al. 1991). Altri fattori come il genere, l'appartenenza a determinate classi sociali, le esperienze precedenti di insegnamento fanno sì che le convinzioni degli insegnanti siano difficilmente modificabili (Raymond & al., 1991; Cavalli, 2000). Come conseguenza di ciò secondo Thompson (1984) gli insegnanti, nella loro pratica, e a causa dell'enorme numero di interazioni che devono sostenere, tendono a sviluppare risposte rapide per classi di episodi che nel tempo diventano modelli di comportamento nel loro repertorio di pratiche di istruzione. McAnich (1993) in una revisione della letteratura sull'argomento ha sottolineato come gli insegnanti siano molto "pratici" nel loro approccio ai compiti di tipo educativo «sono pragmatici nella presa di decisioni...e intuitivi nel loro approccio al problem solving» (McAninch, 1993 p.7). Inoltre l'insegnamento è visto come una professione molto pratica e utilitarista in cui gli insegnanti etichettano presto le innovazioni come praticabili o impraticabili a seconda che l'insegnante giudichi se la proposta sia per lui confacente o meno. Il successo delle innovazioni è stato messo in relazione alla personalità degli insegnanti (McAninch, 1993; Damiano, 2006; Handal, 2003) ed è stato sottolineato come gli insegnanti pongano enfasi sulle peculiarità delle loro classi rispetto alle proposte delle innovazioni didattiche (McAninch, 1993). In effetti le difficili condizioni di prevedibilità della lezione in classe pone gli insegnanti nella condizione di attingere alle risorse delle proprie credenze (Nespor, 1987) e ciò accade proprio quando si a che fare con problemi mal strutturati o domini in cui gli schemi cognitivi non sono più adatti per un'adeguata interpretazione (Nespor, 1987). In sintesi il lavoro di insegnante richiede numerose prese di decisione in solitudine e in circostanze variabili. Queste richieste pressanti mettono l'insegnate nella condizione di ricorrere alla praticabilità e all'intuizione come risorse indispensabili per sopravvivere nella professione (Damiano, 2006; Handal, 2003).

Tutte queste caratteristiche dell'organizzazione scolastica e delle condizioni di insegnamento sono parte del contesto in cui devono operare le riforme (Cuban, 1984, Sarason, 1971) e sono state evidenziate in studi oltre che negli Stati Uniti anche in Australia (Lokan & al. 1997) nell'indagine TIMSS. Sarason sostiene che il massiccio fallimento della nuova matematica negli Stati Uniti d'America è dovuto, in larga misura, all'insufficiente considerazione data dai riformatori al peso delle regolarità della scuola e alla cultura scolastica. Purtroppo i programmi riformatori, siano il costruttivismo, il bourbakismo o qualsiasi altro, sono spesso vincolati a un'ideologia di partenza che trascura il piano della analisi della realtà scolastica. Le teorie psicologiche dell'apprendimento vengono così piegate alle ideologie che fondano i programmi per costruire teorie dell'azione didattica che gli insegnanti dovrebbero seguire per far corrispondere meglio la realtà al piano ideale dettato dal programma. La realtà non è però così facilmente adattabile alle richieste dell'ideologia che sostiene i programmi e quindi questo porta a risultati imprevisti o addirittura opposti a quelli attesi (Sierpinska, 1996). Di conseguenza, senza tenere conto di un più ampio contesto, il cambiamento, se avviene, è probabile che sia superficiale come ad esempio cambiare i libri ma non il metodo di istruzione (Sarason, 1971).

Queste condizioni della scuola hanno dirette conseguenze sugli sforzi di cambiare l'insegnamento della matematica, sulla sua implementazione (Wildavsky & Giandomenico, 1979). Spesso i riformatori che non conoscono come funzionano realmente le scuole opereranno sotto la erronea concezione che le riforme debbano semplicemente essere messe implementate dagli insegnanti. Piuttosto è il contrario: le riforme sono interpretate e adattate dagli insegnanti; l'intento, l'attuazione e l'effetto dell'innovazione cambiano nella messa in opera degli insegnanti (Berman & McLaughlin, 1975; Sarason, 1971). Aspettarsi che le riforme siano implementate fedelmente con un meccanismo top-down è una fantasia che ignora le deboli connessioni tra l'autorità ufficiale e la pratica attuativa (Ball, 1988). Ciò che accade nella realtà è che gli insegnanti bilanciano le diverse priorità personali, dei singoli studenti, della classe, della scuola e delle politiche riformatrici trasformando anche radicalmente quelli che sono i programmi riformatori (Ball, 1988).

6.4.3 Aspetto c. La formazione e le competenze degli insegnanti di matematica.

In Italia è solo alla fine degli anni '90 (D.M. 26/05/98) che diventano operative leggi, precedentemente emanate , riguardanti la formazione iniziale universitaria di tutti i docenti. Ricordiamo, ad esempio, che per l'insegnamento nella scuola primaria fino al 1998 la formazione iniziale dei maestri avveniva esclusivamente a livello di scuola secondaria (Istituto Magistrale). Purtroppo il ritardo e la conseguente fretta con cui si è proceduto a livello politico ha impedito che fossero dati spazi opportuni a sperimentazioni e forme organizzative di formazione che fossero realmente innovative e pienamente fondate sulla ricerca nel settore. Lo spostamento dei curricoli scolastici sul versante delle competenze ha comunque permesso in alcuni casi di optare per una forte interazione tra teorie e pratiche nella formazione iniziale in linea con gli esiti della più recente ricerca internazionale sulla formazione degli insegnanti (Altet et al., 2006; Loughran, 2006; Perrenoud et al., 2008). Il modello definito tripolare :lezioni, laboratori, tirocinio scelto in molti paesi del mondo può funzionare «a patto che ci sia una reale integrazione critica fra i tre poli ed in particolare tra i due poli più tipicamente prasseologici» (D'Amore e Pinilla, 2003 p.416).

Per quanto riguarda la formazione in servizio, caso che ci interessa più da vicino, è stato rilevato come questa sia fondamentalmente inadeguata in molti paesi, non solo in Italia, in quanto superata e inadatta alle attuali richieste e necessità sociali e inoltre caratterizzata da una eccessiva trasmissività e da una ridotta attuazione di pratiche (Moreno, 2007). Permangono tendenze conservatrici alla formazione che conducono a forme di sviluppo professionale scollegate dai percorsi formativi precedenti, sia dalle azioni di riforma scolastica perpetuando le «severe discrepanze fra le radicalmente nuove competenze richieste dagli studenti nella società della conoscenza e la capacità d'insegnamento di cui vengono forniti i docenti» (ivi, p.171). L'inadeguatezza della formazione in servizio si evince anche dai numeri: solo 11 stati membri della Comunità Europea hanno reso obbligatorio il perfezionamento o aggiornamento professionale con corsi della durata inferiore alle 20 ore annue. Infine a questo si aggiunge che nel mondo della scuola gli insegnanti non hanno una chiara percezione dell'utilità della formazione in servizio e l'offerta formativa non contribuisce a chiarificarla. Non è ancora chiaro verso quale orientamento di professionalità debba agire la formazione in servizio che fin da quando è nata «ha sempre avuto una funzione ambigua, oscillante tra la presunta necessità di colmare il vuoto di una formazione iniziale carente [...] e un generico bisogno di adeguamento alle conoscenze prodotte dalla ricerca scientifica e accademica» (Summa, 2001 p.77).

I percorsi di formazione in servizio dovrebbero invece avere secondo Paquay (2000) le seguenti caratteristiche 1) muovere dai bisogni professionali emergenti contribuendo a supportare l'elaborazione di nuovi progetti e la ricerca di risposte concrete; 2) fare riferimento all'esperienza professionale come fulcro di processi riflessivi; 3) essere costruita intorno a percorsi di sviluppo professionale che tengano conto e valorizzino le storie e i progetti di ciascuno, pur sviluppandosi in un quadro di collaborazione e di realizzazione di nuovi progetti collettivi.

Relativamente a questi punti ricordiamo che il *The international handbook of mathematics teacher education (2008, vol.2)* propone una serie di ricerche in cui, in riferimento alla formazione matematica a vari livelli di solarizzazione, sono proposti vari approcci per sviluppare la formazione professionale che sono, se guardiamo al passato e in particolare al caso della matematica, particolarmente innovativi. La prima parte è dedicata allo studio di casi. Un esempio è l'uso di interviste narrative (Chapman, 2008) non solo a scopo di ricerca ma come strumento pedagogico per la riflessione sulla propria professionalità relativamente ai contenuti di insegnamento. La scrittura narrativa e la riflessione sulla stessa come metodo di indagine conduce l'insegnante a distinguere la pedagogia generale dalla pedagogia collegata alla disciplina ovvero il contenuto pedagogico dell'insegnamento della disciplina. Lo studio di casi vero e proprio è proposto con l'analisi di casi esemplari e di situazioni problematiche (Markovitz & Smith, 2008). I casi esemplari sono resoconti narrativi che danno un quadro di un episodio di istruzione nella sua completezza, mettendo in luce le interazioni tra insegnate e studenti. Le situazioni problematiche sono scenari più brevi che si focalizzano su specifici problemi o dilemmi incontrati dagli insegnanti quando ascoltano o interagiscono con gli studenti (su questa metodologia verterà parte della presente ricerca). Il risultato di questo tipo di approcci è che gli insegnanti sono coinvolti in attività ricche di significato che consentono agli insegnanti di mettersi alla prova in compiti di problem solving e generalizzazione successiva. Altri contributi vengono forniti da ricerche basate sulle videoregistrazioni come strumento di formazione e sull'analisi della *Lesson Study* (Yoshida, 2008) un particolare processo di apprendimento per insegnanti in servizio che è stato creato in Giappone ma sta avendo molto riscontro, per adesso più a livelo di ricerca anche in altri paesi tra cui gli Stati Uniti. Altre sezioni del volume riguardano l'uso di attività matematiche che coinvolgono direttamente gli insegnanti nei percorsi di formazione e l'utilizzo delle teorie elaborate dalla ricerca in educazione matematica come strumento di sviluppo professionale.

Su quest'ultimo punto si soffermano con insistenza D'Amore e Pinilla (2003, 2009) nel sostenere che ormai certi teorie in didattica della matematica hanno raggiunto un tale consenso a livello internazionale, basato su numerose ricerche, che dovrebbero essere patrimonio sicuro degli insegnanti di scuola primaria e secondaria. A questo proposito, riferendosi in particolare alla ricerca in didattica della matematica che è stata prodotta in Francia, cita: il contratto didattico, la teoria delle situazioni, gli ostacoli dell'apprendimento (ontologici, epistemologici e didattici), immagini e modelli, concetti figurali, ingegneria didattica e trasposizione didattica. Ciò che viene proposto dagli autori è che la competenza in didattica della matematica possa modificare l'atteggiamento degli insegnanti nelle loro pratiche di insegnamento e a tale proposito cita l'esempio dell'insiemistica che è stata lentamente abbandonata nel tempo anche da i suoi più ferventi sostenitori a seguito dell'affermarsi di nuove scoperte in didattica della matematica o il lento l'abbandono «di strumenti didattici pre-confezionati, la cui utilità didattica era incondizionatamente accettata da molti insegnanti» (D'Amore e Pinilla, 2003 p.424), mentre oggi sono visti sotto un ottica più critica. Nonostante tutto anche gli autori convengono sul fatto che nel caso dell'insegnamento della matematica, la scolarizzazione ha già formato una visione tradizionale dell'insegnamento e apprendimento oltre che la personale comprensione della matematica degli insegnanti. Siccome questa è la matematica che insegneranno, ciò che hanno imparato nel loro percorso scolastico come studenti diventa un elemento fondamentale della loro preparazione come insegnanti. Pensando di conoscere già molto dell'insegnamento basandosi sulla loro passata esperienza e sul buon senso o senso comune, gli insegnanti in formazione non sono molto disposti a indagare o imparare sul proprio insegnamento della matematica. Quando entrano in ruolo effettivo l'incontro con una comunità di pratiche che perpetua questo tipo di insegnamento non facilità il cambiamento nell'insegnamento e neanche nelle disposizioni a pensare la propria attività e la propria disciplina in forme diverse da quelle ormai interiorizzate nel corso dei propri studi passati. Molte ricerche osservano che la formazione iniziale e in servizio degli insegnanti ha poco effetto sulle conoscenze e credenze degli insegnanti (Handal, 2003; Lortie, 1975, Viteritti, 2004) e che ciò che gli insegnanti imparano nei corsi di aggiornamento o formazione viene eliminato quando poi entrano a insegnare a scuola o non entra a far parte del corpo di conoscenze che predispone una modifica della didattica nel caso dei docenti in servizio. In effetti non è molto sorprendente che alcuni corsi universitari non possano eliminare decenni di osservazioni dirette di insegnamento fatte nel corso dei propri studi scolastici. Inoltre bisogna riconoscere che l'alto grado di coerenza e la solidità delle routine dell'insegnamento tradizionale della matematica fornisce all'insegnante una sicurezza sull'efficacia del proprio lavoro che non aiuta certamente il cambiamento della metodologia didattica.

7 Scopo della ricerca

Questa ricerca si prefigge lo scopo raggiungere una migliore comprensione del tipo di conoscenza matematica che gli insegnanti di scuola primaria e secondaria di I grado possiedono per contribuire a orientare i programmi di formazione in servizio in per insegnanti di matematica nella scuola elementare.

Allo stadio attuale della ricerca, come in parte già visto, sono ancora ampie le aree di indagine in cui il tipo di conoscenza matematica deve essere meglio definito e collegato con altri aspetti del sapere degli insegnanti. Nella ricerca in educazione la conoscenza matematica dei docenti è indagata secondo due principali aree: quella delle conoscenze espresse e quella delle conoscenze che gli insegnanti mettono in pratica. All'interno di queste aree principali nella ricerca in educazione matematica si è provveduto a fornire vari modelli del tipo di conoscenza matematica posseduta dagli insegnanti, conoscenze che comunque attraversano anche il confine delle due aree (An e al., 2004; Ball & al., 2008; Lampert, 2001; Rowland e al., 2005) .

Queste ricerche (An & al. 2004; Ball & al. 2008; Rowland & al. 2005; Wilson & al. 1987) hanno individuato alcune forme di quella che dovrebbe essere la specifica conoscenza disciplinare degli insegnanti di matematica, diversamente intesa dalla conoscenza matematica di altri specialisti o della gente comune. Le caratteristiche di questa conoscenza sono in corso di più precisa definizione o di innovazione (Graeber & Tirosh, 2008) condotto con diversi metodi generalmente propri delle metodologie qualitative di ricerca.

Il presente studio si focalizza sostanzialmente su due aspetti della conoscenza matematica dei docenti. Il primo è un'analisi della conoscenza sul contenuto pedagogico della matematica (PCK) focalizzato su alcune sue specifiche caratteristiche relative alla gestione da parte degli insegnanti del PCK nell'interazione con gli studenti.

Più precisamente, rispetto alla conoscenza sul contenuto pedagogico della matematica vengono indagate:

- **le conoscenze mobilizzate dai docenti quando affrontano gli errori degli studenti;**
- **le interpretazioni che gli insegnanti danno del pensiero matematico degli studenti;**
- **le modalità di ragionamento che conducono i docenti a formulare le risposte che forniscono.**

Il secondo aspetto riguarda le convinzioni e atteggiamenti dei docenti rispetto:

- **alla matematica come disciplina,**
- **all' insegnamento della matematica;**
- **all' apprendimento della matematica;**
- **ai bambini come studenti di matematica;**
- **alle loro idee sui principali condizionamenti rispetto all'insegnamento e all'apprendimento;**

Rispetto alla relazione tra PCK, convinzioni e atteggiamenti degli insegnanti, l'indagine cerca di formulare una descrizione di come l'utilizzo delle conoscenze relative al contenuto pedagogico per l'insegnamento si integrano con i significati espressi rispetto ai temi oggetto delle convinzioni e atteggiamenti sopra riportati.

L'interesse dell'indagine è rivolto ai significati che gli insegnanti esprimono e manifestano rispetto ai fenomeni indagati, al fine di

precisare, tenendo presente il sapere presentato dagli insegnanti, il quadro dei saperi su cui la formazione per gli insegnanti in servizio deve poi costruirsi. La formazione degli insegnanti, seguendo uno schema didattico ormai acquisito per l'insegnamento/apprendimento degli studenti, dovrebbe farsi carico delle preconoscenze e convinzioni che gli insegnanti possiedono per risultare più efficace nelle sue diverse articolazioni: i contenuti disciplinari, la pedagogia su cui si fonda l'insegnamento della disciplina (PCK), le metodologie didattiche per l'insegnamento.
La metodologia di indagine è stata di tipo qualitativo in quanto mirante: al fare emergere i significati del sapere dei docenti (Sorzio, 2005) e al comprendere questo stesso sapere in un quadro teorico che contribuisca a meglio definire i concetti di conoscenza sul contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica e le relazioni di questo con le convinzioni degli insegnanti (Bryman, 2008).

7.1 Il progetto di ricerca

La ricerca è stata organizzata seguendo due linee guida: una più propriamente di indagine e l'altra di formazione.
Dopo l'individuazione del problema di ricerca si è posta la questione di come coinvolgere gli insegnanti nell'indagine che li riguardava. Si è così pensato di integrare l'indagine con una formazione didattico/disciplinare che fosse coerente con l'intento della ricerca.

L'indagine sulla conoscenza disciplinare dal punto di vista pedagogico è stata così accoppiata a un percorso di formazione che ha coinvolto in una prima fase esclusivamente i soggetti partecipanti alla ricerca e in un secondo momento ha dato spazio anche a tutti i docenti di matematica delle scuole che avevano aderito al progetto.

Nel corso dell'indagine gli insegnanti hanno partecipato a una prima intervista singolarmente in cui sono state presentate simulazioni di situazioni che potevano accadere in classe e nelle quali l'insegnante per rispondere ha dovuto mobilizzare le sue conoscenze disciplinari sulla matematica, quelle didattiche sull'insegnamento della disciplina e quelle sulla conoscenza degli studenti. Successivamente il ricercatore ha organizzato in ogni scuola degli incontri con tutti gli insegnanti partecipanti all'indagine per approfondire e discutere i contenuti matematici e di didattica della matematica presenti nelle domande delle interviste. L'approfondimento è iniziato dalle risposte date dai docenti per introdurli ad alcune delle più significative elaborazioni della didattica della matematica relativamente ai contenuti in esame. La discussione è stata una modalità per introdurre l'approfondimento in modo che i docenti dapprima presentassero anche ai colleghi partecipanti il proprio punto di vista sull'argomento e ci fosse quindi un confronto e magari un accordo su come intervenire nella situazione didattica presentata nell'intervista. Infine, collegandosi con i risultati delle interviste e con la discussione, il ricercatore ha presentato il punto di vita della ricerca discutendolo con i docenti.

Per quanto riguarda i temi dei seminari questi sono stati in parte concordati con i docenti e in parte proposti dal ricercatore in base al tema e ai risultati parziali della ricerca.
I seminari, allargati a tutti i docenti della scuola, sono stati tenuti sui seguenti argomenti:

- divisioni e frazioni
- il ruolo degli esempi nell'insegnamento della matematica
- le indagini TIMSS e PISA
- la soluzione dei problemi a partire dalla costituzione dello spazio problematico
- il ruolo del tipo di attività matematica nell'apprendimento.

7.2 Il sito e i partecipanti alla ricerca

La ricerca è stata condotta con nove insegnanti di tre Istituti Comprensivi di scuole primarie e secondarie di I grado di tre diverse province della regione Friuli Venezia Giulia. Gli Istituti coinvolti nel progetto di ricerca sono uno in provincia di Trieste, uno in provincia di Udine e uno in provincia di Gorizia.

Il progetto di ricerca, dopo consultazioni con dirigenti dell'USR del Friuli Venezia Giulia e con l'Ispettore Tecnico Ministeriale e definitiva approvazione, è stato inviato per posta elettronica ai Dirigenti Scolastici di 15 Istituti Comprensivi della regione, selezionati sia in base considerazioni di carattere logistico sia in base alla favorevole disponibilità dimostrata in precedenti partecipazioni a progetti di formazione dei docenti.

A seguito delle risposte pervenute dai Dirigenti Scolastici nell'autunno del 2008 sono state organizzate degli incontri tra il ricercatore e i dirigenti degli Istituti che per primi hanno dato adesione al progetto per definire più in dettaglio il tipo di impegno e di coinvolgimento richiesti alle scuole e ai docenti che avessero aderito alla ricerca. Nel corso di questi incontri, come già esplicitamente dichiarato nel progetto, è stato anche discusso il possibile adattamento della ricerca in base alle richieste della scuola. Il criterio di selezione degli istituti è stato scelto a causa dei limiti di tempo che lo svolgimento completo di tutto il progetto imponeva e in parte anche al ritardo con il quale alcune scuole hanno risposto alla richiesta di partecipazione.

I tre istituti hanno intrapreso differenti percorsi di adesione al progetto. L'istituto in provincia di Gorizia, tramite la sua Dirigente Scolastica, ha individuato da subito tre docenti che hanno aderito al progetto: due di scuola primaria e una di scuola secondaria di I grado. La Dirigente Scolastica dell'istituto in provincia di Udine, ha invece indetto una riunione tra ricercatore e docenti di matematica delle scuole primarie e secondaria di I grado per discutere il progetto di ricerca. Una sola docente di scuola primaria ha aderito al progetto. L'istituto in provincia di Trieste è stato invece coinvolto attraverso l'azione di una docente distaccata come tutor all'Università di Trieste che personalmente ha aderito al progetto promuovendolo anche ad altre colleghe che vi hanno aderito nel corso dei mesi successivi. In tutto cinque docenti di scuola primaria dell'istituto hanno aderito al progetto. La dirigente in questo caso ha lasciato che liberamente le docenti si organizzassero come meglio ritenevano, nei limiti dei vincoli imposti dal loro impegno lavorativo, per seguire il percorso di ricerca proposto.

C'è da evidenziare come sia stato importante per l'adesione al progetto l'azione di una figura di prestigio all'interno della scuola: come la dirigente per la scuola in provincia di Gorizia o l'insegnante tutor nel caso della scuola di Trieste. Nel terzo caso, dopo l'adesione espressa dalla Dirigente a Giugno 2008, c'è stato un cambio nelle dirigenza con una nuova dirigente subentrata a Settembre. In questo caso la nuova dirigente non ha seguito né promosso da vicino il progetto lasciando che gli insegnanti da soli decidessero cosa fare. Il numero delle adesioni dei docenti per scuola rileva come l'adesione sia stata maggiore nei casi in cui c'è stata una promozione del progetto anche dall'interno dell'istituto oltre che da parte del team di ricerca.

Gli incontri tra ricercatore e docenti si sono sempre svolti nelle sedi scolastiche. Dopo l'adesione al progetto è stato indetto un incontro tra ricercatore e docenti in ogni singola scuola per organizzare nei dettagli il percorso di ricerca e formazione.

I docenti partecipanti sono tutte donne con un numero di anni di insegnamento della matematica che varia dai due ai venti. Le insegnanti di scuola primaria hanno insegnato anche altre discipline oltre la matematica. La formazione in servizio relativa alla matematica e alla sua didattica è stata pressoché assente se si esclude l'insegnante di scuola secondaria e l'insegnante di scuola primaria con più anzianità di servizio che però ha seguito corsi di formazione in matematica molti anni fa sulla teoria degli insiemi e sull'insiemistica. In tutti gli altri casi le insegnanti hanno una formazione in servizio sulla matematica da autodidatte. Una sola insegnante è laureata in Scienze della Formazione Primaria. Le altre hanno percorsi di formazione diversificati: laurea in Psicologia, laurea in Lingua e Letteratura straniera, specializzazione per il sostegno, tre anni di corso di laurea in filosofia, un anno di corso di laurea in fisica. Tutte hanno il diploma magistrale ad eccezione dell'insegnante di scuola secondaria. Le nove docenti che hanno aderito al progetto sono: Elena, Mirella, Rosa, Franca, Giulia, Roberta, Carla, Maria ed Ester. Gli anni di insegnamento di matematica per ogni docente sono i seguenti: Elena 4, Mirella 2, Rosa 14 (scuola secondaria), Franca 4, Giulia 6, Roberta 20, Carla 2, Maria 3, Ester 3. Tranne l'insegnante di scuola secondaria le maestre hanno però più anni di insegnamento alle spalle di quelli riferiti alla matematica in quanto hanno in precedenza insegnato altre discipline.

7.3 Le domande di ricerca

All'interno del contesto di ricerca che è stato delineato attraverso scopi, partecipanti e contesto, la domanda principale di ricerca che è stata posta riguarda **la descrizione di quale sia la conoscenza del contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica degli insegnanti di matematica di scuola primaria e di come gli stessi insegnanti lo utilizzino alla luce delle personali convinzioni sulla disciplina e sul suo insegnamento.**

Per fornire una risposta alla domanda in base sia alle caratteristiche che costituiscono una prima definizione più precisa di conoscenza del contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica, sia alla dimensione delle convinzioni sulla disciplina che possono gettare luce su come si può definire meglio il concetto in esame sono state identificate alcune domande di ricerca più puntuali a cui i dati raccolti potevano fornire una adeguata risposta:

1. **Quali sono le modalità di utilizzo del PCK degli insegnanti quando affrontano gli errori degli studenti?**
2. **Quali sono le modalità di utilizzo del PCK degli insegnanti quando affrontano alcune domande inaspettate degli studenti che dimostrano difficoltà di comprensione sui contenuti disciplinari?**
3. **Qual è il ruolo della conoscenza matematica, delle convinzioni verso la disciplina degli insegnanti nei riguardi del ragionamento e comprensione matematica degli studenti nelle situazioni didattiche proposte?**

4. **Quale ruolo gioca la personale percezione dell'insegnamento della matematica e di sé stesso come insegnante rispetto alle modalità di comprensione del**

pensiero degli studenti?

5. **Come interagiscono le conoscenze, le convinzioni e gli atteggiamenti verso matematica, il suo insegnamento e il suo apprendimento con PCK nelle situazioni di errore o domande da parte degli studenti?**

7.4 Assunti filosofico epistemologici della ricerca

Il campo di indagine sulla comprensione dei saperi dei docenti è ancora ricco di incognite, problemi aperti e modelli incompleti. In particolare in Italia la ricerca sul sapere dei docenti è ancora agli inizi (Damiano, 2006) e poco orientata verso l'indagine sulla specificità del sapere docente in relazione alla competenza didattico/disciplinare. Anche se a livello internazionale si auspica un passaggio da ricerche a carattere qualitativo fatte su dettagliate analisi di pochi insegnanti a ricerche di tipo quantitativo per rinforzare il quadro teorico con dati suffragati da campioni di docenti più numerosi (Adler, 2005) riteniamo che ci sia ancora bisogno e spazio per indagini empiriche che conducono il ricercatore a cercare la complessità di punti di vista piuttosto che a restringere i significati in poche categorie o idee, per relazionarsi il più possibile con il punto di vista dei partecipanti rispetto alla situazione studiata (Creswell, 2009). La scelta trova ulteriore giustificazione nel fatto che indagini a carattere qualitativo e quantitativo danno tuttora risultati contrastanti (Wilkins, 2008; Rowland et al., 2005) segno che i quadri teorici e metodi utilizzati influenzano in modo decisivo i risultati delle ricerche.

La ricerca del punto di vista dei partecipanti non espone però il ricercatore semplicemente alle interpretazioni dei soggetti partecipanti. In realtà le interpretazioni dei soggetti che sono state elicitate vengono inserite in un modello scientifico, per cui è condotta una doppia interpretazione: il ricercatore fornisce un'interpretazione di interpretazioni altrui. C'è poi un terzo livello di interpretazione in quanto le interpretazioni del ricercatore sono ulteriormente interpretate in termini di concetti, teorie e letteratura relative al settore disciplinare dell’educazione matematica entro il quale si situa la ricerca (Bryman, 2008).

Questo processo di ricerca è stato condotto secondo un approccio che accoglie l’idea che la razionalità scientifica nelle scienze dell’educazione sia da configurarsi come ragionevolezza (Burbules, 1995) in cui è riconosciuto comunque il personale punto di vista del ricercatore come parziale e bisognoso di confronti secondo linee di ragionamento di tipo argomentativo all’interno della comunità di ricerca. Inoltre è valorizzata la considerazione di alternative al personale punto di vista del ricercatore oltre un costante monitoraggio sulla validità delle proprie convinzioni (Burbules, 1995; Sorzio, 2005). Come criterio per sostenere la accettabilità dei risultati è individuato l’equilibrio riflessivo (Elgin, 1996): un «atteggiamento mentale sistematicamente critico e costantemente controllato, per integrare i dati del lavoro sul campo in un quadro coerente e raggiungere un giudizio ponderato» (Sorzio,2005, p. 31). Il sistema di conoscenze raggiunto non fornisce procedure garantite ma «soltanto credibilità provvisorie...riconoscendo che ulteriori dati possono porre dubbi significativi» (Elgin, 1996, p.12).

8 Metodi di indagine

8.1 Le interviste basate su scenari didattici ipotetici

La prima parte della ricerca intende acquisire maggiori conoscenze sulle modalità di utilizzo del sapere didattico/disciplinare degli insegnanti in diverse situazioni in cui varia fondamentalmente il contesto matematico. L’obiettivo è quello di ricostruire e fornire una rappresentazione delle modalità in cui gli insegnanti usano le conoscenze chiamate in causa, in questo caso quelle relative all’insegnamento della matematica.

Le interviste sono state ideate come scenari a cui l’insegnante deve rispondere mobilizzando il proprio sapere pedagogico/didattico/disciplinare come fossero in una reale situazione di insegnamento. Queste situazioni di insegnamento sono simili ai “casi” in quanto il loro focus è su specifiche problematiche di insegnamento (Merseth, 1996). Gli scenari erano specifici e l'insegnante era informato sul grado della classe in cui doveva inserire la situazione proposta, questo per limitare l'apertura del contesto e fare in modo che tutti gli insegnanti intervistati avessero un riferimento comune all'interno del quale organizzare il proprio pensiero. Oltre a questa informazione non è stata data agli insegnanti alcuna altra indicazione per lasciarli liberi di rispondere in base alle personali esperienze di insegnamento. Gli scenari di classe ipotetici sono fondati su questioni di apprendimento e insegnamento che precedenti ricerche e esperienze hanno individuato come fondamentali e sulla personale esperienza e conoscenza specifica del ricercatore.

Gli scenari proposti hanno anche un'utilità e una applicabilità per gli insegnanti in quanto possono porli nella posizione di discenti. Queste interviste hanno quindi una potenzialità sia ai fini della ricerca che della formazione (Biza et al., 2007). Inoltre i tipi di questioni con focalizzazione su contenuti matematici e situazioni didattico/educative sono utili per entrare nei punti di vista degli insegnanti e nelle loro intenzioni di pratiche (Dawson 1999).

Le situazioni problematiche proposte invitavano gli insegnanti a fornire risposte agli studenti basandosi sulla loro comprensione del pensiero degli studenti.

Questi scenari forniscono un'opportunità di esplorare e sviluppare la sensibilità degli insegnanti alle difficoltà e bisogni degli studenti (Jaworski, 1994) e anche un'abilità di fornire adeguato (pedagogicamente sensibile e matematicamente preciso) feedback agli studenti. L'errore può fornire l'occasione per sondare le sue cause e afferrare le opportunità didattiche che eventualmente fornisce.

Nella formazione degli insegnanti sia a livello elementare che di scuola media c'è tuttora poca attenzione alla conoscenza e comprensione del modo di pensare degli studenti specialmente in relazione a specifici argomenti dei contenuti disciplinari. Di conseguenza anche poco spazio viene dato alla formazione degli insegnanti sulle risposte più appropriate da fornire agli studenti in specifici casi in cui possono venire con maggiore probabilità a trovarsi nel corso della loro attività di insegnamento.

Ai docenti all'inizio dell'intervista veniva chiesto:

- Quale difficoltà ha incontrato, se l'ha incontrata, lo studente? Che cosa non ha capito del problema/esercizio?
- Come interverresti nella situazione, con quale spiegazione?

Nel corso dell'intervista il ricercatore ha sempre approfondito quando possibile l'argomento con altre domande nel caso ce ne fosse stata necessità. Le interviste ponevano nove situazioni matematiche differenti sui diversi temi trattati nel curricolo di aritmetica proprio della scuola elementare. Le situazioni matematiche presentate erano anche di diversa difficoltà e toccavano componenti differenti della conoscenza matematica: quella relativa a fatti matematici (procedure e concetti) e quella sintattica relativa ai modi di indagine della disciplina e alle procedure di giustificazione (Schwab, 1978; Ball, 1990).

Le interviste, condotte alla presenza del solo ricercatore, hanno avuto la durata di circa un'ora ciascuna.

Gli scenari ipotetici hanno come contenuti l'aritmetica a livello di scuola dell'obbligo e in un caso la geometria. I dieci scenari proposti sono ripartititi in tre categorie: cinque in cui l'intervento dell'insegnante è richiesto per rimediare a un errore commesso da uno studente, quattro in cui l'intervento dell'insegnante è richiesto per rispondere a delle domande o a delle situazioni in cui gli studenti sono in difficoltà nel portare a compimento un'attività didattica, mentre uno scenario è stato utilizzato per sondare anche le idee delle insegnanti sulla matematica. In tutte le situazione l'insegnante è chiamato a rispondere interpretando dapprima quale sia il problema incontrato dallo studente per assumere poi delle decisioni sul tipo di intervento.

Quello che però è importante è la plausibilità e la reale possibilità che queste situazioni siano incontrate dai docenti nella loro attività didattica. Sicuramente nella propria esperienza ogni insegnante avrà incontrato più volte qualcuno degli scenari presentati e qualcun altro forse non sarà mai stato affrontato nei termini in cui è stato proposto nell'intervista, ma ciò non toglie che possa essere, in quanto individuato come valido dalla ricerca didattica per penetrare nel pensiero degli insegnanti rispetto alle idee degli studenti, un utile modo per indagare il pensiero dei docenti, anche se per qualcuno è la prima volta che si trova a rispondere a quel tipo di situazione.

8.2 L'intervista semi-strutturata per esplicitare ed elaborare le esperienze e concezioni personali.

Allo scopo di integrare i dati provenienti dalle interviste sul contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica è stato predisposto uno schema di intervista semi-strutturata (vedere appendice) in cui, all'interno delle domande aperte che sono state prefissate, è stato lasciato ampio spazio alle insegnanti di esprimere la propria soggettività sia in relazione ai temi oggetto di inchiesta sia ad altre esperienze significative che le insegnanti intenzionalmente esprimevano nel corso dell'intervista (Kvale, 1996). In questo modo i dati raccolti nelle interviste-conversazioni rappresentano delle relazioni significative da interpretare (Kvale, 1996). Le domande, pur essendo state formulate a tutte le intervistate non hanno seguito una sequenza prestabilita ma l'ordine di presentazione è dipeso dal fluire del discorso durante l'intervista (Addeo e Montesperelli, 2007). Inoltre proprio per lasciare la massima libertà di espressione della soggettività degli insegnanti il ricercatore ha integrato il proprio schema di intervista con altre domande, diverse a seconda dell'intervistato, in quanto dirette ad approfondire temi che fossero di particolare interesse per l'intervistato e che emergessero nel corso delle risposte (Mantovani, 2000). Durante l'intervista semi-strutturata, nel quadro di una serie di fattori per adeguare al meglio la comprensione dell'intervistato da parte dell'intervistatore, si è cercato di stabilire una relazione tra intervistatore e intervistato, per esplorare al meglio la personale storia e significati attribuiti ai temi oggetto di ricerca (Sità, 2012; Trinchero, 2002).

Lo schema iniziale delle interviste è stato elaborato in modo da dirigere le risposte dei soggetti all'interno di un modello concettuale definito in forma abbastanza generale con l'intenzione di organizzare il campo di espressione, per quanto possibile, attorno ai seguenti temi in esame:

- La personale esperienza con la matematica da studente e insegnante;
- La concezione sulla matematica come disciplina;
- La concezione sull'insegnamento della matematica;
- La concezione sull'apprendimento della matematica e su come gli studenti la imparano.

Per ogni tema sono state preparate delle domande di approccio insieme a domande sonda per stimolare l'intervistato ad approfondire e specificare, qualora fosse necessario, le sue risposte. Lo stimolo del ricercatore si è diretto a cercare di fare riflettere l'intervistato sul suo sapere di sfondo ossia sui processi di categorizzazione (classificazioni e tipizzazioni della realtà) e reificazione (percezioni di prodotti e comportamenti come fossero realtà oggettive) aiutandolo a individuare il maggiore numero di elementi di esso che potevano avere relazioni con i temi dell'intervista (Kvale, 1996). Le interviste hanno tutte avuto inizio con l'esposizione dell'esperienza dei docenti come studenti di matematica per ottenere una base empirica di riferimento da cui partire per la ricostruzione dei significati, valori e convinzioni sui temi presi in esame (Trinchero, 2002). Ciò che in questa sede va sottolineato è proprio la «ricostruzione delle interpretazioni che i partecipanti alle pratiche educative attribuiscono ad alcuni costrutti concettuali (quali quelli indicati sopra), che possono divergere dalle elaborazioni astratte; in questo caso i cambiamenti nei processi educativi devono tenere in considerazione la prospettiva delle persone implicate direttamente» (Sorzio, 2005, p.108), ovvero gli insegnanti.

Un primo schema di intervista, rielaborato da una parte del TELT (Teacher Education and Learning to Teach) di Deborah Ball (1988), è stato testato su tre volontari non partecipanti alla ricerca, (due insegnanti di matematica e un docente universitario che si occupa di didattica della matematica), per stabilire quali variazioni apportare allo schema, in seguito alle risposte ottenute nel test di prova e per rendere l'intervistatore maggiormente consapevole dei problemi che possono incontrarsi nel corso della conduzione di interviste semi-strutturate con un alto grado di libertà di espressione dei rispondenti. A seguito delle interviste di prova sono state apportate ulteriori modifiche per focalizzare al meglio lo schema sui temi di interesse della ricerca.

Le nove interviste hanno avuto la durata di circa un'ora ciascuna, sono state condotte in forma orale, nelle stesse scuole dove gli insegnanti lavorano, in base alle loro disponibilità di orario, audioregistrate e trascritte su file, inoltre sono state condotte singolarmente successivamente alle interviste sul contenuto pedagogico dell'insegnamento.

9. ANALISI DEI DATI

9.1 Le interviste basate su scenari didattici ipotetici

Alcune domande di ricerca e il limitato numero di soggetti possono suggerire un'analisi soggetto per soggetto indirizzata verso la costruzione di casi. Lo scopo della ricerca è però orientato verso una migliore comprensione e descrizione del tipo di sapere degli insegnanti relativo al contenuto pedagogico dell'insegnamento e di come viene mobilizzato per contribuire a una miglior delineazione del modello di sapere insegnante in relazione all'insegnamento della disciplina. Di conseguenza nell'analisi la focalizzazione è stata posta sul confronto tra soggetti. Per questo motivo le interviste sono state analizzate secondo due criteri:

- Per scenario didattico proposto, confrontando le risposte dei soggetti all'interno di ogni scenario.

- Per soggetto, confrontando le risposte di uno stesso soggetto nei diversi scenari.

Nel primo caso l'analisi ha integrato le risposte dei diversi soggetti per ogni scenario didattico presentato. Nel secondo caso l'integrazione dei vari scenari è stata elaborata soggetto per soggetto. I nomi delle insegnanti sono stati cambiati.

I primi cinque scenari analizzati riguardano situazioni in cui l'insegnante deve individuare, interpretare e porre rimedio ad un errore matematico di uno studente.

Gli scenari richiamano la mobilizzazione del sapere degli insegnanti relativamente al contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica su due articolazioni individuate da Shulman, ovvero: la conoscenza degli insegnanti rispetto alle modalità di pensiero degli studenti sulla matematica che si trovano ad affrontare in classe relativamente a specifici contenuti di insegnamento e le appropriate modalità di intervento degli insegnanti per affrontare e rimediare agli errori (Even & Markovits, 1993; Ball, Thames, Phelps, 2008). Queste modalità di intervento sono entrambe intraprese nell'attività di insegnamento quando gli insegnanti si trovano ad affrontare gli errori matematici degli studenti, ma «a dispetto della ricchezza di risultati sulla conoscenza matematica degli insegnanti c'è ancora una carenza di comprensione rispetto alla conoscenza matematica degli insegnanti per come è utilizzata nell'analisi degli errori in matematica» (Peng & Luo, 2009 p.23), anche se il rispondere agli errori matematici degli studenti è vista come un aspetto chiave dell'istruzione matematica (Hill & al., 2008).

L'analisi è stata condotta secondo due linee: l'interpretazione della natura matematica dell'errore da parte dell'insegnante, che coinvolge la sua conoscenza della matematica, e il tipo di analisi dell'errore da parte dell'insegnante, che coinvolge il sapere sul contenuto pedagogico rispetto all'interpretazione del pensiero dello studente quando commette un errore (Peng & Luo, 2009). Le categorie interpretative mutuate dal modello di analisi dell'errore di Peng e Luo (2009) sono le seguenti:

A) Natura degli errori matematici (SMK)

Tipologia e descrizione

1) Matematico: confondere concetti e/o loro aspetti specifici, mancata o inappropriata conoscenza delle appropriate condizioni di applicazione di algoritmi e teoremi.
2) Logico: falsa argomentazione (deduzione, induzione, etc.), classificazioni improprie, argomentazione circolare, trasformazione non-equivalente.
3) Strategico: mancata distinzione tra pattern, strategia solo a livello locale invece che a livello globale, inadeguatezza nel pensare all'inverso, incapacità di trasformare il problema.
4) Psicologica: "inadeguatezza mentale" (in senso piagetiano), mancato stato mentale appropriato (motivazione, affettività, scarsa memoria)

B) Tipologia dell' analisi degli errori (PCK)

Tipologia e descrizione

1) Identificare: Conoscere l'esistenza degli errori matematici.
2) Interpretare: Interpretare le ragioni sottostanti degli errori matematici.
3) Valutare: valutare il livello di prestazione degli studenti tenuto conto dell'errore commesso.
4) Rimediare: Strategie didattiche per eliminare l'errore matematico.
(Peng & Luo, 2009).

Il modello è stato creato per l'analisi di reali errori degli studenti, ma il suo utilizzo può essere proficuo anche per l'analisi degli scenari ipotetici in cui compaiono errori. Le categorie che sono state utilizzate per analizzare le risposte degli insegnanti hanno escluso la valutazione dell'errore da parte dell'insegnante in quanto un giudizio del livello di prestazione non era richiesto, proprio per il fatto che gli scenari sono ipotetici. Nel corso dell'analisi, poiché il focus dell'indagine è il contenuto pedagogico dell'insegnamento è stata posta maggiore attenzione alla tipologia dell'analisi dell'errore condotta dall'insegnante in quanto questa si associa al PCK, mentre la descrizione degli errori matematici si associa al SMK. In questo Peng & Luo hanno inteso fornire un contributo specifico al modello di Ball & al. (2008) rispetto al tipo di conoscenza della matematica per l'insegnamento di cui gli insegnanti dovrebbero essere in possesso.

9.2 Gli interventi degli insegnanti in seguito a errori degli studenti

Di seguito sono riportati i cinque scenari in cui gli insegnanti sono stati invitati a intervenire su errori commessi dagli studenti.

9.2.1 Analisi dei primi due scenari

S1. Primo scenario

Un giorno durante una verifica sulle sottrazioni ti accorgi che nell'applicazione dell'algoritmo della sottrazione in colonna molti studenti hanno risolto la seguente operazione in questo modo:

$$\begin{array}{l} 60 \\ 28= \\ \hline 48 \end{array}$$

S2. Secondo scenario

Un giorno durante una verifica sulle moltiplicazioni ti accorgi che nell'applicazione dell'algoritmo della moltiplicazione in colonna molti studenti hanno risolto la seguente operazione in questo modo:

$$\begin{array}{r} 123x \\ 645= \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$$

(Ball, 1988).

- **Analisi concettuale e ragioni del contenuto matematico dei primi due scenari**

L'algoritmo in colonna della sottrazione e della moltiplicazione con numeri a tre cifre, sono argomenti insegnati di norma nelle classi seconda e quarta della scuola primaria. Gli algoritmi in colonna si fondano sulla struttura posizionale della numerazione in base dieci, il sistema di numerazione correntemente adottato che costituisce una parte fondamentale della cultura matematica di base di ogni singolo cittadino.

Sebbene a un adulto possa sembrare del tutto evidente quale sia la struttura che fonda il sistema di numerazione, a un bambino di seconda elementare questo fatto non risulta così evidente in termini di raggruppamenti in diversi tipi di unità. Anche se ben presto i bambini riescono a leggere differenti numerali quali 46 o 457 è più difficile per loro comprendere il diverso significato del 4 nei due numerali. In molti casi i bambini hanno difficoltà nello scrivere numeri dell'ordine di grandezza delle centinaia confondendo 538 con 50038 che rappresenta più da vicino il modo in cui viene letto il numero rispetto al modo in cui viene scritto. Se l'insegnante in classe non pone sufficiente enfasi sul concetto di valore posizionale per distinguere il diverso valore delle cifre nei numeri si corre il rischio che gli algoritmi vengano memorizzati senza alcun riferimento al concetto di fondo matematico che li sostiene.

Il concetto di valore posizionale è sicuramente uno dei cardini dell'aritmetica perché fonda tutti gli algoritmi insegnati nella scuola primaria relativi alle quattro operazioni di base. Una conoscenza approfondita della matematica che sostiene il concetto di valore posizionale è richiesta quindi agli insegnanti che devono spiegare buona parte dei contenuti richiesti dalle Indicazioni Nazionali per il Curricolo di matematica partendo da queste basi concettuali.

I due errori presenti negli scenari proposti hanno origine da una mancanza di comprensione del valore posizionale delle cifre che porta nei due diversi casi a sbagliare le procedure degli algoritmi.

Nel primo scenario proposto l'origine dell'errore nell'applicazione dell'algoritmo della sottrazione in colonna è ascrivibile al mancato cambio di una decina in dieci unità nel minuendo. Un'altra possibile interpretazione, a carattere psicologico, che la ricerca può fornire, riguardo all'interpretazione dell'errore nella sottrazione, riguarda il fatto che l'algoritmo dell'addizione in colonna è insegnato a scuola prima di quello della sottrazione in colonna. Questi due algoritmi dal punto di vista della loro forma visuale sono molto simili. Li distingue solo il segno dell'operazione. Gli studenti possono così essere indotti a riprendere una conoscenza procedurale già acquisita, in luogo di una più fragile in fase di acquisizione, in quanto la struttura visuale molto simile dei due algoritmi richiama più facilmente, in quanto già acquisito, il modello dell'addizione in colonna rispetto a quello della sottrazione (Davis, 1989). Questa interpretazione nel modello di Peng e Luo (2009) può essere inserita nella dimensione relativa alle cause psicologiche dell'errore matematico.

Nel secondo scenario l'errore nell'algoritmo della moltiplicazione in colonna dipende dall'errato incolonnamento di unità dello stesso tipo una sotto l'altra, con la conseguenza che l'addizione dei prodotti parziali è calcolata senza tener conto che invece i prodotti parziali sono espressi: in unità semplici, in decine e in centinaia. Lo spostamento a sinistra, nell'algoritmo corretto, del secondo e del terzo prodotto parziale è dovuto al fatto che l'incolonnamento delle cifre dello stesso tipo di unità è necessario per eseguire la seconda parte dell'algoritmo e cioè il calcolo della somma dei prodotti parziali attraverso l'addizione di unità dello stesso tipo. I prodotti parziali sono scritti in diversi tipi di unità e l'omissione dello 0 alla fine del secondo e terzo prodotto è giustificato in base a tale cambio di unità di raggruppamento.

Si può anche evidenziare come dal tipo di risultato ci sia anche un errore definibile di tipo strategico in quanto un controllo del risultato con i valori di partenza dovrebbe mettere in luce come non sia possibile che un numero inferiore alle migliaia sia il risultato di una moltiplicazione di due numeri alle centinaia come messo chiaramente in evidenza da una insegnante.

- **Analisi delle risposte al primo scenario: la sottrazione in colonna**

Tutti gli insegnanti hanno saputo **identificare** l'errore nell'algoritmo della sottrazione, ma ogni insegnante ha fornito più di una singola **interpretazione**.

Le interpretazioni dell'errore degli studenti da parte degli insegnanti sono state raggruppate in quattro categorie di cui la seconda rimanda alla interpretazione psicologica dell'errore fornita da Davis (1989):

- mancanza di attenzione nell'esecuzione dell'algoritmo,

- confusione tra addizione e sottrazione,
- carente memorizzazione della procedura dell’algoritmo
- scarsa comprensione del cambio di unità nel sistema decimale posizionale.

La carenza di attenzione è attribuita dagli insegnanti alla specifica operazione 0 8 tra unità in colonna. L’interpretazione del risultato come 8 è data in due modi:

1) 0 8=8, lo studente trascura lo zero come numero e mette 8 nel risultato delle unità;
2) 0 8=8 0 perché lo studente riconosce che 0 8 è impossibile e inverte le cifre per calcolare comunque l’operazione senza effettuare il cambio alla decina in quanto in questo modo l’operazione risulta più semplice.

Questa mancanza di attenzione porta, nell’interpretazione degli insegnanti, a dimenticare di eseguire il cambio di unità alle decine nel minuendo.

La confusione tra addizione e sottrazione è spiegata come una estensione inappropriata della proprietà commutativa dell’addizione alla sottrazione. L’estensione è interpretata come un modo per rendere il calcolo più semplice «...come è più facile calcolare 10+2 invece di 2+10...» (Maria) come una sorta di automatismo che lo studente applica alle sottrazioni in colonna dopo aver imparato l’algoritmo delle addizioni in colonna. Lo zero può giocare un ruolo in questa confusione tra operazioni. Lo zero è l’elemento neutro dell’addizione, ma Mirella un insegnante con due anni di esperienza afferma che «...lo zero è un elemento neutro nella sottrazione solo quando è al sottraendo...» e ciò può condurre a incomprensioni nell’interpretazione dell’operazione da parte degli studenti che estendono questa interpretazione allo zero quando è in posizione di minuendo o come cifra delle unità del numero al minuendo.

Nella fase di interpretazione talvolta le insegnanti non vanno a fondo nel loro ragionamento dando interpretazioni che sono in parte superficiali.

La carente memorizzazione della procedura dell’algoritmo è chiamata in causa dai docenti come motivo dell’errore perché gli studenti non eseguono i passi della procedura nell’ordine corretto. Gli insegnanti non usano esplicitamente il termine memorizzazione ma usano parole come “comprendere” o “procedura non chiara”. Elena un’ insegnante con quattro anni di esperienza afferma:

> «il problema è che…capire come risolvere l’operazione richiede di seguire una procedura che ha un certo numero di passaggi. Bisogna partire col primo numero della sottrazione e da questo togliere il secondo e non l’opposto. Quindi dovrebbe essere fatto 0 8 e non 8 0 come probabilmente è stato fatto qui.»

Carla, un’insegnante con tre anni di esperienza, interpreta l’errore come se lo studente avesse iniziato la sottrazione dalle decine e continuato poi con le unità. La sua interpretazione deriva dal fatto che l’operazione 6 2=4 nel risultato è corretta. Poiché lo studente ha sottratto prima le decine tra loro non può procedere oltre con la procedura a causa della sottrazione 0 8. Lo studente quindi si confonde e mette 8 come risultato delle sottrazione 0 8 perché non considera lo 0. In questo caso Carla fa dipendere una mancanza di attenzione nel considerare lo zero come cifra dall’errata esecuzione dell’ordine dei passi dell’algoritmo.

Oltre alla distrazione come causa dell’errore, nel caso di Carla, la sua idea che l’operazione sia iniziata dalle decine e che questa sia la causa dell’errore, in quanto lo studente non sa come procedere di fronte a 0 8, è in realtà un falso problema perché l’operazione è eseguibile correttamente anche in questo modo se il numero è concepito correttamente come un'unica entità. Infatti basterebbe scomporre le 4 decine del risultato in 3 decine e 10 unità e sottrarre poi a queste le 8 unità del sottraendo. In realtà l’insegnante non affronta questa spiegazione ma, dato il risultato finale di 28, interpreta il pensiero dello studente come se questi concepisse il numero di due cifre in modo che le due cifre siano separate di fatto e non facenti parte di raggruppamenti diversi di un unico numero. Carla non affronta però direttamente questa ipotesi nella fase di rimedio.

In queste interpretazioni la comprensione della procedura significa il ricordarsi della sequenza dei passi giusti da eseguire nell'algoritmo più che una reale comprensione della ragione che sostiene la sequenza dei passi dell'algoritmo o dei concetti matematici su cui questo si fonda.

L'ultima interpretazione proposta dalle insegnanti considera la comprensione del concetto di cambio. Questo concetto compare nelle interpretazioni di quasi tutte le insegnanti, ma solo per tre di loro: Franca, Roberta e Giulia, la sua comprensione è intesa come fondamentale per evitare l'errore. In altre interpretazioni il cambio non effettuato è indicato come conseguenza di una mancanza di attenzione o di una confusione tra addizione e sottrazione innescata dalla presenza dello 0. Ester un'insegnante che ha insegnato matematica per tre anni sempre in classe prima afferma:

«ciò che disturba è lo 0...perché lo 0 interferisce con l'idea di cambio di unità quando la cifra al sottraendo è maggiore che al minuendo... se ci fosse stato un 2 al posto dello 0 sarebbe stato più chiaro»

Quasi ogni insegnante ha proposto più di un'interpretazione all'errore. Nelle loro spiegazioni relative ai **rimedi** le insegnanti privilegiano invece un tipo di rimedio sugli altri. Sei insegnanti su nove infatti pensano che il miglior modo di correggere l'errore sia di ripresentare la sottrazione col modello concreto, usando pennarelli o caramelle, in cui una quantità viene diminuita di un certo ammontare. Le altre modalità indicate dagli insegnanti per rimediare all'errore sono:

- la rispiegazione alla lavagna dell'algoritmo in colonna;
- l'utilizzo dell'abaco per rendere più chiaro il concetto di cambio;
- l'uso dell'addizione per controllare la correttezza del risultato;
- la lettura delle tavole dell'addizione e della sottrazione per comprendere meglio il comportamento dello 0 in queste due operazioni.

Roberta, un'insegnante con vent'anni di esperienza di insegnamento mette chiaramente in relazione il suo rimedio con la propria interpretazione matematica dell'errore:

«Prima di tutto il problema non riguarda la sottrazione come "portar via" perché il sottraendo è minore del minuendo. Il problema non si porrebbe se il calcolo fosse manipolativo. Il problema sorge quando viene proposto allo studente una sottrazione in colonna. In questo caso c'entra il concetto di cambio di unità...lo studente ha sottratto 8 da 0 e ha calcolato 8 come in un'addizione. Forse non ha compreso né la sottrazione né il cambio. Ma avendo calcolato correttamente 6 2=4, ha compreso la sottrazione quindi il punto è nel concetto di cambio...Userei l'abaco come manipolativo per potenziare il concetto di valore posizionale e quindi la necessità di effettuare il cambio alla decina.».

E' interessante notare come Roberta inizi la sua spiegazione sottolineando che il problema non risiede nella comprensione della sottrazione come portar via, proprio la spiegazione che invece è utilizzata dalla maggior parte delle altre colleghe.

Nel caso di altre cinque insegnanti il rimedio non è collegato in modo evidente a un' interpretazione matematica o psicologica dell'errore. Inoltre l'utilizzo di oggetti per modellare la sottrazione come portar via può essere coerentemente collegata a una incomprensione generale della sottrazione come "portar via" o a una mancanza di conoscenza del fatto matematico che nei numeri naturali il sottraendo deve essere minore del minuendo per poter eseguire la sottrazione. In realtà l'errore proposto nello scenario non mostra una carenza di tali tipi di conoscenze ma le insegnanti tendono talvolta a riproporre comunque una completa spiegazione della sottrazione partendo dagli esempi concreti utilizzati anche come controesempi dell'errore 0 8=8. Questa scelta è giustificata in due modi. Un motivo è quello di dare allo studente la certezza che 32 è il risultato corretto contando gli oggetti, un'altra ragione è quello di chiarire che 0 8 è un'operazione impossibile e che quindi il sottraendo deve essere minore del minuendo. Le insegnanti dimostrano una grande fiducia nelle potenzialità degli esempi concreti per rimediare agli errori degli studenti, ma la scelta di questo rimedio non è coerente con l'interpretazione matematica dell'errore. Mirella, un'insegnante con due anni di esperienza di insegnamento, interpreta l'errore come confusione tra addizione e sottrazione e in questa incomprensione lo zero, secondo lei, gioca un ruolo centrale in quanto è l'elemento neutro dell'addizione e anche della sottrazione quando è al sottraendo. Spiega quindi che mostrerebbe le tabelle dell'addizione e della sottrazione per far confrontare il comportamento dello 0 nelle due operazioni. Questa parte del rimedio dimostra una certa relazione con la sua interpretazione ma poi prosegue:

«abbiamo lavorato anche con oggetti, con gli studenti con maggiore difficoltà di comprensione. Gli ho dato delle caramelle, ne abbiamo mangiate tre, quante caramelle sono rimaste? Mettiamolo in colonna, togliamo 3 da 0, non è possibile, il tre chiede aiuto al dieci e le caramelle diventano unità»

Anche questa insegnante pensa che se gli studenti hanno grosse difficoltà di comprensione la cosa migliore da fare è quella di ritornare alla spiegazione concreta che può risolvere il problema sorto con l'errore. Inoltre come evidenziato dallo studio di Ma (1999) anche la scelta dei termini formulati dall'insegnante quando spiega gli algoritmi in colonna è indicatore del tipo di concetti che emergono nell'azione di insegnamento. Il termine "aiuto" o il termine "prestito" rendono forse "familiare" e più vicino alla sensibilità dei bambini l'algoritmo della sottrazione ma non rendono conto della complessità concettuale che deriva dall'idea di raggruppamento secondo una determinata base, per cui il prestito è in realtà una ridisposizione in unità diverse del raggruppamento alle decine.

Franca è un'altra insegnante che non utilizza gli esempi concreti per rimediare all'errore. Ritiene che il motivo dell'errore sia dovuto a carenza di attenzione ma anche a incomprensione del valore posizionale. In questo caso il suo rimedio consiste nel rispiegare l'algoritmo della sottrazione in colonna disegnando una griglia per inserire con accuratezza le diverse unità nelle colonne come di solito fa quando spiega l'algoritmo nella fase di presentazione. Se gli studenti dimostrano di avere ancora difficoltà Franca propone l'uso dei regoli di Cuisenaire per mostrare visivamente il cambio di unità. Franca e Roberta con l'abaco propongono sussidi didattici in modo che il loro uso sia collegato a una corretta interpretazione matematica dell'errore. In entrambi questi casi c'è una connessione più stretta tra interpretazione dell'errore e rimedio scelto.

Giulia è un'insegnante che non propone un modello concreto con manipolativi come rimedio all'errore ma utilizzerebbe i diagrammi di Eulero- Venn. E' un'altra modalità di rappresentare la sottrazione in forma iconica come "portar via" che non ha chiari legami con l'errore proposto.

La relazione tra interpretazione e rimedio all'errore non è quindi così semplice e causale come si potrebbe essere portati a pensare. Rosa, un'insegnante di scuola secondaria di primo grado sostiene che la ragione dell'errore è nel cambio di unità che non è stato effettuato. Nella fase di rimedio spiega che:

«l'errore riguarda il cambio di unità...partirei dal concreto, con caramelle. Proviamo a contare e realizzerebbero che la sottrazione è sbagliata..oppure gli direi di fare la prova con l'addizione per controllare il risultato».

Non vi sono evidenti legami tra l'interpretazione e il rimedio anche se l'insegnante sostiene che l'unica causa dell'errore e di tipo matematico ovvero il mancato cambio alla decina. In questo caso il rimedio è un modo per mostrare agli studenti la risposta esatta.

Un'altra caratteristica dell'uso della sottrazione come "portar via" per rimediare all'errore è proprio quella di mostrare agli studenti che hanno sbagliato. Cinque insegnanti su nove pensano che se gli studenti possono vedere con i loro occhi, attraverso esempi concreti, che il risultato è errato allora comprendono la ragione dell'errore. Un altro modo di raggiungere lo stesso risultato è l'utilizzo della prova con l'addizione. In questo caso le tre insegnanti che lo propongono sono più interessate a rendere evidente agli studenti il risultato corretto piuttosto che far comprendere loro le ragioni possibili dell' errore commesso.

Dall’analisi dello scenario emerge infine come le insegnanti pur fornendo numerose interpretazioni differenti sull’origine dell’errore in fase di rimedio si concentrano su pochi tipi di interventi che si fondano sulla presentazione della sottrazione come operazione del “portar via” attraverso manipolazioni concrete o iconiche. Due sono i casi, Franca e Roberta, in cui è presente una coerenza tra interpretazione matematica dell’errore e rimedio ed entrambi individuano la mancata comprensione del valore posizionale delle cifre come origine del mancato cambio alla decina che ha generato l’errore nella sottrazione. Nel caso di interpretazioni dell’errore che si rifanno alla confusione tra algoritmo dell’addizione e della sottrazione, pur essendo questa una difficoltà ben documentata anche a livello di ricerca non porta gli insegnanti a sviluppare specifici rimedi per questa supposta causa di errore, e quando lo fanno, come nel caso di Mirella, tendono comunque a riproporre, unitamente a questo, la spiegazione della sottrazione come portar via.

Resta da sottolineare che la coerenza tra interpretazioni e rimedi può essere individuata anche quando l’interpretazione dell’errore, espressa come disattenzione, può ritenersi superficiale. Nel caso in esame, una proposta di errore per disattenzione è stata avanzata da Franca un’insegnante che, come già visto, ha anche proposto un’interpretazione alternativa basandosi su una interpretazione matematica dell’errore e su un suo coerente rimedio. Il rimedio da parte di Franca per la disattenzione dello studente è quello di far fargli più esercizi di consolidamento e si coniuga con un’interpretazione psicologica che dà per scontata la comprensione del valore posizionale e intende che la difficoltà consista in una ancora fragile acquisizione della procedura. Non viene però spigato dall’insegnante come possa orientarsi davanti all’errore per seguire una delle due alternative di interpretazione da lei proposte.

- **Analisi delle risposte al secondo scenario: la moltiplicazione in colonna**

Anche in questo scenario l’**identificazione** dell’errore da parte degli insegnanti non ha suscitato particolari difficoltà. In questo caso bisogna aggiungere che due docenti, Ester e Carla, non sono state in grado di giustificare la ragione dell’errore a causa del fatto che non conoscevano la specifica struttura dell'algoritmo. Hanno individuato l'errore dall'errato posizionamento dei prodotti parziali all'interno dell'algoritmo ma non hanno saputo spiegare perché l'algoritmo avrebbe dovuto funzionare disponendo i prodotti parziali secondo quella struttura "a scala", cioè con lo spostamento dei successivi prodotti parziali verso sinistra. L'identificazione dell'errore da parte di queste due docenti è stata quindi di tipo "visuale", hanno visto che rispetto alla solita disposizione dei prodotti parziali quella presentata nello scenario era diversa. Il comportamento delle due docenti è stato però alquanto diverso nel corso dell'intervista su questo scenario.

Carla spiega che l'errore nella procedura è dovuto al fatto che questa non è stata correttamente memorizzata perché non è stata compresa la spiegazione pratica («nel senso di come può essere pratica la spiegazione della scrittura posizionale decimale usando l'abaco») dell'algoritmo. Per Ester l'errore è attribuito all'errato incolonnamento e, in un secondo momento dell'intervista, ad una confusione tra unità di diverso tipo che ha portato a non rispettare la disposizione corretta dei prodotti parziali. Ester però non si spiega e quindi non sa giustificare perché sia proprio quella disposizione, da lei definita "a scala", quella corretta per l'esecuzione dell'algoritmo. C'è da notare che queste due insegnanti hanno avuto esperienza di insegnamento della matematica solo nelle classi prima e seconda della scuola primaria.

Le altre docenti hanno fornito un'**interpretazione** dell'errore, a differenza che nell'algoritmo della sottrazione, che comunque si basa sull'evidenza visiva perché in questo caso è la posizione dei numeri all'interno dell'algoritmo che è errata e porta a un risultato sbagliato. Nella sottrazione in colonna l'errore non era reso visibile da una particolare configurazione dell'algoritmo data dalla posizione dei numeri al suo interno, ma era riconoscibile da un controllo della correttezza delle operazioni al suo interno.

In questo scenario sono state espresse dalle docenti tre interpretazioni dell'errore:

- la carente comprensione del valore posizionale delle cifre;
- la disattenzione nell'esecuzione dell'algoritmo;

- la carente comprensione dello schema dell’algoritmo (figura 9.1).

dak	uk	h	da	u	
		1	2	3	x
		6	4	5	=
		6	1	5	
	4	9	2	-	
7	3	8	-		
7	9	3	3	5	

Figura 9.1

Per quanto riguarda le due insegnanti (Giulia ed Elena) che hanno interpretato come causa dell’errore la carente comprensione dello schema dell’algoritmo, l’errore è stato causato dalla incomprensione dei valori del tipo di unità dei prodotti parziali che ha portato a un errato incolonnamento delle cifre nello schema a colonne (figura 9.1) in cui ogni colonna rappresenta un tipo di unità diverso. La comprensione dei valori dei prodotti parziali è funzionale a una memorizzazione dello schema dell’algoritmo, che risulta l’obiettivo principale della comprensione degli studenti per questo gruppo di insegnanti:

Giulia:«Mi accorgo che i vari prodotti parziali delle unità, decine e centinaia ovviamente non sono incolonnati nella maniera giusta...Quando facciamo il prodotto parziale delle decine...glielo spiego tutto in colonna in maniera che vedano questo».

Elena:«qui c’è un po’ di confusione fra unità, decine, centinaia etc...proporrei ai bambini di tornare a svolgere le moltiplicazioni utilizzando linee vertcali così (vedi figura 9.1).»

Nel caso delle insegnanti che hanno interpretato l’errore come una carente comprensione della procedura, anche in questo caso il termine comprensione pensiamo possa essere sostituito con memorizzazione data la focalizzazione delle risposte sull’esecuzione corretta dell’algoritmo in colonna.

La disattenzione è interpretata dalla docente che la indica come fonte dell'errore (Franca) come dovuta a fattori che non coinvolgono la comprensione per lo meno procedurale dell'algoritmo, ma a carente memorizzazione infatti a suo avviso «questo errore capita quando non si fanno le moltiplicazioni da un po'». Franca interpreta l'errore anche attraverso la carente comprensione del valore posizionale delle cifre.

Cinque insegnanti (Mirella, Maria, Franca, Roberta) indicano l'incomprensione del valore posizionale delle cifre senza esplicito riferimento allo schema dell'algoritmo come causa dell'errore. In questo gruppo tre insegnanti (Franca, Roberta e Rosa) focalizzano maggiormente la loro risposta attorno alla comprensione concettuale del valore posizionale. Indicano in modo esplicito che alla base dell'errore c'è: un'incomprensione del valore posizionale delle cifre, specificando che l'errore è dovuto all'incomprensione dell'unità in cui è espresso un prodotto quando vengono moltiplicate unità di diverso tipo come ad esempio unità e decine:

Roberta:«L'errore qui è sul valore posizionale delle cifre...i ragazzi non hanno assolutamente tenuto in considerazione che andavi a moltiplicare per le unità, le decine e le centinaia e quindi i numeri andavano posizionati rispetto a un valore di posizione...quando vado a moltiplicare il 4, che è una decina, mi devo spostare perché in realtà è come se ci fosse uno 0 apparente che mi permette di leggere tutto in unità.»

Franca:«La base di questo errore è ancora più di prima (scenario sulla sottrazione) il valore posizionale.»

Per quanto concerne i **rimedi** le proposte delle insegnanti sono:

- la spiegazione dell'algoritmo secondo lo schema a colonne (figura 9.1) ma con focalizzazioni ed estensioni verso altre proprietà e procedimenti matematici, come ad esempio la proprietà distributiva della moltiplicazione e il calcolo in riga, che le rendono differenti tra loro;
- la scrittura degli zeri alla fine dei prodotti parziali (proposta da Maria e Mirella) in luogo della lineetta;

- il monitoraggio del procedimento attraverso l’osservazione che il risultato del prodotto di due numeri alle centinaia non può dare un numero dell’ordine dei grandezza delle migliaia (Franca).

Le docenti Mirella e Maria indicano che il rimedio da adottare consta nell’aggiungere gli zeri alla fine dei prodotti parziali. L’interpretazione dell’errore in questi due casi ha chiamato in causa: l’incomprensione del valore dei prodotti parziali che sono espressi in unità diverse, mentre sono stati trattati tutti come unità del primo ordine e, per quanto riguarda Mirella, un’insegnante che afferma di non aver affrontato ancora l’argomento nel suo percorso di insegnamento, viene specificato che lo studente può aver sbagliato perché ha svolto la moltiplicazione trattando le cifre di 645 separatamente e non come unità, decine e centinaia ovvero come gruppi di unità appartenenti allo stesso numero. Nonostante che le due insegnanti abbiano individuato l’origine dell’errore in un’incomprensione della struttura posizionale dei numeri forse, per affrontare in modo più preciso la difficoltà evidenziata nell’errore, sarebbe stata necessaria un’analisi più puntuale di come si siano generati i prodotti parziali e di come poi siano stati disposti in tal modo nell’algoritmo. Il rimedio proposto, a fronte di una interpretazione che si orienta verso un’incomprensione del concetto di fondo che sostiene l’algoritmo, affida all’inserimento degli zeri la soluzione o la potenzialità di evitare l’errore. Si può osservare che pur essendo stata individuata la ragione concettuale dell’errore così come si presenta nello specifico dell’algoritmo il rimedio non è proposto con sufficiente approfondimento, ma resta abbastanza superficiale e meccanico e di conseguenza non adeguatamente coerente con l’interpretazione concettuale dell’errore.

Le altre tre insegnanti, Roberta, Franca e Rosa, che hanno individuato la ragione dell’errore nell’incomprensione del valore posizionale delle cifre hanno fornito come rimedi spiegazioni che hanno tenuto conto in diverso grado gli aspetti procedurali dell’algoritmo e hanno evidenziato al tempo stesso aspetti più marcatamente concettuali come: la generalizzazione sul prodotto di diversi tipi di unità (se si moltiplicano unità per decine si ottengono decine), il fatto che l’inserimento dello zero permette la lettura dei prodotti parziali in unità del primo tipo altrimenti l’unità di riferimento cambia e il collegamento, alla proprietà distributiva della moltiplicazione come strumento per giustificare e rendere più comprensibile l’algoritmo della moltiplicazione. Inoltre Franca ha fatto riferimento nella rispiegazione anche alla struttura a colonne per spiegare l’algoritmo ma l’ha fatto come risorsa ulteriore, nel caso in cui la prima fase del rimedio in cui specificava il valore delle cifre dei fattori e quindi il tipo di unità ottenuta nel prodotto parziale, non risultasse ancora chiara allo studente. In questi casi l’attenzione nella fase di rimedio è spostata a una ripresa del concetto di valore posizionale attraverso la moltiplicazione dei numeri scritti in unità diverse, una ripresa della proprietà distributiva e anche, come già visto, una strategia di rimedio che si collega all’utilizzo della stima del risultato. Infine, Rosa, l’insegnante di scuola secondaria, concentra la fase di rimedio quasi esclusivamente nella spiegazione della proprietà distributiva trascurando quasi del tutto la procedura dell’algoritmo. Questo può essere interpretato come derivante dalla personale esperienza di insegnamento che a livello di scuola secondaria non comporta una ripresa della spiegazione dell’algoritmo della moltiplicazione in colonna.

La coerenza tra rimedi e interpretazioni per queste tre docenti risulta consistente. A interpretazioni focalizzate su incomprensioni concettuali seguono rimedi focalizzati su spiegazioni che mirano alla comprensione della scrittura posizionale dei numeri.

I rimedi delle docenti che hanno focalizzato l’interpretazione dell’errore sulla memorizzazione dello schema dell’algoritmo sono focalizzati maggiormente sulla riproposizione dello schema sottolineando come questo supporti la scrittura corretta dei prodotti parziali attraverso una visualizzazione dei passi della procedura.

Giulia nella sua rispiegazione sottolinea alcuni passaggi:

«Quando facciamo il prodotto parziale delle decine, dico – non è 4x123 è come se fosse 123x4x10 e questo dieci equivale allo spazio- e glielo spiego tutto in colonna in maniera tale che vedano che venga questo.»

L’insegnante focalizza la sua spiegazione sulla esecuzione e giustificazione dei passi dell’algoritmo, preoccupandosi di “far vedere” agli studenti come si genera la disposizione dei numeri all’interno del procedimento. Giulia continua: «Poi torno su questo lavorando sulla tabella (h, da, u). E quindi se l’uno, l’unita, lo moltiplico per 10, notano lo spostamento alle decine»

Ancora la focalizzazione è sul vedere (notare) la disposizione dei numeri nell’algoritmo. L’insegnante partendo da considerazioni concettuali sull’interpetazione dell’errore nel corso della rispiegazione come rimedio all’errore tende a concentrarsi maggiormente sugli aspetti visualizzabili e quindi memorizzabili dell’algoritmo. Inoltre sono sottolineati alcuni aspetti procedurali come:

«Questo discorso (il fatto che 123x4 è in realtà 123x4x10) glielo devo presentare dopo aver lavorato molto su moltiplicare per 10, 100, 1000 e quindi l’algoritmo in colonna non è altro che un’applicazione dei prodotti parziali.»

L’insegnante attribuisce importanza agli aspetti procedurali, al fatto che gli studenti sappiano che moltiplicare per 10, 100 e 1000 vuol dire che nel risultato, se ho numeri naturali, aggiungo un uguale numero di zeri, per poi arrivare a “comprendere” l’algoritmo della moltiplicazione in colonna. Anche Elena rivolge la sua attenzione sugli aspetti strettamente procedurali:

«proporrei ai bambini di svolgere la moltiplicazione utilizzando questo tipo di struttura (figura 9.1), ricordando che, quando faccio 5, comincio dal 5, facevamo anche delle freccine, lo moltiplico per 3, mi scrivo il risultato faccio i riporti, lo moltiplico per 2, etc…quando ho completato di lavorare con il 5 che corrisponde alle unità, poi devo fare, non lavorerò più con la colonna delle unità.».

In questo secondo scenario due insegnanti non sono state in grado, pur identificando l’errore, di dare rimedi e fornire interpretazioni matematicamente giustificate, mentre le altre insegnanti non hanno approfondito o variato l’interpretazione dell’errore, in confronto a quanto fatto nello scenario precedente, tendendo a volte, come nel caso di Rosa o di Giulia, a dare l’interpretazione quasi per scontata. Ciò può forse essere spiegato con la evidente posizione errata dei numeri nell’algoritmo. A questo proposito si può far notare come la posizione dei prodotti parziali a forma di “scala” nell’algoritmo in colonna non è la sola possibile per il calcolo del prodotto. Anche un esecuzione in colonna come quella proposta di seguito è altrettanto corretta:

```
   123x
   645=
 -------
    15
   100
   500
   120
   800
  4000
  1800
 12000
 60000
 -------
 79335
```

L’evidenza visiva della posizione dei numeri considerata come errata ha probabilmente condotto le insegnanti a pensare che l’errore fosse di facile interpretazione facendo sì che passassero subito alla fase di rimedio nel corso dell’intervista. Ciò naturalmente è un comportamento vantaggioso se si immagina la situazione nel concreto di una pratica d’aula dove è efficace prendere decisioni rapide sul comportamento degli studenti ma può anche essere controproducente se l’insegnante attua tale azione in situazioni in cui siano presenti contenuti matematici o compiti che non si prestano, o solo apparentemente si prestano, a una rapida lettura visuale dell’errore. Certamente, in questo specifico caso presentato, le insegnanti sono anche state indotte a reagire prontamente nell’interpretazione dell’errore proprio perché già sapevano che l’errore era presente senza dover controllare se ci fosse o meno, e questo per la struttura dello scenario ipotetico che indicava già la presenza di un errore cui dover rimediare.

La fase di rimedio ha potuto chiarire come le interpretazioni dell’errore in realtà mobilizzino risorse ben differenti nelle insegnanti. Le interpretazioni dell’errore che si rifanno alla carente comprensione del valore posizionale delle cifre sono associate a rimedi che sono in varia misura collegati a mobilizzazione di conoscenze legate a: procedure, concetti e relazioni tra concetti, come nel caso della proprietà distributiva della moltiplicazione. In questo scenario è emersa anche una certa coerenza tra rimedi e interpretazioni. A interpretazioni basate su carente memorizzazione delle procedure sono state associati rimedi focalizzati sulle procedure. Altrettanto per interpretazioni più legate a carenza di comprensione concettuale che hanno visto associati rimedi più orientati al recupero del concetto di valore posizionale oltre che alla procedura dell’algoritmo.

La tendenza delle insegnanti che pur sapendo bene che il valore posizionale delle cifre è all’origine dell’errore propongono rimedi immediati, come l’aggiunta di zeri, o procedurali può essere anche spiegato attraverso la seguente considerazione di Rosa, insegnante di scuola secondaria, che, dopo aver spiegato, nella fase di rimedio, la genesi dei prodotti parziali dalla proprietà distributiva, afferma:

«Purtroppo capita che non tutti riescono a riflettere su questo tipo di ragionamento. La spiegazione è una bellissima cosa però non tutti riescono a farla propria. Perché hanno delle difficoltà totali semplicemente, per cui basta talvolta anche la via più semplice, anche per loro perché alla fine sono gratificati che riescono comunque a fare le operazioni, il risultato vien giusto, quindi ok sono bravo. Però comprendere effettivamente cosa stanno facendo non è da tutti.».

A livello implicito può darsi che anche altre insegnanti la pensino allo stesso modo e che quindi, complice forse anche un sapere matematico disciplinare non troppo evoluto, diano di conseguenza valore relativo minore alle spiegazioni ritenute troppo difficili da comprendere perché concettualmente troppo ricche.

Rispetto allo scenario precedente in cui era presente una “fiducia” nel potere esplicativo delle rappresentazioni concrete della sottrazione per rimediare all’errore nell’algoritmo in colonna, nel caso della moltiplicazione in colonna, con una minore incisività, compare una sottolineatura dell’importanza dello schema visuale dell’algoritmo della moltiplicazione in colonna in cui si possono mettere in evidenza i diversi tipi di unità da incolonnare compresi gli zeri, da inserire alla fine del numero, per far vedere che così i prodotti parziali sono espressi in unità tutte dello stesso tipo. Probabilmente a questo livello di insegnamento elementare le insegnanti attribuiscono molta importanza nelle loro spiegazioni alla possibilità che gli studenti “vedano” in qualche modo come operare con gli algoritmi. Inoltre i rimedi anche in questo scenario costituiscono quasi sempre in rispiegazioni. Anche se spesso sono articolate in forme e contenuti alquanto diversi come già visto. Solo in un caso un’insegnante, Franca, utilizza come rimedio la stima del numero rifacendosi alle conoscenze sulle operazioni dello studente.

9.2.2 Analisi del terzo scenario

S3. Terzo scenario

*In un esercizio del libro di testo di matematica è chiesto di inserire la virgola al posto giusto nel risultato della seguente operazione: 15,24x4,5=6858. Viene chiesto anche di giustificare la propria scelta. Uno studente scrive come risultato 6,858 e giustifica la risposta scrivendo che, poiché il totale delle cifre dopo le virgole nei due fattori è tre, allora altrettante cifre, per regola, devono esserci dietro la virgola nel prodotto. (*Adattato e tradotto da Markovits e Even, 1999)

- **Analisi concettuale e ragioni del contenuto matematico del terzo scenario**

Lo scenario proposto intende mettere a fuoco come le insegnanti intervengono di fronte a un errore commesso in una situazione problematica insolita per la comune pratica scolastica, allo scopo di analizzare se, al di là delle differenze nei contenuti, possono evidenziarsi delle differenze, nel tipo di intervento adottato rispetto a quelli intrapresi negli scenari riferiti a situazioni più comuni. Il problema proposto infatti non è stato probabilmente incontrato, nei termini in cui è presentato, da nessuna insegnante nella sua esperienza scolastica. Il contenuto matematico a cui lo scenario fa riferimento dovrebbe però essere ben noto alle insegnanti, infatti riguarda conoscenze di base sui numeri decimali che sono ampiamente trattati nella scuola primaria fin dal terzo anno e poi anche negli anni successivi.

I libri di testo della scuola primaria di fatto non riportano mai problemi simili a quello proposto. Gli esercizi più comuni sulle operazioni tra numeri decimali riguardano il calcolo del risultato o l'individuazione di uno dei termini dell'operazione noto un termine e il risultato.

La ragione della scelta di questo scenario, che ha come argomento il senso del numero nel calcolo decimale, risiede nell'importanza data a questo tema nelle Indicazioni Nazionali Italiane per la Scuola Primaria e Secondaria di Primo Grado (2007) e anche in precedenza da parte di studiosi di educazione matematica e istituzioni per la composizione del curricolo in vari paesi (Australian Education Council, 1990; Greeno, 1991; Markovits & Sowder, 1994; National Council of Teachers of mathematics, 1989; National research Council, 1989). Il senso del numero viene definito come una forma di ragionamento non deterministica e aperta che permette a un soggetto di mettere in relazione i numeri con le proprietà delle operazioni e di risolvere i problemi in maniera flessibile. (Cannizzaro, 1996; Sowder, 1992).

«Il senso del numero è essenziale per la costruzione di ulteriore conoscenza matematica perché i bambini che elaborano strategie di pensiero matematico veloci ed efficaci impiegano nel calcolo un minore sforzo cognitivo e possono liberare le risorse mentali così liberate per ulteriori riflessioni sulle relazioni numeriche» (Sorzio, 1999, pag.100).

Lo scenario proposto presenta un'operazione tra decimali in cui per poter inserire la virgola al posto giusto è certamente utile conoscere la regola del posizionamento della virgola nel prodotto, ma è necessario possedere anche un senso del numero, nella forma di una competenza nel determinare una stima del risultato come valutazione della rispondenza tra correttezza delle procedure e dei risultati del calcolo, che permetta di adattare la regola al caso specifico presentato nello scenario in cui l'ultima cifra del prodotto, essendo uno 0 della parte decimale del numero, è stata omessa senza quindi cambiare il valore del prodotto.

La situazione matematica presentata nello scenario riporta un errore che può essere ragionevolmente interpretato in diversi modi.

Di solito la situazione presentata a scuola richiede prima il calcolo e poi l'inserimento della virgola e non l'inserimento della virgola su un risultato già presentato.

Dal punto di vista della natura psicologica dell'errore matematico la particolarità del compito, rispetto agli esercizi di routine sull'argomento, e la mobilizzazione richiesta per risolverlo di una competenza quale il senso del numero, nella forma della stima di un risultato, possono indurre a sostenere che degli studenti, non abituati a simili richieste, non siano in grado di rispondere appropriatamente, in quanto la mobilizzazione del senso del numero e la richiesta inusuale formulata per risolvere il compito sono eccessivamente complesse per essere affrontate da uno studente di scuola primaria.

Se invece si ritiene che lo studente di primaria sia in grado di affrontare l'esercizio, allora l'errore commesso può essere inteso in senso strategico in quanto applica la regola del conteggio delle cifre del prodotto per inserire la virgola senza tenere conto che così facendo arriva a un risultato assurdo. Lo studente non si rende conto che una moltiplicazione di due fattori maggiori di 1 dà come risultato un prodotto inferiore a uno dei due fattori, risultato che è impossibile e facilmente verificabile se il problema fosse trasformato limitandolo alle parti intere dei numeri.

- **Analisi delle risposte al terzo scenario: la moltiplicazione tra decimali**

Questo scenario è risultato più difficoltoso per le insegnanti in quanto cinque (Rosa, Roberta, Elena, Giulia e Carla), su nove non hanno **identificato** l'errore, indicando come corretto il posizionamento della virgola e una (Mirella) non ha risposto in alcun modo alla situazione proposta. Tra queste cinque insegnanti quattro non hanno ritenuto valido il tipo di giustificazione proposta dallo studente. Le altre tre insegnanti che hanno identificato l'errore (Ester, Maria e Franca) lo hanno **interpretato** attribuendolo a due cause:

- eccessiva difficoltà dell'esercizio che risulta anche ingannevole;

- poca accuratezza nel calcolo mentale della moltiplicazione, in quanto lo studente avrebbe potuto accorgersi che dal calcolo del prodotto l’ultima cifra era zero e non otto.

Tutte e tre queste insegnanti hanno individuato l’errore di posizionamento della virgola basandosi sul personale senso del numero e in particolare individuando che 15x4 fa 60 e quindi 6,858 non poteva essere il risultato corretto. Nell’interpretazione dell’errore da parte dello studente solo una delle tre (Maria) ha affermato che lo studente avrebbe forse dovuto accorgersi che 5x4 (le ultime cifre delle parti decimali dei due fattori) danno come risultato 20 e che quindi uno 0 come ultima cifra del prodotto avrebbe per forza dovuto esserci. In pratica lo studente avrebbe dovuto iniziare l’applicazione dell’algoritmo della moltiplicazione a mente ed estrapolare che il risultato non poteva essere composto solo dalle cifre presenti nel testo. Le altre due insegnanti (Ester e Franca) attribuiscono la causa dell’errore al testo in quanto un esercizio del genere induce facilmente in errore lo studente che si aspetta che il libro dia “risposte” esatte, di cui fidarsi e non ingannevoli come, a loro avviso, è stato fatto in questo caso. Infatti entrambe le insegnanti hanno avuto all’inizio forti dubbi su quello che dovevano fare perché erano poste di fronte al contrasto tra un risultato errato e una regola, quella del calcolo delle cifre per posizionare la virgola, ritenuta corretta. Una di queste due insegnanti addirittura si rende conto del tipo di testo presentato che non richiede di calcolare la moltiplicazione ma solo di posizionare la virgola ormai a intervista già avanzata (Ester). Le due insegnanti quindi esplicitamente affermano che giustificherebbero l’errore dello studente perché indotto dal testo del problema.

In nessun caso in questo scenario è proposta una spiegazione come rimedio da parte delle insegnanti ma lo studente è invitato ad agire sotto la guida dell’insegnante provando a calcolare da solo il risultato della moltiplicazione per verificare che nel risultato c’è una cifra in più di quelle inserite nel testo:

«Io gli farei fare: dimenticati dei decimali e moltiplica 15x4…devo controllare (fa il calcolo a penna) si vede che ci sono degli zeri che si perdono perché son dopo la virgola, per cui potrei fargliela fare…prima allora cercherei di fargli notare quella cosa di prima (il fatto che dovrebbe esserci lo zero alla fine del prodotto) e poi magari gli farei fare il calcolo.»

Maria propone dapprima come rimedio la stessa strategia usata da lei di moltiplicare le parti intere dei fattori con l'esplicita intenzione di aiutare lo studente a fare delle previsioni sui risultati. Successivamente, come controllo, lo inviterebbe a fare il calcolo esatto della moltiplicazione. Franca invece pensa che lo studente dovrebbe essere indotto dall'insegnante ad accorgersi che le cifre dei fattori moltiplicate danno 0 come ultima cifra e che però nel risultato manca lo 0, di fatto procedendo con una strategia differente da quella utilizzata da lei che invece si orienta moltiplicando come Maria 15x4. Infine Ester non specifica come aiuterebbe lo studente ma indica che per risolvere l'esercizio bisogna mettere in pratica conoscenze che non risiedono tra quelle di uno studente di scuola elementare.

Rispetto alla regola espressa dallo studente per il posizionamento della virgola le insegnanti non si sono espresse in modo diretto riguardo ai limiti della sua validità. C'è da notare comunque che, tenendo conto anche delle risposte delle docenti che non hanno individuato l'errore, le insegnanti ritengono poco interessanti didatticamente situazioni che portano a limitare il valore di utilizzo delle regole meccaniche per velocizzare il calcolo, come è la regola del conteggio delle cifre del prodotto per il posizionamento della virgola. Di fatto solo un'insegnante (Maria) si è trovata a proprio agio con lo scenario proposto e ha indicato che lo utilizzerebbe in modo produttivo, cioè che ricaverebbe dall'errore uno spunto per la propria didattica. La situazione inusuale proposta ha messo a disagio anche le insegnanti che sono riuscite a risolverla in quanto hanno ritenuto che non fosse adeguata agli studenti.

Un esempio può evidenziare come certe regole meccaniche assumano la forza di giustificazioni matematiche e acquisiscono quindi valore anche per l'insegnante. Un'insegnante, Roberta, che non si è accorta dell'errato posizionamento della virgola ha poi contestato la giustificazione dello studente ritenendo che fosse invece corretta la seguente spiegazione:

«la risposta è corretta dal punto di vista meccanico. Io chiederei come si può spiegare in matematica questo risultato...Mi aspetterei, dato che l'ho spiegato,...che lui mi dicesse che l'algoritmo che si utilizza per risolvere questa operazione ...mi spiegherebbe che la moltiplicazione con i decimali è come quella con gli interi e cioè trasformi in intero moltiplicando per 100, l'altro per 10 e quindi nel risultato finale devi ridividere per 1000 affinché la moltiplicazione sia corretta. Quindi ti troveresti tre posti di virgola nel risultato, ma non solo in maniera meccanica.»

E' qui interessante notare che ciò che importa all'insegnante è se lo studente ricordi o meno la spiegazione della regola che ha utilizzato per la risposta. L'insegnante non ha notato l'errore dovuto all'applicazione meccanica e mnemonica della regola senza tener conto del senso del numero e chiede che la spiegazione sia "più matematica" ovvero che lo studente dimostri di saper ricordare i passaggi del procedimento che porta a eliminare le virgole dai fattori rendendoli interi. In questo senso la spiegazione più matematica corrisponde alla memorizzazione di passaggi spiegati in determinati contesti, come la moltiplicazione tra decimali, che però nel contesto di questo problema non servono per risolvere correttamente l'esercizio tant'è che l'errore non viene identificato nemmeno dall'insegnante. L'insegnante interpreta come meccanico il ragionamento dello studente ma altrettanto meccanico risulta il suo rimedio. La differenza sta nel fatto che il meccanismo proposto dall'insegnante è esplicito nelle operazione che comporta ma i risultati a cui portano entrambe le applicazioni, non divergono, infatti l'errore non viene individuato.

Forse anche per le insegnanti che, avvalendosi del personale senso del numero sono invece riuscite a risolvere il problema ma lo hanno trovato ingannevole, ciò che più conta è la conoscenza della regola più che il saperla applicare in contesti diversi e quindi saper valutare correttamente i limiti della sua applicabilità. Questa idea si può ipotizzare che sorga dal fatto che nell'insegnamento della moltiplicazione tra decimali la regola viene insegnata così come è presentata nell'ultimo estratto dall'ultima docente e poi applicata secondo lo schema proposto nello scenario, mentre poco spazio venga dato all'insegnamento della stima dei risultati delle operazioni per contribuire all’acquisizione di un adeguato senso del numero.

9.2.3 Analisi del quarto scenario

S4. Quarto scenario

In una classe quinta elementare l’insegnante chiede agli studenti di ordinare dalla minore alla maggiore le seguenti frazioni: 3/8; ¼; 2/3. Un primo studente le ordina così: ¼; 2/3; 3/8. Un secondo studente invece le ordina così: 2/3; ¼; 3/8.

- **Analisi concettuale e ragioni del contenuto matematico del quarto scenario**

Il confronto tra frazioni viene presentato nella scuola primaria di norma tra due frazioni con lo stesso denominatore o con lo stesso numeratore. La scelta di presentare nello scenario tre frazioni da confrontare tra loro con numeratori e denominatori diversi è dettata dal fatto di inserire una componente che renda più complesso del solito il confronto, per mettere in luce come le insegnanti, in una situazione non di routine ma che coinvolga compiti simili, ma più complicati di quelli solitamente proposti in classe, mobilizzino le loro conoscenze matematiche e sul contenuto pedagogico per l’insegnamento. Anche questo argomento dovrebbe far parte delle conoscenze matematiche di base delle insegnanti. Lo scenario non è consueto nella scuola primaria ma lo è invece nella scuola secondaria di primo grado.

Il confronto tra frazioni è uno degli argomenti principali del curricolo di matematica per la scuola dell’obbligo. Spesso però, nella pratica scolastica, è messo in ombra rispetto al calcolo frazionario. Questo aspetto di eccessiva enfasi sul calcolo è spesso chiamato in causa come uno dei motivi, certamente non il solo, della difficoltà da parte degli studenti di raggiungere la concezione di frazione come numero razionale e nello specifico come numero razionale. Spesso alla fine del percorso di scuola dell’obbligo molti studenti pur avendo affrontato per anni le frazioni, non sono ancora in grado di cogliere la frazione come numero ma si arrestano alla concezione di frazione come operatore o come parte di un intero (spesso concepito come un’entità singola rappresentata da una figura).

L’errore presente nello scenario riguarda l’ordinamento di tre frazioni ottenuto considerando la grandezza del denominatore o del numeratore separatamente. La frazione composta da numeratore e denominatore non è quindi considerata come un numero e ciò genera appunto l’errore negli ordinamenti.

L’ordinamento di frazioni con denominatore e numeratori diversi comporta la conoscenza di alcune tecniche per il confronto tra frazioni come il calcolo del prodotto incrociato o il calcolo del denominatore comune. Questo tipo di tecniche, soprattutto la seconda, sono insegnante nella normale pratica scolastica nel primo anno della scuola secondaria di I grado. Esistono però possibilità di gestire il confronto tra frazioni che non richiedono l’applicazione di tecniche specifiche ma di ragionamenti basati sulla conoscenza del concetto di frazione come parte di un intero oppure su strategie di confronto basate sul senso del numero.

La visualizzazione delle frazioni come parti di un tutto, rappresentabili in forma iconica con diagrammi rettangolari o circolari divisi in parti congruenti, dà la possibilità di visualizzare in modo chiaro le quantità rappresentate dalle frazioni (figura 9.2):

2/3

3/8

1/4

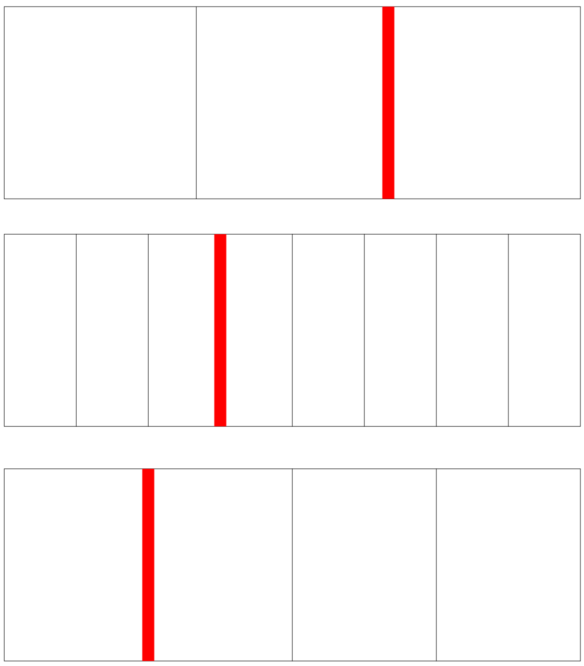


Figura 9.2

Per quanto riguarda la strategia che si fonda sul senso del numero, si può ad esempio individuare un numero come 1 o la frazione ½ come punti di riferimento e dire che certamente 2/3 è maggiore di ½ che in terzi sarebbe (1,5)/3 mentre ¼ è minore di un mezzo e più precisamente la sua metà. Anche 3/8 è minore di ½ che in ottavi è 4/8 e maggiore della metà di ½ che è 2/8. Quindi l'ordinamento corretto in ordine crescente è ¼, 3/8, 2/3. Questo tipo di ragionamento è affrontabile con le normali conoscenze a disposizione alla fine della scuola primaria. Non tutti gli studenti probabilmente riuscirebbero a gestirlo con disinvoltura date la complessa gestione dei confronti, ma non richiede comunque conoscenze ulteriori a quelle già in possesso degli studenti. Tale approccio è invece presumibile sia alla portata di insegnanti di scuola elementare appunto perché basto su conoscenze previste nel curricolo.

➢ **Analisi delle risposte al quarto scenario: il confronto tra frazioni**

Solo un'insegnante (Carla) non è stata in grado di identificare l'errore nell'ordinamento delle frazioni. Per chi ha **identificato** che i due ordinamenti sono errati l'**interpretazione** è stata pressoché univoca:

- il primo studente ha ordinato secondo i numeratori;
- il secondo studente ha ordinato secondo i denominatori.

Su otto insegnanti, tre non hanno fornito un'interpretazione esauriente del motivo dell'errato ordinamento (Maria, Ester, Elisa) limitandosi a dire che è errato. Franca, confondendosi perché ha pensato che l'ordinamento dovesse essere decrescente, ha invece interpretato l'errore del secondo studente come dovuto al fatto che probabilmente il numero maggiore di parti al denominatore (la maestra ha fatto l'esempio di 3/8) è stato inteso dallo studente come corrispondente a parti più piccole, come ad esempio si visualizza nei classici disegni a cerchi che di solito si utilizzano per l'introduzione alle frazioni nella scuola. Per cui 3/8 è stato considerato erroneamente minore di ¼. Questo tipo di comprensione concettuale della frazione in fase di interpretazione dell'errore, frazione come parte di un intero, sarà però ripresa solo in parte in fase di rimedio dove questa insegnante preferirà un approccio basato sul senso del numero e sulle conoscenze fattuali delle frazioni. Infine le altre quattro insegnanti hanno evidenziato come gli studenti abbiano sbagliato a causa dell'incomprensione della frazione come numero composto da un denominatore e un numeratore, considerando invece nei due ordinamento solo uno dei due e trascurando l'altro.

Le insegnanti di scuola primaria propongono complessivamente tre **rimedi**:

- calcolo del minimo comune multiplo tra denominatori;
- stima delle frazioni per confronto con un valore di riferimento noto;
- rappresentazione grafica delle frazioni.

Solo l'insegnante di scuola secondaria (Rosa) esprime più di un possibile rimedio all'errore, sottolineando anche l'importanza dell'utilizzo di più di una strategia da parte dell'insegnante per porre rimedio all'errore dello studente.

Il primo rimedio è la ricerca del minimo comun denominatore delle frazioni per poterle confrontare. Sei insegnanti giustificano tale scelta con l'aggancio alle precedenti conoscenze degli alunni rispetto alle unità di misura delle grandezze, per cui: come nel confronto tra, ad esempio, lunghezze, si riporta tutto alla stessa unità, così per confrontare frazioni, si deve riportare tutto alla stessa misura comune altrimenti le frazioni non sono confrontabili. In tale procedimento prevale un approccio di tipo procedurale al rimedio dell'errore, soprattutto se teniamo conto del livello scolare a cui è proposto che difficilmente potrebbe condurre gli studenti oltre un livello di memorizzazione della procedura di confronto. Inoltre la ricerca del minimo comun denominatore in questo caso è resa complicata per uno studente della scuola primaria anche dal fatto che questo valore è 24 un numero che non compare in nessuno dei tre denominatori delle frazioni. Il calcolo del minimo comun denominatore richiede una padronanza nella ricerca dei multipli comuni che non è facilmente acquisibile nel percorso di matematica della scuola primaria.

Una insegnante (Mirella) ha invece proposto un rimedio basato sul concetto di frazione come parte di un intero. Il rimedio consiste nel disegnare un diagramma a torta per ognuna delle tre frazioni e confrontare visivamente la dimensione delle frazioni, opportunamente colorate, per renderle distinguibili dal resto dell'intero. Questo tipo di rimedio è senz'altro più comprensibile al livello scolare elementare e inoltre comporta l'applicazione di un ben definito concetto di frazione e non solo la meccanica esecuzione di una procedura. Franca invece propone un intervento basato fondamentalmente sul senso del numero e su conoscenze fattuali di relazioni numeriche tra frazioni. Il rimedio quindi si fonda su una comprensione concettuale della frazione come numero. L'insegnante dà per scontato che lo studente dovrebbe conoscere alcune relazioni d'ordine tra frazioni più importanti come 2/3>1/2. Quindi basandosi appunto su ½ come valore di riferimento per il confronto pensa che inviterebbe gli studenti a notare che ¼ e metà di ½ e attraverso la proprietà invariantiva a notare che ¼ è uguale a 2/8 e quindi minore di 3/8. Per cui l'ordinamento corretto risulterebbe in ordine crescente: ¼, 3/8 , 2/3. E' interessane in questo rimedio come l'insegnante sfrutti le conoscenze sul senso del numero in un contesto dove solitamente l'approccio, soprattutto nella scuola secondaria, è tradizionalmente meccanico. Infine per quanto riguarda l'insegnante di scuola secondaria a fronte di un interpretazione che sinteticamente attribuisce l'errore all'incomprensione della frazione come espressione di una quantità i rimedi sono vari: rappresentazione delle frazioni come torte e confronto visuale, passaggio dalle frazioni ai numeri decimali ritenuti più facilmente confrontabili, calcolo del denominatore comune. In questa varietà di rimedi proposti probabilmente gioca un ruolo il fatto che le frazioni sono uno degli argomenti, o forse l'argomento principale del percorso di scuola secondaria di I grado in aritmetica, per cui l'insegnante spende molto del suo tempo di insegnamento sull'argomento.

Rispetto alla coerenza tra interpretazioni e rimedi c'è da notare che, a fronte di un interpretazione in cui è chiamata in causa un'incomprensione della frazione come quantità o come appunto numero, senza che però venga approfondito il senso di questa incomprensione, il rimedio, per sei insegnanti, è spesso estraneo a un esplicito concetto di frazione che lo studente non avrebbe acquisito e si basa su procedure meccaniche peraltro di difficile acquisizione a livello elementare. Ciò può essere indice di una mobilizzazione delle conoscenze da parte dei docenti, in situazioni che non rispecchiano quelle normalmente incontrate nella pratica scolastica, che non utilizza le conoscenze spendibili a livello elementare ma recupera conoscenze acquisite nel percorso scolastico dell'insegnante che però non possono essere ritenute efficaci nella situazione didattica in cui uno studente compie un errore come quello presentato nello scenario. Questo è avvenuto a fronte di un problema più complicato del solito ma risolvibile con conoscenze di livello elementare. In altri casi due maestre (Mirella e Franca) hanno utilizzato più opportunamente rimedi collegati a determinati concetti di frazione: frazione come parte di un tutto e frazione come numero. Tra le due soluzioni proposte quella che fa appello al senso del numero permette una più generale soluzione anche a casi più difficilmente rappresentabili in forma iconica in cui le differenze di frazioni sono a occhio difficilmente percepibili, inoltre apre la possibilità a un primo approccio ai numeri razionali che invece la rappresentazione di frazione come parte di un tutto non consente.

In questo scenario le spiegazioni in forma concreta o iconica sono meno presenti e lasciano più spazio a rimedi di tipo procedurale o a euristiche. Un'ipotesi per questo tipo di approccio da parte degli insegnanti si basa sul tipo di scenario proposto più che sull'argomento dello scenario. Le rappresentazioni grafiche a livello di scuola elementare sono molto usate, per cui può apparire strano che non siano state presentate come un possibile rimedio da tutte le docenti. Inoltre è solo a livello di scuola secondaria che certi procedimenti di calcolo come il calcolo del denominatore comune tra frazioni vengono sistematicamente adottati, i primi due scenari riguardavano errori in situazioni che possono definirsi di routine per le insegnanti. Cosa diversa per questo scenario che invece è molto più complicato e non usuale a livello di scuola elementare. In quest'ultimo caso alcune insegnanti non hanno ritenuto valido rifarsi a strategie usate normalmente per spiegare la frazione come parte di un tutto in un contesto di confronto tra frazioni. Anche l'insegnante che ha utilizzato le euristiche sul senso del numero ha preferito queste alla rappresentazione iconica per il confronto. Le rappresentazioni utilizzate dalle insegnanti hanno delle potenzialità che a volte non vengono riconosciute perché probabilmente il contesto d'uso non è variato opportunamente da metterne in luce le possibilità. D'altra parte certe rappresentazione, in forma iconica o concreta, che vengono sempre utilizzate per le spiegazioni, vengono attribuite di un potere esplicativo che va oltre le reali possibilità nelle situazioni di normale routine, come si vedrà a anche in seguito .

9.2.4 Analisi del quinto scenario

S5. Quinto scenario

In una discussione in classe tra alunni su alcuni degli esercizi assegnati come compito per casa tre di loro dibattono sui risultati nel seguente modo:
A: il risultato è 1,70>1,7 perché 70>7

B: no, il risultato è 1,70=1,7 perché la misura è la stessa perché lo zero non conta.

C: no, non è così, bisogna dire che i numeri sono uguali ma il valore è diverso perché 70 è diverso da 7.

- **Analisi concettuale e ragioni del contenuto matematico del quinto scenario**

Nell'attività di classe degli insegnanti è prassi abbastanza comune che gli studenti discutano tra di loro o con l'insegnante le soluzioni di un compito soprattutto quando il docente adotta pratiche che sono collegabili ad un'attività matematica per indagine o più generalmente collegabili ad un approccio socio-costruttivista. Prassi che comunque resta minoritaria rispetto a un'impostazione di tipo trasmissivo della materia. Nella discussione presentata in questo scenario tre studenti si confrontano sulle possibili soluzioni di un problema e l'insegnante è chiamata a dirimere la questione cercando di interpretare gli errori nei ragionamenti degli studenti e di proporre un possibile rimedio.

Il confronto tra decimali è un argomento molto dibattuto a livello di ricerca in quanto sono note le difficoltà che gli studenti di scuola elementare incontrano nell'ordinamento di questo tipo di numeri. Spesso le conoscenze pregresse sui numeri naturali formano come una barriera di tipo epistemologico alla comprensione sicura dei numeri decimali in quanto gli studenti applicano i criteri per il confronto tra numeri naturali anche ai numeri decimali andando incontro a errori. Infatti per fare solo un esempio il numero delle cifre non è collegabile semplicemente alla quantità espressa dal numero: maggiore il numero delle cifre, maggiore la quantità, cosa che invece è valida nel mondo dei numeri naturali. Inoltre lo zero come ultima cifra della parte decimale del numero gioca un ruolo particolare sia nel contesto di numeri puri sia nel contesto di numeri associati a un'unità di misura. Nei numeri puri lo zero come ultima cifra della parte decimale non conta nulla per il valore espresso dal numero, mentre per le misure rappresenta il valore dell'unità misurata, cioè 0, per cui il confronto tra due misure espresse da numeri uguali che hanno come unica differenza lo 0 come ultima cifra nella parte decimale, non può portare a dire che le due misure sono le stesse, infatti il livello di precisione è diverso.

Nello scenario gli errori matematici presenti sono di diversa natura. Nel caso dello studente A l'errore sta nel fatto che 70 non è maggiore di 7 in nessun caso essendo entrambe parti decimali. Nel caso dello studente B, da cui si capisce che i tre studenti parlano di confronto tra misure, è vero che i valori numerici scritti sono uguali ma la misura non è la stessa in quanto varia il grado di precisione. Per lo studente C, che forse tenta di spiegare il fatto che la precisione è diversa nelle due misure, c'è una confusione terminologica da interpretare in quanto non è chiaro cosa intenda affermare quando distingue tra numero e valore di un numero.

Nel caso dello studente A l'errore è anche di tipo logico in quanto fondato sull' errata deduzione che poiché 70>7 allora 1,70>1,7.

Un'ultima causa di errore, di tipo psicologico, può essere data da un ancora inadeguato livello di comprensione degli studenti per affrontare il "salto" epistemologico (Brousseau, 1981) dai numeri naturali ai numeri decimali, anche se questa tipologia di errore sarebbe più adeguata se il contesto di riferimento fosse reale e non ipotetico.

Anche in questo scenario le conoscenze matematiche implicate fanno parte del curricolo di base della matematica della scuola primaria e quindi ragionevolmente in possesso delle insegnanti.

Il caso più controverso è quello tra B e C. Uguaglianze come 3=3,0=3,00 oppure 5,31=5,310=5,3100 sono certamente vere quando ci riferiamo a numeri "puri", cioè a numeri che non nascono da misurazioni e, quindi, non sono corredati da una "marca", da una unità di misura.

Quando si tratta di numeri "corredati" da una unità di misura questa eguaglianze non valgono più. Supponiamo, per esempio, che la lunghezza di un palazzo sia 31,7m. Ho ottenuto questa informazione facendo una misura che ritengo appropriata per il problema che mi interessa. Questa informazione la posso pensare in termini di metri (31) e di decimetri (7). Essa non mi dice nulla sui centimetri, che possono variare da 0 a 9 oltre i 31,7m, ma che trascuro perché non mi interessano. In questa situazione non vale l'eguaglianza 31,7m=31,70m perché il secondo membro dell'eguaglianza mi dà una informazione sui centimetri (sono zero) che non è fornita dal primo membro. Possiamo anche dire che nella prima misura il margine d'errore riguarda i centimetri mentre nella seconda riguarda i millimetri. Ancora un esempio: su certi ponti possono transitare camion il cui peso non sia superiore a 15,00t. Questo significa che può passare un camion il cui peso sia 15 tonnellate e 9 Kg, ma non uno il cui peso sia 15 tonnellate e 10 Kg. Se valesse l'uguaglianza 15,00t=15,0t anche il secondo camion potrebbe passare insieme a tutti quelli il cui peso sia inferiore a 15 tonnellate e un quintale (100kg).

➢ **Analisi delle risposte al quinto scenario: il confronto tra numeri decimali**

Rispetto all'**interpretazione** delle affermazioni degli studenti e ai **rimedi** proposti si può sintetizzare quanto segue.

- Sei insegnanti identificano la risposta di B come corretta.
- Un' insegnante identifica la risposta di C come corretta (Giulia).
- Un' insegnante non si sbilancia e afferma che in ogni risposta c'è qualcosa di corretto e qualcosa di errato e non propone rimedi (Carla).
- Un' insegnante non risponde (Mirella).
- Nessuna insegnante attribuisce ad A la risposta corretta.
- L'affermazione di C è risultata di difficile interpretazione. Solo Maria ha fornito un'interpretazione dell'espressione di C coerente con il senso, potenzialmente ambiguo, della sua affermazione.

- Un’insegnante (Ester) non propone rimedi agli errori ma focalizza il suo intervento sul mantenimento della discussione tra gli studenti.

Non tutte le insegnanti che danno ragione allo studente B concordano con la sua giustificazione. Elena afferma: «Piuttosto direi al bambino B che la sua osservazione è corretta, ma la spiegazione non è molto corretta.»

Anche l’insegnante che attribuisce a C (Giulia) l’affermazione corretta contesta questo stesso errore a B: «nel senso che B dal punto di vista matematico è scorretto, più corretto è C...Non dire che lo 0 non conta»

Le due insegnanti non giustificano però con maggiore precisione la loro osservazione. Inoltre Elena nella fase dei rimedi si contraddice in quanto afferma che:

«Proverei a fare altri esempi. Nel senso se metto dei numeri in cui metto tantissimi zeri, che so, io vado a scrivere 1,7000000 e 1,7000 c’è differenza, non c’è differenza? Quindi farei degli esempi aggiungendo tanti zeri o togliendoli facendo capire che in questo caso il fatto di mettere degli zero successivi al sette non è, non ha un significato matematico.»

Quindi la differenza secondo Elena risiede nell’espressione «lo 0 non conta» diversa da quella usata da lei «il fatto di mettere degli zero successivi al sette non è, non ha un significato matematico». Non si capisce però dove stia l’esatta differenza tra le due espressioni e quindi dove stia l’errore nel dire lo 0 non conta secondo l’interpretazione dell’insegnante.

Infine Carla porta questo ragionamento per confutare l’argomento di B:

«Sicuramente non posso avvallare l’idea che lo 0 non conta. Lo 0 ha un suo significato. Se scriviamo 1,70 a volte con la calcolatrice lo 0 viene automaticamente cancellato e diviene 1,7. Potrei dire che è uguale, che sicuramente una diversità c’è, un qualcosa di minimo che non incide sui calcoli che facciamo noi, tra 1,7 e 1,70 ecco... Non potrei dire agli alunni che lo 0 non conta perché è un errore. Lo 0 a seconda di dove è messo e come è messo ha un suo significato, una sua posizione. Lo

0 indica qualcosa…. Se penso che 3,5 euro e 3,50 euro sono sempre 3 euro e mezzo allora il valore è quello lì, ma in un calcolo strettamente matematico il mezzo è 50 centesimi non è 5 centesimi. 3,50 è diverso da 3,05 ma 3,5 è uguale. Gli faccio vedere che lo 0 se lo cambio di posizione assume un altro significato. Ha un valore.».

Secondo Carla lo 0 ha un certo, non meglio specificato, significato per cui "conta qualcosa". I due valori 1,70 e 1,7 sono distinguibili solo in base alla sofisticatezza dei calcoli matematici utilizzati. La posizione dello 0 ai centesimi indica che appunto 0 sono i centesimi e secondo Carla questa cifra in tale posizione influenza comunque la precisione di un calcolo. Ciò è in accordo con quanto discusso in precedenza sul significato degli zeri alla fine della parte decimale di una misura. Ma in seguito l'insegnante spiega che il valore posizionale delle cifre è mantenuto anche nella scrittura decimale confrontando prima 3,50 e 3,5 e affermando che hanno lo stesso valore e poi 3,50 e 3,05 in cui lo 0 occupa posizioni diverse modificando quindi il valore dei numeri. L'insegnante generalizza l'affermazione dello studente B come se questo intendesse dire che lo 0 in generale non conta mai come ultima cifra nei numeri e in realtà non la riferisce allo specifico caso dello 0 alla fine del numero decimale con una misura come poteva sembrare all'inizio della risposta. Sembra quasi che Carla, pur ammettendo che i valori dei numeri 1,7 e 1,70 sono gli stessi, abbia riserve nell'affermare che lo 0 nella parte finale come ultima cifra non conti, nel senso che non cambia valore al numero. Ciò la porta a sostenere che in calcoli matematici sofisticati lo 0 all'ultima cifra "conti qualcosa" ma senza riuscire a spiegare la reale differenza tra 1,7 e 1,70 quando sono seguiti da un'unità di misura.

Le insegnanti identificano la risposta di A come errata ma non interpretano le ragioni possibili dell'errore. Di fatto, per le insegnanti lo studente A non ha capito il significato della numerazione decimale e quindi che 70 sono centesimi e 7 sono decimi. Giulia interpreta l'affermazione di A come dovuta a un errore di tipo logico. L'insegnante attribuisce allo studente dei passaggi matematici errati per arrivare alla conclusione che 70>7:

«Ha sbagliato a mettere maggiore, al limite dal punto di vista matematico avrebbe potuto mettere maggiore o uguale. Non riesco a capire il paragone… lui ha tolto gli interi, poi ha moltiplicato tutto per 10 però ha sbagliato completamente la moltiplicazione di entrambi i termini. Cioè tolgo un'unità qua l'ho moltiplicata per 100 cioè da 0,70x100… non ha moltiplicato correttamente. E' completamente sbagliato… io gli chiederei mi spieghi questo passaggio come sei arrivato a questo 70?»

L'insegnante cerca di ricostruire il procedimento seguito dallo studente per arrivare al confronto di 70 e 7 partendo da 1,70 e 1,7. Nel fare questo però l'insegnante non riesce a comprendere i passaggi che lo studente può aver effettuato per ottenere 70 e 7 che secondo l'interpretazione di Giulia non sono più parti decimali ma numeri interi. Questa conclusione di Giulia però contrasta con la sua affermazione iniziale per cui lo studente avrebbe dovuto scrivere "al limite 70≥7" interpretabile in parte solo come un confronto tra parti decimali dei numeri.

Per quanto riguarda l'affermazione dello studente C Maria la ritiene errata in base al fatto che «il valore di un numero è la quantità che esprime» per cui «due numeri sono uguali se esprimono la stessa quantità, sono uguali anche se espressi con cifre diverse». Ester è più titubante nell'interpretare le affermazioni degli studenti infatti non riesce a spiegarsi in modo chiaro cosa intenda C a parte il fatto che, secondo lei, non accetta che lo 0 non conta come dice B. Di fatto Ester non riesce a chiarirsi l'interpretazione delle affermazioni per proporre un suo intervento a rimedio della situazione. Ester è molto vincolata, come vedremo, dal fatto di non "disturbare" la discussione. Roberta invece interpreta l'affermazione di C in questo modo:

«farei un discorso su numero e cifra e sul significato del numero e il segno e la cifra. Qui bisognerebbe approfondire nuovamente tanti aspetti matematici. Perché -il valore diverso e i numeri uguali- se i numeri sono uguali il valore non è diverso. Allora si parla di posizione e di cifre differenti.»

L'interpretazione sembra opposta a quella di Maria «se i numeri sono uguali il valore non è diverso», il valore è determinato dal numero, come è scritto. Anche se parlando di cifre e posizioni non è trasparente il pensiero dell'insegnante su cosa intenda per numero, se cioè il numero sia da intendersi corrispondente alla sua rappresentazione scritta o da identificare con il valore come quantità. Nel caso in cui l'interpretazione di numero sia da intendersi come distinta da quella del suo valore allora c'è un incomprensione da parte dell'insegnante sulla distinzione tra numero come quantità e sua rappresentazione. Si può pensare ad esempio alle rappresentazioni dei numeri naturali in base diversa da 10. Altre insegnanti non forniscono interpretazioni dello studente C. Solo Franca dichiara che domanderebbe allo studente cosa intenda dire perché non le è chiaro.

I rimedi proposti dagli insegnanti si fondano su: esempi o spiegazioni che esplicitano il tipo di unità presenti e su sussidi didattici: grafici e concreti.

Per quanto riguarda Elena, non soddisfatta della spiegazione di B, propone un rimedio che andrebbe bene per ogni studente:

> «Cercherei di far ipotizzare da loro quale potesse essere la spiegazione corretta. Proverei a fare altri esempi. Nel senso se metto dei numeri in cui metto tantissimi zeri, che so, io vado a scrivere 1,7000000 e 1,7000 c'è differenza, non c'è differenza? Quindi farei degli esempi aggiungendo tanti zeri o togliendoli facendo capire che in questo caso il fatto di mettere degli zero successivi al sette non è, non ha un significato matematico.».

Il rimedio scelto è teso a veicolare l'attenzione sul numero degli zeri presenti nella parte decimale. Con diversi esempi l'insegnante, attraverso domande poste agli studenti, cerca di fare in modo che essi si accorgano dell'errore. Sembra che l'insegnante si aspetti che gli studenti autonomamente si accorgano dell'errore; il rimedio è teso più al raggiungimento di una risposta corretta che al miglioramento della comprensione di ciò che non ha capito lo studente. Inoltre l'insegnante ritiene inaccettabile il dire che lo 0 non conta e sostituisce a questa espressione la frase «lo 0 non ha significato matematico» senza spiegare meglio cosa intenda.

Le altre docenti hanno proposto rimedi sia in forma di spiegazione orale che con l'aiuto di sussidi.

Maria spiegherebbe che 70 sono centesimi e 7 sono decimi, per poi a proporre interventi basati su sussidi grafici e manipolativi. Per quanto riguarda l'utilizzo di grafici Maria indica solo che utilizzerebbe disegni, forse per identificare le parti decimali come frazionamento, ma non spiega come. Maria quando propone sussidi per rimediare agli errori, userebbe oggetti concreti come perline o qualcos'altro «a portata di mano»:

«al primo direi che sì 70>7 però in che posizione è questo 70 nel numero. Questo 70 e 7 che valore hanno. Cercando quindi dove sono le unità, i decimi e i centesimi. E così potrebbe accorgersi che in realtà 70 e 7 sono centesimi e decimi. Al terzo chiederei se intende numeri uguali per quantità e poi gli chiederei cosa vuol dire valore di un numero...per far capire che il valore di un numero è la quantità che esprime...magari ci si può aiutare con qualche esempio concreto a seconda di quello che si ha a portata di mano: disegni, perline.».

Certamente in questo caso si può affermare che l'utilizzo di oggetti discreti come perline non possa essere facilmente collegabile all'incomprensione che l'insegnante dimostra di interpretare negli studenti. L'esecuzione della misura con valori decimali richiede una grandezza che si esprime su un continuo. Anche Maria distingue, in forma abbastanza generica, gli interventi di rimedio per gli studenti A e C.

Roberta utilizzerebbe la linea dei numeri per cercare di evidenziare le quantità espresse dai decimali. I sussidi concreti proposti da Roberta consistono nell'utilizzo dell'abaco per evidenziare come i centesimi non siano presenti e sottolineare il valore posizionale delle cifre e poi la misura diretta col metro. L'importante, secondo Roberta, in questo tipo di rimedio è che lo studente possa visualizzare che 1,70=1,7. Roberta cerca di recuperare alcune conoscenze precedenti degli studenti affermando che lo studente A nel dire che 70>7 ha ragione se sono considerate come unità, ma non certo come decine. Questi rimedi sono per Roberta relativi al caso dello studente A; nel caso di C il rimedio è espresso con minor chiarezza, in quanto anche l'interpretazione dell'insegnante non è trasparente come già visto:

«poi l'ultimo per il C…farei un discorso su numero e cifra. Perché lui visualizza 7 dice i numeri sono uguali e andrei a farlo riflettere sul significato della cifra e sul significato del numero e il segno e la cifra. Qui bisognerebbe approfondire nuovamente tanti aspetti matematici. Perché il valore diverso e i numeri uguali, se i numeri sono uguali il valore non è diverso. Allora si parla di posizione e di cifre differenti.»

In questo caso l'insegnante adotterebbe diversi interventi per i due studenti che dimostrano un' idea differente sulla soluzione da fornire.

Anche per Franca i rimedi si basano su spiegazioni orali e sussidi come l'utilizzo del metro. Per quanto riguarda A afferma: «è chiaro che se c'è un metro e 70 cm è la stessa cosa di 1m e 7 decimi, allora gli faccio fare l'equivalenza tra 7 decimi e 70 centimetri sul metro, sul diviso... poi dovrei ragionarci anch'io su sta cosa»

L'insegnante si appella all'inizio all'evidenza data dallo strumento di misura ma poi si dimostra meno certa e ammette che comunque per correggere l'errore ci sarebbe forse bisogno di qualcosa d'altro. Rispetto a C, per convincerlo che 70 e 7 in realtà sono lo stesso valore l'insegnante utilizzerebbe disegni con divisioni in parti diverse per far vedere che 7 "grandi" (decimi) sono uguali a 70 "piccolini" (centesimi) come farebbe per spiegare le frazioni equivalenti.

«ma questo qua è proprio fuori fase, perché i numeri non sono neanche uguali, c'è lo zero, è l'incontrario i numeri sono diversi ma i valori sono uguali. Perché 70 è diverso da 7…come nelle frazioni se divido per 70 faccio parti più piccole, se divido per 7 faccio parti più grandi, devono capire proprio che denominatore più basso, la frazione è più alta, ha più valore no e queste sono cose non immediate da capire. Così glielo spiegherei»

Anche Giuliana afferma che spiegherebbe i confronti in forma grafica sfruttando le frazioni equivalenti, ma non si dilunga oltre nella spiegazione.

Infine Rosa, l'insegnante di scuola secondaria fa una precisazione rispetto a numeri puri e numeri con misure. Trattandosi di misure l'insegnante ritiene opportuno intervenire per distinguere l'equivalenza tra numeri puri per cui 1,70=1,7 da quella tra numeri con misure per la quale 1,70 indicherebbe che la misura è stata più precisa fini a misurare 0 centesimi, mentre 1,7 è meno precisa non dicendo nulla sui centesimi. In questo senso lo 0 ha un suo significato di valore misurato fino ai centesimi, mentre l'assenza dello zero non permette di dire niente a riguardo del valore ai centesimi. Per quanto riguarda i numeri puri il suo rimedio consiste nel posizionarli sulla linea dei numeri per evidenziare come occuperebbero lo steso posto. Le misure invece andrebbero trattate più opportune mante con un metro per le misure lineari. Rispetto allo studente C non sa cosa intenda affermare ma non pensa che si possa riferire a un discorso relativo alla differenza tra numeri puri e misure.

Due insegnanti (Ester e Maria) affermano esplicitamente che lascerebbero gli studenti confrontarsi e cercherebbero di intervenire senza dare troppe indicazioni esplicite sull'esattezza dei risultati per favorire lo scambio di idee.

Maria è particolarmente attenta a non interrompere la discussione e a fare in modo che il proprio intervento sia di promozione della chiarificazione delle idee:

Maria «Intanto farei ridire la loro posizione a tutti e tre. Questo magari non c'entra con la matematica, ma vedo che è molto importante ascoltarsi. ... quando si hanno opinioni diverse vien da scontrarsi senza far dire, invece secondo me è molto importante lasciare che l'altro finisca.»

R (Ricercatore): «Perché dici che non c'entra con la matematica?»

Maria: «così, perché non c'è una regola in generale. In questo senso qua. Quindi a ognuno chiederei di rispiegare quello che pensano, creando un clima dove non si contrastano sennò si contrastano anche se capiscono che hanno torto. Li ascolterei così come tante volte rispiegandosi bene da soli capiscono dove c'è qualcosa che non quadra. Se rimangono su queste loro opinioni»

L'intervento dell'insegnante dapprima cerca di fare in modo che gli studenti si correggano da soli accorgendosi del proprio errore. Il metodo è quello della ripetizione della propria affermazione di fronte all'insegnante in modo che il doversi esprimere ed ascoltare i compagni di fronte all’insegnante aumenti l’attenzione su quanto viene verbalizzato. Solo se la situazione dovesse permanere in una fase di “stallo” allora l’insegnante interverrebbe nella discussione in modo diretto. Per quanto riguarda l’opinione espressa dall’insegnante sulla matematica in questo contesto avremo modo di riprenderla successivamente.

Ester tende invece a focalizzarsi maggiormente sul recupero di quanto di “giusto” può essere ricavato dalle tre affermazioni degli studenti ricontestualizzandole allo scopo di non bloccare il flusso del ragionamento degli studenti:

> «però se vado a dirgli che ha ragione B ho rovinato tutto il loro ragionamento. …bisognerebbe recuperarle informazioni positive che ci sono qua dentro. In C c’è un’informazione giusta perché è vero che 70 è diverso da 7 ma non è relativa al contesto. E quindi bisogna recuperare questa informazione ricollocandola nel contesto di appartenenza perché vale in un altro contesto.».

L’insegnante propone la stessa considerazione anche per l’affermazione dello studente A. Poi continua a riguardo: «E’ difficile recuperare tutti i vari significati, tutto quello che loro hanno anche capito no? C’è tanto di capito e c’è tanto di rimasto nel…là»

L’interesse dell’insegnante è quello di non “mortificare” gli studenti, come si potrà mettere in luce nelle successive interviste più chiaramente, attribuendo affermazioni corrette ed errori e, per evitare questo, siccome gli errori evidentemente ci sono cerca un modo per poter ricollocare le affermazioni in contesti, come potrebbe essere quello dei numeri naturali per A, in cui sono valide.

Le altre sei insegnanti danno minore valore didattico alla discussione tra studenti. Roberta ad esempio prende spunto dalla discussione tra studenti per proporre invece il proprio intervento:

> «Riprenderei con loro in una discussione di gruppo paritario anche, sicuramente del materiale precedente costruito che potrebbe essere una linea dei numeri sulla quale queste quantità e relazioni risulterebbero abbastanza evidenti.»

In questo scenario le insegnanti hanno evidenziato una certa difficoltà di interpretazione degli errori e anche nel proporre rimedi. Praticamente tutte le docenti, tranne Rosa, hanno avuto difficoltà a individuare con precisione tutti gli errori presentati nello scenario. L'argomento numeri decimali appare quindi essere risultato non in possesso sicuro dal punto di vista dei contenuti matematici da parte delle docenti. Il punto critico è risultato essere il significato dello 0 come ultima cifra nella parte decimale del numero. Dagli estratti risulta come non sia accettata l'affermazione che lo 0 alla fine di un numero "non conti". Ciò che le insegnanti non hanno colto è la differenza tra eguaglianza tra numeri decimali puri e tra numeri decimali associati a misure. Spesso le loro interpretazioni sembra siano vincolate al fatto che certe espressioni non sono accettate in matematica, senza averne colto il significato entro determinati contesti. Lo 0 non si può dire che non conti come cifra nei numeri naturali, ma alla fine della parte decimale di un numero puro non cambia certo il suo valore. Giulia, Elena e Carla invece non accettano la frase «lo 0 non conta» così come è formulata, per principio, senza però essere in grado di giustificare matematicamente la loro posizione.

Le interpretazioni degli errori degli studenti non vengono approfondite in modo particolare. Risulta evidente alle insegnanti che per A l'errore sta nel non aver compreso che 70 centesimi è uguale a 7 decimi, mentre per lo studente C le insegnanti, come già visto sono state più incerte nell'interpretazione, ma, tranne alcune eccezioni, non hanno ritenuto necessario ragionare sul pensiero dello studente. Di conseguenza i rimedi per gli errori di A e C non sono distinguibili e quando sono stati distinti dalle insegnanti non è stato chiarito il motivo della distinzione. Quello che risulta dalle risposte è che insegnanti che hanno evidenziato meno incertezze rispetto ai decimali, ma non con questo una conoscenza sufficientemente adeguata all'interpretazione dello scenario proposto, hanno fornito una maggiore diversificazione dei rimedi da attuare, passando dalle spiegazioni sui valori posizionali, agli esempi concreti con misure, all'utilizzo della linea dei numeri.

Solo Rosa l’insegnante di scuola secondaria ha individuato la fonte dell’incomprensione tra gli studenti. Ha però fornito rimedi che sono stati del tutto simili a quelli proposti da altre insegnanti.

Infine solo due insegnanti hanno affermato che avrebbero tenuto in considerazione il contesto di riferimento della discussione per modulare il loro intervento. Nella fase dei rimedi però non si sono riscontrate particolari differenze con le insegnati che hanno mostrato atteggiamenti maggiormente direttivi.

9.3 Gli interventi degli insegnanti in seguito a domande degli studenti

I seguenti scenari proposti presentano delle situazioni in cui gli studenti chiedono l’intervento dell’insegnante per avere spiegazioni su delle loro curiosità, difficoltà di comprensione o risposta a idee rispetto ad argomenti di matematica. Gli scenari presentano situazioni relative a parti di contenuti che di prassi sono trattati solo marginalmente nelle classi elementari, problemi la cui risposta risiede al limite delle conoscenze insegnate agli studenti, ma sempre all’interno di quello che si suppone debba essere il nucleo di conoscenze dell’insegnante. Anche in questo caso gli scenari sono uno strumento per penetrare nell’interpretazione che l’insegnante, sfruttando la propria conoscenza matematica, dà del pensiero dello studente attraverso le domande che gli pone e i dubbi che solleva. In questi scenari la conoscenza matematica mobilitata dall’insegnante va oltre quella che normalmente viene posta in uso nelle lezioni ma risulta comunque fondamentale che l’insegnante ne sia in possesso per poter adeguatamente soddisfare alle richieste che gli vengono poste. Rispetto al pensiero dello studente quello che si vuole sondare nella ricerca è il motivo secondo cui, a parere dell’insegnante, un tale problema possa essere difficile da comprendere per gli studenti. La capacità di penetrare il pensiero dello studente passa attraverso il sapere matematico dell’insegnante relativamente agli argomenti presenti negli scenari proposti.

Tre degli scenari vertono sulla divisione: la divisione con 0 a dividendo o divisore, la divisione in un problema con divisore decimale e una generalizzazione sulla divisone per numeri decimali compresi tra 0 e 1.

La divisione come operazione matematica, ovvero il concetto di divisione, è uno dei contenuti più importanti del curricolo della scuola primaria. E' la prima porta d'accesso per la conoscenza dei numeri razionali, è insita nel concetto di raggruppamento nel sistema posizionale di numerazione, è la seconda operazione inversa che viene appresa nel curricolo ed è uno strumento matematico fondamentale nella vita quotidiana. La conoscenza della divisione è quindi centrale nel sapere matematico dei docenti di qualsiasi livello scolare.

In questi scenari non è stato utilizzato il modello di analisi mutuato da Peng & Luo (2009) in quanto gli scenari non prevedevano veri e propri errori degli studenti, anche se in un caso (lo scenario 9) le idee proposte dall'ipotetico studente sono errate.

9.3.1 Analisi del sesto, settimo e ottavo scenario

S6. Sesto scenario

Uno studente viene con il quaderno dei compiti per casa e ti dice che ha controllato il risultato di alcune divisioni con la calcolatrice. Quando ha calcolato 76:0 ; 2345:0 e 7: 0 la calcolatrice ha scritto come risultato "error". Dividendo invece 0:76 ; 0:2345 e 0:7 la calcolatrice ha dato come risultato 0. Ti chiede il perché di questi risultati. (Markovits & Even, 1999)

S7 Settimo scenario

Viene assegnato in classe il seguente problema : 0,75litri di succo di frutta costano 2 euro. Quanto costa un litro di succo di frutta?
Nel risolverlo alcuni studenti sono in difficoltà perché non capiscono quale operazione devono fare. Ti chiedono aiuto.

S8 Ottavo scenario

Uno studente nota che se divide un numero naturale per un numero decimale compreso tra zero e uno ottiene sempre un quoziente maggiore del dividendo. Ti chiede il perché di questa "stranezza".

- **Analisi concettuale e ragioni del contenuto matematico del sesto, settimo e ottavo scenario**

Il primo concetto che viene collegato all'operazione di divisione è quello di raggruppamento. Sono possibili due tipi di raggruppamenti:

- Ripartire 20 biglie in 5 sacchetti; quanti sacchetti sono necessari? Questo è definito modello partitivo perché è noto il numero di sacchetti in cui suddividere le biglie. Più in generale è noto il numero di gruppi e la quantità da ripartire e si cerca la quantità da distribuire in ogni gruppo.
- Quanti sacchetti occorrono per distribuire 20 biglie in sacchetti di 5 biglie ognuno? Questo è definito modello di contenenza, in quanto è definito il numero di biglie per sacchetto e il totale delle biglie. In generale si cerca il numero di raggruppamenti di una determinata quantità, data la quantità in ogni raggruppamento.

Esistono modelli intuitivi inconsci delle operazioni che corrispondono a caratteristiche del comportamento "mentale" (D'Amore, 1999). Queste concezioni sono in accordo con le operazioni di moltiplicazione e divisione nel dominio dei numeri naturali ma sono incongruenti con queste operazioni nel dominio dei numeri razionali. Nella risoluzione di problemi che comportano moltiplicazioni o divisioni un aspetto importante per la comprensione e soluzione riguarda appunto l'impatto del tipo di numeri presenti nel problema. I modelli associati naturalmente alla divisione sono quelli di contenenza e partitivo.

Nel modello partitivo un oggetto o un raggruppamento di oggetti è ripartito in numero di sottogruppi equivalenti tra loro. La dimensione dell'oggetto o il numero degli oggetti è rappresentato dal dividendo, mentre il numero delle sottogruppi è rappresentato dal divisore e la dimensione di ogni sottogruppo è rappresentata dal quoziente Le ricerche documentano (D’Amore, 1999) che certe regole vengono associate al modello intuitivo: il divisore deve essere un numero intero, il divisore deve essere minore del dividendo, il quoziente deve essere minore del dividendo o, detto altrimenti, la divisione diminuisce (rende minore). Il modello di contenenza è associato invece a problemi in cui è richiesto di trovare quante volte una data quantità è contenuta in un’altra quantità. L’unico vincolo imposto da questo modello è che il divisore sia minore del dividendo. I risultati delle ricerche confermano l’esistenza e l’influenza di questi modelli nella risoluzione dei problemi (D’Amore, 1999). Il significato di una divisione tra due numeri come ad esempio 8:3 può riferirsi quindi a due situazioni differenti. Il significato del quoziente dipenderà dalla situazione problematica a cui la divisione si riferisce, ma il valore del quoziente sarà comunque il medesimo. Nel passaggio dai numeri naturali ai decimali i due significati della divisione come contenenza e partizione restano invariati. Dal punto di vista didattico però la situazione cambia aspetto. Nella divisione tra numeri naturali qualunque sia il modello adottato, poiché il risultato non varia si ha che sempre il quoziente è minore del dividendo, cosa che non avviene necessariamente con i numeri decimali.

Nel **sesto scenario** la divisione in cui compare 0 a dividendo o divisore si collega a sua volta con importanti idee della matematica: la divisione come operazione matematica distinta dal suo algoritmo, il concetto di infinito, il significato di impossibile, il numero zero.

La divisione con 0 a divisore è impossibile oppure, in modo equivalente, può dare infinito come risultato. Dipende dal ragionamento che si conduce nella risoluzione della divisione. Se il risultato è impossibile significa che è impossibile trovare un numero che moltiplicato 0 dia come risultato un numero che non sia 0. Questo per la legge di annullamento del prodotto e dalla definizione della divisione come operazione. La divisione è infatti definita come segue: $a=bq+r$ con a dividendo, b divisore, q quoziente ed r resto. Se esistono due numeri q ed r che soddisfano questa relazione tra a e b allora i è trovato il risultato della divisione $a:b$. Il modo per trovare q ed r è ad esempio uno dei classici algoritmi della divisione insegnati a scuola.

Se il risultato è indicato con infinito si può fare appello al modello di divisione per contenenza. L'algoritmo della divisione con resto sfrutta questo modello, risponde alla domanda: quante volte il divisore è contenuto nel dividendo? Qualsiasi procedimento si voglia applicare per rispondere alla domanda, lo 0 è contenuto un numero infinito di volte in ogni numero.

Nella divisione con 0 a dividendo il risultato è un numero ben definito cioè 0. Anche in questo caso un approccio basato sulla definizione di divisione e quindi sul suo collegamento alla moltiplicazione porta a riconoscere che solo 0 è il numero che moltiplicato per qualsiasi altro dà come risultato 0 ovvero che se $a=0$ allora devo avere che: 0=bq+r è valida solo per $q=r=0$. Alternativamente ci si dovrebbe chiedere quante volte un numero è contenuto in 0. La risposta potrebbe essere 0 volte, come per ogni divisore maggiore del suo dividendo.

Il **settimo scenario** presenta una situazione in cui la divisione è interpretata come rapporto, rappresentato dal prezzo di un succo di frutta. La relazione tra costi e quantità è una relazione lineare di proporzionalità diretta per cui al raddoppiare, triplicare etc... di una quantità (variabile) lo stesso fa l'altra quantità (variabile). Le quantità sono esprimibili in termini di variabili matematiche. La ricerca dei valori delle variabili del rapporto nota la costante (il prezzo) comporta l'esecuzione di una moltiplicazione o di una divisione in base alla variabili da ricercare. Noto ad esempio il prezzo (costo unitario) di una merce per trovare il costo di una quantità diversa dall'unità si moltiplica il prezzo per la quantità. Noto il prezzo e il costo di una quantità per trovare la quantità si divide il costo per il prezzo.

Infine **l'ottavo scenario** presenta una situazione che entra in conflitto con i modelli intuitivi descritti in precedenza. Questo accade quando la divisone si applica al dominio dei numeri decimali o razionali.

Nell'estendere il dominio numerico delle operazioni la relazione tra le strutture matematiche e le situazioni reali diventa meno percepibile. La limitazione delle intuizioni necessita ad un certo punto dell'accettazione della matematica come sistema deduttivo formale. Ad ogni modo per il fatto che le strutture matematiche modellano aspetti del mondo rimangono dei legami con la realtà. Le operazioni possono modellizzare una grande varietà di situazioni. Il termine modellizzare assume anche il significato di legittimare con intento pedagogico le procedure di calcolo e di promuovere la comprensione delle proprietà formali di numeri e operazioni. Un eccesso di questo tipo di modellizzazioni può lasciare negli studenti concettualizzazioni povere e una scarsa competenza nel affrontare applicazioni al di fuori di un ristretto numero di situazioni (Freudenthal, 1994). Per ampliare il campo delle situazioni matematizzabili è importante fere in modo che gli studenti sperimentare situazioni di modellizzazione che colleghino le strutture matematiche al mondo reale fisico.

- **Analisi delle risposte al sesto scenario: la divisone con zero a dividendo e divisore.**

Tre insegnanti (Mirella, Giulia e Carla) non sono state in grado di rispondere alla domanda in modo che fosse analizzabile la risposta.

Quattro docenti (Maria, Rosa, Roberta e Franca) hanno risposto richiamando il concetto di divisione come operazione inversa della moltiplicazione, mentre altre due insegnanti si sono riferite a modelli intuitivi della divisione: partitivo e di contenenza. Le insegnanti del primo gruppo hanno basato la loro spiegazione sulla legge di annullamento del prodotto che però è espressamente menzionata da una sola docente, Roberta, che è anche l'unica quindi a dare un' esplicita generalizzazione alla sua risposta dopo aver proposto degli esempi numerici tra cui 1:0. Le altre risposte vertono su esempi numerici in cui viene applicata la definizione di divisione, per cui le insegnanti chiederebbero allo studente di trovare un numero che moltiplicato 0 dia 76. Il risultato della divisione per 0 è in questi casi indicato come impossibile perché non esiste un numero che verifichi la relazione cercata.

Il concetto di divisione come operazione inversa della moltiplicazione è utilizzato dalle stesse insegnanti anche nella divisione con 0 a numeratore tranne che per una insegnante (Roberta) che sostiene che la divisione di 0 non ha significato in quanto «nei libri di testo c'è scritto che non è significativa» (curiosamente la stessa e unica insegnante che ha esplicitato la legge di annullamento del prodotto). Probabilmente come afferma un'altra insegnante nella sua intervista (Ester) la significatività dei libri di testo è da intendersi come significatività dell'operazione concreta del dividere una quantità pari a 0 e non della significatività matematica della divisione di 0 come numero.

Una docente (Elena) ha utilizzato invece il modello partitivo della divisione per spiegare la situazione:

> «facciamo degli esempi concreti, per cui se ho 76 caramelle e devo dividerle tra 0 bambini, quante caramelle mi avanzano..quante caramelle avrà ogni bambino? Se i bambini sono 0 non è possibile farlo per cui questa divisione non ha senso no? Per questo probabilmente la mia calcolatrice mi dà come risultato error. Se invece ho 0 caramelle che devo dividere tra 76 bambini, quindi i bambini ci sono, le caramelle non ci sono per cui ogni bambino non avrà nessuna caramella, quindi il risultato è 0.».

La spiegazione si rifà a un concetto di divisione preciso, quello appunto di divisione per partizione o partitiva.

Nell'applicazione del modello partitivo in questo caso non ci sono gruppi da poter fare in quanto il loro numero è 0. Quindi non è possibile immaginare un dato numero di caramelle per gruppo (bambino) dato che i gruppi (bambini) non ci sono. L'esempio è concreto ma in realtà solo in apparenza perché parlare di 0 gruppi (bambini) non è usuale, si parla piuttosto di nessun gruppo (bambino) ma allora si perde il collegamento con l'ambito matematico della divisione in cui lo 0 non indica solo l'assenza di quantità ma è anche un numero con delle caratteristiche precise all'interno di determinate operazioni. Inoltre la divisione nella pratica algoritmica si collega al modello di contenenza invece che a quello di partizione, per cui la comprensione della divisione per 0 sul modello partitivo risulta scollegata dalla divisione per tutti gli altri numeri per la quale si fa valere il modello di contenenza o la definizione come operazione inversa della moltiplicazione. L'esempio è simile a quello usato dalla Stern per spiegare la divisone con 0 attraverso sussidi manipolativi come cubi da distribuire in piattini (Stern, 1949). Quando però si passa dall'esempio concreto alla scrittura simbolica l'analogia difficilmente è automatica per qualsiasi studente di livello elementare.

Ester si basa sul modello di contenenza per entrambe le situazioni. Nella sua spiegazione associa lo 0 all'idea di nulla:

«Non è tanto facile da immaginare, però se divido qualcosa per _nulla_ lo posso dividere tutte le volte che voglio. Invece se io divido lo 0 per qualsiasi numero ho sempre 0. In realtà non sto facendo niente: prendo un _nulla_ e lo divido per qualcosa, che cosa divido _nulla_....sembra un'operazione impossibile, cioè le operazioni del tipo 0:n.».

Associando lo 0 al nulla la spiegazione di Ester risulta difficile da comprendere dal punto di vista matematico. L'insegnante proponendo un modello di contenenza avrebbe potuto accoppiarlo con una rappresentazione adeguata come ad esempio l'utilizzo della linea dei numeri o esempi numerici in cui si evidenzi come la divisione per numeri che si avvicinano a 0 porta a risultati sempre maggiori.

Un altro aspetto degno di nota riguarda l'utilizzo in questo caso dell'analogia tra 0 e nulla. Tre insegnanti in forma esplicita e una in forma implicita accostano, indipendentemente dalla loro spiegazione, l'idea di nulla allo 0. Ecco altri tre estratti oltre al precedente di Ester:

Franca: «non è immediato no? , sto zero qua è un po'... Sì, prendo il 76 lo divido per _niente_...è così no? Se lo divido per _niente_ non lo divido e quindi è impossibile, però qualcuno mi ha detto allora fa 76, se non lo divido, e quindi qua ci si ragiona un po'.»

In questo caso l'insegnante fa riferimento a un modello partitivo interpretando quello che può essere il pensiero dei suoi studenti a riguardo se esposti a questo tipo di spiegazione. Come si legge dall'estratto la conclusione di alcuni studenti, citata da Franca, esposti allo stesso ragionamento proposto dall'insegnante Elena per trovare il risultato della divisione per 0, è stata completamente differente. L'utilizzo di un tale modello richiede almeno la presentazione di un esempio concreto o grafico altrimenti il rischio è quello di generare confusione tra il piano numerico e quello concreto della divisione. La divisione per 0 segna un passaggio da una matematica che sfrutta i modelli concreti per essere insegnata a una matematica che si svincola dai modelli concreti per diventare nel tempo strumento di modellizazione della realtà. Quello che risulta assente nelle risposte delle insegnanti è un tipo di rappresentazione che passi dal concreto della divisione per partizione al livello matematico della divisione come operazione inversa. Non a caso Franca conclude poco dopo:«Io non ho mai tirato fuori nulla di concreto per spiegare questo.»

Un'altra docente relativamente al nulla si esprime così:

Carla:« Il nulla diviso 76 etc. è sempre 0 no? O no?...perché un numero diviso il nulla ...riprendo il concetto di zero».

Infine in forma implicita Roberta afferma: «potremmo dire che comunque è una divisione non significativa...non utile lo zero non ha senso dividerlo...non c'è significatività in questa divisione.»

In questo ultimo caso la mancata significatività della divisione è attribuita allo 0 come indicatore di un'assenza di oggetti da dividere.

Da questi estratti nell'algoritmo della divisione il numero 0 torna ad essere associato al nulla, all'assenza di oggetti. Questo in insegnanti che hanno dimostrato differenti gradi di conoscenza concettuale dell'argomento (conoscenza del concetto di divisione, conoscenza del modello di contenenza, conoscenza inadeguata). Nei tre estratti le insegnanti dimostrano diverse padronanze del concetto di divisione. Nel caso di due insegnanti (Ester e Carla) il nulla sta per lo 0 nella divisione, mentre per Franca il niente è una sua interpretazione di quello che può essere l'idea degli studenti quando incontrano l'operazione. Nell'ultimo estratto (Roberta) lo 0 sta per assenza di "oggetti" e quindi per nessun oggetto di qui l'assenza di significatività già testimoniata in precedenza.

Per quanto riguarda infine la difficoltà matematica che gli insegnati attribuiscono agli studenti, tre riconoscono esplicitamente che la divisone con 0 è difficile da comprendere (Franca, Roberta e Rosa) e inoltre hanno dimostrato una comprensione della divisione a livello concettuale. I loro interventi consistono principalmente nella formulazione di esempi numerici della definizione di divisione. Solo un'insegnante (Roberta) proporrebbe vari esempi su cui gli stessi studenti dovrebbero da soli esercitarsi per comprendere problema:

> «bisognerebbe andare a riproporre queste divisioni insieme con i ragazzi. Far ipotizzare un risultato per la divisione ad esempio 76:0. Dopo vari tentativi probabilmente si verrebbe a capire riagganciandosi all'operazione diretta...portarli nell'esperire vari casi possibili, analoghi tipo 1:0.»

In generale non viene attribuita particolare valenza didattica alla situazione proposta complice talvolta anche una non sempre adeguata conoscenza dei concetti che sottostanno alla divisione con lo zero.

In questo scenario le insegnanti hanno utilizzato conoscenze matematiche relative alle definizioni di divisione, ma per coloro che non ne erano in possesso è risultato difficile rispondere alla questione posta dallo studente. Le insegnanti non hanno utilizzato forme di rappresentazione iconica o concreta della divisione per spiegare i risultati. Quando sono stati utilizzati dei modelli intuitivi, le insegnanti hanno trovato difficile darne un utilizzo didattico consapevole applicato alla situazione.

Infine per quanto concerne le tre insegnanti che non hanno fornito risposte adeguate: una di esse non ha risposto affatto, una seconda ha dimostrato di non conoscere l'argomento, ipotizzando che il risultato dovrebbe essere sempre zero senza però giustificarlo in nessuno dei due casi, e la terza (Giulia) ha tentato di ricordare le tabelle delle divisioni in cui i risultati nei due casi sono impossibile e 0 ma non riuscendo a ricordare esattamente né a giustificare in quale dei due. Ha però tentato, bloccandosi all'inizio del ragionamento, di applicare il concetto di contenenza alla divisione 76:0 per capire quale potesse essere il risultato.

Analisi delle risposte al settimo scenario: il rapporto.

Due insegnanti (Giulia e Mirella) non hanno risposto allo scenario proposto.

Le altre insegnanti hanno individuato le seguenti difficoltà per gli studenti nella risoluzione del problema: la presenza di un numero decimale, il numero decimale minore di 1, il fatto che solitamente problemi simili sono posti in modo che siano risolvibili con una moltiplicazione, la gestione delle due variabili costo e quantità per individuare la costante prezzo unitario. In questo scenario alcune docenti hanno ipotizzato varie cause di difficoltà per gli studenti, altre docenti si sono limitate a individuarne solo una oppure, in un caso, un'insegnante non è stata in grado di andare oltre la pura constatazione che il problema è difficile (Ester).

L'intervento più comune per aiutare gli studenti comporta la trasformazione del decimale 0,75 nella frazione ¾. Ciò, secondo il parere delle insegnanti, per due ordini di motivi: il primo è che il numero decimale è più facilmente visualizzabile con un modello grafico alla lavagna che lo riconduca a una frazione intesa come numero di parti di un intero, come ad esempio separare una bottiglia o un rettangolo in 4 parti e considerarne 3, il secondo è che la frazione permette un calcolo più comprensibile agli studenti che vedrebbero come si può calcolare l'unità frazionaria, per altro corrispondente alla parte mancante per arrivare al litro, e quindi moltiplicando per 4 calcolare il litro. In pratica passando da 0,75 a ¾ si elimina il problema della divisione 2:0,75 per passare a (2:3)x4 espressione tra numeri interi. Il problema viene trasformato dalle insegnanti in due sottoproblemi: quanto mi costa quella parte di litri che mi manca per arrivare all'unità litro, ovvero quanto costa ¼ di litro? E quindi da lì risalire al prezzo ovvero al costo unitario (Figura 9.3).

Figura 9.3

Il modello matematico del rapporto di proporzionalità diretta tra le due varabili, costo e volume di succo, con il prezzo come costante di proporzionalità non viene utilizzato in forma esplicita dalle insegnanti. Evidentemente la spiegazione basata sull'utilizzo delle frazioni è ritenuta più efficace per risolvere le difficoltà degli studenti. Ad esempio Franca ritiene che la difficoltà maggiore risieda proprio in questo aspetto:

«La difficoltà è mettere in rapporto il costo con la quantità. Cioè avere sott'occhio la quantità in litri, per quello se noi facciamo capire che non è l'intero, cioè non è un litro…quindi forse in frazione è più semplice che leggerla con il costo.»

Anche Roberta ha espresso la considerazione che gli studenti dovrebbero essere portati a lavorare sui confronti tra costi e quantità usando diversi costi e quantità, ma non ha espresso in modo più preciso questo pensiero:

«riprenderei il discorso sulle frazioni…Quindi andrei a fare un lavoro di confronto di costi e frazioni perché altrimenti potrebbe essere un discorso di operazione meccanica, ma non ha senso… la significatività è proprio capire come i 2 euro si collocano rispetto agli 0,75 e come si collocherebbero se fossero 25cl di più cioè ¼ di più.».

Roberta non esplicita in modo chiaro in cosa consistano i confronti nel suo intervento. Ciò che rende esplicito è invece l'utilizzo delle frazioni per cercare di ovviare alla difficoltà posta dal numero 0,75 e per aiutare gli studenti a comprendere che il costo di 1 litro è maggiore di 2 euro per il fatto che 1>0,75.

Il problema è interpretato come difficile anche per la comprensione del tipo di operazione da utilizzare. Due insegnanti (Carla e Maria) osservano che il problema "diretto" sarebbe stato più semplice da risolvere, magari con una moltiplicazione: quanto costano 3litri di succo se costa 2 euro al litro?

Carla:«Se fosse stato un litro costa 2 euro, quanto costano 5 litri, allora siamo abituati a questo genere di calcolo (2x5). …perché devo fare tutto il giro, cioè fare la divisione e farei 2 euro diviso…non so arrivare agli 0,25 poi faccio la moltiplicazione.».

Maria: «Mentre per loro è più semplice moltiplicare cioè un litro costa 2 euro, 3 litri quanto costano? Magari così gli viene automatico perché lo visualizzano di più. …mentre qua..0,75 se lo visualizzano come contenitore unico, una bottiglia..per loro non è facile capire che quella cosa lì è un pezzettino di un litro..»

In questo caso avrebbero usato direttamente la moltiplicazione 3x2=6euro.

L’insegnante di scuola secondaria di I grado (Rosa) propone anche un intervento basato sulle equivalenze tra litri e centilitri. Ciò per evitare il numero decimale. Si trasforma 0,75l in centilitri, ottenendo 75cl, si cerca il costo di 1 cl facendo 2:75 e poi moltiplicando per 100, quello di un litro.

Infine due insegnanti (Elena e Franca) farebbero dapprima stimare agli studenti il risultato per aiutarli appunto a individuare l’operazione possibile. Inoltre sostituirebbero al numero decimale un numero intero riformulando il problema per far meglio capire quale operazione dovrebbe essere utilizzata. Questo approccio è teso ad ampliare il concetto di divisione, che non sempre “rimpicciolisce” il risultato, e quindi dà la possibilità di potenziare l’utilizzo dell’operazione in contesti numerici diversi da quelli dove di solito è applicata. Inoltre il porre lo stesso problema con diversi numeri tenendo ad esempio fisso il costo porta ad apprezzare la costanza del quoziente rispetto alla variazione delle quantità in gioco che è un passo verso la concettualizzazione della divisione come rapporto.

In conclusione gli interventi delle insegnanti sono stati diretti principalmente alla soluzione del problema con la strategia del passaggio dai decimali alle frazioni. Alla domanda su quale operazione dovrebbero fare gli studenti hanno preferito rispondere in modo “indiretto” perché probabilmente ritenevano che la divisione 2:0,75 non fosse comprensibile in modo chiaro agli studenti come soluzione del problema. Ciò è senz’altro vero e il passaggio alle frazioni con la possibilità di visualizzare il problema è senz’altro didatticamente efficace per risolvere problemi simili portando anche a un utile collegamento tra numeri decimali e frazioni. In questo modo quello che si guadagna dal punto di vista della relazione frazioni decimali forse si perde rispetto alla possibilità di estendere il concetto di divisione come rapporto che è invece direttamente implicato nel problema. La possibilità di allargare il campo della divisione come operazione tra grandezze che mantengono un rapporto costante non è stata considerata dalle insegnanti. In un caso (Elena) avrebbe utilizzato esempi numerici diversi per far notare la costanza dell'operazione al variare delle quantità. Non è possibile però stabilire se il metodo proposto si limiti all'utilizzo dell'analogia per aiutare gli studenti a trovare il risultato (ipotesi che si ritiene più verosimile) oppure per introdurre gli studenti al concetto di divisione come rapporto tra grandezze non omogenee. Il metodo generalmente adottato dalle insegnanti è stato una sorta di procedimento a ritroso: interpretando come procedimento diretto il trovare il costo a partire dal prezzo il problema è stato trasformato in «come trovare il costo della quantità che manca per arrivare al prezzo».

La gestione della divisione come rapporto tra due variabili è considerata troppo complessa per gli studenti e quindi si preferisce optare per il passaggio dai numeri decimali alle frazioni evitando il calcolo del rapporto 2:0,75. Per quanto sia ragionevole l'opinione delle insegnanti è importante sottolineare come per arrivare alla comprensione della divisione come rapporto anche a livello di scuola primaria si possono adottare strategie, come quella del problema con variazioni (Bartolini Bussi, 2009), con cui si possa iniziare a formare l'idea che un'operazione può risolvere classi di problemi e che l'utilizzo di un'operazione non è necessariamente limitato alle situazioni collegabili con il significato intuitivo delle operazioni.

- **Analisi delle risposte all'ottavo scenario: divisione con divisore minore di 1.**

Una insegnante non ha risposto alla domanda (Mirella). Quattro insegnanti su nove (Elena, Carla, Maria, Franca) non hanno saputo giustificare la loro risposta ma hanno solo ipotizzato come procederebbero nella situazione in modo abbastanza vago. Due di queste (Maria e Franca) hanno fatto esplicito appello alla possibilità di riuscire a trasformare il problema in una forma concreta attraverso ritagli di cartone e divisioni di torte ma senza riuscire a spiegarsi la ragione del risultato. Una insegnante (Carla) ha applicato la definizione di divisione alla situazione proposta ma allo stesso tempo resta concettualmente vincolata a un modello intuitivo :

«Un numero intero può sembrare più piccolo del risultato diviso in tante piccolissime parti che moltiplicato per il divisore danno questo numero intero. Cerco di fargli capire come apparentemente il risultato è più grande del dividendo e semplicemente è solo un'impressione.»

La corretta formulazione di definizione di divisione non basta all'insegnante per superare il modello intuitivo della divisione che "rimpicciolisce" tanto da cercare il modo di convincere lo studente che il risultato più grande è solo un'impressione. Evidentemente l'insegnante ha in mente un modello concreto di divisione di oggetti e lo attribuisce allo studente imputandogli un errore nel modello visivo di divisione. Infatti quando, nel corso dell'intervista, è portata a confrontarsi con la divisione numerica 4:0,2=20 l'insegnante non sa più come giustificare la risposta precedente basata su un modello intuitivo concreto della divisione.
Infine Franca ha risposto che farebbe vari esempi numerici per verificare se effettivamente viene così sempre ammettendo che comunque rimanderebbe la spiegazione più precisa a quando avrebbe trovato lei stessa una migliore spiegazione.

Due docenti (Roberta e Rosa) hanno risposto basandosi su procedimenti meccanici per eliminare il problema posto. Il primo è l'applicazione della proprietà invariantiva per fare in modo che il divisore diventi intero costruendo così una divisione equivalente, mentre il secondo, proposto dall'insegnante di scuola secondaria, è l'applicazione della procedura del tipo "inverti e moltiplica" che si usa nella pratica didattica della scuola media per svolgere la divisione tra frazioni. Il verificare che il risultato con questi meccanismi venga sempre confermato basta a giustificare secondo le insegnanti la risposta. In questi due casi la memorizzazione di una procedura che serve per svolgere la divisone è scambiata con una spiegazione del perché una divisione dà come risultato un numero maggiore del dividendo in modo consapevole da parte delle insegnanti:

Roberta: «Quindi io farei questa riflessione di passaggio rispetto alla possibilità di una tecnica, quindi in qualche modo “imbrogliare”la situazione per renderla molto più semplice e facendo questo non si troverebbe davanti a questa stranezza però.»

Rosa:«Non credo sia una di quelle questioni molto facili da spiegare. Noi cerchiamo sempre di spiegare tutto, però molte volte proprio cercando di spiegare troppo creiamo confusione in gran parte delle teste. Magari qualcuno ci arriva, però a livello medio non si presta a grandi voli. Bisogna restare più sul concreto. Sull’operatività se possibile. Su cose che si possono vedere e ritrovare più volte. Nell’esempio che ti ho fatto prima (INVERTI E MOLTIPLICA) , lo vedono, cioè si ritrovano spesso in quel tipo di operazione w quindi dire “è vero, quello che abbiamo detto, discusso in classe corrisponde… è un po’ difficile secondo me spiegarglielo bene al momento non saprei trovare una strategia adeguata. »

Nei due estratti quello che li accomuna è l’approccio procedurale al quesito posto, l’importanza data all’operatività meccanica piuttosto che a una forma di generalizzazione su cui poi operare. Ancora lo scoglio dei numeri decimali è aggirato attraverso il passaggio ai numeri interi o alle frazioni.

Due insegnanti (Giulia ed Ester) hanno proposto un modello di contenenza per giustificare la risposta del perché il quoziente sia maggiore del dividendo. I due interventi in modo diverso tengono anche conto di un passaggio dalla divisione tra interi alla divisione con decimali. Un’insegnante esplicitamente dice che partirebbe con la spiegazione dalla divisione tra interi per poi passare a quella con il decimali utilizzando la linea dei numeri facendo vedere il modello di contenenza applicato ai segmenti che rappresentano le quantità sulla linea.

Giulia:«Allora io glielo mostrerei così: prima partirei da una divisione semplice con numeri interi tipo 2:1=2. Osserviamo: se 2 lo divido per 1 il risultato è 2. Se cambio in 2:0,5 cosa succede? Perché loro....hanno molta più facilità a collocare 1,1 piuttosto che 0,5...Io dirò 0,5 rispetto all'uno com'è maggiore o minore?

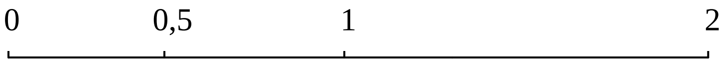


Figura 9.4

Se questo 0,5 è più piccolo quante volte starà all'interno del 2? Di più o di meno?»

L'altra docente invece modellerebbe il numero intero in blocchi quadrati che corrispondono alle unità costitutive del numero (ogni blocco un'unità) e farebbe "vedere" come la divisione per decimali come 0,5 spezzerebbe l'unità di partenza corrispondente a 1 in modo da ottenere nuove unità più piccole contenute un maggior numero di volte nel numero dividendo.

Ester:«Deve essere il discorso che io dicevo prima del dividere per 0, qualcosa. Aspetta un momento. Quindi il decimale compreso tra 0 e 1 sarà tipo 0,8...Ad esempio 7:0,8...sì, perché cu sta più volte essendo un numero più piccolo dell'unità ci sta di più...Graficamente tu gli fai vedere che stai dividendo questo numero per un segmento più piccolo di quello a cui sei generalmente abituato a dividere...qua siamo andati a dividere l'unità costitutiva (la cellula) in pezzettini più piccoli. E quindi lo vedono, lo fanno vedere.»

Esempio portato dall'insegnante. Figura 9.5

In questi due casi la risposta alla domanda si basa sull'evidenza portata dall'immagine prodotta dall'applicazione del modello di contenenza che è il modello dell'algoritmo della divisione. L'applicazione dell'algoritmo estesa a questo tipo di divisioni porta a risultati in cui il quoziente è maggiore del dividendo e "te lo faccio vedere". In più la spiegazione si collega concettualmente al concetto di continuità associabile ai numeri razionali (anche se di pertinenza dei numeri reali) tramite il partizionamento dell'unità in sottounità (come accade nel frazionamento) e quindi un altro collegamento è istituito per portare a comprensione della situazione in modo più profondo attraverso le relazioni tra diversi tipi di numeri.

Infine una insegnante (Ester) collega esplicitamente il suo modello a quadrati con l'algoritmo della divisione in cui "non ti accorgi" ma con numeri naturali la divisione avviene con quantità che hanno l'unità espressa da 1 come unità minima costitutiva.

Inoltre ha ricollegato la situazione a quella presentata nello scenario della divisione per 0 e in entrambi i casi ha utilizzato il modello della divisione per contenenza per rispondere alla situazione.

La comprensione a livello profondo di modelli intuitivi della divisione associa a sé la rappresentazione di situazioni matematiche che rendono comprensibile anche a livelli scolastici elementari problemi che sono giudicati "troppo difficili" per essere compresi anche a livello di scuola secondaria di primo grado. E' importante che i modelli intuitivi della divisione vengano esercitati in situazioni i cui si possono collegare a concetti matematici e procedure in modo da rendere più trasparente e articolata la connessione dei concetti e procedimenti matematici. Inoltre la rappresentazione della divisione attraverso la linea dei numeri come è stato fatto dalle due ultime insegnanti rende più comprensibile la divisione per numeri decimali minori di 1 proprio per la sua evidenza nel mettere a fuoco le sottounità decimali che compongono le quantità maggiori di 1. Questi esempi danno un'indicazione di come le insegnanti sappiano gestire, anche senza pianificazione, situazioni didattiche non semplici come quella dello scenario, quando hanno padronanza dei modelli, iconici e concreti, e delle loro piene potenzialità di modellizzazione matematica.

La difficoltà individuata nello scenario proposto è relativa alla presenza di un numero minore di uno al divisore (come nello scenario precedente) scritto in forma decimale. Una difficoltà ha dato origine a differenti spiegazioni che hanno mobilizzato diverse procedure e concettualizzazioni di uno stesso argomento matematico da parte delle insegnanti. Giulia nel riconoscere la difficoltà afferma in modo esplicito che:

«Perché la loro percezione del decimale, e questo io, l'ho visto tantissimo, quando noi creiamo le cosiddette linee dei numeri, loro hanno molta più facilità a collocare 1,1 piuttosto che 0,5. Tutti i decimali compresi tra 0 e 1 hanno una grossissima difficoltà ad ordinarli e collocarli.»

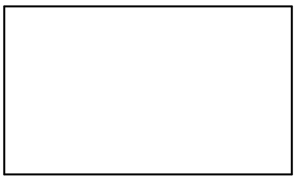
Questo è in accordo con quanto descritto in varie ricerche sull'argomento (Brousseau, 1981; Malara e Gherpelli, 2002).

9.3.2 Analisi del nono scenario

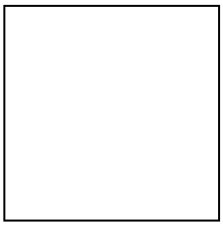
S9 Nono scenario

Immagina che un tuo studente una mattina arrivi in classe particolarmente entusiasta per una sua scoperta. Ti dice che forse ha trovato una "regola" che non hai ancora fatto in classe. Ti spiega che ha trovato che se il perimetro di una figura chiusa aumenta, altrettanto fa la sua area. Ti chiede cosa ne pensi e ti mostra la figura.

Rettangolo di lati 8cm e 4cm. Perimetro è 24cm, area è 32cm^2



Quadrato di lato 4cm. Perimetro è 16cm, area è 16cm^2



(Ball, 1988)

- **Analisi concettuale e ragioni del contenuto matematico del nono scenario**

Nella domanda inerente lo scenario sono presenti due dimensioni differenti. Una dimensione della domanda ha a che vedere con i concetti di perimetro e di area e con la loro relazione. La seconda dimensione è relativa alla giustificazione della conoscenza matematica. Lo studente dichiara di aver scoperto una "regola" e presenta una dimostrazione della validità di tale regola che quindi può essere intesa come una teoria generale: l'area aumenta in qualche modo con l'aumentare del perimetro. Naturalmente un esempio specifico non può diventare una generalizzazione. Lo studente quindi ha illustrato la sua affermazione, la sua è una congettura e non una regola dimostrata valida. Gli insegnanti quindi dovrebbero essere esposti a entrambe le dimensioni presenti nella domanda e fornire considerazioni specifiche per ognuna.

Per quanto riguarda la relazione specifica tra perimetro e area di una figura, questa è complessa e non è esprimibile matematicamente in forma generale come una formula. Una prima distinzione può essere evidenziata con le figure concave e convesse e successivamente all'interno dell'insieme delle figure concave si può cercare se vi sono regolarità per stabilire l'esistenza della relazione cercata.

Quindi, riprendendo le conoscenze utilizzate a scuola, si potrebbe considerare le figure isoperimetriche per confutare l'affermazione dello studente ad esempio facendo osservare come tra figure isoperimetriche l'area varia e non resta uguale; il cerchio ha l'area maggiore tra tutti i possibili poligoni isoperimetrici.

- **Analisi delle risposte al nono scenario: relazione area perimetro in una figura chiusa.**

Le risposte delle insegnanti si possono suddividere in tre categorie: lo studente ha ragione, lo studente ha torto, non saprei.

Nella prima categoria si collocano due docenti (Franca e Roberta) senza però essere in grado di giustificare perché ritengono che lo studente abbia ragione. Una docente (Roberta) richiama la relazione di isoperimetria ma senza sfruttarla per giustificare la propria risposta che invece si concentra sulle strategie manipolative che potrebbero portare alla costruzione di casi analoghi a quello presentato dallo studente. L'obiettivo consiste nel fare in modo che tutti gli studenti capiscano che la relazione è valida e il modo migliore è fare parecchi esempi con cartoncini e ritagli perché risulti evidente questo fatto. Ciò sarebbe anche un modo per estendere il numero di esempi e cercare gli eventuali limiti della supposta regola che comunque è orientativamente confermata per «cercare quante volte è regola». L'altra docente (Franca) si accontenta dell'esempio portato dallo studente confermando la relazione che più è lungo il perimetro maggiore è l'area racchiusa in esso, dimostrando in questo modo un vincolo con l'immagine di figure canoniche della geometria presenti soprattutto nei libri di testo quali ad esempio rettangoli, triangoli, trapezi con dimensioni solitamente in un ben determinato intervallo di rapporti in modo che visivamente la relazione supposta tra area e perimetro sia confermata. L'intervento si concentra quindi sulle modalità di valorizzare in classe la proposta dell'alunno.

Le insegnanti che sono incerte sono cinque (Giulia, Elena, Mirella, Rosa e Carla). Anche in questi casi la strategia per rispondere allo studente è quella di cercare esempi con materiale concreto e variazione di figure geometriche per testare i limiti di applicabilità della supposta regola. La regola quindi di fatto non è accettata ma considerata come una congettura. A questo punto però per testare la congettura occorrono delle conoscenze sui concetti matematici coinvolti in tale congettura e sulle modalità di indagine delle congetture metematiche. Alcune insegnanti ipotizzano che comunque occorrono molti esempi prima di affermare una regola per cui contesterebbero allo studente questo aspetto della sua conclusione: è una conclusione che comunque si basa su un unico esempio, troppo poco.

In questi due esempi le insegnanti non presentano conoscenze sulla relazione area perimetro ma discutono sulla modalità di giustificazione della regola da parte dello studente:

Elena:«una cosa secondo me importante sarebbe far capire che per dire "questa regola" , di aver trovato una regola è importante fare tanti...fare tante prove.. non è che i matematici per inventarsi una regola fanno due esempi»

Carla:«Prima di essere considerata una regola, non basta applicarla su due, tre figure. Bisogna verificarla in tanti casi, centinaia..»

La critica è sempre centrata sull'esiguo numero di prove e non definisce però quali prove dovrebbero essere condotte come esempi. Gli esempi non sono tutti equivalenti nel portare delle giustificazioni matematiche. Elena in realtà è più precisa a riguardo:

«Proverei insieme ai bambini se questa regola può essere sempre valida…Magari si potrebbe fare qualche esempio di figura un po' strana ad esempio figure molto allungate, oppure molto alte, molto strette per verificare questo.»

Ecco un esempio in cui l'insegnante esce dai vincoli delle figure geometriche stereotipate e indaga cercando di fornire esempi estremi per testare i limiti della regola. L'insegnante in pratica tenta di cercare eventuali controesempi per validare o invalidare la regola proposta. Altre docenti sono maggiormente concentrate nella ricerca della relazione tra area e perimetro proponendo sovrapposizioni di figure diverse fatte in cartoncino o la costruzione con spago di figure isoperimetriche per vedere se l'area varia. Da notare ancora la persistenza della presenza, di modelli concreti manipolativi reputati come importanti per giungere a una spiegazione efficace per i ragazzi:

Rosa:«Sarebbe interessante andare ad esplorare sulla carta o con dello spago per fargli vedere la situazione di figure isoperimetriche e dopo andare a calcolare l'area. ..per vedere se c'è una relazione...La cosa importante è fargli vedere con uno spago…».

Infine due docenti (Maria ed Ester) sostengono che lo studente sia in errore, ma solo Maria porta un immediato controesempio per confutare l'affermazione ipotizzando un rettangolo di base 30 e altezza 1 per cui il perimetro misurerebbe 62 e l'area 30. In questo caso l'insegnante, coglie anche la seconda dimensione del problema affermando che lo studente deve, in generale, produrre numerosi esempi, prima di affermare una regola e lo inviterebbe a produrne, in questo caso su figure con dimensioni molto diverse tra loro, come nel suo controesempio. Ester invece non riesce a fornire una sua giustificazione dell’errore dello studente ma sostiene che:

«Io dovrei prendere un 24 di qualcosa e chiuderlo in modo più stretto possibile per vedere sovrapponendolo che l’area che questo ricopre non è l’area del…rettangolo avendo sempre un 24 come perimetro…potrebbe essere anche un triangolo…fargli verificare visivamente facendo una figira io che abbia il perimetro che lui dice ma abbia un’area inferiore…dovrei però cercarmi io ‘sta figura»

Intuitivamente Ester coglie che è possibile invalidare la congettura dello studente portando le dimensioni del rettangolo a valori estremi, cioè i più diversi possibile. Risulta evidente però che non è stato un argomento su cui ha avuto occasione di riflettere in precedenza in quanto nell’immediato non trova un pronto contro esempio da fornire come risposta.

Le insegnanti dimostrano di non possedere una sicura conoscenza dell’argomento in quanto la relazione tra area e perimetro proposta dallo studente è stata individuata come errata da una sola docente con una chiara giustificazione. Per quanto riguarda la dimensione relativa al modo di condurre indagini in matematica, di fatto il risultato è stato migliore anche se l’organizzazione dell’indagine non è mai stata specificata. Il numero e il tipo delle prove da presentare sono state le modalità su cui le insegnanti hanno organizzato i loro interventi per poter far verificare la regola. Di fatto quello che risulta è che l’indagine sia tesa, in modo non sempre sistematico, alla ricerca di eventuali controesempi all’esempio portato dallo studente. Quello che appare anche dalle risposte date in questo scenario è che le insegnanti a seconda degli argomenti trattati, in modo diverso e con intensità diverse, sono molto attente alla possibilità della rappresentazione concreta della matematica perché ritenuta fondamentale per la comprensione dell’argomento da parte degli studenti. L’attenzione didattica è molto focalizzata sul tipo di rappresentazione da poter usare come porta d’accesso per gli studenti alla comprensione del problema matematico.

In questo scenario le insegnanti non esprimono pareri espliciti sulla difficoltà dello scenario proposto e sul perché lo studente sbaglia. Da quanto analizzato rispetto alle loro risposte sembra di poter evidenziare come l'argomento proposto sia distante dalla pratica di insegnamento della geometria nella scuola primaria e come quindi le insegnante non si siano mai trovate di fronte o poste da sole problemi simili sulla relazione tra area e perimetro. Probabilmente se consideriamo le risposte a scenari poco usuali come il terzo le insegnanti ritengono che l'errore dello studente sia almeno in parte giustificato in quanto la relazione geometrica è di per se ingannevole, venendo spontaneo pensare che c'è una relazione diretta tra area e perimetro. (Tirosh & Stavy, 2000).

10 Discussione dei risultati sul contenuto pedagogico per l'insegnamento della matematica

Sono stati presentati nove scenari ipotetici riferiti a diversi contenuti matematici del curriculum di scuola primaria: sottrazione in colonna, moltiplicazione in colonna, moltiplicazione tra decimali, confronto tra frazioni, confronto tra decimali, divisione, rapporto e relazione tra area e perimetro.

I primi cinque scenari sono stati predisposti per indagare l'interpretazione delle insegnanti relativamente a errori commessi dagli studenti e i rimedi che le insegnanti proponevano per gli errori. I restanti quattro scenari sono stati predisposti per indagare l'interpretazione delle insegnanti rispetto a problemi che gli studenti pongono per loro curiosità o per le difficoltà incontrate nel comprenderli. Tutti gli scenari hanno fornito informazioni sulle conoscenze matematiche che le insegnanti hanno espresso e utilizzato per rispondere alle diverse situazioni. Le risposte fornite dalle insegnanti, considerate complessivamente, hanno permesso di formulare alcune considerazioni che vanno oltre quelle già elaborate rispetto alle risposte degli insegnanti ai singoli scenari. Tali considerazioni riguardano il sapere sul contenuto pedagogico per l'insegnamento della matematica relativamente agli aspetti inerenti al pensiero degli insegnanti su:

1. Quali sono le modalità di utilizzo del PCK degli insegnanti quando affrontano gli errori degli studenti?
2. Quali sono le modalità di utilizzo del PCK degli insegnanti quando affrontano alcune domande inaspettate degli studenti che dimostrano difficoltà di comprensione sui contenuti disciplinari?

Inoltre è stato possibile ottenere informazioni sulle ide degli insegnanti riguardo:

3. quali siano il tipo di matematica da utilizzare che sia più adatta per rimediare a tali errori;
4. come vada presentata la spiegazione matematica da fornire agli studenti in modo che sia per loro efficace;

10.1 Le conoscenze matematiche degli insegnanti

Le insegnanti hanno dimostrato di possedere conoscenze matematiche che sono risultate più adeguate per affrontare scenari in cui venivano proposte situazioni didattiche relative ad algoritmi standard (scenari 1 e 2) o alla possibilità di utilizzare strategie di soluzione locali (scenari 4 e 7). La tabella seguente riassume le risposte delle insegnanti rispetto alla capacità di identificare errori (scenari dall'1 al 5) e di fornire spiegazioni matematiche agli studenti (scenari dal 6 al 9):

SCENARIO	Identificazione errore/Spiegazione matematica	
	Non identifica l'errore oppure non fornisce spiegazione matematica adeguata	Identifica l'errore oppure fornisce spiegazione matematica adeguata o parzialmente adeguata
1.Sottrazione in colonna	0	9
2.Moltiplicazione in colonna	1(Carla)	8
3.Moltiplicazione tra decimali	6 (Rosa, Roberta, Elena, Giulia, Carla, Mirella)	3
4.Confronto tra frazioni	1 (Carla)	8
5.Confronto tra decimali	La complessità dello scenario non consente un tale tipo di classificazione.	
6.Divisione con lo 0	4(Mirella, Giulia, Carla, Elena)	5
7.Rapporto	2 (Giulia, Mirella)	7
8.Divisione con divisore tra 0 e 1	5 (Elena, Carla, Maria, Franca, Mirella)	4
9.Relazione area perimetro	7 (Rosa, Roberta, Franca, Giulia, Elena, Mirella, Carla)	2

(Tabella 10.1)

Gli scenari che sono risultati di più difficile approccio dal punto di vista delle conoscenze matematiche sono stati quelli che hanno richiesto l'utilizzo di conoscenze di tipo concettuale (scenari 6, 8 e 9) oppure l'utilizzo di competenze matematiche legate a strategie generali, come il senso del numero (scenario 3). C'è da notare inoltre che lo scenario 4, relativo al confronto tra frazioni, è stato affrontato dalla maggior parte delle insegnanti attraverso conoscenze che non fanno parte del bagaglio normalmente messo in atto nell'insegnamento curricolare ma che sono comunque in possesso delle insegnanti. Lo scenario 5 infine, dal punto di vista delle conoscenze matematiche sui numeri decimali corredati da un'unità di misura, ha permesso di evidenziare come praticamente tutte le insegnanti di scuola primaria abbiano delle difficoltà, pur se di tipo diverso, a cogliere il significato della misura associata al numero e di distinguere tra numeri decimali puri e decimali come misure.

10.1.1 Conoscenze procedurali e conoscenze concettuali: l'orientamento procedurale delle insegnanti e "degli studenti"

Risulta dall'analisi delle interviste come le insegnanti si trovino più a loro agio, gestiscano con più facilità, le conoscenze procedurali di quanto facciano con conoscenze di tipo concettuale (Tabella 10.1). Nella ricerca in educazione matematica si distinguono due tipi di conoscenza matematica per gli insegnanti: la conoscenza concettuale, con un' enfasi sulle relazioni tra concetti e la conoscenza procedurale, con un' enfasi sulle rappresentazioni simboliche e sulla manipolazione di algoritmi, che sono classificate come distinte ma in realtà sono interconnesse in modalità complesse (Hiebert & Lefevre, 1986). Con significati simili sono presenti altre classificazioni come comprensione strumentale, relativa all'abilità di applicare regole alla soluzione di un problema senza la comprensione di come funzionano tali regole e relazionale, relativa all'abilità di dedurre regole e procedure da relazioni matematiche più generali (Skemp, 1976). In seguito il NRC (2001) ha incluso la comprensione concettuale e la fluenza nelle procedure, con significato simile a quelli dati da Hiebert e Lefevre come due dei cinque "fili" (strand) che sono necessari alla competenza matematica di alunni e insegnanti.

Nei loro interventi le insegnanti sono orientate a produrre spiegazioni o rimedi di tipo procedurale anche quando in realtà potrebbero con maggiore efficacia orientarsi verso l'utilizzo di conoscenze concettuali formulate attraverso rappresentazioni adeguate all'età degli studenti. Significativi a questo proposito, oltre alla diversa capacità dimostrata nel rispondere ai diversi tipi di scenario, orientati in senso concettuale o procedurale, sono i seguenti risultati.

Più della metà degli insegnanti hanno risposto secondo scenario attraverso la presentazione dei singoli passi dell’algoritmo della moltiplicazione in colonna senza affrontare invece direttamente quello che era stato identificato come causa dell’errore e cioè l’incomprensione del valore posizionale delle cifre. Per quanto riguarda lo scenario 3 abbiamo già fatto notare come l’approccio procedurale si riversi sui rimedi da proporre agli studenti anche quando le insegnanti utilizzano strategie generali di approccio alla risoluzione di problemi come quelle basate sul senso del numero. Due insegnanti ritengono che lo studente dovrebbe calcolare a mente con l’algoritmo della moltiplicazione in colonna il risultato per accorgersi dell’errore commesso, mentre loro utilizzerebbero una strategia più rapida basata sul senso del numero. Inoltre una spiegazione esplicita di una procedura per ricavare la regola del conteggio delle cifre dopo le quali inserire la virgola nel prodotto è presentata come una giustificazione di tipo matematico della correttezza di una soluzione in realtà non corretta. Anche nel quarto scenario le spiegazioni fondate su procedure consolidate sono state preferite a quelle basate su specifici concetti di frazione come parte di un tutto, del resto molto utilizzato dalle insegnanti nelle loro spiegazioni sulle frazioni, e ciò anche se le procedure proposte dalle insegnanti non erano certamente adeguate a studenti di scuola elementare. Nello scenario 7 nel problema sul rapporto Rosa propone di aggirare l’ostacolo posto dalla presenza del numero decimale passando con una equivalenza ad un numero intero (da 0,75l a 75cl), proponendo quindi una procedura in forma di strategia locale per trasformare i numeri decimali in interi ed evitare le difficoltà che si presentano con la gestione dei decimali da parte degli studenti. Lo stesso può essere affermato rispetto alle altre docenti che propongono di trasformare 0,75 in ¾. Ciò permette una migliore visualizzazione del problema e dà la possibilità di arrivare a una soluzione comprensibile per gli studenti ma si collega in modo non chiaro alla difficoltà incontrata dagli studenti nella gestione del decimale nelle operazioni. Nello scenario 5 Giulia cerca di arrivare alla procedura che lo studente A dovrebbe aver seguito per passare da 1,70 a 70 e da 1,7 a 7 attribuendo quindi allo studente un orientamento verso un approccio procedurale alla soluzione del problema. Le considerazioni di Rosa riportate nel capitolo precedente sull'inutilità di insistere troppo nelle spiegazioni che non portano a risultati sperati e la propensione a fornire agli studenti procedure pronte all'uso per i diversi tipi di problemi incontrati rinforza l'ipotesi che fa ritenere che le insegnanti ritengano nel complesso per gli studenti sia più utile questo tipo di matematica focalizzata sulle procedure e strategie locali che consenta loro il raggiungimento dei risultati cercati nella soluzione degli esercizi o delle attività.

Si ha quindi un doppio aspetto dell'insegnamento procedurale che si può rilevare. Il primo: le insegnanti tendono a insegnare in modo procedurale, ma non è detto che conoscano la matematica solo sotto forma principalmente procedurale. Il secondo: le insegnanti sono orientate a ritenere che per gli studenti un insegnamento focalizzato sulle procedura sia più efficace, in quanto più comprensibile e probabilmente conforme ai propri obiettivi di insegnamento.

10.2 L'orientamento dei rimedi degli insegnanti verso il riferimento al concreto/iconico: un sapere didattico non sempre adeguato all'attività matematica.

Gli interventi degli insegnanti per rimediare agli errori o per rispondere alle domande degli studenti si sono caratterizzati in molti casi da un approccio che partiva dalla rappresentazione concreta di una situazione matematica. Questo è accaduto spesso, anche in situazioni in cui era evidente che l'insegnante non era a conoscenza di una risposta matematicamente fondata, ma tentava di trovare un modo per rispondere al quesito posto provando a modellare la situazione attraverso strumenti concreti quali: ritagli di carta, piccoli oggetti come biglie o caramelle, spaghi. La pratica di presentare un argomento di matematica, e non solo, partendo da un approccio concreto per passare a una presentazione di tipo iconico e infine simbolico ha una tradizione solida in Italia (Castelnuovo, 2008; Damiano, 2006). Le motivazioni della validità di tale approccio sono riconosciute dalla ricerca psicopedagogica (Bruner, 1995; Gattegno, 1963; Damiano, 2006), soprattutto se l'approccio utilizza sussidi strutturati per tale compito. Le insegnanti ne sono ben consapevoli proponendo spesso con i loro interventi questo tipo di approccio, anche se in diversi casi limitato all'utilizzo di soli esempi concreti. La ricerca in educazione matematica indica come spiegazioni pratiche e utilizzo di materiali concreti diano significato alle espressioni matematiche per bambini di scuola primaria (Fischbein, 1993; NCTM, 2000; Castelnuovo, 2008) ma allo stesso tempo avverte che non è bene attendere fino alle scuole medie per introdurre gli studenti alla parte formale della matematica (Fischbein, 1993). Il tipo di spiegazioni usate dai docenti può inoltre variare secondo il contesto matematico (geometria, aritmetica o algebra), il tipo di istruzione matematica intrapresa (porre concetti in relazione, eseguire procedure, formulare congetture) e lo scopo della spiegazione (spiegazione di casi specifici o spiegazioni per generalizzazioni) (Levenson & al.,2004). Si possono distinguere le spiegazioni dei docenti in spiegazioni matematiche e spiegazioni basate sulla pratica (Levenson, 2010). Le prime sono basate solo sulla matematica ma non sono spiegazioni formali rigorose, usano il ragionamento matematico. Le seconde includono spiegazioni che non risiedono solo su conoscenze matematiche; includono le spiegazioni basate su manipolativi, o aiuti visivi e spiegazioni basate su contesti di vita reale. I manipolativi possono essere strumenti specifici per uso didattico od oggetti qualsiasi o materiali a metà strada (ad esempio i regoli di Cuisenaire). Poiché è discutibile se il materiale strutturato o semistrutturato possa far parte delle spiegazioni di tipo matematico o pratico è meglio pensare queste spiegazioni come poste su un continuum tra due polarità estreme di cui una è costituita dalla matematica formale (Levenson, 2010).

Le decisioni degli insegnanti rispetto al tipo di spiegazioni da fornire agli studenti, se matematiche o pratiche, o altre, sono spesso basate sulla loro conoscenza dei contenuti o sul sapere sul contenuto pedagogico per l'insegnamento della matematica (Even &Tirosh, 1995; Shulman, 1986). Rispetto al significato da attribuire al termine spiegazione ci riferiamo a Achinstein (1983) che sostiene una prospettiva ampia per cui diversi tipi di domande possono essere formulate nel tentativo di migliorare la propria comprensione; ne segue che la risposta a ogni domanda può essere intesa come una spiegazione. Nel caso di insegnanti che interpretano e pongono rimedio ad errori pensiamo si possa ritenere che stiano rispondendo alla domanda “perché ho sbagliato?”, oppure “cosa non ho capito?”.

Nel primo scenario, abbiamo osservato come in diversi casi le insegnanti correggano l’errore nell’algoritmo della sottrazione riproponendo la sottrazione come “portar via” attraverso esempi con oggetti. Alcune poi hanno continuato il loro intervento passando alla fase simbolica con la presentazione dell’algoritmo alla lavagna. In questo caso è evidente come le insegnanti che si sono riferite a un modello della sottrazione concreto per spiegare l’errore agli studenti, pur ammettendo che l’errore coinvolgeva un incomprensione del valore posizionale, hanno attribuito una capacità esplicativa al modello concreto della sottrazione che non gli appartiene in relazione allo specifico concetto e procedimento con il quale è messo in relazione. Nello scenario relativo al confronto tra frazioni Mirella propone con efficacia un modello iconico per il confronto tra frazioni, dimostrando come questo approccio, se utilizzato con la consapevolezza del tipo di concetto matematico che veicola, può essere usato per potenziare una comprensione concettuale della frazione e per dilatarne l’utilizzo al di là della semplice presentazione del concetto come parti di un intero, fino al confronto tra frazioni. Altri esempi dell’attribuzione agli esempi concreti di fornire spiegazioni matematiche sono rinvenibili negli scenari 2, 8 e 9 in cui diverse insegnanti che non riescono a spiegare lo scenario matematicamente tentano di immaginare situazioni in cui l’utilizzo di materiali concreti possa fornire spiegazioni convincenti dal punto di vista matematico:

(Scenario 2: l’insegnante non riesce a spiegare come si dispongono i prodotti parziali nella moltiplicazione in colonna) Carla: “Il fatto di spostare il numero verso sinistra secondo me è comunque una conseguenza della spiegazione pratica...io qualche mese fa sono andata a rivedere e ho capito che c'è un motivo che si può spiegare in modo concreto pratico, ecco, come con l'abaco, con tutto il resto"

(Scenario 8: l'insegnante non riesce a spiegare perché il quoziente è minore di 1)

Maria«devo pensare perché son tutte cose che non abbiamo ancora fatto per cui non ho avuto modo di riflettere…potremmo fare così…su un cartoncino glielo fai tagliare e lo deve comunque dividere e quindi così gli vengono più pezzi, una cosa del genere. Cioè riuscire a farglielo distribuire e…dovrei studiarmela meglio ma trovare il modo di concretizzargliela»

Franca:« Prendo la famosa torta e la divido neanche in una volta, cioè non la divido proprio, chè tra 0 e 1 non c'è neanche una divisione a metà. Quindi non la divido…non lo so dovrei mettermi a pensare, fare delle operazioni, dividere dei foglietti di carta»

Elena:« Farei anche qui degli esempi concreti…è una specie di regola che lui ha trovato»

(Scenario 9: l'insegnante non riesce a spiegare la relazione area perimetro)

Roberta:«Potrei vedere…se si può riportare ad altre figure… Però userei molto la costruzione in cartoncino, riportare il perimetro in situazione lineare»

Mirella:«Proverei a …sto pensando a qualcosa di pratico da far fare per vedere se effettivamente è così, è quello che accade. Non so ritagliare, verificare se è proprio vero, come lo giustificherebbe lui e come lo potremmo verificare…cioè ritagliare una forma rettangolare però rimanendo sul rettangolo…non so fargli ritagliare veramente due rettangoli reali su un cartone, di due dimensioni diverse sovrapponendoli e confrontandoli»

Rosa:« Sarebbe interessante andare a esplorare sulla carta o con dello spago per fargli vedere la situazione di figure isoperimetriche e dopo andare a calcolare l'area.

Per vedere se c'è una relazione e se effettivamente possiamo dire ci sia questa relazione. La cosa più importante è fargli vedere con lo spago»

Anche lo scenario 5 ha fornito evidenze nella stessa direzione. Le insegnanti privilegiano le spiegazioni basate su esempi concreti, visibili che risultino evidenti come le misurazioni col metro o l'utilizzo della linea dei numeri andando fino a riproporre la misura dei valori decimali con oggetti discreti per fare confrontare agli studenti le misure. In questo caso la sottigliezza matematica relativa alla distinzione tra numeri puri e numeri con unità di misura è stata ignorata da tutte le insegnanti tranne una.

Le insegnanti sono portate a gestire in modo creativo sussidi concreti per modellare situazioni matematiche. Ciò le porta a volte a ideare spiegazioni pratiche efficaci e orientate ai concetti matematici ma talvolta a sopravvalutare la capacità esplicativa dell'esempio pratico soprattutto se a loro stesse non sono ben chiari i concetti matematici o le relazioni matematiche che tali esempi concreti o pratici dovrebbero veicolare. Se usati senza una chiara consapevolezza di quale tipo di apprendimento si possa veicolare l'apprendimento stesso può risultare superficiale, raramente allora avviene che l'allievo posto di fronte a un problema o compito matematico simile a quello trattato sia capace di trasferire il sapere da una situazione a un'altra, in modo naturale, spontaneo senza richieste cognitive specifiche per la nuova situazione di apprendimento (D'Amore, 1999). "Il fenomeno del transfer cognitivo non è quindi automatico: da una conoscenza artificiale costruita su misura in un ambiente opportuno e specifico, alla conoscenza generalizzata, cioè alla capacità di produrre abilità cognitive e procedurali in altre situazioni" (Locatello e al., 2008).

Si può affermare che in diversi casi presentati l'esposizione degli studenti alla concretezza dell'esempio pratico sia per le insegnanti il modo migliore per far comprendere il concetto o la procedura matematica che intendono veicolare.

10.3 La comprensione matematica degli studenti: gli studenti comprendono se "vedono" e ripetono le procedure e le strategie locali di soluzione

In generale le insegnanti non hanno approfondito le interpretazioni dei diversi errori o difficoltà degli studenti. Con questo si intende il fatto che raramente si sono chieste quale possa essere la causa dell'errore e come organizzare interventi mirati per modificare incomprensioni o integrare aspetti del concetto o procedura che non ritenevano adeguatamente acquisiti dagli studenti. La pratica didattica corrente non permette alle insegnanti di spendere molto tempo in classe per riflettere di volta in volta su questi aspetti della didattica alunno per alunno. La scelta dell'azione da intraprendere in circostanze simili a quelle degli scenari ipotetici deve essere rapida, efficace e permettere all'insegnante di ritenere che il suo intervento sia stato adeguato, di avere assolto al suo compito di insegnamento. Per questi motivi sarebbe importante che le insegnanti fossero in possesso di conoscenze relative ai principali motivi di errore degli studenti sui vari argomenti del curricolo e delle conoscenze matematiche adeguate per sostenere i loro interventi con l'efficacia ed efficienza richiesta dalla situazione di insegnamento (Ma, 1999; Ball, Thames, Phelps, 2008; Hill et al., 2008). In assenza di sicure conoscenze matematiche nei vari argomenti del curricolo e sui diversi aspetti della matematica quali quello concettuale e procedurale (Hiebert & Lefevre, 1986) per rispondere alle domande e agli errori che nella pratica didattica si trovano giornalmente ad affrontare le insegnanti devono ricorrere al bagaglio di conoscenze che è in loro possesso che può essere non sempre efficace ed efficiente.

Come già messo in evidenza in Tirosh e al. (1998), la immediatezza con la quale le insegnanti sono chiamate a rispondere agli errori degli studenti le indirizza a formulare interpretazioni degli errori che sono già presenti come schemi nelle loro conoscenze matematiche. Per cui, se uno studente sbaglia la sottrazione in colonna, allora non ha capito la sottrazione come operazione; se la moltiplicazione in colonna è sbagliata, lo è perché i prodotti parziali sono disposti in un ordine errato, allora il modo migliore, dato che non ha capito il valore posizionale è ripresentare l'algoritmo accentuando la spiegazione sui diversi passi da compiere per l'esecuzione dell'algoritmo. Nel caso del confronto tra frazioni a seguito di una chiara individuazione dell'errore, non viene discussa la causa che lo può avere indotto ma si passa alla presentazione di una procedura per il confronto che può essere eseguita anche mantenendo l'incomprensione di fondo che ha generato l'errore. Quando, nello scenario, 3 lo studente sbaglia la risposta applicando meccanicamente la regola le insegnanti o non si accorgono dell'errore oppure lo giustificano perché la regola era giusta e l'esercizio posto in modo ingannevole, nonostante l'esercizio richieda la mobilizzazione delle competenze richieste nel curricolo nazionale. L'utilizzo del senso del numero è nell'esperienza delle insegnanti una pratica matematica poco visibile e non algoritmica e non trova adeguato spazio nel loro insegnamento. Anche nel quinto scenario il problema dello zero come ultima cifra della parte decimale, pur se individuato, anche se non in tutta la sua complessità, viene risolto dalle insegnanti attraverso la riproposizione allo studente di una evidenza visibile quale la misura col metro, si suppone con i centimetri visibili, in modo che capisca che 70 e 7 sono equivalenti come parti decimali. Allo stesso modo si può osservare che le insegnanti hanno risolto lo scenario 7 sul rapporto proponendo una valida strategia per la soluzione del problema ma senza considerare la risposta alla difficoltà degli studenti che loro stesse avevano individuato: la incapacità di gestire le operazioni in presenza di decimali. Per le insegnanti il fatto che gli studenti arrivino al risultato esatto è un obiettivo della lezione che è prioritario rispetto alla comprensione delle difficoltà degli studenti e dei loro errori. Per ottenere questo obiettivo i rimedi adottati sono di rapida gestione e comprendono al loro interno la risposta a diverse tipologie di errori che non sono sempre coerenti con i rimedi adottati. Gli studenti sono ritenuti capaci di apprendere la matematica nel modo che gli viene insegnata che è il modo in cui viene concepita dalle insegnanti per l'insegnamento. L'approccio delle insegnanti rispetto alla comprensione matematica degli studenti risulta nel complesso trasmissivo: da un insegnamento segue un apprendimento già formato nel tipo di caratteristiche e relazioni che l'oggetto dell'apprendimento possiede così come è concepito dall'insegnante. Nella interpretazione degli errori e delle difficoltà viene raramente presa in considerazione un'analisi del pensiero matematico dello studente come pensiero matematico in evoluzione di cui gli errori sono un segnale di questo evolversi attraverso concetti che sono formati in modo parziale o che hanno relazioni fragili con altri concetti. Calibrare le rappresentazioni però vuol dire penetrare il pensiero dello studente e nei casi proposti penetrarlo attraverso gli errori. L'interpretazione dell'errore non è tenuta sempre in debito conto da parte dell'insegnante come via per penetrare nel pensiero matematico dello studente. L'insegnante utilizza i rimedi in base a criteri che non si basano principalmente su quali siano le cause dell'errore prodotto dallo studente. Purtroppo situazioni che esulano dalla routine, come ad esempio lo scenario 3, o non sono state risolte o sono state considerate come del tutto inappropriate per gli studenti di scuola elementare. In realtà dal punto di vista matematico era meno appropriato lo scenario 4 per studenti di scuola elementare, ma curiosamente nessuna insegnante ha opposto questo argomento nel corso dell'intervista.

Quando invece le insegnanti hanno dimostrato di conoscere: sia quali sono le difficoltà degli studenti rispetto alla comprensione di specifici contenuti, sia l'argomento in modo sicuro, hanno fornito interventi in forma di spiegazioni mirati a cogliere e risolvere le incomprensioni degli studenti. Facciamo riferimento, ad esempio, agli interventi di Giulia ed Ester nello scenario 8 per spiegare la divisione con divisore tra 0 e 1, agli interventi di Mirella e di Franca per spiegare il confronto tra frazioni nello scenario 4, alla prima parte dell'intervento di Roberta e all'intervento di Franca nello scenario 6 sulla divisione con 0, all'intervento di Franca nello scenario 2 sulla moltiplicazione. E' comunque difficile stabilire l'origine delle scelte che si possono considerare come maggiormente adeguate: se dovute al riconoscimento che sono più comprensibili o se fatte per aiutare a superare specifiche difficoltà degli studenti (Tirosh, 2000). Probabilmente la decisione degli insegnanti prende in carico entrambe queste cose nel momento in cui la conoscenza matematica della disciplina glielo consente.

L'orientamento verso questa interpretazione della comprensione matematica degli studenti presente nelle insegnanti non si può facilmente mettere in relazione con una conoscenza orientata in senso concettuale o procedurale delle insegnanti. Una stessa insegnante, ad esempio, ha assunto orientamenti differenti nelle interpretazioni del pensiero degli studenti in diversi scenari senza per questo poter evidenziare che determinati orientamenti appartenessero a insegnanti con conoscenze più approfondite o ampie dell'argomento.

11 Gli insegnanti di fronte a un problema di "pseudo-proporzionalità"

Lo scenario seguente è stato proposto per raccogliere informazioni rispetto alle concezioni della matematica che possiedono le insegnanti. La domanda fatta all'insegnante era sempre relativa al tipo di intervento che avrebbe adottato se si fosse trovata presente in situazione, ma a differenza degli scenari precedenti, questo è stato utilizzato in sede di analisi per cogliere le convinzioni delle insegnanti rispetto alla matematica e poterle poi integrare con quelle espresse in seguito nelle interviste semi-strutturate. Lo scenario è predisposto per rispondere alla domanda di riceerca:

1. Qual è il ruolo della conoscenza matematica, delle convinzioni e delle attitudini verso la disciplina degli insegnanti nei riguardi del ragionamento e comprensione matematica degli studenti ?

Viene assegnato il seguente problema in classe: "L'altezza di un bambino di dieci anni è 1,5m. Quale credi sarà la sua altezza quando avrà 20 anni?" Uno studente risponde: in matematica sarà 3m, perché 1,5x2=3, e invece in realtà potrebbe essere 1,8m. (Markovits & Even, 1999)

- **Analisi concettuale dello scenario**

L'irrealtà del problema scolastico è sottolineata da numerose ricerche (Zan, 1998) che ne evidenziano le caratteristiche strutturali quali: il campo di conoscenze entro cui elaborare la soluzione è definito a priori, le conoscenze del campo entro cui elaborare la soluzione sono acquisite a scuola e non altrove, la presenza di tutti i dati essenziali per soluzione del problema, l' assenza di dati superflui alla risoluzione del problema, l'unicita e l'esistenza della soluzione del problema (Borasi, 1984; Baruk, 1985; Boero, 1988; Radatz, 1983, 1984; Verschaffel et al., 2000).

«Tali stereotipi non solo sono negativi per l'atteggiamento poco attivo e critico che inducono nei ragazzi, ma sono anche completamente fuorvianti e diseducativi se l'attività di risoluzione dei problemi è vista nell'ampio senso di problem solving come attività umana rilevante e caratterizzante il pensiero. Il problema reale richiede la capacità di selezionare dati significativi da un contesto ricco.» (Zan, 1998 p.3).

L'atteggiamento poco critico relativamente agli stereotipi dei problemi scolastici è stato messo in evidenza nelle ricerche in cui studenti si scuola elementare e di secondaria di primo grado venivano posti di fronte alla rischiesta di soluzione di problemi insensati (Baruk, 1985), oppure di problemi in cui non erano necessari calcoli (Saljio & Wyndhamn, 1990) o infine a problemi in cui è necessaria solo una stima basata sui dati per arrivare alla soluzione (Markovitz & al.1984). Il problema presentato nello scenario è definibile come "problema di pseudoproporzionalità" (Puchlska & Samadeni, 1987). Nella versione data agli studenti di questo problema, che esclude la considerazione dello studente sulla differenza tra realtà e matematica, le risposte basate sull'applicazione impropria della legge di proporzionalità diretta sono state numerose (Markovits et. al., 1984). Altri problemi basati sulla "pseudo proporzionalità" (Saljio & Wyndhamn, 1990) con la possibilità di fornire una risposta univoca non basata sulla stima non ha dato risultati diversi rispetto alla ricerca di Markovits (1984) evidenziando, come testimoniato in numerose altre ricerche (Zan, 1996a, 1996b; Schoenfeld, 1985; Silver, 1985; Radatz, 1983, 1984), l'applicazione da parte degli studenti di combinazioni casuali di testo, dati e schemi risolutivi interiorizzati nella precedente esperienza scolastica senza tenere sufficientemente conto della loro esperienza di vita reale (Zan, 1998). Una delle principali ragioni sottostanti l'utilizzo dei problemi scolastici (word problems) è l'assunzione che questi testi siano realistiche e condensate descrizioni di situazioni di vita quotidiana e di conseguenza le attività di soluzione dei problemi rispecchino adeguatamente la matematica che viene usata nelle soluzioni da parte delle persone nelle situazioni di vita reale (Verschaffel et al., 2000). Invece, piuttosto che fungere da contesto realistico che inviti o faccia sforzare gli studenti ad usare la loro conoscenza di senso comune e l'esperienza della vita reale in combinazione con le loro conoscenze e abilità matematiche, i problemi di matematica scolastici sembrano essere percepiti dagli studenti come bizzarri compiti da svolgere separati dai problemi del mondo reale e che devono essere risolti per mezzo di calcoli matematici sui dati forniti, ignorando la conoscenza della realtà fino all'accettazione di condizione sul contesto del problema che sono addirittura empiricamente non valide (Verschaffel et al., 2000). Molti autori concordano sul fatto che tali processi di soluzione così superficiali e artificiali, in cui i processi di comprensione, modellizzazione, interpretazione e valutazione (Verschaffel et al., 2000) sono bypassati siano purtroppo promossi e rinforzati dalla natura stereotipata dei problemi scolastici (word problems) per come sono tipicamente presentati e dal tipo di discorso e attività attorno a tali problemi che si svolge nelle classi in cui l'insegnamento della matematica è più tradizionale (Boero & Ferrari, 1988; De Corte & Verschaffel, 1989; Nesher, 1980; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1991). Le ricerche di Greer (1993) e Verschaffel et al. (1994) portano addirittura alla conclusione che le pratiche e la cultura, presente nelle classi in cui più tradizionale è l'insegnamento della matematica, conducano gli studenti a costruire la credenza che il fare considerazioni ed elaborazioni "troppo" realistiche riguardo alle situazioni descritte nei problemi scolastici (word problems) può fare "più male che bene" nel rispondere alle richieste dell'insegnante o in generale della situazione di istruzione da affrontare (Verschaffel et al., 2000).

Nel corso della scuola elementare i bambini elaborano due modelli concettuali distinti e indipendenti di problema reale e di problema scolastico. Nel problema scolastico la domanda non scaturisce da una situazione problematica, e l'unico rapporto che ha con il contesto è quello di richiedere l'utilizzazione dei dati numerici: la problematicità, quando c'è, è circoscritta alla difficoltà di rispondere alla domanda (Zan, 1998).

Ulteriori studi (Reusser & Stebler, 1997) danno esiti secondo i quali la prestazione degli studenti migliora, ma non in termini considerati completamente soddisfacenti (Verschaffel et al., 2000) a seguito di modifiche nel tipo di compito e contesto sperimentale, rendendo la soluzione del problema un compito di "performance" invece che un test con carta e penna, che quindi devono essere considerati come variabili importanti nel produrre le risposte irrealistiche degli studenti ai problemi scolastici (word problems). Limitati miglioramenti dei risultati nelle soluzioni dei problemi si sono avuti anche con la la personalizzazione dei contesti dei problemi scolastici ottenuta attraverso l'adattamento delle applicazioni del problema agli interessi e culture degli studenti (Ross, 1983; Zan, 2007).

Insieme alla natura del problema matematico scolastico anche la concezione e la gestione del problema nella lezione di matematica da parte degli insegnanti può spiegare lo sviluppo negli studenti di credenze e tattiche di soluzione dei problemi che hanno le caratteristiche di superficialità e carenza di senso critico già esposte. Sembra infatti ragionavole supporre che le concezioni sui principali scopi dei problemi di matematica scolastici (word problems) e anche le personali disposizioni degli insegnanti verso la modelizzazione della realtà fornita dalla matematica, influenzino alcuni aspetti del comportamento degli insegnanti come: la scelta dei problemi, il tipo di commenti fatti e il tipo di istruzioni fornite rispetto al problema dato agli studenti, la reazione a commenti critici o domande relativamente all'aspetto irrealistico dei problemi, il tempo impiegato per la discussione rispetto alle problematiche assunzioni di modellizzazione matematica permesse e incoraggiate in classe, il tipo di feedback fornito alle risposte degli studenti e ai loro processi di pensiero e in particolare alle risposte con indizi evidenti di realistica o irrealistica modellizazione matematica e infine il tipo di problemi scelti per la valutazione (Verschaffel et al. 2000). Si può sostenere che tutti questi aspetti del comportamento degli insegnanti influenzino l'apprendimento degli studenti e in particolare le credenze, le attese, le attitudini e le tattiche che sviluppano rispetto alla risoluzione dei problemi. Sebbene ci siano evidenze date dalla ricerca sulla relazione tra le credenze matematiche degli insegnanti, il loro comportamento in classe e il processo di apprendimento degli studenti (De Corte et al., 1996; Thompson, 1992) non sono altrattanto noti e numerosi gli studi che abbiano investigato la relazione tra il sapere sul contenuto pedagogico per l'insegnamento e la modelizzazione matematica realistica per metterla in relazione con i processi di apprendimento degli studenti e i loro risultati scolastici in matematica rispetto alla soluzione dei problemi (Verschaffel et al. 2000).

Uno studio ha analizzato le concezioni e credenze di insegnanti in formazione rispetto al ruolo della conoscenza del mondo reale relativamente al contesto del problema scolastico nella modellizzazione del problema scolastico matematico (word problem), in particolare focalizzandosi sulle risposte spontanee dei futuri insegnanti a un insieme di problemi con assunzioni problematiche rispetto al modello matematico da utilizzare e le valutazioni delle immaginarie risposte di studenti a questi problemi che tengono o non tengono conto della rilevanza della conoscenza del mondo reale per la soluzione del problema (Verschaffel et al. 1997). I risultati hanno evidenziato come anche i futuri insegnanti abbiano la tendenza a escludere la personale conoscenza del mondo reale e considerazioni di tipo realistico quando sono messi di fronte alla risoluzione di problemi scolastici "problematici" ovvero che consistono in un certo grado di difficoltà nell'applicazione di un modello matematico, come ad esempio nel caso di problemi di pseudoproporzionalità in cui una beuta viene riempita a velocità costante e si chiede il livello raggiunto dall'acqua dopo un determinato lasso di tempo (Verschaffel et al. 1997). Inoltre i dati supportano la considerazione seguente: gli insegnanti in formazione proprio come gli studenti sembrano più inclini ad attivare una conoscenza rilevante del mondo reale quando hanno a che fare con l'interpretazione di risultati derivanti da divisioni con il resto (Schoenfeld, 1987; Silver et al., 1993) di quanto non facciano ad esempio in problemi in cui è coinvolta una relazione più problematica da modellizzare come quella di pseudoproporzionalità (Verschaffel et al., 2000). La mancanza di disposizione degli insegnanti in formazione dello studio di Verschaffel (1997) è rivelata anche dall'analisi della valutazione fatta alle risposte classificate come realistiche o irrealistiche di immaginari studenti a problemi scolastici del medesimo tipo, come nel problema del riempimento di una beuta. Nel complesso la valutazione degli insegnanti in formazione è stata più positiva per le immaginarie risposte irrealistiche rispetto a quelle classificate come realistiche basate su considerazioni fondate sul contesto di appartenenza del problema (Verschaffel et al. 1997). Lo studio di Verschaffel et al. (1997) evidenzia che molti futuri insegnanti hanno conoscenze e credenze sull'insegnamento e sull'apprendimento dei problemi matematici scolastici che sono in conflitto con un punto di vista realistico, ma non porta dirette certezze che le concezioni e credenze di questi insegnanti sono rersponsabili della forte tendenza degli studenti ad escludere la personale conoscenza del mondo reale dai loro tentativi di risolvere i problemi scolastici. Tuttavia, sulla base della recente letteratura sulla relazione tra le credenze matematiche degli insegnanti e i loro comportamenti nelle lezioni di matematica ci sono valide ragioni per ritenere che le cognizioni e credenze degli insegnanti sul ruolo della conoscenza del mondo reale nell'interpetazione delle soluzioni dei problemi di matematica scolastici può avere un forte impatto sul loro comportamento tenuto in classe e di conseguenza sui processi di apprendimento e sui risultati scolastici dei loro studenti (De Corte et al., 1996; Fennema & Loef, 1992; Thompson, 1992).

La distinzione tra procedimento matematico e ragionamento basato sul senso comune o sull' altrimenti detto "buon senso", che lo studente esprime in modo esplicito e che l'insegnante è chiamato a interpretare pone la questione della «impermeabilità della membrana che separa l'esperienza dell'aula dalla esperienza della vita quotidiana» (Freudenthal, 1994 pag.40), e questo nonostante la matematica nasca a uno stadio iniziale di sviluppo da "una realtà di senso comune" (Freudenthal, 1994). L'interpretazione di Freudenthal della ricerche sui problemi scolastici quali quelli del gruppo di ricerca di Grenoble sull'età del capitano (Baruk, 1985) su bambini dei primi anni di scuola elementare va oltre il contrasto tra realtà quotidiana e contesto dato dal libro di testo o dall'aula scolastica, per rifarsi a un'interpretazione di tipo ermeneutico in cui il bambino agisce come se si trovasse in un "contesto magico" in cui ricerca segni e simboli che possano fornire l'esatta interpretazione della realtà "scolastica" che deve affrontare e nel caso di un problema risolvere. In questi contesti i bambini cercherebbero degli pseudoisomorfismi tra realtà e contesto scolastico che li dovrebbero condurre alla soluzione del problema. La proposta di Fredenthal è quella di costruire quelli che lui definisce contesti ricchi in cui la possibilità di rintracciare pseudoisomorfismi sia in questo modo limitata (Freudenthal,1994). La continua presentazione di contesti "poveri" limitata all'esecuzione di algoritmi ripetitivi che lentamente ma inesorabilmente conducono lo studente a una perdita del senso del fare matematica e alla contemporanea perdita del legame di matematizzazione sia in senso orizzontale (con la realtà fisica) che verticale (con la relatà matematica già posseduta, ma spesso in modo frammentario) (Freudenthal, 1994). Nello scenario presentato le due soluzioni sono proposte dallo studente che sfrutta entrambe le conoscenze sia matematiche sia quelle basate sul senso comune con la differenza che la soluzione definita come matematica nel testo è errata in quanto basata appunto su un ragionamento fondato sulla pseudo proprozionalità delle due grandezze età e altezza, mentre il ragionamento di senso comune è ben fondato sui dati a disposizione. Quello che resta problematico da interpetare per le insegnanti è l'errata equivalenza assegnata dallo studente dello scenario alle due diverse soluzioni da lui riportate che conducono a risultati diversi sia numericamente sia soprattutto in termini di procedimenti e processi coinvolti per la ricerca della soluzione. L'obiettivo dello scenario proposto risulta pertanto legato ad ottenere descrizioni e interpretazioni da parte delle insegnanti sul comportamento dello studente nella soluzione del problema, sulla loro idea di problema matematico, sulla loro interpretazione della matematica scolastica rispetto alla realtà quotidiana attraverso l'interpetazione che fanno dell'idea espressa dallo studente su matematica e realtà. La particolare concezione della matematica dello studente in questo caso non comprende specifici contenuti della materia in termini di algoritmi o concetti, ma la concezione stessa della disciplina intesa come un sapere completamente svincolato e incoerente con la realtà della vita quotidiana.

11.1 Analisi delle interpetazioni della risposta dello studente al problema di "psudoproporzionalità"

- **L'applicazione di una regola**

L'applicazione di un ragionamento di proporzionalità apparente o "pseudoproporzionalità" da parte dello studente è interpretato come un automatismo nell'utilizzo dei numeri di fronte a un problema da risolvere o come una voglia, una sorta di pulsione interna, dello studente a manipolare i numeri intesi come dati del problema. La manipolazione dei numeri, ovvero il calcolo 1,5m x 2=3m è valutato positivamente da Maria ed Ester in quanto lo studente non ha sbagliato l'operazione, e questo è già un fattore considerato positivamente nel giudizio di queste due insegnanti, pur essendo un calcolo assolutamente svincolato con il processo risolutivo del problema. Anche se la strategia di risoluzione è completamente errata, secondo le due insegnanti va valutata comunque in modo positivo la correttezza del calcolo.

C'è chi si spinge oltre, come Franca, che sostiene che comunque la valutazione positiva del calcolo va data perchè il calcolo proviene da un ragionamento e non è totalmente avulso dal problema. Infatti Franca apprezza il fatto che lo studente applichi il calcolo avendo in mente una relazione di proporzionalità diretta che ha appreso a scuola e dimostra di sapere applicare come pura procedura algoritmica: al raddoppiare di una grandezza, raddoppia anche l'altra e il rapporto è costante come viene insegnato sui testi scolastici. Questo aspetto è apprezzato come ragionamento matematico:

«Ha ragionato, bravo. Io gli dico bravo prima di tutto. Perchè lui ha calcolato in 10 anni lui è cresciuto 1,5m, però qua prevede che parta da 0, cioè appena nato non c'è non è alto...e poi altri 10 sempre 1,5m, ha ragionato così. E' un ragionamento che si deve accettare in matematica.».

Nonostante Franca riesca a produrre un argomento preciso e pertinente, il fatto che estendendo la proporzionalità diretta a 0 anni (alla nascita) l'altezza sarebbe 0m, che potrebbe dimostrare l'insensatezza del calcolo prodotto dallo studente basato sulla proporzionalità diretta tra età e altezza, l'insegnante apprezza il fatto che lo studente abbia comunque memorizzato, anche se il termine usato è ragionamento, la relazione di proporzionalità diretta.

Anche Mirella dà ragione al bambino in quanto avendo a disposizione dei dati numerici il problema diventa un problema di tipo matematico e quindi richiede un'applicazione di una qualche procedura matematica quale ad esempio la moltiplicazione svolta dallo studente: «Quindi in questo caso il bambino ha ragione, in matematica potrebbe essere così».

Il fatto che lo studente abbia automatizzato il procedimento di soluzione del problema con la ricerca di una regola da applicare è riconosciuto dagli insegnanti ma non è percepito come un problema di carattere didattico, ne prendono atto come di un fatto che accade durante il fare matematica in classe. Rosa dopo avere esposto il suo pensiero riguardo all'errata applicazione del ragionamento proporzionale al problema da parte dello studente, conclude: «credo che lui ha cercato una regola, in matematica ha cercato una regola. Perchè gli è stato proposto un problema, nell'ora di matematica e ha detto ok, cerchiamo una regola.». Ricordiamo a questo punto quanto affermato anche da Maria nella sua risposta allo scenario 5 in cui la affermava che il suo intervento per mantenere viva la discussione tra gli studenti non avesse a che fare con la matematica perché in quel momento non c’era un chiaro riferimento nella sua risposta a una qualche regola da applicare da parte degli studenti o da fornire da parte sua.

Elisa ritiene che dal punto di vista matematico la risposta sia da considerare almeno parzialmente corretta, in quanto in primo luogo l'operazione, ovvero il calcolo è corretto e anche la relazione di proporzionalità essendo una relazione matematica è applicata correttamente ai numeri presenti nel problema: «Sì secondo me ha ragionato bene il bambino, nel senso che una è la risposta matematica , se noi prendiamo i numeri e tralasciamo l'aspetto altezza che non è così come dicevo prima.».

Le insegnanti, tranne Carla, che si sono espresse sulla validità del calcolo matematico fornito dallo studente, hanno giustificato l'utilizzo di un'operazione aritmetica come metodo per giungere alla soluzione, anche se allo stesso tempo tutte le insegnanti hanno, ovviamente riconosciuto che lo stesso calcolo non poteva portare alla soluzione corretta del problema in quanto la relazione di proporzionalità non sussiste. Ciò ha comunque consentito loro di giudicare positivamente due aspetti del comportamento dello studente: la correttezza dell'applicazione del calcolo e la memorizzazione, intesa però come ragionemnto, della relazione matematica di proporzionalità diretta. Il fatto che l'applcazione della relazione e del calcolo che ne consegue non abbia nulla a che fare con la domanda del problema è stato riconosciuto dalle insegenanti ma non come un problema rispetto alla reale comprensione della matematica da parte dello studente che invece è stato apprezzato per la ricerca di una regola matematica all'interno di un problema.

- **Un problema "da non dare"**

Le insegnanti concordano sul fatto che il problema proposto non è un problema che dovrebbe essere assegnato agli studenti o che il problema dello scenario non è neanche classificabile come problema in senso matematico. Una prima critica al problema come tale riguarda l'imprevedibilità dell'altezza raggiunta a 20 anni. Il fatto che lo studente abbia ragionevolmente, in base ai dati posseduti previsto che l'altezza potrebbe essere di 1,80m a 20 anni, secondo Maria e Carla non è una modalità accettabile per poter rispondere alla domanda del problema. Ciò in quanto il valore 1,80m, secondo loro non è fondato su sufficienti dati iniziali e non è possibile comprendere il ragionamento che potrebbe aver seguito lo studente e quindi il perchè del valore di 1,80m come risposta. Carla si esprime così: «Perchè l'altezza di un bambino di 10 anni 1,5m mi sembra eccessivo...forse anche sì...sì quanto me a occhio e croce. «Quale sarà la sua altezza quando avrà 20 anni" non è un problema che si può porre.»

E' da notare il fatto che inizialmente l'insegnante non è d'accordo neanche sulla plausibilità del dato 1,5m come altezza di un bambino di 10 anni e solo in un secondo momento accetta questo fatto richiamando a sè l'esperienza quotidiana del vedere studenti a scuola che sono alti più o meno quanto lei, cioè probabilmente poco meno di 1,5m. L'insegnante comunque dimostra chiaramente alla fine dell'intervista cosa intende lei per problema: «O bisogna risolvere un problema con dei dati o chiedere un parere. Un parere è una cosa soggettiva, non è una cosa oggettiva.»

Secondo questa prospettiva il problema matematico è da risolvere per via algoritmica, mentre al di fuori di questa non si concepiscono facilmente problemi matematici, infatti conclude:

«Se è un problema assurdo solo per fare un calcolo, non so 'Un extraterrestre cresce ogni 10 anni tot metri, quanti anni ci vorranno per arrivare a tali metri?'. Bene, quello è un problema anche se c'è il dato inventato etc...Però qua per me non può essere un problema strettamente inteso in matematica. Perchè mancano i dati è come se avessi dato un problema con dati mancanti.»

Elena da parte sua, come Carla, ha difficoltà a comprendere il senso del problema, che significato possa avere: «Non mi è chiaro sinceramente, nel senso che non capisco dove voglia arrivare questo tipo di problema...perchè secondo me non esiste una risposta giusta unica.»

Il problema è interpretato come anomalo rispetto ai problemi scolastici in quanto non permette l'individuazione di una risposta univoca ma solo basata su un'interpretazione ragionata dei dati, sull'esperienza personale della vita quotidiana rispetto all'altezza dei giovani di 20 anni e su conoscenze generali sull'altezza media dei maschi adulti. Un problema che si basi su questo tipo di presupposti non è certo risolvibile per via algoritmica nè può fornire una risposta univoca. Il problema che invece Elena ha in mente ha un ben diverso tipo di struttura almeno riguardo alla possibilità di avere una univocità nella risposta, alla difficoltà percepita dall'insegnante per i problemi "mal definiti" e alla possibilità che un problema matematico possa dare in termini di discussione per fondare il ragionamento matematico. Infatti continua: «si potrebbe proporlo in quinta al livello di probabilità, ipotesi, ragionamento, forse non proprio come problema di matematica ma come discussione in merito a proporzioni».

Anche Rosa lo trova non adatto a livello di scuola elementare come problema, in quanto non risolvibile e di questo gli studenti non posono rendersene conto, mentre quelli delle medie solo con una certa difficoltà e un necessario supporto da parte dell'insegnante. Sicuramente il supporto dell'insegnante è fondamentale per introdurre gli studenti a problemi mal definiti e con soluzioni multiple, ma il problema proposto non è certamente irrisolvibile. La risposta va fornita attraverso strumenti che non sono dei procedimenti di tipo algoritmico, cosa che invece sembra intendere l'insegnante quando definisce appunto il problema come non risolvibile per lo studente. Secondo l'insegnante il problema così come è esposto non è adatto neanche a livelli scolari successivi: « Io per come li vedo in prima media non lo proporrei...cioè in terza ok, lo pretendo, però c'è da discutere insomma.»

Gli studenti non sono di fatto ritenuti in grado da Rosa di risolvere reali problemi che si fondano sulla realtà quotidiana, in modo tale che debbano essere da questa inferite conclusioni rispetto ai più idonei processi e strategie risolutive.

- **L'esperienza matematica**

Un'opinione articolata in modo diverso sull'opportunità di dare questo tipo di problema a scuola viene fornita da Ester:

Ester:«quello che forse manca è l'idea che la matematica ti può aiutare anche a fare previsioni basate su statistiche, su proiezioni. Però qui secondo me non ci sono neanche gli elementi per condurre un bambino a questo tipo di ragionamento. Questa di nuovo in realtà è una domanda del cavolo, cosa mi dici questa domanda quando sai benissimo che la crescita non ha questo tipo di implementazione. Ci sarà un coefficiente di crescita per ogni anno su base statistica, per cui su base statistica posso dire che se sono 1,5m a 10 anni dati certi dati famigliari applico questo coefficiente di crescita e sarà 1,76m.»

La prima fase del ragionamento dell'insegnante riassume in modo chiaro quanto anche la maggior parte delle colleghe esprime e cioè che il problema è senza dati sufficienti per la soluzione. Inoltre la previsione viene interpretata come giustificata sempre attraverso l'applicazione di un algoritmo, altrimenti non è ritenuta valida, almeno all'interno di un problema matematico. Un secondo aspetto da rilevare riguarda invece l'interpretazione del problema che l'insegnante fa mettendosi nei panni dello studente. Secondo l'insegnante, lo studente percepisce una incongruenza tra la consegna del problema e ciò che viene normalmente chiesto nei problemi di matematica, infatti il ragionamento di Ester continua così:

Ester:«Un bambino che legge sta roba non può che ragionare così. Cioè fare il calcolo e poi dire non ho mai visto un uomo di tre metri. Son pochi qua dentro...a meno che uno non abbia già avuto esperienza matematiche per cui riesce già a inferire questo tipo di cose.».

Nell'interpretazione di Ester non è a causa di mancanza di capacità del bambino che il problema risulta di difficile comprensione ma a causa della mancanza di esperienza matematiche. Quindi l'insegnante riconosce che l'ipotesi risolutiva si basa su un tipo ragionamento matematico che però uno studente di scuola elementare spesso non ha l'occasione di sperimentare a scuola. Infatti secondo l'insegnante è proprio il tipo di esperienza matematica passata che condiziona l'approccio risolutivo:

Ester:«Perchè lui è abituato a fare moltiplicazioni. Lui ha visto una moltiplicazione qua. ..Ha visto elementi per fare una moltiplicazione. Ha semplicemente applicato pedissequamente quello che centinaia di volte ha funzionato perfettamente...Questo è quello che ha visto e all'interno della sua competenza ha visto bene. Certo poi nessuno gli ha spiegato che la matematica fa anche altre cose.»

Ester giustifica il comportamento dello studente che cerca di individuare un algoritmo per la soluzione in quanto è così che si insegna e si apprende la matematica a scuola e da questo punto di vista lo studente, come già sottolineato da Franca ha "visto giusto", il suo ragionamento è competente nell'ambito delle sue competenze matematiche acquisite a scuola. A differenza delle colleghe, Ester pone la questione del fatto che l'esperienza matematica scolastica è comunque limitata e non conduce lo studente ad affrontare in modo competente situazioni realistiche del tipo proposto dal problema. Lo studente viene giustificato da Ester più per il tipo di insegnamento ricevuto che per la correttezza dell'applicazione del ragionamento nella situazione problematica.

- **Matematica e realtà**

Cinque insegnanti su nove hanno affrontato in modo diretto il tema della distinzione tra matematica e realtà esplicitato nel testo dello scenario proposto. In generale le insegnanti sono state più interessate a discutere il tipo di problema assegnato e la sua risolvibilità, mentre la distinzione fatta dallo studente nei due diversi tipi di soluzioni non ha coinvolto allo stesso modo le insegnanti. Il problema della distinzione fatta da uno studente tra i due tipi di soluzioni non è stata al centro dell'attenzione come lo è stata la discussione sull'opportunità di dare un simile problema. Evidentemente, da questo punto di vista, la inconsuetudine del problema, ha coinvolto maggiormante gli insegnanti probabilmente avvezzi a concepire i problemi scolastici in modo diverso, attraverso l'applicazione di regole e procedure per la ricerca di un'unica soluzione definita.

La separazione tra matematica e realtà che spesso è deprecata a parole e nei discorsi a carattere generale e talvolta generico, dall'analisi delle risposte delle insegnanti che hanno ritenuto di affrontare anche questo tema proprosto nello scenario, non è ritenuta essere una condizione del tutto negativa della concezione matematica dello studente.

Due insegnanti, Franca e Roberta, esplicitamente giudicano negativamente la distinzione fatta dallo studente, Roberta ne fa motivo di approfondimento nel suo intervento indicando che punterebbe sull'insegnamento di quelle che possono essere delle curve di crescita, anche se nella presentazione le svincola dal discorso matematico.

Roberta:«Innanzitutto lascerei anche un po' il discorso matematico e riprenderei anche una riflessione su cosa significa anche la crescita, la progressione di una crescita, quale possa essere ad esempio un grafico di crescita di un ragazzo. E che il raddoppiamento degli anni non corrisponde al raddoppiamento dell'altezza. Quindi andrei a fare una riflessione che va un po' al di là di quelle che sono soltanto le strutture matematiche. Cosa significa crescere»

In realtà la proposta di Roberta andrebbe collegata con la matematica, ad esempio la presentazione di grafici o la progressione di una crescita rappresentabile graficamente. Certamente la matematica a cui fare riferimento in questo caso non è la matematica di tipo procedurale che ha in mente lo studente. L'insegnante però pur inquadrando il problema da un punto di vista realistico e introducendo strumenti matematici adatti, quali i grafici, afferma che separerebbe crescita e matematica in questo modo nel suo intervento didattico. La stessa insegnante indica che l'accostamento della matematica alla realtà è

Roberta:«un filo conduttore del mio insegnamento. Il far sentire che la matematica è vita. Che non può essere dissociato neanche nel sentirla la matematica. La passione che puoi avere nel comprendere anche l'efficacia della matematica. Da piccoli però proprio approcciare la matematica nelle capacità di osservazione, nel dialogare tantissimo, nel riflettere, nel tornare indietro sui ragionamenti. Nel formulare ipotesi.»

Sembra quindi in contrasto questa ultima parte della sua riflessione rispetto alla prima in cui di fatto Roberta separa la matematica dalla riflessione sulla crescita.

Franca si esprime in questi termini:

«ha fatto distinzione tra matematica e realtà che non è positivo perchè la matematica rappresenta la realtà. Ha ragionato, poi lo aiutiamo a riflettere sul fatto che uno non nasce a 0m...lo si fa ragionare si dice che la crescita non rispecchia l'andamento matematico. Uno può crescere 5cm in un anno poi può non crescere più. Lui ha fatto questa distinzione...questa è giusta tra matematica e realtà perchè riguarda la crescita che non è matematicamente definita.»

Dall'estratto si ha conferma della concezione della matematica che si può rapportare alla realtà se quest'ultima è esprimibile con formule che portano a dei risultati univoci. Altrimenti la relazione tra matematica e realtà non sussiste secondo l'insegnante. La matematica allora viene distinta dalla realtà quando non può fornire risposte certe. La distinzione tra matematica e realtà è confermata anche da Elena quando afferma che la soluzione dello studente si basa più sulla percezione della realtà che sulla matematica, anche se l'insegnante non approfondisce oltre la distinzione fatta tra le due soluzioni dello studente. Elena conferma tale distinzione alla fine dell'intervista:

«Questo è un problema un po' particolare nel senso che non c'è una risposta completamente giusta o una risposta completamente sbagliata. Possiamo fare delle ipotesi che si possono basare su concetti matematici e procedure matematiche oppure su concetti legati alla nostra vita quotidiana su quello che vediamo succedere intorno a noi.»

Infine Mirella distingue, come già visto, problemi matematici da problemi non matematici in base alla presenza di numeri salvo precisare che però non sempre i numeri possono portare a soluzioni matematiche:

«Quindi in questoo caso il bambino ha ragione, in matematica potrebbe essere così, ma questo è un problema reale, cioè un problema che riguarda la realtà delle cose. Che non seguono sempre un percorso matematico. Io farei una discussione su questo.»

Anche Mirella separa il problema matematico dal problema reale che non sempre segue un percorso matematico. Questo è ovviamente vero ma bisogna proprio cercare di capire quando la matematica può essere di supporto per la soluzione al problema reale e quando non può esserlo. Se la matematica resta confinata ad un regno in cui si applicano solo regole e procedure standard su problemi spesso irreali molto difficilmente si potrà ottenere che gli studenti, anche a livelli scolastici più avanzati di quello elementare, potranno costruire modelli di ragionamento matematico in cui matematica e realtà sono in relazione in modo che la matematica sia un modello della realtà da analizzare, e questo non lo si ottiene solo con situazioni in cui si applica una semplice formula per ottenere risultati univoci e determinati. Un'ultimo estratto dell'intervista di Mirella permette di rendere conto di come le concezioni delle insegnanti a riguardo non siano così facilmente inquadrabili e classificabili all'interno di categorie rigide. Pur separando matematica e realtà nella sua concezione della soluzione dei problemi Mirella aggiunge una considerazione sul comportamento dell'alunno abbastanza simile a quelle sviluppate da Ester:

Mirella:«cioè non so neanche se è una questione di confusione, nel senso che io gliel'ho proposto in matematica, cioè io gliel'ho proposto come problema matematico. E quindi lui l'ha risolto come risolverebbe un problema con la moltiplicazione....abbia voluto applicare in questo senso una regola matematica.»

Si possono quindi sintetizzare le seguenti conclusioni:

1 Le insegnanti intervistate concepiscono il problema matematico come un modo per operare con i numeri da parte dello studente per trovare una soluzione che sia univoca e determinata.

2 Matematica e realtà possono essere separate soprattutto quando la realtà è difficilmente trattabile sotto forma di calcoli aritmetici.

3 Gli studenti sono giustificati nel loro comportamento quando applicano regole matematiche imparate a scuola a problemi in cui l'applicazione della regola è fuori luogo in quanto a scuola si insegna quel tipo di matematica e si richiede un determinato tipo di competenza matematica cioè la competenza nell'applicare regole

insegnate a lezione.

4 Se lo studente è in difficoltà in un problema "mal definito" o con più soluzioni la reponsabilità è del problema che viene anche riconosciuto come problema non pertinente al campo della matematica.

5 Anche in insegnanti in cui la comprensione del problema della separazione tra matematica scolatica e modellizzazione matematica del reale è più consapevole, soprattutto nei termini in cui questa separazione può influenzare la concezione matematica dello studente, è presente nelle insegnati un'idea della matematica come insieme di procedure da eseguire, magari più complesse, ma che per esempio non comprendono il ragionamento euristico (testimoniato dalle insegnanti che non apprezzano il fatto che lo studente proponga 1,8m come soluzione senza ulteriori giustificazioni come ad esempio: calcoli, la conoscenza di informazioni ulteriori sulla famiglia o, ancora, le curve di crescita).

12 Analisi delle interviste semi-strutturate

12.1 La codifica e la categorizzazione delle interviste

Un codice nella ricerca qualitativa è il più delle volte una parola o una breve frase che simbolicamente assegna un attributo saliente, essenziale o evocativo per un passaggio del protocollo di intervista (Sorzio, 2005; Saldana, 2009). Il processo di codifica è un processo di scoperta, un processo assimilabile al problem-solving senza formule specifiche da seguire, non è solo una questione di etichettatura di porzioni di testo (Saldana, 2009) «conduce dai dati alla formazione di un idea e da questa idea, a tutti i dati che sono pertinenti a quella determinata idea» (Richards & Morse, 2007, pag.137).

La codifica delle interviste è stato un processo di tipo ciclico in cui alla prima fase sono seguite altre due in cui i codici sono stati prima raffinati e ridotti e quindi raggruppati per categorie. I due termini codice e categorie vanno intesi nel senso che «i codici qualitativi sono elementi essenziali per cogliere l’essenza del testo, che quando vengono raggruppati per similarità o regolarità permettono di attivare lo sviluppo di categorie e l’analisi delle loro connessioni» (Saldana, 2009 p.8).

La prima fase del processo di codifica è stata condotta con l’ausilio del software ATLAS.ti. In questo modo sono stati prodotti due tipi di files: i files contenenti i codici e le interviste, in modo da poter riferire ogni codice al passaggio di testo da cui è stato generato e i files contenenti solo l’elenco dei codici per ogni singola intervista. La codifica della prima fase è stata condotta avendo come guida la ricerca delle convinzioni e atteggiamenti delle insegnanti sui temi sotto esame in modo da far emergere le personali prospettive. Per quanto riguarda gli atteggiamenti questi sono definiti come «il modo in cui ognuno percepisce e pensa se stesso, un’altra persona, una cosa o un’idea. Gli atteggiamenti sono parte di un sistema stabile di reazioni valutative e affettive che si basano e si riflettono su credenze e concetti appresi» (Shaw & Wright, 1967). La componente affettiva è quindi presente nella definizione degli atteggiamenti ed è stata tenuta in rilievo nel processo di codifica. Le convinzioni o credenze sono «comprensioni, premesse o proposizioni a livello psicologico che riguardano il mondo e che sono avvertite come vere» (Richardson, 1996 p.21) e contengono una componente cognitiva di maggior rilievo rispetto a quella emotiva in relazione alle attitudini. Nella seconda fase del processo di codifica i codici sono stati ridotti e raggruppati: uno stesso codice è stato mantenuto e riferito a più estratti, oppure diversi codici sono stati sussunti sotto un unico codice o ancora altri codici sono stati eliminati o ideati per raccogliere nuove evidenze emerse nel processo di codifica. Questa fase del processo è stata sempre fatta con l’ausilio del software ATLAS.ti. attraverso l’utilizzo dell’apposita funzione che permette la costruzione di reti concettuali. Questa fase della codifica è stata compiuta intervista per intervista e precedentemente all’individuazione delle singole categorie (Rubin & Rubin, 1995). Inoltre, in dipendenza dell’ammontare dei dati e della personale esperienza di chi ha condotto la ricerca nell’utilizzo del software ATLAS.ti, si è preferito seguire in parte consigli di Bazeley (2007) e Saldana (2009) secondo cui la codifica manuale ha dei vantaggi per studi condotti inizialmente e su piccola scala in quanto «c'è qualcosa nel manipolare i dati qualitativi su carta e nello scrivere i codici a matita che fornisce maggiore controllo e possesso del lavoro» (Saldana, 2009 p.22). Del resto questo doppio lavoro su carta e computer è raccomandato dagli stessi autori di software come il CAQDAS (Saldana, 2009).

La categorizzazione è stata quindi condotta manualmente sulle singole interviste e incrociando le diverse interviste con l'accortezza di rimanere «sempre aderenti alle parole e descrizioni utilizzate dai soggetti» (Sorzio, 2005 p.115) quando ciò è stato possibile. Le categorie sono state infine raggruppate in base alla loro pertinenza entro i temi oggetto di ricerca.

Durante il processo di codifica un importante attività è stata la produzione di memo: annotazioni, riflessioni effettuate durante il processo di codifica che hanno aiutato l'evolversi e il raffinarsi della codifica verso la produzione di categorie. Come descritto da Clarke «i memo sono dei siti di conversazione con se stessi rispetto ai dati» (2005 p.202). «Il pensare a un codice non è solo l'applicare un termine significativo a una porzione di dati, ma anche una richiesta, un innesco per riflessioni scritte sui significati più profondi e complessi che il codice evoca» (Soldana, 2009 p.32). L'attività di analisi è composta dalla contemporanea scrittura di codici e memo perché «c'è una relazione reciproca tra lo sviluppo del sistema di codifica e l'evoluzione della comprensione di un fenomeno» (Weston & al., 2001 p.397). In particolare la scrittura dei memo nel corso della codifica ha perseguito i seguenti scopi:

- riflettere e scrivere sul personale rapporto tra ricercatore e partecipanti: allo scopo di assumere il sufficiente distanziamento tra le due posizioni in gioco, si è cercato di non sovrastimare convinzioni e atteggiamenti simili a quelli del ricercatore;
- riflettere e scrivere sulle domande di ricerca: ciò è stato perseguito anche nell'ottica di individuare i significati espressi che meglio potevano descrivere le personali concezioni sul contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica;

- riflettere sulla scelta dei codici in modo che fosse possibile una più proficua generazione di altri codici;
- riflettere e scrivere sui possibili collegamenti tra codici, categorie e concetti: questo per rendere visibile e rendere più praticabile le relazione tra questi elementi e l’eventuale loro gerarchia (Soldana, 2009).

12.2 I risultati dell’analisi delle interviste semi-strutturate

In questo capitolo sono presentate le categorie che sono emerse dall’analisi dei dati per descrivere i significati che le insegnanti hanno attribuito ai temi oggetto dell’indagine. Inoltre è stata presentata anche una sintetica descrizione delle esperienze scolastiche delle insegnanti come studentesse in quanto queste esperienze, oltre che essere il punto di partenza di tutte le interviste per costituire uno spazio di comunicazione sui temi oggetto dell’indagine, nel corso dell’analisi si sono rivelate un proficuo terreno dove in parte le insegnanti hanno fondato alcune delle loro concezioni sull’insegnamento della matematica. Le categorie emerse dalla storia scolastica delle insegnanti, seppur narrata in breve da ognuna, talvolta hanno mostrato degli interessanti collegamenti con le categorie che le stesse insegnanti utilizzano per descrivere il loro insegnamento della matematica. Inoltre è stato dato spazio anche all’emergenza del bisogno di formazione delle docenti, in quanto ci è sembrato che fosse importante lasciare voce alle opinioni delle docenti su questo tema, che interessa comunque in ultima analisi la ricerca pur non essendone oggetto diretto di indagine, per poi integrare i risultati dell’analisi finale anche con quelle che sono le posizioni assunte dalle insegnanti come persone direttamente interessate al loro percorso professionale.

Alcuni concetti emergenti espressi dalle insegnanti sono trasversali alle categorie che descrivono i temi sotto indagine. Verranno ripresi e collegati per l’interpretazione delle interviste nel successivo capitolo insieme con le categorie principali descritte in questo. Questa operazione permetterà una migliore descrizione e comprensione delle idee espresse dagli insegnanti e un loro collegamento con le risultanze emerse dalle precedenti interviste. Richiamiamo, prima di passare alla descrizione delle categorie, i temi oggetto di indagine insieme con le due tematiche che per la rilevanza dimostrata a chi scrive, sono state aggiunte nel corso dell'analisi dei dati. In ordine di presentazione sono i seguenti:

- l'esperienza scolastica della matematica;
- l'esperienza da autodidatta;
- le concezioni degli insegnanti associate alla matematica come disciplina;
- Le concezioni sull'insegnamento della matematica;
- Le concezioni sull'apprendimento della matematica e sugli studenti;
- Le idee degli insegnanti sugli errori e le difficoltà degli studenti.

12.2.1 L'esperienza scolastica della matematica

I racconti delle esperienze scolastiche come studentesse di scuola elementare e secondaria hanno in comune per alcune insegnanti il ricordo della matematica come un'esperienza negativa. Carla collega questo tipo di esperienza a due aspetti: al fatto che lei era «negata» per la matematica e al fatto che la matematica le era stata insegnata male, in modo «mnemonico». Nel corso della sua esperienza come studentessa il rapporto con la matematica è cambiato in prima superiore, nel momento in cui ha incontrato un docente che, durante lezioni private, l'ha aiutata, («ha capito qual era il mio problema») le ha rispiegato tutta la materia «partendo da cos'è un punto». Allora si è resa conto che la matematica non l'aveva mai capita, «la matematica era qualcosa di incomprensibile». Un esempio che Carla cita è quello relativo al riporto nelle operazioni in colonna:

> «mi dicevano questo si fa così, nella pratica di ogni giorno e poi tu memorizzi, però perché si arriva a quell'operazione messa in quel modo questo non l'avevo mai capito.»

Carla ha così vissuto nel corso del suo rapporto complessivamente negativo con la matematica un'esperienza di *riscatto* che le ha consentito di riaccostarsi alla disciplina affrontandola in modo diverso da prima, facendola sentire più sicura di sé e facendole apprezzare la matematica scolastica.

Un altro tipo di esperienza è stata vissuta nel corso della propria esperienza scolastica da Maria, Giulia ed Ester. La matematica a loro piaceva. Era vissuta come un gioco, era divertente perché «non serviva studiare» (Maria) e ad essa era associato un senso di sicurezza nelle proprie capacità, anche se i risultati nel corso della scuola secondaria non erano rimasti brillanti, infatti: «alla fine quando c'era un'espressione che non veniva, ero io ad aiutare l'insegnante che si impaperava» (Maria). Da parte sua Giulia è ancora entusiasta dell'insegnamento ricevuto da una sua maestra elementare all'"avanguardia" per l'epoca (1976/77) che usava metodi e strumenti per cui Giulia può affermare: «ho ricordi di matematica che ho portato nel mio insegnamento. Il mio sogno era diventare una professoressa di matematica».

A Ester, bambina timidissima durante la scuola elementare, la matematica dava un senso di soddisfazione e *sicurezza* perché non le metteva ansia (a differenza dell'Italiano) in quanto il compito era per lei facilmente decifrabile e chiaro da svolgere.

L'esperienza successiva nella secondaria non è stata così esaltante per nessuna di queste insegnanti per cause diverse attribuite al personale impegno nello studio (Giulia e Maria) o alla perdita di significato della disciplina (Ester). Per Giulia e Maria il rapporto positivo con la materia non è stato incrinato da esperienze avute con le valutazioni negative durante la scuola secondaria. La matematica scolastica è rimasta una materia piacevole forse perché «facile». Ester invece ha vissuto una disaffezione verso la matematica nel corso della scuola secondaria di primo e secondo grado perché non ne capiva più il significato e perché ha avuto un rapporto non buono con la sua insegnante di scuola secondaria di secondo grado a causa di una domanda da lei posta, che forse denotava una scarsa comprensione della materia, e un conseguente giudizio negativo a seguito del quale l'insegnante: «ha cassato brutalmente, e io non ho fatto più niente di matematica e lei non mi ha più interrogato.»

L'interesse e la curiosità verso la disciplina si sono risvegliati durante il corso di laurea in filosofia durante le lezioni di logica in cui Ester ha vissuto un *riscatto* con l'esperienza matematica. La comprensione della matematica ha riacquistato significato liberandosi dalla convinzione che la matematica fosse mera tecnica di calcolo algebrico o aritmetico. I problemi sul significato dell'infinito e sui paradossi logici hanno risvegliato in Ester la curiosità per la matematica come forma di pensiero dinamica che è alla ricerca della soluzione di problemi ancora irrisolti, di un sapere che progredisce attraverso il superamento di ostacoli e il porsi nuovi problemi da risolvere.

Roberta ha avuto un'esperienza abbastanza positiva con la matematica scolastica soprattutto alle scuole superiori attraverso l'incontro con un'insegnante che con severità e rigore le ha fatto apprezzare il valore della materia e la capacità di cogliere le esigenze degli studenti (e quindi anche di lei come studentessa). Il ricordo che Roberta ha dell'insegnamento avuto riguarda la bellezza della comprensione matematica, «è bello capire, è questo il concetto». In seguito l'esperienza in servizio, attraverso un particolare corso di formazione, ha avuto un ulteriore esito positivo nello sviluppo di una personale concezione della disciplina. Al contrario di altre colleghe, l'esperienza precedente alla scuola superiore non è considerata da Roberta particolarmente significativa per lo sviluppo della propria relazione con la materia, era una delle tante materie che svolgeva con diligenza ma in cui non intravedeva una particolare significatività e non nutriva particolare interesse. Come descriveremo meglio in seguito anche Roberta narra un'esperienza che le ha fatto cambiare la personale concezione della matematica verso un atteggiamento positivo nei confronti della disciplina. Anche in questo caso possiamo adottare il termine *riscatto* per indicare il tipo di cambiamento dell'atteggiamento.

Elena ricorda il periodo del liceo scientifico in cui andava sempre a ripetizione di matematica perché «non era una gran cima» in quella materia. Inoltre pur frequentando il liceo scientifico non era interessata alla matematica e non trovava senso in quello che faceva a scuola. In seguito, dopo la laurea in psicologia, ha affrontato l'esame di diploma magistrale, per il quale, forte delle sue conoscenze acquisite nel suo percorso al liceo scientifico, ha potuto riprendere lo studio della matematica per l'esame di stato con maggiore *sicurezza* aiutando anche una sua amica nell'imparare le parti del programma d'esame. Questa esperienza l'ha riavvicinata alla matematica e le ha permesso di scoprire il lato divertente, associato all'aumento della propria fiducia nell'affrontare gli argomenti da studiare che adesso le si presentavano più facili.

Mirella definisce «drammatica» la sua esperienza scolastica con la matematica. Si è sentita completamente impreparata nei confronti della materia soprattutto nel corso della scuola secondaria a causa di un percorso scolastico molto frammentato per il continuo cambio di insegnanti. In parte ha vissuto meglio questo rapporto con la disciplina all'Università, durante la laurea in Scienze della Formazione primaria (ricordiamo che Mirella è l'unica delle docenti partecipante ad avere conseguito tale laurea), anche se ha mantenuto un senso di insicurezza per la matematica in quanto troppo negativa era stata l'esperienza precedente: «era qualcosa di veramente sconosciuto e ho sempre pensato: oh Dio se mi fanno fare matematica cosa racconto ai miei alunni.»

Comunque in parte il rapporto migliora attraverso alcune esperienze laboratoriali all'università in cui ha incontrato una docente che: «ci ha permesso di capire che le cose potevano essere comprese, non semplicemente studiate a memoria o formulate e basta insomma.». Tutto questo però non è bastato a Mirella per sentire di essere entrata in possesso di un vero e proprio metodo didattico perché, anche con queste esperienze, «non è che mi ha spiegato come insegnare». La considerazione positiva che Mirella fa rispetto al percorso universitario che le ha permesso almeno di riavvicinarsi alla matematica riguarda l'approccio alla matematica che le è stato presentato: «mi ha aiutato a capire come prepararmi, come ricercare. Da questo punto di vista buono, però il periodo precedente un disastro.»

Franca non si espone ricordando particolari impressioni ed episodi rispetto alla matematica imparata a scuola ma si concentra sulla sua formazione per l'insegnamento. Sottolinea soltanto l'eccesso di insegnamento trasmissivo avuto in classe in cui, in riferimento all'esperienza legata alla scuola secondaria superiore nell'istituto magistrale, non le è stato insegnato niente di pratico sul come insegnare a scuola.

Rosa, l'insegnante di scuola secondaria, ricorda come nel suo passato di studentessa la matematica fosse una materia per lei divertente. Ciò che la stimolava, soprattutto al liceo, era il «riscontro» tra diverse rappresentazioni, analitiche e grafiche, delle funzioni. Il senso dell'esperienza matematica per Rosa stava nella stessa attività matematica che per lei era di scoperta di come potevano essere rappresentate visivamente ad esempio le funzioni della geometria analitica. Un altro aspetto interessante per Rosa era relativo alla coerenza della materia, cioè il fatto che fosse possibile determinare se alla fine di un'attività matematica o un esercizio il risultato ottenuto fosse in accordo con i dati e la domanda del problema da risolvere.

Dai brevi resoconti sui percorsi scolastici in matematica delle insegnante emergono diversi atteggiamenti di fronte alla matematica che si sono sviluppati negli anni e che in alcuni casi si sono modificati. Destano interesse in particolare, soprattutto in un ottica rivolta alla formazione, le esperienze definite qui di *riscatto*, ovvero dei cambiamenti di atteggiamento verso la disciplina più o meno profondi che comunque hanno riavvicinato l'insegnante alla matematica permettendo di migliorare la propria sicurezza nell'affrontare la disciplina da insegnanti. Non si vuole dire che le insegnanti che abbiano avuto esperienze di *riscatto* abbiano con ciò conseguito una sicurezza e fiducia nel proprio lavoro che le faccia sentire come adeguate al compito di insegnamento della matematica, ma che questo senso di personale sicurezza è migliorato nella loro percezione in confronto all'atteggiamento precedente. Un altro aspetto che si vuole sottolineare è che complessivamente queste insegnanti, ad eccezione di Giulia e Rosa, non hanno nutrito un particolare interesse verso la matematica durante il loro percorso scolastico, anche se non tutte hanno raccontato esperienze negative. Un ultima considerazione per quanto riguarda l'esperienza riportata alla luce da parte delle insegnanti come studentesse, il fatto che la matematica per motivi diversi fosse percepita divertente: o per la percezione di un fascino suo interno o per la facilità con cui veniva svolta l'attività. In alcune insegnanti questo aspetto dell'attività matematica come qualcosa che deve portare a divertire l'alunno è rimasto come obiettivo del proprio insegnamento, anche se declinato in forme differenti.

12.2.2 La formazione da autodidatta

Sette delle nove insegnanti dichiarano che la loro formazione in matematica è da autodidatta. Se escludiamo Rosa, l'insegnante della scuola secondaria, e Roberta che ormai è in pensione e ha potuto usufruire di corsi di formazione in matematica alla fine degli anni '70 quando si è aperta la stagione dell'insiemistica, praticamente nessuna delle insegnanti ha potuto ricevere una formazione specifica a riguardo. Solo Milena che si è laureata in Scienze della formazione ha sostenuto un esame di matematica all'Università, ma per sua stessa ammissione in quell'occasione le è stata insegnata della matematica, anche in modo piacevole, ma non come insegnarla. Tutte le altre maestre hanno sfruttato le conoscenze di cui erano già in possesso dalla scuola e si sono costruite dei percorsi autonomi studiando da sole sui libri le parti di programma che di volta in volta dovevano insegnare. Le insegnanti che hanno partecipato alla ricerca hanno inoltre una esperienza limitata di insegnamento della matematica tranne che in due casi, Roberta e Rosa, le insegnanti con più anni di insegnamento della disciplina, per cui hanno anche una limitata visione di quello che è l'intero curricolo di insegnamento a cui devono far fronte. Infatti sei su sette insegnanti non hanno mai completato un ciclo di insegnamento dalla prima alla quinta primaria. Solo Giulia ha ricominciato il ciclo e adesso è in seconda, ma in altri casi come per Ester o Carla l'insegnamento si è fermato addirittura alla classe prima (Ester) o alla seconda (Carla). Tutte queste docenti esplicitano il bisogno di essere formate in qualche modo in matematica, si sentono in parte inadeguate per il ruolo di insegnanti di matematica per l'avvertita carenza di competenze specifiche nella disciplina. La formazione di Elena è stata da autodidatta anche se, avendo studiato al liceo scientifico, si sente di aver acquisito una sicurezza nella disciplina maggiore di quella che aveva in passato, che ritiene la metta in grado di proporre la materia in modo divertente per gli studenti. In realtà anche Elena sente che rispetto alla sua formazione specifica in matematica necessita di approfondimenti, infatti si sente comunque deficitaria rispetto agli argomenti trattati in classe:

«(un bravo insegnante) intanto secondo me deve conoscere bene la matematica. Infatti da questo punto di vista mi sento parecchio in difetto. Le basi le ho ma le ho anche dimenticate. La matematica del liceo che è quella su cui si basa la mia esperienza, il mio modo di lavorare, non me la ricordo tanto…Spesso i bambini capita che ti facciano delle domande …e tu lì devi essere pronta a rispondere.»

Il senso di insicurezza e inadeguatezza di Mirella è reso palese anche dalla sua dichiarazione di non sentirsi «nata matematica», che esplicita anche ai suoi studenti. C'è un bisogno di formazione che Mirella esprime per poter acquisire sicurezza nella sua attività di insegnante. Mirella presenta il suo rapporto con la matematica in evoluzione in una tensione tra il cercare di far amare la materia e le sue carenze di formazione che però cerca di compensare: «mi piace, più la insegno più mi piace, anche perché penso di riuscire a prepararmi abbastanza, prima di entrare in classe, a prepararmi tanto e quindi anche le cose più simpatiche, anche per me stessa.».

Giulia esplicita il tipo di formazione che ritiene sia necessaria a lei come docente in relazione al problema delle gestione del curricolo in finzione delle possibilità di apprendimento degli studenti che definisce come maturazione. Lamenta che queste conoscenze un'insegnante se le fa solo con l'esperienza:

«l'esperienza allora ti insegna che devi conoscere e capire quale deve essere lo sviluppo mentale del bambino…Purtroppo nella formazione degli insegnanti, in base alla mia esperienza manca; anche se ora non so quanto in più danno nella formazione del corso di laurea, il poter di capire, anche se dipende, in realtà dal gruppo di bambini che hai, però avere più nozioni epistemologiche».

La formazione per Giulia è inoltre ricollegabile a un miglioramento delle proprie conoscenze per acquisire maggiore sicurezza: «Comunque ritengo che un insegnante debba avere forte la materia, per essere più sicuro.»

La disponibilità alla formazione è indicata da Ester per poter modificare eventualmente il suo insegnamento:

«Io però sarei disposta a insegnare in maniera diversa se ci fosse qualcuno che mi facesse vedere a me per prima. E poi con degli spazi diversi…si sa ormai da molto che in Italia non si sa insegnare la matematica. Non è solo una critica, però visto che bisogna rifletterci sarebbe ora di rifletterci davvero.»

Maria si è formata sui testi del Tenuta studiando da sola e acquisendo un impostazione della lezione e dell'insegnamento che tuttora mantiene:

«forse la fortuna è stata che quando ho avuto il ruolo nella scuola già a luglio la preside mi aveva accennato che forse andavo in prima a fare matematica. E allora mi ero presa dei testi, mi sono basata su un testo antico di un certo Tenuta (*Ispettore scolastico*) e mi ha dato un'impostazione che tuttora mantengo tutto sommato.»

Maria comunque è curiosa di migliorare la sua pratica di insegnamento infatti racconta che:

«A me piacerebbe moltissimo essere una mosca entrare nelle classi a vedere le persone che hanno più esperienza, che si sono dedicate di più, che hanno approfondito, proprio per vedere i loro vari trucchetti, proprio perché secondo me son cose che sui libri non impari e invece vedere un altro come sta in classe, come si rapporta, come propone le cose…ma non si può … »

Per Carla la sua formazione:

«è stata un'autoformazione, mi sono fatta io le mie ricerche, una volta che ho iniziato a insegnare matematica, mi sono andata a cercare dei libri in biblioteca perché il libro di testo è solo una guida e in base alla classe che ho mi oriento su vari materiali, anche oggetti costruititi da me in relazione alla classe di alunni».

Inoltre Carla lamenta il fatto che all'inizio della sua carriera come supplente ha dovuto adattarsi ad insegnare quello che le capitava non avendo in realtà una competenza disciplinare specifica per alcuna materia «a differenza degli insegnanti delle medie».

Franca è una delle poche insegnanti che riconosce il valore di un'esperienza di formazione per la sua attività di insegnamento, ma non specifica per la matematica. Fa riferimento al corso per insegnare a studenti disabili dove ha appreso metodologie di insegnamento, di formulazione degli obiettivi, a scandire la programmazione in base alle esigenze degli alunni. Questa formazione la collega al: «non proporre la cosa già fatta ma cercare di capire qual è il meccanismo fondamentale per arrivare al concetto… mi hanno insegnato tanto i bambini con problemi.».

Riconosce che proprio dal dovere andare in aiuto a studenti in difficoltà ha imparato come insegnare a tutti. La differenza tra insegnante di classe e insegnante di sostegno Franca la rileva in quanto certe conoscenze acquisite nel periodo in cui era insegnante di sostegno non vengono utilizzate nello stesso modo insegnando a tutta la classe.

La richiesta di formazione per l'insegnamento della matematica da parte di questo gruppo di insegnanti è espressa in modo esplicito e sicuramente è anche una delle motivazioni per cui hanno aderito al progetto di ricerca. La formazione di cui sentono il bisogno dovrà però tenere conto dei percorsi autonomi di sviluppo professionale che ormai queste insegnanti anche con fatica hanno perseguito e sono percorsi talora molto differenti tra loro che partono da diverse esperienze di formazione scolastica e talvolta professionale. Due requisiti emergono per la formazione auspicata dalle docenti: quello della formazione per acquisire maggiore sicurezza nell'insegnamento e quello relativo al poter "vedere" come fare lezione in modo diverso da quello solitamente adottato. Nel primo caso appare come sia più importante per le insegnanti una formazione che abbia nei contenuti disciplinari il proprio fulcro, mentre negli altri casi sembra che il fulcro della formazione sia spostato sulla pratica di insegnamento.

12.2.3 Le concezioni degli insegnanti associate alla matematica come disciplina

Allo scopo di raccogliere informazioni per formare un quadro più completo sulle concezioni delle insegnanti sull'insegnamento della matematica, uno dei temi oggetto di indagine della ricerca ha riguardato le idee degli insegnanti sulla matematica come disciplina al di fuori quindi delle idee che riguardano l'insegnamento della matematica. Le concezioni delle insegnanti sono state espresse talvolta in forma più generale, come idee generali sulla matematica, talvolta hanno assunto la forma di percezioni della matematica nella quotidianità della vita delle insegnanti. Si vuole sottolineare in questa sede come sia stato difficile riuscire a distinguere le differenti concezioni sulla matematica e sul suo insegnamento in quanto spesso queste risultavano intrecciate e le stesse insegnanti non hanno espresso una esplicita distinzione tra le due prediligendo il resoconto dettagliato su come è da loro concepita la matematica insegnata.

12.2.3.1 La matematica come problem solving, disciplina creativa, "pensiero in movimento"

Franca espone la sua concezione della matematica come problem solving, ragionamento che serve anche per apprendere le altre discipline e quindi accomuna la matematica al ragionamento in senso lato, alla logica:

«Secondo me è fondamentale. Perché c'è la logica, c'è il sapersi destreggiare, c'è il saper risolvere i problemi della vita attuale, non è una cosa meccanica, c'è tutto un ragionamento dietro…io sono trattata per fanatica perché vorrei avere sempre più ore non solo per dedicarmi alle quattro operazioni classiche ma soprattutto ai problemi, alla logica, al ragionamento. Io penso che la matematica serva anche a imparare a studiare, a scrivere le tracce…è una cosa che invade tutto, anche i problemi della vita quotidiana, non dico la spesa, il resto…ma proprio problem solving…e vedo che i bambini tendono a non soffermarsi a ragionare sulle cose, tendono ad avere il risultato.»

Il valore della matematica è visto soprattutto in questo aspetto di potenziamento delle capacità logiche e nell'aspetto metacognitivo legato all'apprendere a studiare, a scrivere, a riflettere. Anche la creatività è una caratteristica importante della matematica perché consente di arrivare alla soluzione dei problemi da più vie, da diversi procedimenti: «La matematica è tanta riflessione. A me piace far arrivare i bambini attraverso più vie, anche calcolo mentale, ragionamento non è proprio a senso unico». La creatività e la flessibilità di ragionamento richiamati da Franca sono uniti al'idea che la matematica si richiami all'ordine, a una struttura ordinata, che necessiti quindi di un ordine mentale per essere compresa, ma anche a un aspetto divertente che si ricollega alla soddisfazione intellettuale di poter esprimere la propria creatività:

> «questa cosa del calcolo mentale io la ritengo una marcia in più per le medie, superiori, per la vita per tutto. Perché capiscano che comunque è divertente. Io a volte dico "allora qual è la materia più bella?" e i bimbi: "matematica!", E' comunque divertente, mi piacerebbe che si divertissero.»

Emerge qui una *tensione* tra questa idea di matematica e il riconoscimento di Franca che spesso per gli studenti, il riflettere sui procedimenti e sui risultati è difficile e impegnativo e si concentrano piuttosto sull'esattezza o meno delle risposte, dei risultati. Franca infatti lamenta le troppe risposte "buttate a caso", come "tirando i dadi" date dai suoi studenti alle sue domande che sono invece tese, nelle sue intenzioni, a farli ragionare e comprendere come procedere nel ragionamento matematico.

La concezione di Ester si avvicina a quella di Franca. La sua concezione della disciplina si sviluppa durante il periodo di studi universitari a seguito dell'esperienza "*illuminante*" durante la frequenza del corso di logica alla facoltà di filosofia a cui era iscritta. La concezione di Ester è quindi drasticamente cambiata da una prospettiva che interpretava la matematica come calcolo fondato su algoritmi senza significato con il suo mondo personale a una prospettiva in cui la matematica è vista non come un «apprendimento statico», ma come «pensiero in movimento», in cui c'è spazio per la ricerca di significati anche personali, un mondo:

«di problemi irrisolti, di risposte opinabili, di risposte meno opinabili e mi si è aperto un mondo, no? Un mondo ricco, vivo, allegro non quello cupo, triste de…non so di fare 50000 equazioni con *x* e *y*. Non so come dire era sterile quell'aspetto. La storia del pensiero della matematica mi ha affascinato moltissimo. Ho cambiato visione e ho ritrovato quello che forse cercavo»

Il sapere matematico è concepito allora come conoscenza che permette di comprendere il mondo andando al di là dei propri sensi raggiungendo scoperte che modificano il proprio modo di interpretare la realtà.

Ester sottolinea come nonostante le esperienze negative con la matematica scolastica a livello di scuola secondaria, in cui vedeva la matematica come una sorta di «Bibbia intoccabile», forse, data la sua precedente esperienza scolastica positiva durante la scuola primaria, avvertiva come la sensazione che in realtà la matematica potesse essere un sapere interessante e dinamico. Era quindi sempre presente, secondo Ester, in lei una curiosità, mai sopita del tutto, verso la matematica che non aveva avuto le opportunità per emergere ed era anzi stata frustrata dalle esperienze negative scolastiche.

L'esperienza di Ester le permette di apprezzare la matematica anche dal punto di vista estetico. I problemi della logica, i paradossi logici, l'idea dell'esistenza di diversi tipi di infinito compresa attraverso semplici esempi, come il fatto che gli insiemi dei numeri pari e dispari sono infiniti, ma "più piccoli" dell'insieme dei Naturali, il concetto di ricorsività, sono tutti esempi portati da Ester per esprimere la bellezza da lei percepita della matematica. Ester fa poi un analogia con la musica particolarmente efficace:

«ti rendi conto della bellezza, teorica se vuoi, un po' come anche la musica in fondo ha una bellezza teorica. E' vero parla di sentimenti però è anche la struttura di una sinfonia che colpisce.».

Centrale in questa narrazione di Ester sembra essere un'esperienza singola che ha prodotto un cambiamento radicale nella sua concezione matematica, un esperienza che abbiamo definito di *riscatto* in quanto ha permesso a Ester di riappropriarsi di una modalità di conoscenza del mondo che nel corso dei suoi studi scolastici purtroppo aveva perso.

Col tempo, da insegnante, ciò che ha affascinato di più Rosa è l'aspetto di costruzione, di invenzione della matematica:

> «Più la frequento più mi affascina questa costruzione, chiamiamola di fantasia, gran parte è una costruzione mentale, anche se ci sono riscontri pratici, però la possibilità di spaziare di inventarsi delle cose giocando proprio è una di quelle cose che scopri dopo un po' che la frequenti, perché il primo approccio è proprio a che cosa serve.».

L'aspetto "ludico", da studentessa di matematica ha dato spazio, senza però esaurirsi, si è evoluto, verso una concezione della matematica che trova nell'invenzione matematica uno dei suoi nuovi centri di interesse. Non viene dichiarata una primaria funzione strumentale nella concezione della matematica secondo Rosa. Il cambiamento di concezione verso una matematica vicina all'aspetto inventivo e di scoperta è dovuta, secondo Rosa, a un aumento di conoscenza matematica da parte sua nel corso degli anni di insegnamento. Un altro aspetto che si è sviluppato nel corso del tempo ed ha acquisito rilevanza per la concezione della matematica di Rosa è quello della coerenza interna della disciplina, non più una coerenza legata esclusivamente all'attività matematica intrapresa per risolvere uno specifico problema tra soluzione e passaggi della procedura risolutiva, ma una coerenza vista a livello più generale tra concetti matematici relativi alle aree della disciplina insegnate.

Nella vita quotidiana il rapporto di Rosa con la matematica, a suo avviso, risiede nel suo modo di essere, ovvero nel suo atteggiamento di ricerca anche nella vita quotidiana, nel porsi problemi, curiosità da soddisfare: «E' un po' un modo di essere, nel senso che si associa al discorso cercare delle spiegazioni comunque, è un modo mio..supportato dal fatto che poi la discussione salta fuori comunque facilmente.».

12.2.3.2 La matematica come sapere universale, spirituale, accessibile a tutti

Roberta sviluppa la sua concezione della matematica a partire da quella che si era formata alla fine degli studi scolastici. A quel tempo la matematica per quanto fosse una materia che la interessava era vista come qualcosa di «meramente esecutivo» che «non permetteva l'idea di un pensiero divergente». Anche in questo caso nel corso della sua attività professionale Roberta modifica la sua concezione della matematica di tipo procedurale retaggio scolastico, verso una concezione di tipo "*filosofico*". Questo aspetto filosofico della matematica per Roberta è collegato alla sua ricerca spirituale. Roberta apprezza il fascino dei numeri presenti nei rapporti naturali, persegue un percorso di crescita spirituale legato alla conoscenza dei numeri come indicatori di aspetti del mondo reale che altrimenti, attraverso i sensi, non sono conoscibili. L'esperienza che Roberta cita a riguardo non si riferisce a un particolare evento della vita ma l'incontro stesso con i numeri:

> «Sì, c'è stato l'incontro mio con i numeri. Che nella mia vita io ho imparato a decodificare, con delle sequenze, con delle coincidenze, però non in maniera così puramente magica, in una maniera di costanti, di ripetizioni di coincidenze, che però dopo ho cominciato a decodificare e a cui dare un certo valore...sono certa, non per credenza, ma per conoscenza che (i numeri) hanno una valenza che non è ancora pienamente presa in consapevolezza.»

La concezione della matematica di Roberta come di un sapere che conduce a delle conoscenze di *ordine superiore*, di ordine spirituale o, con un suo termine «divine», è alla base del rispetto che lei ha nel confronto della matematica come sapere e della sua volontà di trasmettere questa forma di *rispetto* della disciplina attraverso l'insegnamento anche ai suoi studenti. In questa sua concezione Roberta evidenzia come le conoscenze antiche della geometria, della geomantica, dei rapporti sono state determinanti. Anche se ammette:

> «per esempio io non posso cogliere tutto quello che viene detto e spiegato sul numero aureo, sulle proporzioni, e su tutti i grandi studi che sono stati fatti sui rapporti, proporzioni, sulle cosiddette coincidenze ..sì io non ho ancora gli

strumenti adeguati per andare a scandagliare così in alto, però ho l'intuizione, questa me la riconosco»

In Roberta l'intuizione matematica è una modalità di pensiero matematico universale anche perché non è, a suo avviso, vincolata eccessivamente alle conoscenze specifiche disciplinari. E' posseduta da tutti, è alla portata di tutti.

Carla indica la matematica come *ordine mentale* e la intende come forma di sapere quasi superiore alle sue capacità di comprensione ma che dà spiegazioni profonde che riguardano l'universo materiale e spirituale. Carla è affascinata dal mistero della matematica che dà spiegazioni sull'infinitamente grande e sull'infinitamente piccolo:

«Per esempio ho degli amici all'osservatorio astronomico dove vado ogni tanto e vedo che lì c'è tutto un rapporto di calcoli, le distanze di pianeti, galassie, anche il percorso di ricerca spirituale che mi ha portato alla fisica quantistica è legato alla matematica.»,

ed è affascinata dal sapere matematico delle civiltà arcaiche che con pochi strumenti matematici riuscivano a costruire edifici imponenti come le piramidi: «mi vien da pensare alle piramidi degli Assiri, degli Egiziani, mi viene da pensare a competenze che vanno al di là di quelle che noi abbiamo tramite i computer e calcolatori.».

Nel complesso, pur se assimilabile a quella di Roberta, la concezione di Carla viene espressa in modo meno esplicito e, come vedremo in seguito, con ridotti riferimenti ai collegamenti tra questa sua concezione della matematica e il tipo di insegnamento e apprendimento che a questa può essere collegato.

12.2.3.3 La matematica come disciplina strutturata e strumento che non trova facile applicazione nella vita quotidiana.

Elena ritiene che la matematica sia un percorso logico suddiviso in tappe da conoscere per raggiungere un determinato risultato. Una immagine della matematica che appare fortemente legata agli aspetti procedurali e all'ottenimento di obiettivi definiti quali appunto sono i risultati dei procedimenti. Unitamente a questa idea sulla disciplina Elena ritiene che la matematica in realtà abbia meno agganci con la propria vita quotidiana al di là dell'insegnamento che sono resi evidenti nel confronto con altre discipline:

«anche se ritengo che questa disciplina rispetto ad altre sia quella in cui si fa più fatica a vivere attraverso queste cose. Non so mi viene in mente l'inglese, uno va in vacanza a Londra e utilizza il suo inglese legato all'insegnamento anche poi nel parlare con gli inglesi…oppure ad esempio un insegnante di storia va a vedere il museo degli egizi con la sua famiglia e però è una cosa legata anche alla sua vita professionale.».

La matematica è in Elena una disciplina ancora non ben definita che sta sì "un po'in tutto", ma poi nel concreto non è parte significativa del suo quotidiano né di ipotetiche esperienze extrascolastiche:

«ci sono vari aspetti della matematica, e poi secondo me ha comunque dei principi molto rigorosi, molto specifici che forse sono proprio propri della disciplina e del suo insegnamento piuttosto che della vita quotidiana, non so…essendo una disciplina così rigorosa e precisa ha bisogno di una situazione molto strutturata per essere appresa e per essere insegnata…mi viene in mente il cinema oppure dei libri, quello sui numeri primi o della bambina prodigio, che però di matematica in realtà non hanno poi così tanto, anche se magari sono scritti da un matematico…è una cosa un po' più astratta.».

La concezione della matematica di Elena è strettamente vincolata agli aspetti procedurali e numerici, è una disciplina che «serve a tenere in esercizio la mente». In questo tipo di concezione chiusa non trova spazio la possibilità di concepire la matematica come un sapere che si può ritrovare anche nell' operare quotidiano o in altri aspetti della vita intellettuale.

Per Mirella la matematica non è stato oggetto di esplicita riflessione autonoma nel corso della sua attività professionale forse perché Mirella vede:

«la matematica come una scatola chiusa. Cioè se mi dovessero dare una materia come italiano, io potrei fare mille progetti, mille cose potrei andare al di là del semplice programma. Per me la matematica già si restringe di più. C'è questo programma, bisogna insegnare questo, fine.»

In parte un percorso di riflessione personale si è aperto per Mirella a seguito dell'esperienza laboratoriale all'Università:

Mirella:" Mi sono accorta lavorando con la....e parlando con la .....che in realtà si può andare molto al di là, di un argomento. Anche nella matematica ci sono argomenti che puoi approfondire, dandogli maggiore spazio e in maniera diversa. Ad esempio andando a cercare questi giochi divertenti, particolari che piacciono e che aiutano a sviluppare la logica."

Anche se in modo non esplicito Mirella percepisce ancora che per poter fare matematica è necessario attraversare percorsi definiti a priori e che quindi limitano la sua creatività. Probabilmente la sua scarsa esperienza di insegnamento è anche all'origine di questa sua idea per cui gli argomenti da insegnare non posseggano una intrinseca possibilità di essere re-inventati e insegnati in diversi modi.

Non tutte le insegnanti si soffermano a descrivere questo aspetto della matematica come disciplina chiusa e molto strutturata che lascia poco spazio alla libertà dell'insegnante, ma in molte lo indicano come pertinente alla disciplina. La differenza si riscontra nel modo in cui l'insegnante esprime e vive questo concetto rispetto ad altre idee che la matematica richiama. Franca afferma che la matematica è comunque una disciplina che richiede «una struttura mentale dei concetti» in cui «ci deve essere «ordine nelle cose...se non c'è l'ordine, sia temporale, per esempio se devi fare dei passaggi prima uno poi l'altro, ci deve essere un ordine nella struttura delle cose, forse questo in italiano non è vincolante o strettamente necessario». A differenza delle colleghe questo aspetto della matematica che è inerente alla disciplina non è vissuto da Franca come limitante della sua libertà di insegnare in vari modi la disciplina. La sua concezione dell'insegnamento non strettamente procedurale la "mette al riparo" dai vincoli che potrebbero avere il sopravvento nel formarsi di una concezione della matematica troppo sterile e ripetitiva, legata ad esercizi mirati all'ottenimento dei risultati esatti.

12.2.3.4 La matematica è una disciplina divertente o che va resa tale.

La disposizione verso la matematica come materia che è divertente o che debba essere resa divertente per gli studenti appare in più riprese nelle interviste. Per Franca il bravo insegnante di matematica deve avere: «quell'assunzione di fiducia nei bambini, di gioia anche nel fare la materia. Bisogna anche divertirsi con la materia perché poi i bambini si divertono, sono delle spugne.».

Il divertirsi con la matematica da parte di Franca è un veicolo per gli studenti per farli divertire a loro volta non solo per passare il tempo piacevolmente ma proprio nel fare matematica. Abbiamo visto già che per Franca la matematica è in sé divertente e quindi il fare matematica è da lei considerato sufficiente, se condotto con il dovuto entusiasmo, per coinvolgere gli studenti. Ad esempio Franca, che ha una concezione della matematica come problem solving, quindi con un orientamento avvicinabile a quello degli esperti della disciplina, ma comunque afferma che «le piacerebbe che i suoi studenti si divertissero» nel fare matematica.

Non tutte le insegnanti collegano l'aspetto del divertimento nell'insegnare matematica allo stesso modo di Franca.

Elisa trova la matematica divertente per lei stessa, ma a differenza di Franca ritiene che per gli studenti debba in qualche modo essere resa divertente.

> «Mi rendo conto che molto spesso il modo con il quale l'insegnante propone questo tipo di materia ai bambini, ai ragazzi, influenza moltissimo il tipo di coinvolgimento dei bambini e quindi cerco anche l'interesse dei bambini e quindi cerco di mettere in pratica con i miei bambini questo tipo di insegnamento che è basato sulla mia esperienza. E quindi cerco di trovare delle cosine anche un po' divertenti , non so un testo di un problema che faccia più ridere piuttosto che un testo serio. Un po' così no? Oppure cambiando i nomi.»

Lo stesso concetto è espresso in modo simile da Mirella. Entrambe queste insegnanti posseggono una visione della matematica orientata verso l'aspetto procedurale e algoritmico, a differenza di Franca.

Su questo aspetto della matematica di Rosa abbiamo già scritto.

Maria e Giulia, hanno espresso le loro disposizioni affettive verso la matematica affermando di ritenerla una disciplina divertente da insegnare e confermando indirettamente la stessa idea di disciplina che possedevano da studentesse:

«(la vedevo) come un gioco…restava facile divertente, il mio spuaracchio era il foglio bianco di italiano. Risolvere i problemi della geometria…per me era il massimo.»

Maria:"Intanto per me era divertente perché non serviva studiare, perché ero una pigrona! E quindi mi divertivo a trovare la soluzione delle cose, soprattutto dei problemi, boh mi divertivo."

12.2.4 Le concezioni sull'insegnamento della matematica

Emergono alcune categorie che descrivono le concezioni sull'insegnamento della matematica a seconda che il focus sia posto più sull'azione didattica o sulla matematica da insegnare a scuola. Tali categorie racchiudono anche le modalità relative al percepirsi insegnanti di matematica.

12.2.4.1 Nell'insegnamento della matematica è fondamentale la relazione affettiva con gli studenti

Alcune insegnanti indicano nel rapporto affettivo con i propri studenti il modo migliore per veicolare l'insegnamento e ottenere l'apprendimento della matematica in modo molto chiaro.

Per Maria e Carla la relazione positiva, affettiva con gli studenti è un fattore essenziale per un'efficace azione di insegnamento. La relazione è concepita con dimensioni diverse nelle due insegnanti.

Per Carla la relazione con i bambini ha forti tratti emotivi, è prioritaria all'insegnamento che è considerato quasi una fase successiva, in termini di priorità del proprio lavoro, all'instaurarsi di una buona relazione tra insegnanti e studenti. Numerosi sono i racconti di esperienze di vita professionale di Carla che ruotano attorno a questo fattore chiave per il suo insegnamento. Carla parla di affetto e stima reciproca che ci deve essere tra insegnante e alunni perché:

«loro (gli studenti) sono ancora legati ad un fatto affettivo, se stimano e si legano affettivamente all'insegnante allora ameranno la materia, al contrario si crea un clima di non stima, di non affetto ed è qualcosa che gli potrebbe restare, si crea una chiusura verso la materia.».

Questa attenzione al mantenimento della positiva relazione modella anche aspetti della didattica dettando la scansione dei contenuti di insegnamento senza imporre i ritmi di apprendimento e dando spazio alle richieste ed esigenze degli alunni. Per Carla i suoi studenti sono bambini prima che alunni e questo è valido anche per lei che si concepisce come "*persona*" prima che insegnante, anzi non ritiene di dovere separare e che non sia separato il suo essere persona dal suo essere insegnante: «Posso dire che nell'insegnamento per me non è staccata la figura dell'insegnante dalla figura della persona che sono io.».

La relazione è quindi principalmente instaurata attraverso l'affettività e l'accoglimento delle esigenze personali dei bambini. Un esempio di questo modo di concepire il proprio insegnamento è espresso quando Carla racconta un episodio in cui, per introdurre i problemi in matematica a bambini di prima elementare (primaria), è partita dalla realtà circostante:

«proprio quel giorno i genitori avevano dimenticato di dare la merenda a un bambino. Ho detto: "oggi abbiamo un problema. Il vostro compagno non ha la merenda, secondo voi come potremmo risolverlo? Allora abbiamo fatto delle ipotesi…In quel modo ho introdotto il problema e loro hanno capito subito che era qualcosa da risolvere, non ho detto oggi facciamo il problema: dettatura come facevano ai tempi miei.».

La relazione con gli studenti sembra essere concepita come elemento di soluzione delle eventuali difficoltà che possono essere presenti nell'apprendimento della matematica, infatti per Carla non ci sono argomenti da insegnare o apprendere più difficili di altri ma se ci sono difficoltà da parte degli studenti queste sono dovute a qualche "errore" nell'attività didattica esercitata dall'insegnante. Se nel suo insegnamento il docente si prende cura delle esigenze cognitive e soprattutto affettive degli studenti le difficoltà sono prima o poi superate.

La relazione con gli studenti è concepita da Maria in termini differenti da quelle di Carla. Anche Maria ritiene che nel suo insegnamento è fondamentale che ci sia una relazione affettiva con gli studenti per essere efficace.

«Secondo me è fondamentale che uno entri in relazione con i bambini…Anche perché in particolar modo alle elementari i bambini si legano all'insegnante e io vedo che il legame con l'insegnante li sprona a far bene…loro fanno i compiti perché ti vogliono bene…questo legame fa lavorare i bambini volentieri…e gli fa venire voglia di apprendere.»

A differenza di Carla, Maria dimostra una concezione di tipo dinamico della relazione con gli studenti, nel senso che «l'importanza di questo legame è di tenerlo equilibrato» e di farlo evolvere nel tempo. Inoltre nel senso che la relazione con gli studenti è mediata anche attraverso la comprensione e conoscenza dell'insegnante dell'insegnamento e delle difficoltà chi gli studenti incontrano nell'apprendimento della disciplina. Secondo Maria il fascino che adesso su di lei esercita la sua professione di insegnante di matematica è dovuto alla curiosità nel cercare di «smontare» i concetti e le procedure per comprendere quali siano gli esatti punti in cui i bambini trovano difficoltà nel condurre ragionamenti di tipo logico sugli argomenti trattati nel curricolo di matematica. La sua relazione con gli studenti è tesa a un obiettivo specifico: farli apprendere la matematica, aiutarli in questo. L'affettività appare come un fondamentale aspetto di impalcatura all'obiettivo didattico principale di Maria che, non a caso, indica come gli studenti più «deboli» in matematica siano quelli a cui preferisce, dedicare di più i suoi sforzi come insegnante. Ma anche in questo caso l'aspetto dinamico dell'insegnamento di Maria si rivela in quanto non perde di vista gli studenti più dotati:

«Poi, e qui per fortuna mi trovo d'accordo con la mia collega, riserviamo molta attenzione ed energie sui bambini con difficoltà, e io sento che invece io trascuro un po' i bambini quelli anche geniali e qualche volta ho un po' paura di trascurarli che anche un po' si annoiano. Però hanno quella,… non vorrei lasciargli quella sensazione che tanto vien tutto facile…sarebbe bello come dire riuscire a far sforzare un po' anche loro.».

Uno dei desideri di Maria rispetto al suo cambiamento professionale è quello di migliorare le sue competenze in alcuni aspetti disciplinari, come ad esempio la logica, per fornire agli studenti possibilità più articolate di comprensione della matematica ma in questo non si sente ancora adeguatamente preparata.

12.2.4.2 Nell'insegnamento della matematica è importante conoscere la disciplina e gli studenti

Per Giulia la relazione tra insegnante e studenti è quella in cui l'insegnante gioca il ruolo del facilitatore, e qui appare una connessione con la sua esperienza da studentessa in cui aiutava i compagni:

«Diciamo che io anche, alle superiori, ho sempre aiutato gli altri nelle spiegazioni, nei percorsi, nel cercar di rendere facili determinati concetti. Questo è anche quello che fondamentalmente mi propongo nell'insegnamento.».

Secondo Giulia affinché l'insegnante possa svolgere questo ruolo di facilitatore deve avere delle competenze specifiche rispetto alla maturazione cognitiva dei bambini e alla disciplina di insegnamento. Le competenze disciplinari secondo Giulia sono alla base della creatività dell'insegnante messa al servizio dell'ideazione di esperienze matematiche significative per il bambino. Queste esperienze, come vedremo, sono concepite come esperienze concrete di applicazione di regole o schemi matematici.

Ester indica come centrali nel suo insegnamento le conoscenze disciplinari e avverte come in questo si senta deficitaria in relazione al tipo di insegnamento che intende condurre. Secondo lei l'insegnate dovrebbe:

«avere sempre un altro esempio, a me mancano gli esempi. Poi chi ha capito la matematica riesce sempre a trovare l'esempio come sempre. Per chi è un poco dentro gli argomenti, come me, a volte me lo becco l'esempio a volte no…»

Le conoscenze a cui fa riferimento Ester sono specifiche per l'insegnamento, derivano dalle conoscenze disciplinari di cui non si sente ancora in adeguato possesso.

Elena ritiene che le competenze disciplinari giochino un ruolo fondamentale nell'insegnamento. Un bravo insegnante deve conoscere la disciplina e anche le modalità più adatte per il coinvolgimento attivo degli studenti per incontrare i diversi stili di apprendimento degli allievi. Inoltre Elena è consapevole che le conoscenze matematiche che rendono competente un insegnante di scuola elementare non risiedono nelle conoscenze acquisite a scuola, come nel suo caso al liceo, ma riguardano conoscenze più approfondite della matematica relativa al curricolo di matematica della scuola primaria in modo da poter superare il limite delle conoscenze espresse nei libri di testo e di poter attingere a un bagaglio di conoscenze che consenta una migliore trasformazione del sapere matematico del docente in sapere per l'insegnamento.

Anche Mirella è del parere che siano fondamentali le competenze disciplinari per insegnare bene la matematica. Lei in questo ambito si sente *insicura* in quanto si percepisce non preparata adeguatamente soprattutto a causa del suo trascorso scolastico.

Franca, come Maria, sottolinea come sia importante per l'insegnante arrivare a un adeguata comprensione della matematica per «entrare nella materia…capirla e *vivisezionarla*.. e quindi presentarla ai bambini in maniera piacevole». In questo concetto si avvicina a quanto espresso da Maria quando ha sottolineato l'importanza di *smontare* i concetti per renderli comprensibili agli studenti, soprattutto quelli con più difficoltà.

Sulle modalità di conoscenza delle matematica, le insegnanti che si sono espresse in proposito hanno detto che la matematica per essere ben compresa deve essere "interiorizzazata". Franca ha esplicitato il concetto che «per me se una cosa è automatica riesci a insegnarla meglio».

12.2.4.3 L'insegnamento deve presentare esperienze matematiche concrete, evidenti e significative.

Giulia, Maria e Carla ritengono che per insegnare la matematica a livello elementare sia importante partire da esperienze concrete in cui i bambini visualizzano gli oggetti o i disegni da cui possa partire l'astrazione matematica con numeri od operazioni. Carla e Giulia fanno riferimento a esperienze matematiche significative che ricadono all'interno delle esperienze della vita quotidiana.

Nel caso di Giulia le esperienze sono condotte dall'insegnante che porta in classe materiali concreti che possono far parte del quotidiano degli studenti:

«Quando abbiamo fatto …peso netto, lordo e tara, questi bambini si sono visti portare una cassetta di frutta in classe, per loro è un'esperienza che non hanno dimenticato, ma non solo un'esperienza visiva.».

«Una delle esperienze più significative è stata quella sulla distribuzione delle loro carte dei Gormiti. Per la partizione abbiamo utilizzato la cioccolata. Hanno portato tutti la loro cioccolata, è stata un'esperienza incredibile.».

Carla riporta esperienze che sono la concretizzazione della rappresentazione dei diagrammi di Eulero Venn per rappresentare gli insiemi.

«Quando ho fatto gli insiemi ho portato delle corde in classe le ho messe per terra poi ho detto qua mettiamo un gruppo di bambini che hanno gli occhiali, uno con i capelli biondi…dopo che abbiamo fatto per un'ora e forse più questi gruppi, ho detto prendiamo il libro, ho introdotto cos'è un insieme, però loro già c'erano arrivati da loro, ah stiamo raggruppando come con le corde.».

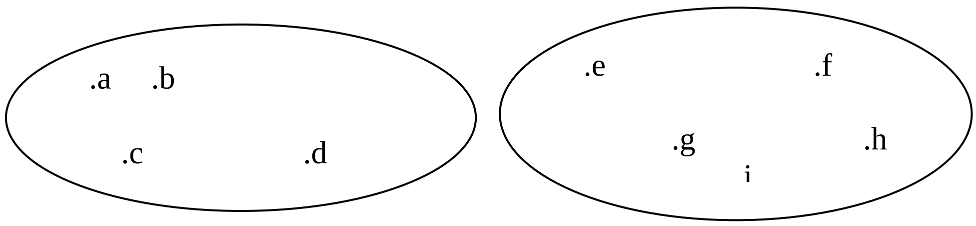


Figura 12.1. Diagrammi di Eularo Venn per rappresentare gli insiemi.

Quindi in questo caso la l'esperienza concreta è una disposizione nello spazio di elementi che mantengano un analogia spaziale con la rappresentazione grafica del concetto di insieme. Carla cita anche la misurazione di un terreno o esperienze collegabili con altre discipline come la misura di distanze tra le stelle in astronomia come modo di rendere concreta la matematica per gli studenti anche se si può immaginare che di queste misurazioni gli studenti non possono avere avuto ancora esperienza diretta. In entrambi i casi le esperienze vengono ricostruite in classe e condotte dalle insegnanti. Anche l'esperienza della soluzione del problema della merenda, presentato in precedenza sempre da Carla, è individuabile come esperienza, di discussione, guidata dalla docente.

Nel caso di Maria le esperienze significative per la matematica sono più legate a certi tipi di gioco come giochi di carte, il gioco dell'oca o il lego in cui a suo parere i bambini sono naturalmente portati a sviluppare ragionamenti matematici o ad utilizzare abilità di calcolo mentale. Negli esempi di Maria i bambini giocando sono immersi in esperienze in cui l'insegnante svolge un ruolo di guida solo inizialmente per poi lasciare i bambini fare esperienza in autonomia nel gioco.

Secondo queste insegnanti le esperienze concrete hanno diretto rapporto con l'apprendimento della matematica rendendolo più semplice e comprensibile agli studenti.

Nel caso di Maria c'è il resoconto di un'esperienza in cui la presentazione di un concetto matematico in forma iconica, come le decine visualizzate con casette, modificata con un idea creativa da parte dell'insegnante ha portato a un risultato di apprendimento per una bambina con difficoltà di apprendimento:

«c'è stato il momento in cui c'è stato bisogno di mettere le operazioni in colonna con riporti, cambi, decine, unità e sono concetti un po' astratti ed era difficile per lei capire che questo 1 una volta è 1 e una volta è una decina. Poi avevo trovato un idea avevamo fatto le casette: la casetta delle unità, la casetta della decina…un giorno eravamo in piccolo gruppo di 5/6 lavoravamo con queste casette e nel piccolo gruppo ho avuto modo di capire che per lei non era chiara questa cosa. Allora uno si concentra a capire dove le sfugge, dov'è il passaggio… e trovare una soluzione per aiutarla. E allora lì era venuta l'idea di fare la casettina delle unità piccolina con quadrati piccoli mentre dall'altra parte la casetta grande. Per cui lei molto visiva vedeva le casette che erano uguali, prima, e quindi la cosa non le andava.»

In questo episodio Maria spiega in cosa consista per lei il fascino di smontare procedimenti e concetti, di osservare, ascoltare e trovare le strategie giuste. La sensibilità per le difficoltà della bambina ha potuto originare l'idea di Maria attraverso l'opportunità di lavorare in piccolo gruppo. In questo esempio l'interesse per il pensiero degli studenti, il fascino del capire le loro difficoltà e il contesto di insegnamento hanno permesso a Maria di utilizzare in modo proficuo il suo sapere sul contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica.

Ester e Roberta individuano nelle concrete attività di tipo ludiforme, quali il mercatino, delle opportunità per insegnare la matematica in modo concreto, senza dover ricorrere all'astrazione troppo precocemente e portando così gli studenti a vivere la matematica in modo realistico. Inoltre questo tipo di attività permette a tutti di approcciare alla disciplina in base alle proprie capacità senza creare da subito la frattura tra chi è più predisposto al pensiero astratto e algoritmico e chi invece, magari per diversa maturazione non lo è.

Anche l'insegnamento basato sulle procedure di Elisa rientra in questa categoria in quanto nella sua concezione dell'insegnamento l'esposizione ripetuta degli studenti agli esempi concreti, a cui fa riferimento spesso nelle interviste sul sapere pedagogico sull'insegnamento della matematica, e alla esecuzione delle procedure e la modalità che lei adotta per portare gli studenti all'obiettivo della generalizzazione che lei indica come "capacità di estendere l'applicazione di algoritmi a contesti diversi" come ad esempio applicare l'algoritmo "a numeri molto grandi".

12.2.4.4 L'insegnante deve trasmettere l'amore per la matematica

Quasi tutte le insegnanti indicano come uno degli obiettivi principali della loro azione di insegnamento sia quello di sviluppare negli studenti l'interesse e l'amore per la matematica. Per Carla: «...è importante che acquisiscano l'amore per la conoscenza, in questo caso per la matematica, e che capiscano che questa cosa fa parte della loro vita, la matematica.».

Anche per Mirella l’obiettivo principale del suo insegnamento è di far amare la matematica ai suoi studenti. In questo Mirella soffre una tensione in quanto è consapevole di non amare lei stessa la matematica ma non perché le sia indifferente o non le interessi totalmente, sebbene a volte si dica “dio che argomento noioso devo fare oggi” ma perché sostiene che nel suo percorso scolastico non le è stato permesso di amare questa disciplina. Quello che la spaventa:

«…è proprio questo, di non riuscire a trasmettere questo ai bambini..e dico sempre che io non ha amato la matematica perché non mi è stato permesso di amarla e perché non l’ho mai fatta bene, quindi adesso io con loro la sto proprio sperimentando, conoscendo quindi, con questo spero un po’ di riuscire a trascinarli, perché è quello che spaventa me di non riuscire a trasmettergli l’amore per la matematica che fino adesso non l’ho acquisito in questo senso. La trovo una materia un po’ ostica da insegnare in questo senso.».

Anche per Rosa uno degli scopi del suo insegnamento è portare i suoi studenti ad amare la matematica: «un bravo insegnante è, al di là di quello che riesce a fare, uno che ti porta ad amare la materia. A non avere quest’odio per la matematica.».

Questo obiettivo è raggiungibile per Rosa rendendo piacevoli le ore passate in classe, attraverso magari continue interazioni con i ragazzi per renderli partecipi della lezione. Le domande per coinvolgere gli studenti dovrebbero essere non chiuse ma aperte del tipo «cosa succede se» per invitare all’esplorazione matematica e al ragionamento. Giudica questo suo tipo di approccio “esplorativo” e lo avvicina all’atteggiamento di chi indaga nelle scienze naturali. In questo atteggiamento ricade anche il coinvolgimento attivo che Rosa richiede ai suoi studenti nelle sue ore di lezione.

Per Franca l’insegnante deve avere passione per il proprio insegnamento e per la propria materia per cui assume «quell’assunzione di fiducia nei bambini, di gioia nel fare la materia» che viene messa in relazione al divertimento insito nel fare matematica che si trasmette agli studenti.

12.2.4.5 La matematica come ricerca e discussione in classe che richiedono impegno e «sfacciataggine».

Nella risposta al quinto scenario Ester aveva evidenziato il suo interesse a mantenere la discussione tra gli studenti come prioritario rispetto a cercare di dirimere la questione tra gli alunni e fornire una risposta che fosse al tempo stesso una spiegazione degli errori che gli studenti stavano commettendo. Ester nel quinto scenario non ha dato delle risposte che permettessero di comprendere quale fosse il suo reale livello di competenza matematica sui numeri decimali applicati in quel contesto ma ha fornito già elementi sulla sua concezione dell'insegnamento della matematica che in questa intervista esprime focalizzando il suo discorso attorno alla problematica della discussione matematica in classe, descrivendone le difficoltà per gli studenti e l'insegnante, l'importanza della condivisione dei risultati e delle idee e il ruolo del coinvolgimento emotivo degli studenti e dell'insegnante Ester ritiene che la matematica sia una materia difficile, che richiede impegno e sforzo. Poi ancora più difficile è parlare di matematica. Ciò le appare particolarmente evidente nelle classi prime dove insegna da tre anni questa materia. L'idea di matematica che Ester si è formata con la sua esperienza di cambiamento è alla radice di questo suo modo di interpretare la matematica come scoperta e discussione di problemi anche con i bambini più piccoli. Le difficoltà che Ester osserva negli alunni sono di carattere emotivo e guidano il suo ruolo di docente nell'attività di insegnamento. Il pericolo per Ester è che alcuni allievi si sentono intimiditi dall'esprimere le proprie idee, a volte anche perché ancora non sono in grado di esprimersi a riguardo. Allora per aiutare questi alunni a «non perdere la faccia» adotta due strategie: o pone termine alla discussione oppure riformula quanto detto dallo studente per dare alla frase che esprime il suo pensiero un significato corretto anche se magari in realtà non era così. Il bambino solitamente accetta la interpretazione del suo pensiero che gli offre la maestra. Questo secondo Ester, permette al bambino di essere tolto dalla difficoltà di esprimere il proprio pensiero di fronte agli altri in forma poco adeguata e quindi con parole di Ester di «salvare la faccia»:

«Quando invece vedo che qualche bambino che vorrebbe spiegare e non ce la fa, lo aiuto. Volevi dire così?Anche se non voleva dire così lui si aggrappa a quello che dico e salva la faccia…Quando nel contesto classe lui si accorge che non riesce a spiegare ci sta male…sta soffrendo di non essere stato in grado di esprimersi come quell'altro compagno super che parla come una macchinetta, allora gli offro io una spiegazione: volevi dire questo? Magari non è vero niente però lo aiuto così gli lancio questo salvagente, allora lui si aggrappa e non si sente deficitario. Perché quello che a me dispiace veramente è che i bambini si sentano deficitari.».

Al di là del generico comune maggiore impegno di tutte le insegnanti intervistate verso gli alunni che hanno più bisogno di aiuto perché "meno dotati", Ester indica precisamente quello che è il campo d'azione del suo intervento: riguarda bambini che hanno maggiore difficoltà ad esprimersi di fronte agli altri. Infatti Ester interviene affinché il bambino non «si senta deficitario» e non perché è deficitario a livello di comprensione. La difficoltà riguarda l'esprimersi sulla matematica in pubblico, cioè di fronte ai compagni e maestra. A questo punto è bene ricordare che Ester alle scuole elementari era timidissima e le piaceva la matematica proprio perché non richiedeva di esporsi con i propri sentimenti e vissuti in pubblico:

«il fatto di poter avere dei risultati su un foglio con dei numeri che non erano da discutere in maniera particolare per me era molto rassicurante…non era una materia che mi metteva ansia al contrario di alcuni miei compagni che erano invece terrorizzati.».

Ester individua nella «sfacciataggine» cioè l'assenza di paura di perdere la faccia, una caratteristica utile perché la discussione matematica sia produttiva. I bambini che non hanno paura di esprimere le proprie idee permettono alla discussione di proseguire senza eccesso di intervento della maestra. Diversamente la maestra si sente in dovere di «congelare» la discussione perché i bambini non restino con la sensazione di non essere in grado di giungere da soli a un risultato e al tempo stesso per lasciare loro la possibilità di riprenderla successivamente:

«la mettiamo in freezer la riprendiamo più in là. Quando avremo scoperto altre cose. Così da creare degli spazi mentali ai bambini in modo che ci sia la possibilità di lasciare là…Allora a volte tiro fuori questo stratagemma, di fronte ad esempio ad una condivisione che non porta da nessuna parte allora mi rendo conto che forse ho fatto una domanda troppo difficile, allora dico "freezer", la ritiriamo fuori quando siamo più grandi o avremo fatto altre cose.»

Ester realizza questi stratagemmi per salvaguardare la possibilità in futuro di sfruttare la discussione matematica in modo che gli studenti continuino ad apprezzarla come metodo di scoperta. C'è quindi una *tensione* in Ester tra la sua concezione della matematica scolastica per scoperta che utilizza la discussione come metodo e la difficoltà a gestire questo tipo di didattica che può mettere in difficoltà gli studenti: per loro ancora inadeguata capacità espressiva o per sottovalutazione da parte dell'insegnante della difficoltà del problema posto. Una delle cause che a parere di Ester può determinare questa tensione che lei avverte nell'affrontare la discussione matematica è l'evidenza con cui si presenta l'errore cosa che non accade per le altre materie che pur sono di difficile gestione a livello di discussione, come a suo avviso, la storia. La tensione causata dall'evidenza dell'errore, riflette Ester, dipende anche dalle aspettative dell'insegnante, che non accetta talvolta che lo studente non ce la faccia a raggiungere un determinato risultato matematico. Da parte di chi scrive si fa la seguente considerazione su cui riflettere: l'evidenza con cui l'errore appare all'insegnante e che causa la tensione da risolvere non è necessariamente la stessa al pensiero di tutti gli studenti ma probabilmente solo di alcuni. Questo fatto probabilmente non è messo in rilievo nel pensiero dell'insegnante che legge la situazione attraverso la sua personale interpretazione e avverte la tensione della mancata risoluzione del problema con un'evidenza che è tale solo per lei e attribuisce a tutto il gruppo classe. Conoscere strategie di gestione della discussione per cercare di dare spazio alle molteplici idee che possono emergere dagli studenti sembrano particolarmente adeguate in questo contesto in cui l'evidenza che assume l'errore matematico per l'insegnante può smorzare la discussione sul perché tale errore è stato commesso o sul perché un dato concetto o nesso non sia stato compreso.

12.2.4.6 La matematica insegnata nel rispetto degli studenti

Roberta presenta la sua concezione dell'insegnamento della matematica come un insegnamento che rende la matematica «democratica». Il senso del termine usato da Roberta è relativo a un insegnamento che, assumendo la capacità intuitiva della matematica presente in tutti i bambini, permetta a tutti gli studenti di accedere a questo sapere attraverso le modalità che più sono consone alle caratteristiche degli stili di apprendimento, alle capacità specifiche di ognuno senza indirizzare da subito la matematica verso aspetti esclusivamente algoritmici. La possibilità di essere insegnata e appresa da tutti è insita nella matematica stessa in quanto, a parere di Roberta è parte di un linguaggio «divino» e quindi accessibile per forza a chiunque. Il rispetto del pensiero degli studenti comporta anche il mantenimento di un costante riferimento alla realtà nell'insegnamento della matematica senza optare troppo presto per un insegnamento trasmissivo. L'approccio ideale da mantenere è quindi quello laboratoriale che a partire da attività ludiche, come espresso anche da Ester e Maria, si conformi verso attività ludiformi che però non vanno mai completamente abbandonate con il progredire dell'età e dei gradi scolastici:

> «non avendo i bambini delle mappe concettuali adeguate bisogna rispettare le fasi dal concreto all'astratto e poi man mano che questo problema non viene sentito più dall'insegnante, l'insegnante diventa il tradizionale insegnante di matematica che inizia a fare la lezione, io ti do questo, questo è così, andiamo negli esercizi e si comincia a scadere dal punto di vista della curiosità, della ricerca delle possibilità, si dà tutto per certo, scompare proprio il possibile, l'impossibile, il probabile e quindi l'importanza di avere un approccio aperto con la matematica è fondamentale da continuare negli anni.»

«Ed è così che si va a sentire e ascoltare ragazzi che sono assolutamente curiosi, ma non hanno ancora sviluppato capacità tecniche di calcolo, ma che sono (altre capacità) magri più preziose dal punto di vista del ragionamento.»

Roberta critica proprio l'insegnamento della matematica che si basa sul formalismo e così perde di vista l'aggancio con la realtà, con il ragionamento basato sui contesti che la realtà può offrire perché poi la matematica possa modellarli e studiarne le caratteristiche matematizzabili. Come afferma Roberta «sembra quasi che da un certo punto in poi siccome Piaget ha detto che si arriva al pensiero astratto allora si possa abbandonare l'aggancio alla realtà e passare all'insegnamento trasmissivo». A questo punto la matematica diventa prevalentemente trasmissione di algoritmi e quindi privilegia esclusivamente un tipo di capacità: la abilità nei calcoli, intesa come velocità di esecuzione.

Anche lo svolgimento di specifici contenuti ritenuti importanti da Roberta come il calcolo mentale attraverso l'applicazione delle quattro operazioni va sottoposto al principio del rispetto per le modalità di pensiero dello studente. Ad esempio, se lo studente si "trova meglio" a operare mentalmente riapplicando la strategia del calcolo scritto in colonna, a mente, e riesce a produrre risultati corretti, Roberta ritiene di non dover forzare l'apprendimento in direzioni differenti da quelle già acquisite con efficacia dallo studente. Nel caso di applicazione di strategie improduttive da parte dello studente Roberta ritiene che una strategia di accompagnamento per il cambio di modalità di calcolo mentale cercando di fare cogliere i vantaggi della novità come opportunità per lo stesso studente sia il modo migliore di affrontare il problema. Anche in questo caso vale l'idea che bisogna comunque rispettare il pensiero dello studente, anche se improduttivo, partendo da questo per guadagnare comprensione sull'efficacia dei nuovi processi da apprendere.

12.2.4.7 L’attenzione per i bambini con minori capacità

Quasi tutte le insegnanti dichiarano che uno dei loro principali obiettivi di insegnamento riguarda l’attenzione per i bambini con minori capacità. In questo senso l’attività di insegnamento è vista in senso compensativo in quanto tesa a ridurre la differenza tra gli studenti che hanno migliori capacità e quelli che invece hanno per vari motivi una minore dotazione in termini di capacità cognitive. Questa idea dell’insegnamento si adatta, come vedremo, alle altre concezioni espresse dalle insegnanti riguardo all’idea che le capacità matematiche siano fondamentalmente innate e che l’ambiente, in particolare l’ambiente familiare giochi un ruolo determinante sulle abilità del bambino. Stando così le cose le insegnante sono chiamate a giocare un ruolo di riequilibrio dei livelli di “partenza” fin dall’inizio del percorso scolastico cercando di recuperare gli studenti che non ottengono risultati soddisfacenti e lasciando, talvolta con rammarico, che gli studenti più capaci se la cavino da soli. Nelle idee espresse riguardo ai motivi per cui qualche studente è più bravo di altri in matematica non compare mai ad esempio l’idea che abbia usufruito di percorsi scolastici particolarmente motivanti o efficaci dal punto di vista della costruzione del pensiero matematico. La scuola in questo caso non compare mai come fattore di potenziamento dell’apprendimento ma solo come fattore di recupero di situazioni deficitarie. Si è sempre bravi per caratteristiche innate o per influenze dell’ambiente esterno, in particolare dell’ambiente familiare. Gli insegnanti invece possono essere responsabili in generale del mancato apprendimento di determinati contenuti, per errori di valutazione didattica o della capacità di apprendimento degli studenti. Per recuperare gli studenti in difficoltà le maestre si spendono molto nel escogitare rimedi didattici che però spesso sono soggetti a loro avviso a troppi vincoli istituzionali e ne minano la supposta efficacia. Quindi anche l’organizzazione scolastica ha un indiretta influenza sull’apprendimento degli studenti e l’insegnante si trova a dovere gestire da solo in classe queste situazioni con pochi mezzi e di conseguenza la strada percorsa è spesso quella di ridurre complessivamente il livello degli obiettivi di apprendimento della matematica.

12.2.5 Le concezioni sull'apprendimento della matematica e sugli studenti

Le insegnanti hanno messo in luce vari aspetti della loro concezione dell'apprendimento della matematica. Questi aspetti sono in relazione alla concezione degli studenti come soggetti in apprendimento, all'influenza ambientale sugli apprendimenti e alle idee degli insegnanti sulla matematica. Ciò che viene messo raramente in luce è l'influenza dell'insegnamento sul miglioramento delle capacità di apprendimento degli studenti.

12.2.5.1 Il passaggio all'astrazione

Secondo Giulia uno dei punti critici è l'acquisizione del concetto di numero razionale nella rappresentazione decimale. Il confronto tra decimali ad esempio risulta a suo avviso difficile per gli studenti perché non riescono a collegare esperienze concrete al numero decimale. L'esperienza concreta in questo caso aiuta di meno in quanto pur essendo esposti alla rappresentazione decimale dopo la presentazione di un caso concreto, nel passaggio alla scrittura simbolica spesso ci sono difficoltà:

> «lo scoglio grosso è a livello di numero razionale. A livello anche di rappresentazione è un problema. Per esempio anche collocare sulla retta numeri tipo 0,75 per loro è molto difficile. Ma proprio concettualmente, mentre operativamente no. Perché io ho visto se loro la sequenza degli incolonnamenti sia a livello di numeri interi che decimali ce l'hanno, dopo vanno a livello operativo, tecnico. Il problema è a livello…di confronto anche. Tra 0,7 e 0,70 o tra 0,7 e 0,18…nell'altro ciclo avevamo introdotto il numero decimale con le misure…avevamo fatto delle esperienze di misurazione.Poi dal metro avevamo fatto la suddivisione in decimi…ma quando ho un numero , cos'è, dove lo colloco, perché non è un qualcosa è un numero…»

Per Giulia questo è un motivo per porsi la questione se la concretezza dell'esperienza possa sempre risolvere l'apprendimento della matematica. Si chiede se ciò sia sbagliato, ma dal confronto con insegnanti della secondaria emerge lo stesso problema e ciò che ritiene possibile come spiegazione della difficoltà è il fatto che sia necessario un determinato livello di *maturazione* cognitiva per apprendere certi concetti e che non tutti gli studenti la raggiungono alla stessa età e quindi alla stessa classe scolastica.

Ester ritiene che il passaggio all'astrazione, il cambio di rappresentazione, la «transcodifica», come la indica lei, sia uno dei punti più difficili dell'apprendimento matematico. Ester avverte come fino a che l'apprendimento si basa sulla presentazione di situazioni concrete tutto sembra procedere senza difficoltà per gli studenti. I problemi sorgono nel momento in cui i bambini devono passare al linguaggio simbolico. L'esempio portato da Ester riguarda la linea dei numeri usata per l'addizione. Il conteggio del valore degli addendi, partendo da 0 risulta complicato perché i bambini contano anche lo zero come un'unità che fa parte del primo addendo, fermandosi quindi un'unità prima del dovuto nel conteggio. Ester si pone il problema del come far comprendere ai bambini il conteggio sulla linea dei numeri, non si accontenta che lo memorizzino: «e loro contano i puntini e allora no devi fare i salti. Ma come glielo giustifico? Non me l'hanno chiesto, ma temo che me lo chiedano. Avrei difficoltà a rispondergli in maniera corretta.».

Anche in questo estratto emerge come Ester senta il bisogno di aumentare le proprie conoscenze matematiche per l'insegnamento in funzione delle difficoltà e domande degli studenti

L'aspetto pratico della matematica è sottolineato anche da Mirella come fondamentale per l'insegnamento della matematica. Mirella però sottolinea come i bambini abbiano difficoltà anche dal punto di vista pratico ad apprendere i concetti matematici e non solo nella fase di passaggio all'astrazione. Nella sua esperienza ha notato che soprattutto con gli studenti con maggiori difficoltà di apprendimento,ma non con sostegno, le esperienze concrete presentate non sono tutte equivalenti dal punto di vista della «fissazione» dell'apprendimento per usare un termine utilizzato anche da Giulia. Alcuni materiali come cioccolatini, forse perché più allettanti per gli studenti sono più efficaci dei tappi ad esempio nell'insegnamento della sottrazione come "portare via".

Per Mirella un insegnante efficace è quello che riesce a lavorare molto sul concreto, che abbia senso pratico più di altri docenti di matematica. Come indicato già in precedenza il senso del concreto manca secondo Mirella negli studenti di oggi che tendono a essere più "meccanici" o intuitivi. In ogni caso viene ancora confermata la difficoltà nel passaggio all'astrazione da parte degli studenti come momento critico dell'apprendimento della matematica. Infatti l'esempio che porta Mirella riguarda l'acquisizione del concetto di numero quando si esce dalla concretezza degli esempi con i manufatti e a questo proposito anche Ester indica come il passaggio al concetto di numero è solo in parte facilitato da sussidi didattici appositamente ideati quali i regoli di Cuisinaire. Un altro aspetto che Mirella ritiene di difficile acquisizione è il calcolo mentale perché appunto non è collegabile per certe quantità troppo numerose direttamente agli esempi concreti, ma necessita di operatività matematica astratta, direttamente sulle rappresentazioni simboliche dei numeri. Il sapersi figurare il numero è un passo concettualmente difficile negli studenti a parere di Mirella. Su questo aspetto dell'acquisizione dei numeri dal punto di vista concettuale Mirella esprime ancora le sue perplessità rispetto al percorso di insegnamento/apprendimento dei suoi studenti che sono indice di una formazione specifica che sente per lei ancora incompleta:

«L'anno scorso non avendo lavorato ancora su questo realmente e non avendone coscienza mi sembrava meno ostica. Invece mi sono resa conto che su questo hanno più difficoltà…quindi magari sto andando più lentamente su questo e quindi stiamo lavorando ancora entro il mille e non so cosa accadrà dopo.»

12.2.5.2 La maturazione cognitiva degli studenti

Un concetto espresso da tutte le docenti che spiega il perché delle difficoltà di apprendimento che a volte sono rilevate dalle insegnanti su alcuni argomenti è quello di maturazione cognitiva. Quando le insegnanti sono perplesse o si pongono qualche domanda sul perché gli studenti a volte siano ancora in difficoltà nell'acquisire certi contenuti o concetti nonostante tutte le attenzioni di carattere didattico, a loro avviso, siano state prese, rispondono in parte al problema appellandosi al concetto di maturazione. Questa idea è supportata anche dal fatto che per alcune maestre, simili problemi di apprendimento degli stessi concetti, si riscontrano anche a livello di scuola secondaria e dall'esperienza che alcuni concetti previsti a un determinato grado scolastico, come ad esempio le frazioni, che dovrebbero essere introdotte alla fine della terza, spesso riescono di difficile comprensione e sono posticipati alla classe successiva, ma non sempre con i risultati sperati. Le insegnanti si richiamano quindi a questo concetto per spiegare alcuni risultati dell'apprendimento non corrispondenti agli obiettivi che si erano prefissate o per la mancata comprensione di certi argomenti insegnati che a loro parere non sono stati appresi perché il grado di maturazione non era sufficiente per poterli apprendere da parte degli studenti.

Rosa ritiene che gli argomenti in cui ha riscontrato più difficoltà come la "visualizzazione delle frazioni e l'applicazione del teorema di Pitagora, possano essere spiegate con una più lenta maturazione cognitiva degli studenti. Rosa comunque ritiene che un importante indicatore per capire se gli studenti hanno difficoltà in matematica non sia il quantificare le nozioni che hanno appreso ma il comprendere il grado di sicurezza acquisito nel fare matematica ovvero la consapevolezza che gli studenti hanno di fronte a un problema pensando fin dall'inizio che probabilmente "sapranno cavarsela". Ciò che Rosa ritiene importante, in una concezione Piagetiana dell'apprendimento è che: «lo sviluppo è importante non bisognerebbe mai anticipare le cose ma del resto hai una classe e devi andare avanti.», come rilevato anche da altre colleghe (Maria, Ester).

Per Elena la conoscenza dello sviluppo cognitivo degli studenti è importante per adeguare l'insegnamento della matematica alle capacità di comprensione degli alunni:

«Secondo me è anche molto importante la conoscenza un po' della maturazione biologica e fisiologica del bambino. Alcuni apprendimenti, in un certo periodo della vita del bambino sono impossibili, Perché non è abbastanza maturo per apprenderli.»

Anche le difficoltà degli studenti vengono analizzate ricorrendo allo stesso concetto. Siccome nell'idea di Elena la matematica è «ricorsiva», nel senso che un argomento lo riprendi e abbandoni più volte nel corso degli studi, allora se una prima volta risulta di difficile comprensione ciò è perché «si tratta di fasi (dello studente), si tratta di vari aspetti dello stesso argomento, si tratta di un problema un po' di memoria». Le fasi possono essere interpretate come diverse capacità di apprendimento infatti «c'è sempre bisogno di rinfrescare i vari argomenti. Sembra che come per magia tutto svanisca. Però poi basta rifare un esercizio e gli viene in mente...Un'altra parte del problema (delle difficoltà) può essere legata al problema della maturazione». Elena fa poi riferimento diretto agli esperimenti di Piaget sulla conservazione dei liquidi per avvalorare la sua ipotesi. Inoltre anche le capacità di apprendimento sono riferite alla maturazione degli alunni, infatti tra varie cause del conseguimento di buoni risultati in matematica «potrebbe esserci anche un discorso di maturazione, che poi in realtà non so fino a che livello».

L'idea che la comprensione del livello di maturazione sia importante da gestire è presente in Giulia come una delle tre competenze chiave dell'insegnante che lei elenca: conoscenza della disciplina, conoscenza del curricolo e conoscenza del livello di maturazione dei bambini a cui si insegna:

«una cosa è poi il soffermarsi, o il vedere dove soffermarsi e dove aspettare che ci sia una maturazione. Cioè devi vedere se ciò che tu proponi è adatto per la maturazione del bambino...per cui devi avere anche la competenza di quali sono i livelli di maturazione, gli steps di maturazione dei bambini.»

L'importanza di questo aspetto è confermata da Giulia e dalle altre insegnanti a seguito dell'interpretazione delle loro esperienze di insegnamento. Giulia, una delle insegnati più esperte del gruppo essendo una delle tre ad avere completato un ciclo di insegnamento narra un episodio della sua attività di insegnante per chiarire questo punto:

«ancora un esempio in terza coi bambini dell'altro ciclo, le frazioni le affrontate benissimo in terza però per alcuni non era ancora il momento giusto, il momento della maturazione. Poi le frazioni te le porti in quarta, in quinta… allora non è detto che…quello che vorrebbe un insegnante è che tutti arrivino allo stesso livello, ma non sempre è così…e non è vero che tu insegni male, è anche vero che magari in quel momento la maturazione del bambino non è pronta.»

In questo modo si può confermare anche la validità di uno stesso metodo didattico che magari in precedenza non aveva dato i risultati attesi mentre successivamente li dà e la spiegazione può essere usata per giustificare una prassi didattica che non viene messa in discussione.

Roberta dopo aver spiegato in dettaglio perché ritiene che l'operazione di divisione sia come operazione vista dal punto di vista della procedura più difficile per gli studenti e presenti anche specifiche difficoltà dal punto di vista didattico ad essere spiegata in modo completo amplia il discorso alle operazioni inverse che risultano in generale più difficili perché:

«nelle fasi in cui il bambino è ancora una globalità ancora molto è intero, ho pensato che noi proponiamo queste operazioni in un momento che non è quello giusto…noi precorriamo i tempi secondo me.»

Per Roberta l'attenzione per la maturazione del bambino può essere messa in relazione anche alla sua concezione dell'insegnamento della matematica nel rispetto dell'alunno, delle sue concezioni, delle sue strategie di apprendimento e quindi dello sviluppo di queste.

L'idea di maturazione viene usata da Maria per spiegare le difficoltà degli studenti in relazione alla loro capacità di stare al passo col programma e con il resto della classe. Ciò è coerente con la sua affermata propensione a interessarsi principalmente come insegnante affinché "tutti ce la facciano" a raggiungere gli obiettivi prefissati. Purtroppo a causa di stati diversi di maturazione ciò non è sempre possibile e quindi l'insegnante è costretto alla fine a dovere promuovere comunque anche gli alunni che sono palesemente in difficoltà negli apprendimenti.

12.2.5.3 La propensione per la matematica è principalmente innata e poco modificabile

Due comuni interpretazioni dell'intelligenza sono una incrementale e l'altra entitaria (Mason, 2006). La prima sostiene che la capacità di apprendere può migliorare sotto l'impulso di impegno personale; la seconda sostiene che l'intelligenza è un attributo stabile non soggetto a modifiche. Le teorie implicite dell'intelligenza indirizzano l'interpretazione e azioni degli insegnanti. Per esempio un insegnante con un orientamento entitario per l'intelligenza può essere meno intransigente verso gli errori degli studenti e preoccuparsi maggiormente dei loro stati d'animo rispetto agli insuccessi. Se uno studente non ha la possibilità di migliorare la sua intelligenza non può neanche essere aiutato. In realtà ci sono evidenti risultati della possibilità di far progredire l'intelligenza attraverso l'istruzione con indicazioni anche sui criteri che devono guidare gli interventi educativi finalizzati a insegnare a essere più intelligenti (Mayer, 2000).

Le insegnanti attribuiscono generalmente agli studenti una innata propensione per l'apprendimento della matematica. Ad esempio Ester ritiene che per l'apprendimento della matematica degli studenti più bravi giochi un ruolo decisivo l'autostima, l'assenza di paura di sbagliare, e quindi il coraggio di provare a esprimere il proprio pensiero. Per converso la paura dell'errore e la scarsa autostima sono considerate da Ester un fattore limitante delle prestazioni, cioè dell'apprendimento matematico. Questo è in linea con la concezione dell'insegnamento della matematica presentata da Ester. Elena indica alcune caratteristiche che, in negativo, possono essere influenti nell'apprendimento quali la memoria che ritiene ancora "corta" nei bambini, la difficoltà di apprendere la terminologia specifica e il fatto che alcuni bambini abbiano proprio un quoziente intellettivo più basso. Mirella ritiene che chi è più bravo è più «inquadrato», abbia un ordine mentale che lo predispone alla matematica. Il senso sembra da intendersi come meno dispersivo. Fa poi riferimento anche all'impegno ma questo concetto solo apparentemente può configurarsi all’interno di un’interpretazione incrementale, in quanto è piuttosto visto come qualcosa di cui si dotati in anticipo, una capacità di impegno, infatti viene associata al fatto che chi più si impegna è anche più curioso e più interessato. Mirella usa l’espressione «si fanno trascinare nelle materie» per indicare questi studenti più bravi ma l’espressione nel contesto in cui è espressa sembra rimandare più a una propensione innata a seguire il proprio interesse già determinato. Mirella conclude affermando: «Sono intuitivi però poco fantasiosi. Però penso che sia il fatto che si applicano di più, magari vengono seguiti di più a casa.».

Dall’estratto si delinea un altro aspetto della concezione dell’apprendimento e cioè che la famiglia gioca un ruolo determinante.

Continuando ad anticipare quanto si dirà dopo invece sulla propensione degli insegnati a concentrare le proprie forze sugli studenti con difficoltà, riportiamo quanto afferma Carla:

> «Quelli che sono bravi in tutte le materie non hanno a che fare con la capacità dell’insegnante, sono bravi perché sono bravi…Quelli che mi danno più soddisfazione sono quelli che partono da una situazione di non bravura e poi alla fine dell’anno migliorano, lì penso che ci ho messo qualcosa io.»

Solo Maria sostiene che “il cervello è educabile di per sé” anche se conferma comunque una propensione innata per l’apprendimento di determinate discipline. Per spiegare la predisposizione innata Maria usa, come Rosa, la categoria dell’interesse che appunto potrebbe essere stimolato dall’esterno e non essere solo una caratteristica psicologica modificabile solo dall’interno della persona. Non a caso Maria riprende il tema del gioco come stimolo per l’apprendimento della matematica che quindi in forma ludica può creare contesti di apprendimento significativi in cui in bambini, senza accorgersene, sviluppano intelligenza matematica. Un’altra concezione che può presentarsi a cavallo tra una teoria entitaria e una incrementale è quella di Franca. Franca sostiene in effetti che esista «il bernoccolo della matematica», anche se ammette che le influenze esterne possono avere un peso. Ad esempio cita il fatto che i continui successi possono essere di stimolo per migliorarsi. Franca attribuisce la possibilità di migliorarsi con questi successi però solo agli studenti più dotati, mentre non la prevede per quelli con minori potenzialità matematiche. Infatti uno dei suoi "crucci" è quello di non riuscire a dedicare sufficiente tempo agli studenti più dotati per la matematica. La concezione incrementale quindi in Franca sembra applicarsi solo per gli studenti che già sono dotati di un intelligenza matematica che li renda capaci di ottenere successi scolastici. Franca chiarisce il proprio pensiero rifacendosi alla genetica: «Penso che ci sia una componente genetica del bambino predisposto e l'ambiente che aiuta.»

Giulia integra diverse concezioni quella innata con la influenza dell'ambiente. Nella sua idea della predisposizione della matematica giocano un ruolo i successi che motivano all'apprendimento «perché più una cosa risulta facile più siamo contenti nel farla», ma anche l'impegno a studiare, soprattutto per chi non raggiunge risultati soddisfacenti. Come Maria, Giulia accenna al fatto che l'incontro con persone che ti facciano amare la materia è però altrettanto importante.

12.2.5.4 L'influenza della famiglia e dell'insegnamento sull'apprendimento della matematica

Anche l'ambiente familiare è indicato da tutte le insegnanti come un fattore importante per ottenere successi nell'apprendimento della matematica scolastica come anche per gli insuccessi. Secondo Roberta la matematica ha valore anche di riscatto sociale in quanto l'influenza dell'ambiente sui bambini fin dalla nascita può potenziare ma soprattutto anche deprivare di certe competenze acquisibili i percorsi di crescita e apprendimento che a volte sono stati persi. La scuola però può avere un ruolo nell'esercitare un'educazione al rispetto delle regole. Questo rispetto porta a dei risultati che dovrebbero essere percepiti come validi dagli studenti. Quando manca l'apprendimento ciò avviene per carenza di modelli etici, quali appunto quello delineato col termine «rispetto» da Roberta. Il rispetto in questo caso è relativo alle regole che portano a dei risultati migliori di altri e in questo senso a suo avviso il rispetto delle regole può aiutare l'apprendimento matematico. Anche in questo caso per Roberta l'apprendimento migliore è in chi generalmente è serenamente abituato fin dall'infanzia a produrre e accettare percorsi di andata e ritorno, di inversione che è interiorizzata e rende più sereni i bambini.

Questo aspetto della serenità è richiamato anche da altre docenti che individuano nella serenità e nell'equilibrio dell'ambiente familiare delle componenti importanti per il successo scolastico. Inoltre il supporto familiare è indicato come importante affinché l'insegnamento scolastico non risulti improduttivo. Infatti i motivi per cui gli studenti che ottengono risultati scadenti in matematica sono spesso individuati in problemi che hanno l'origine in famiglia piuttosto che in carenze innate verso la disciplina. Il ragionamento che quasi tutti gli insegnanti formulano è il seguente: i bambini che ottengono risultati deludenti a scuola lo fanno perché non possiedono un sufficiente ordine mentale per sostenere l'apprendimento adeguato della matematica. Ma questa mancanza di ordine deriva principalmente da situazioni familiari che non facilitano l'apprendimento in quanto sono presenti in famiglia fattori che minano la serenità e l'equilibrio familiare oppure il bambino è lasciato da solo ad affrontare il carico dell'impegno scolastico.

Si discosta da questa interpretazione Ester che individua invece l'influenza familiare solo per quanto riguarda gli aspetti positivi dell'apprendimento mentre si rifà ancora alla mancanza dai autostima per indicare come certi bambini non raggiungano i risultati sperati. Anche in questo caso notiamo una certa coerenza con il pensiero di Ester in quanto nella sua concezione di matematica l'autostima, nella possibilità che fornisce di partecipare alla discussione matematica, risulta sicuramente un fattore molto influente. Avere autostima comporta non temere di esprimere i propri giudizi perché si è sicuri della bontà di quello che si dice. La scarsa autostima invece non mette in grado di essere fiduciosi delle proprie capacità e quindi neanche di esprimere il proprio pensiero in quanto lo si ritiene inadeguato.

Questa concezione è resa esplicita da Carla che non ritiene ci siano argomenti di matematica che siano più difficili di altri da apprendere, ma ciò che conta è il come gli argomenti vengono insegnati dall'insegnante. Quando l'insegnante riesce a produrre esperienze che rendono concreta, collegata con esperienze, la matematica allora gli studenti imparano subito, altrimenti se la spiegazione parte dal libro e non ha riferimenti concreti l'apprendimento risulta più difficile.

Maria ritiene che se ci sono difficoltà, queste sono da imputare all'insegnante, principalmente affermando che si assume pienamente la responsabilità degli errori se commessi dalla generalità della classe. Ricordiamo come Carla e Maria abbiano a cuore la relazione affettiva tra insegnante e studenti come la ritengano prioritaria nella costruzione di un efficace insegnamento.

Nell'immagine dell'insegnamento della matematica di Roberta i problemi nell'apprendimento e nell'insegnamento avvengono quando l'insegnamento assume come fondamentali aspetti quali la velocità di calcolo e la memorizzazione di regole in cui solo alcuni studenti per loro caratteristiche specifiche risultano «vincenti» con ciò penalizzando chi possiede caratteristiche di pensiero differenti. La difficoltà incontrata nella matematica da parte degli studenti è quindi dovuta al modo di insegnarla.

12.2.6 Le idee degli insegnanti sugli errori degli studenti

Le idee degli insegnanti sugli errori degli studenti danno la possibilità di ottenere delle informazioni su come concepiscano in generale gli errori gli insegnanti e nello specifico se certi errori sono collegabili a concetti specifici della disciplina o ad altre cause come errori nella didattica o a cause dipendenti direttamente dallo studente. La limitata esperienza di insegnamento delle insegnanti ha probabilmente ristretto il campo delle possibili risposte a questo tema che era direttamente collegato a parte delle interviste già condotte sul PCK degli insegnanti.

12.2.6.1 L’errore dello studente è responsabilità del docente

Come già osservato in §11.3.7, per quanto concerne le cause di errore da parte degli studenti le insegnanti come Maria e Rosa sottolineano come dipenda spesso da loro eccessiva fretta nel trattare gli argomenti per «portare avanti il programma» l’errata comprensione da parte degli studenti di algoritmi o concetti. Se vengono attribuite agli studenti le cause di errore rientrano fondamentalmente nella categoria della distrazione o fretta di terminare il compito. Rosa però oltre ala fretta sottolinea l’aspetto metacognitivo di mancato monitoraggio legato all’errore e cioè la mancata verifica del risultato. L’interpretazione di Rosa si concentra sul mancato controllo dei risultati e non dei processi che invece non sono menzionati. L’attività di monitoraggio del proprio lavoro matematico è senz’altro fondamentale a tutti i livelli scolastici e in particolare a partire dalla scuola secondaria di primo grado, ma bisogna coltivarla con opportune attività matematica che costringano lo studente a impegnarsi per mobilizzare le competenze di carattere metacognitivo che spesso in un insegnamento procedurale e trasmissivo restano poco attivate. Ma questo aspetto secondo alcune docenti è fatto dipendere dall’atteggiamento dell’insegnante di fronte all’attività matematica che tende a premiare chi è più svelto nelle prestazioni, aspetto criticato da Roberta che ne vede i limiti per quanto riguarda la riduzione delle abilità che la matematica può promuovere. Ester ad esempio ritiene che gli errori dei suoi studenti commettono quando compongono i numeri con i regoli di Cuisenaire siano fondamentalmente dovuti al fatto che lei non ha insistito abbastanza sull’argomento. C’è da notare che Ester ha insegnato solo in prima per cui la sua esperienza può essere in questo senso alquanto limitata. Carla conferma quanto detto rispetto alla difficoltà di apprendimento degli studenti: l’errore sorge quando gli studenti non sono stati esposti a una spiegazione che parte dal concreto ma viene gestita solo attraverso il libro o a livello simbolico. Elena prende in considerazione la responsabilità dell’insegnante nel attribuire troppa importanza alla velocità dell'esecuzione inducendo talvolta all'errore proprio gli studenti.

12.2.6.2 L'errore avviene per distrazione

Secondo Elena, Franca e Mirella fondamentalmente la causa dell'errore è da imputare alla distrazione, alla pigrizia, mancata riflessione o alla fretta. Anche la scarsità di memoria gioca un ruolo come la difficoltà nell'apprendere la terminologia. Elena cita l'esempio di studenti che non leggono neanche la consegna e per questo sbagliano l'esercizio:

> «Oggi per esempio la consegna diceva: applica la proprietà commutativa a queste moltiplicazioni. Non avendo letto la consegna hanno scritto il risultato. Non era questo però l'obiettivo dell'esercizio ma quello di applicare la proprietà commutativa.».

Franca cita alcuni errori che la lasciano perplessa come quelli con le operazioni che hanno lo zero e l'uno come numeri o cifre, ma ancora non si è data una risposta soddisfacente al perché i bambini sbaglino queste cose, le sembrano degli errori stupidi. Fa l'esempio di moltiplicazioni per 0 che gli studenti sbagliano pur sembrando del tutto logiche. Invece gli errori negli algoritmi, come quello della sottrazione li comprende di più in quanto ritiene che in quel caso dipenda dalla difficoltà dell'algoritmo.

13 Discussione delle interviste semi-strutturate

Gli insegnanti e la formazione (esperienza scolastica ed esperienza da autodidatta). Le esperienze di *riscatto* e l'acquisizione di *sicurezza nella disciplina* sono due aspetti collocabili in diversi momenti del percorso di formazione di alcune insegnanti. Si ritiene importante sottolineare questi momenti in quanto indicano la possibilità di un cambiamento dell'atteggiamento verso la matematica che viene vista in modo meno negativo o non più indifferente a seconda delle passate esperienze delle docenti con la disciplina. L'esperienza di riscatto risveglia curiosità e interesse verso la matematica, che ogni insegnante declina in modo personale, rendendo l'approccio alla disciplina più fiducioso nelle possibilità di svolgere la propria attività di insegnamento. Per chi proviene da esperienze scolastiche negative, esperienze simili possono essere un punto di partenza per un cambiamento di atteggiamento ma certo non bastano per acquisire sicurezza nella disciplina e nel suo insegnamento. Un altro aspetto che emerge ed è collegabile proprio alla ricerca di una maggiore sicurezza nell'insegnamento è l'assenza o carenza di una adeguata formazione specifica per l'insegnamento della matematica a livello di scuola primaria. Ciò ha costretto le insegnanti, tranne in due casi, a formarsi da sole, senza la possibilità di confronti, affidandosi esclusivamente ai propri studi da autodidatta, in quanto la passata formazione scolastica e universitaria non era direttamente pertinente con la matematica. Le ultime vere esperienze di formazione in matematica per molte docenti risalgono alla scuola media di II grado. Con questo tipo di formazione e senza avere avuto la possibilità di usufruire di specifici percorsi di sviluppo professionale in servizio, la concezione dell'insegnamento espressa dalle insegnanti resta nel complesso di tipo trasmissivo, anche se c'è una insegnante che ha presentato un deciso orientamento verso una matematica elaborata attraverso la discussione in classe. Oltre all'aspetto puramente contenutistico un'altra condizione che le insegnanti rivelano come fonte di insicurezza risiede nel fatto che non hanno mai potuto vedere concretamente come si insegna matematica e questo neanche da parte di chi ha frequentato il corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria. Non è, per le insegnanti, solo una questione di acquisizione di contenuti di cui ancora non si sentono in adeguato possesso, che pure è avvertita in modo evidente, è anche una questione di come gestire nel concreto della prassi di insegnamento i contenuti di matematica. L'estratto di Ester riassume bene la questione:

«uno insegna bene in quella maniera in cui si sente sicuro. Non so se mi spiego. E' inutile che io chieda a un insegnante che ha insegnato 40 anni con la sua vecchia didattica di insegnare con una didattica diversa. E' giusto che continui in quel modo perché solo così trasmetterà qualcosa. Secondo me. Io però sarei disposta a insegnare in maniera diversa se ci fosse qualcuno che mi facesse vedere a me per prima…».

Al di là del fatto che, almeno in base alle riforme degli ultimi quaranta anni, si spera che nessuno, o almeno pochissimi, abbiano mantenuto inalterata la propria didattica così a lungo, quello che è importante notare è la volontà di certi insegnanti di cambiare la propria didattica, ma senza dover procedere per tentativi casuali. Lasciare che le disponibilità di cambiamento nell'insegnamento non trovino un adeguato supporto nella formazione professionale significa col tempo condannare le insegnanti alla cristallizzazione della didattica e render le loro pratiche e convinzioni sempre più difficilmente modificabili (Handal,2003).

Le concezioni della matematica come disciplina. E' stato abbastanza complesso riuscire a distinguere le idee delle insegnanti rispetto alla matematica dalle idee relative alla matematica come disciplina insegnata. Tre categorie sono emerse come rilevanti su questo tema:

1) la matematica è problem solving, disciplina creativa;
2) la matematica è un sapere universale accessibile a tutti;
3) la matematica è una disciplina chiusa e uno strumento.

Per quanto riguarda invece l'aspetto della matematica come un qualche cosa di divertente riteniamo che questo sia da riferire piuttosto come a una disposizione verso la disciplina che si mescola per tutte le insegnati anche con la volontà di rendere la matematica una disciplina divertente a scuola. Per alcune insegnanti il voler rendere la matematica divertente o assumerla come tale è ricollegabile al senso di insicurezza verso la disciplina oppure, fatto a nostro avviso molto più importante, al desiderio di riuscire a instaurare un legame affettivo con gli studenti.

Non è l'obiettivo di questa ricerca catalogare le concezioni delle insegnanti entro classificazioni come quelle proposte in letteratura (Ernest, 1988; Speranza, 1996). Quello che più ci interessa è cogliere i significati collegati a queste concezioni. Si può evidenziare come le insegnanti che si collocano entro la prima categoria sono quelle che avvertono maggiori *tensioni* nella loro attività di insegnamento, si sentono meno soddisfatte delle loro condizioni di insegnamento. Sono delle insegnanti che avvertono molto l'influenza negativa dei vincoli organizzativi della scuola, e anche la mancanza di adeguate risposte degli studenti al loro insegnamento, che tende a permanere sostanzialmente più trasmissivo di quanto vorrebbero. L'insegnamento trasmissivo ovviamente non è di per sé negativo, soprattutto nei primi anni della scuola primaria se comparato con l'insegnamento per problemi (Calvani, 2011), ma le insegnanti vivono a volte con insoddisfazione il dovere comunque restare alla pura trasmissione dei contenuti quando desidererebbero approcciare gli argomenti in modo differente: l'insegnamento della matematica alla scuola primaria secondo Ester comunque «si ferma fondamentalmente alla trasmissione dei contenuti», oppure come già scritto per Franca gli studenti sono molto vincolati alla ricerca del risultato esatto e poco propensi alla riflessione. Anche qui si può far notare che l'assenza di una formazione specifica ha sicuramente il suo peso nel non dare la possibilità alle insegnanti di operare determinate scelte con l'adeguata consapevolezza e sopire almeno in parte le tensioni.

Nella seconda categoria relativa alla matematica come sapere universale e accessibile a tutti, è quest'ultimo punto che ci interessa maggiormente. Le insegnanti che la esprimono hanno entrambe una grande attenzione verso la relazione da instaurare con gli studenti. Le categorie del *rispetto* e dell'*affetto* che hanno espresso nelle interviste mettono al centro delle loro concezioni di insegnamento il rapporto con gli studenti. L’elaborazione più approfondita della concezione matematica da parte di Roberta le permette di attribuire il concetto di rispetto anche alla matematica: «dico agli studenti abbiate rispetto di questo sapere», cosa invece che per Carla non è elaborata in modo altrettanto sofisticato, come la differente categorizzazione vuole evidenziare. Richiamiamo il fatto che le insegnanti che hanno espresso questo tipo di concezione verso la matematica lo hanno fatto narrando esperienze personali intime di «incontro coi numeri» (Roberta) e di «percorso spirituale che mi ha avvicinato alla meccanica quantistica» (Carla). Nella sua esposizione Roberta, l’insegnante più esperta, ormai in pensione, è l’unica che non esplicita tensioni tra la sua concezione della matematica e la sua attenzione verso gli studenti. La tensione tra queste due polarità nel suo caso appare ricomposta, in modo che la personale concezione della disciplina si accomodi con la cura verso gli studenti.

Infine la categoria relativa alla matematica come strumento è collegabile a una concezione della disciplina che è funzionale ad altri scopi soprattutto collegati alla vita quotidiana. Le esperienze quotidiane a cui questa disciplina può essere di supporto non sono però indicate se non nelle classiche operazioni compra-vendita, per cui l’idea che la matematica sia uno strumento utile per la vita quotidiana degli studenti è piuttosto un’idea che riporta a una retorica della matematica (Schoenfeld, 1992) che è utile per la vita ma in fondo non si riesce a esprimerne il perché. Inoltre, anche in questo caso, chi esprime concezioni simili avverte una tensione tra la matematica vista come disciplina e l’insegnamento, non solo a causa dei vincoli organizzativi scolastici, ma un restringimento delle proprie possibilità di insegnare derivato dalla struttura della disciplina. Avvertendo la matematica come disciplina molto strutturata, legata fortemente a un’idea di ordine, interpretato piuttosto come rispetto di sequenze di argomenti e passi di procedure, l’insegnante non si sente libero di esprimere la propria creatività in aula, come invece potrebbe fare nell’insegnamento di altre materie come italiano o storia. In questo caso una formazione sui contenuti matematici e su come, nella matematica, si integrino contenuti e metodi di indagine sembra importante per introdurre modifiche nella concezione utilitaristica della matematica.

L'idea che la matematica sia una disciplina utile per interpretare la realtà è presente in tutte le insegnanti. Le differenze risiedono nell'interpretazione della matematica che le insegnanti offrono per questo scopo. In alcuni casi è dichiarato come importante l'aspetto strumentale della disciplina, ma risulta collegabile a pochi, stereotipati e non realistici utilizzi dello strumento matematico; in altri casi è dichiarato come importante l'aspetto relativo alla comprensione e al rispetto delle regole come parte della realtà, e in questo caso la matematica è utilizzata anche per sondare più in profondità il pensiero dello studente, infine le posizioni che interpretano la matematica come problem solving o esplorazione della realtà restano comunque centrate sull'attività dell'insegnante lasciando pochi spazi all'autonoma esplorazione matematica degli studenti.

Non si intende in questa sede affermare che siano presenti in modo definito, cristallizzato e isolato le diverse concezioni della matematica presentate ma, dalle interviste si evince una predominanza di una concezione trasmissiva sulle altre che quindi può orientare in modo prevalente l'attività didattica centrandola sull'insegnante (Mason, 2006).

Le concezioni sull'insegnamento della matematica. Le insegnanti presentano il proprio insegnamento della matematica che ha come fulcro lo studente. L'interesse principale delle insegnanti è instaurare una relazione positiva con gli studenti su cui basare il proprio insegnamento della disciplina. Il tipo di relazione che le insegnanti esprimono si delinea in modo diverso: chi lo concepisce come una rapporto di tipo affettivo, quasi materno, da cui veicolare la disciplina, chi lo integra maggiormente con la disciplina cercando di farlo evolvere nel tempo e avvicinando all'aspetto affettivo anche una ricerca di quelli che sono i meccanismi di apprendimento degli studenti allo scopo di fare ottenere loro dei successi, così da motivarli. La conoscenza della matematica nella concezione degli insegnanti è subordinata all'interesse per il successo scolastico degli studenti, all'interesse per i loro risultati scolastici.

L'idea che percorre tutte le interviste di una matematica che si apprende per esposizione alle esperienze concrete vissute in classe, per ripetizione di esercizi, in cui gli studenti di fatto sono abbastanza passivi, al di là delle dichiarazioni di intenti di quasi tutte le insegnanti, a nostro avviso trova un suo legame con il desiderio di far ottenere allo studente dei successi in matematica che altrimenti lo allontanerebbero dalla disciplina e metterebbero in discussione la didattica dell'insegnante. Abbiamo già potuto notare come le insegnanti tendano a criticare "esercizi" non routinari che sono considerati ingannevoli verso gli studenti, quando invece darebbero l'opportunità di ampliare gli orizzonti dell'attività matematica verso modalità di comprensione più flessibili. Oppure come ritengano che la matematica non possa essere spiegata tutta ma che talvolta bisogna accontentarsi della riproduzione di esercizi routinari da parte degli studenti. Una convinzione sull'insegnamento che si può individuare come predominante è che gli studenti apprendono meglio se l'insegnamento li espone a evidenze concrete e ripetitive «altrimenti la fissazione degli argomenti è nulla» (Giulia). L'idea di trasmissività del sapere è confermata, a nostro avviso, dalla rimarcata convinzione che scopo dell'insegnante di matematica è trasmettere amore per la materia. Un modo per ottenere questo, nel rispetto del curricolo, si ottiene cercando di non mettere in difficoltà l'allievo ma facilitandone il percorso. La convinzione che ciò possa accadere con un'esposizione alle esperienze concrete in classe e alle spiegazioni, e con un'attenzione affettiva verso gli studenti per mettersi in condizione di farsi accettare e, con ciò, che venga accettata anche la disciplina, costituisce un nucleo della concezione verso l'insegnamento molto solido perché composto da fattori affettivi che sono difficili da modificare (Handal, 2003). Richiamando la rete di relazioni tra insegnante, sapere e studente (D'Amore, 1999), la relazione dell'insegnante con lo studente e dello studente con l'insegnante, perché è da lui che si inizia a formare la rete di relazioni, è prevalente negli interessi degli insegnanti rispetto alla relazione di entrambi col sapere che resta sullo sfondo e oscurato da finalità educative (amore per la matematica) che pur chiamandolo in causa lo fanno solo in modo indiretto e un po'vago. L'azione didattica dell'insegnante rende talvolta il sapere matematico troppo sterile e ripetitivo con il buon intento di renderlo comprensibile per gli studenti. In questo caso una formazione specifica sulle possibilità degli studenti di apprendere la matematica comunque, anche con modalità didattiche differenti dall'esposizione a spiegazioni, potrebbe essere una via di approccio alla modifica degli schemi di insegnamento degli insegnanti. Anche l'idea di Ester dell'insegnamento della matematica attraverso la discussione in classe, quindi una matematica per scoperta, in cui la discussione è un metodo di validazione dei risultati ottenuti dalla comunità classe gestita dall'insegnante, risente della rilevanza data al benessere degli studenti in classe e a volte l'insegnante è nella tensione di dover conciliare le due cose. Le conoscenze e l'intuizione pedagogica di Ester la mettono in condizione, a quanto racconta, di utilizzare la discussione in classe, ma la sua preparazione disciplinare non l'aiuta nel trovare sempre gli esempi adatti alla singola situazione. Prevale quindi nel dilemma tra proseguire la discussione o interromperla la difesa dello stato d'animo dello studente che deve essere protetto dall'insegnante nel momento in cui, non riuscendo a esprimere le sue idee, rischia di "perdere la faccia".

Le insegnanti, qualsiasi approccio abbiano verso l'insegnamento della matematica, si trovano allora nel dilemma di dover scegliere tra il fornire allo studente delle possibilità di successo non troppo impegnative per fargli apprezzare la disciplina e la ricerca di diverse strategie di insegnamento che mostrino una matematica meno stereotipata e vincolata alla ricerca del risultato esatto o dell'applicazione della regola. Questa matematica però può mettere a repentaglio la sicurezza loro e degli studenti in quanto può risultare di difficile gestione per l'insegnante, non avendo un percorso didattico definito, e di non sicuro successo per lo studente, perché tesa a mobilizzare competenze di livello alto. Solitamente gli insegnanti optano, o si trovano costretti a optare, per la scelta meno rischiosa.

Le concezioni sull'apprendimento della matematica e sulle difficoltà ed errori degli studenti. Il passaggio all'astrazione, con il conseguente abbandono delle possibilità fornite all'apprendimento da modelli concreti è identificato dagli insegnanti come uno dei punti critici per l'apprendimento degli studenti, causa di difficoltà ed errori. Le insegnanti forniscono diversi esempi di difficoltà di apprendimento ed errori ricorrenti negli studenti, spesso relativamente al passaggio all'astrazione nell'utilizzo dei decimali o nella divisione, che attribuiscono a cause quali la distrazione, l'insegnamento inadeguato o la poca attenzione fornita dalla famiglia ai bambini nello studio domestico. Il concetto che però le insegnanti tendono a usare più spesso per risolvere queste difficoltà che si trovano a dovere affrontare nel percorso di apprendimento degli studenti è quello di maturazione. Spesso, le difficoltà, gli errori, la lentezza del passaggio al simbolismo matematico astratto è imputato per alcuni studenti a una maturazione più lenta, tanto che a volte ci sono intere parti di programma che devono riproporre in classi successive perché si rendono conto che l'apprendimento non è stato adeguato. Questo concetto di maturazione che le insegnanti usano per spiegare l'apprendimento, unito con l'idea prevalente che la matematica è un sapere che si acquisisce se si è portati, predisposti, a nostro avviso porta le insegnanti a delegare l'apprendimento al formato della spiegazione: concreto, iconico, simbolico che tutte (in parte anche l'insegnate di scuola secondaria di I grado) dimostrano di adottare. Quindi abbiamo che l'apprendimento avviene in modo quasi naturale, quando avviene, per esposizione al formato di insegnamento della lezione. Se ciò non avviene è principalmente a causa di tre fattori: per problemi di maturazione, per cause dovute all'insegnante o per distrazione. Bisogna però distinguere le prime due cause dalla terza. La terza spiega solo errori singoli che non necessariamente si riferiscono a mancati apprendimenti di concetti o generalizzati, cioè che riguardano gran parte della classe. Le prime due invece spiegano la mancata comprensione quando l'insegnante ritiene di aver spiegato in modo adeguato l'argomento ma nonostante tutto non ha ottenuto dagli studenti i risultati attesi, oppure quando non ritiene di averlo spiegato in modo adeguato e questa interpretazione è utilizzata approssimativamente in base al numero di studenti in classe che dimostrano di non aver capito.

Il ruolo dell'insegnante nell'apprendimento specifico di ogni alunno è visto come ridotto, rispetto alle influenze di altri fattori. Solo per studenti con ridotte capacità di comprensione le insegnanti ritengono che il loro apporto sia significativo per il progresso dell'apprendimento; per gli studenti "medi" non serve sondare troppo a fondo il loro pensiero sulla comprensione; come dice Franca, in accordo con Maria, «capiscono dal libro» e non serve «vivisezionare la disciplina». In tutto questo insieme di considerazioni sulle convinzioni delle insegnanti rispetto all'apprendimento della matematica sicuramente gioca un ruolo l'attenzione manifestata dalle insegnanti verso gli studenti con meno capacità o stimoli familiari. Per facilitare il recupero di questi studenti meno dotati le insegnanti si sentono costrette a «rallentare la corsa», a ripetere le spiegazioni più volte, per ottenere delle performance che possano essere considerate adeguate, abbandonando gli studenti più dotati che comunque «imparano da soli».

14 Conclusioni

Le interviste alle insegnanti che hanno partecipato a questa ricerca hanno fornito dati per indagare tre componenti delle concezioni degli insegnanti: le conoscenze sul contenuto pedagogico dell'insegnamento della matematica (PCK), le convinzioni e atteggiamenti verso la matematica come disciplina il suo insegnamento e il suo apprendimento.

La discussione sulla prima serie di interviste (cap.10), ha posto in evidenza i seguenti risultati riguardo alle conoscenze disciplinari:

1. una conoscenza disciplinare, relativamente agli argomenti proposti, che ha dimostrato alcune lacune, pur con differenze notevoli tra le diverse insegnanti, in particolare sugli aspetti concettuali e relazionali della matematica (Skemp, 1976) (§10.1.1);

2. una disomogeneità delle conoscenze matematiche in una stessa insegnante e tra diverse insegnanti, interpretabile con l’assenza di una formazione specifica e con le differenze negli anni di esperienza di insegnamento;

3. una preferenza nella indagine personale verso la matematica per un approccio concreto, manipolativo, lo stesso che viene usato nella didattica per gli studenti (vedi § 9.2.1,§ 9.3.1 e § 9.3.2).

Su questo aspetto concordiamo con Ball (1990b) e Prestage (1999) che il tipo di conoscenza della matematica delle insegnanti non si è dimostrata profondamente differente da quella che dimostrano gli studenti e che non si possa ravvisare, almeno per come è stato utilizzato e proposto lo strumento di indagine, e con i limiti che ha rispetto all’indagine specifica rispetto alla conoscenza disciplinare dei docenti, una specifica conoscenza dei contenuti matematici tipica delle insegnanti;

Rispetto all’interpretazione del pensiero degli studenti attraverso l’analisi degli errori e difficoltà presenti negli scenari ipotetici si può sintetizzare quanto segue:

1. Gli insegnanti tendenzialmente approcciano all’errore in modo diretto, per risolvere sul momento il problema. Non utilizzano l’errore come strumento di indagine per comprendere l’origine dello sbaglio e sondare quale sia la modalità di formazione del concetto o procedura dello studente. Le interpretazioni degli errori solitamente non sono molto approfondite (Peng & Luo, 2009), anche se, con l’esperienza di insegnamento riescono a essere, se l’argomento è conosciuto dall’insegnante in modo sufficientemente solido (§ 9.2.1 e § 9.2.3), appropriate e sfumate, tenendo conto di varie cause dell’errore: psicologiche, matematiche e strategiche, sulla potenziale natura dell’errore matematico.

2. I rimedi proposti sono basati sull’esposizione alla spiegazione, all’evidenza dei fatti concreti. Non vengono quasi mai utilizzati le metodologie più tipicamente

matematiche come l’argomentazione, la confutazione o il contro esempio. Questo aspetto è variabile con i contenuti e tra le diverse insegnanti che anche in questo caso hanno dimostrato una notevole disomogeneità e frammentazione nell’utilizzo di queste pratiche matematiche, ma sostanzialmente le utilizzano molto limitatamente (Ball, 1988a).

3. Rispetto agli argomenti presentati come potenzialmente di difficile comprensione per gli studenti, generalmente questi lo sono stati anche per le insegnanti, compresa la rappresentazione decimale dei numeri, (§9.2.4 e §9.3.1). Questo è una ulteriore conferma della somiglianza tra il tipo di conoscenze che ci sono tra insegnanti e studenti e testimonia a nostro avviso anche la scarsa considerazione che talvolta le insegnanti hanno dimostrato verso i contenuti reputati più impegnativi, sfidanti e difficili dal punto di vista del potenziale didattico che possono assumere.

Queste considerazioni sono quelle che emergono con maggiore frequenza e in diverse modalità nel corso dell’analisi delle interviste. Sono da intendersi come un primo quadro di orientamento rispetto alle conoscenze sul contenuto pedagogico della disciplina degli insegnanti applicate all’analisi del pensiero degli studenti. Certamente, come praticamente tutta la letteratura a riguardo conferma, è molto difficile distinguere la conoscenza della disciplina per l’insegnamento dalla conoscenza del suo contenuto pedagogico. Le indagini per una comprensione adeguata del tipo di conoscenza posseduta dagli insegnanti vanno possibilmente condotte in parallelo sui due aspetti per avere un quadro più esauriente del tipo di conoscenza specifica dell’insegnante e riuscire a definire meglio quali debbano o possano essere le competenze legate agli aspetti disciplinari.

Quello su cui si è indagato poco sono le modalità con cui le convinzioni degli insegnanti interagiscono con la conoscenza del contenuto pedagogico (Graeber & Tirosh, 2008). Rispetto a ciò l’indagine porta verso la direzione che la matematica secondo le docenti indagate consiste fondamentalmente in applicazione di regole, da imparare per “esposizione” e ripetizione, in problemi ben definiti che siano percepiti come risolvibili e classificabili entro determinate tipologie che vengono di solito fornite dal libro di testo o dallo stesso insegnate attraverso la ripetizione di pratiche e infine che quello che ha maggio valore è che gli studenti dimostrino di aver imparato l’applicazione delle procedure. La comprensione dei concetti e delle relazioni è percepita come troppo difficile e forse meno importante della corretta applicazione dei procedimenti.

Infine il predominante interesse verso gli allievi, in particolare quelli con difficoltà, le difficoltà di conciliare le prospettive della matematica espresse dalle insegnanti, qualunque esse siano: problem solving, strumentale o focalizzata attorno alla discussione, con le esigenze di successo degli alunni; l’idea che l’intelligenza matematica è innata, per cui il lavoro dell’insegnante non conta, o conta poco, rispetto al naturale evolversi delle capacità dell’alunno con la sua maturazione, unite con una iper-valutazione delle influenze negative del contesto esterno, familiare, rispetto al contesto scolastico, pongono le insegnanti entro un sistema di convinzioni per il quale i cambiamenti nell’insegnamento e quindi nella concezione della matematica sono percepiti come difficili e anche poco fruttuosi. Anche l’analisi approfondita del pensiero degli alunni quindi non porta in questo contesto, a nostro avviso, a una miglioramento delle risorse disponibili per l’insegnante che si percepisce come dotato di scarse potenzialità rispetto all’apprendimento degli studenti. Il lato affettivo del rapporto tra insegnante e alunno resta in primo piano e viene coltivato con molta attenzione e, in riferimento al triangolo studente, insegnante, sapere (D’Amore, 1999) il lato relativo al rapporto con la disciplina è percepito come poco modificabile. L’evolversi della conoscenza del contenuto pedagogico per l’insegnamento deve fare i conti con le concezioni sulle possibilità di apprendimento degli studenti, i cambiamenti che queste condizioni possono assumere, le concezioni della matematica di tipo strumentale che per gli insegnanti meglio si adattano all’apprendimento degli studenti. Diversamente la concezione della matematica più vicina a quella degli esperti è percepita quasi come un ostacolo al benessere e successo scolastico degli studenti. Questa idea non favorisce lo sviluppo di una conoscenza del contenuto pedagogico dell'insegnamento che sia efficace.

Si vogliono ora esporre alcune indicazioni, in una prospettiva di formazione in servizio, che si ritiene che possano essere dei nuclei sui quali organizzare i percorsi di sviluppo professionale degli insegnanti a partire da quelle che sono i risultati emersi dalla ricerca.

La prima indicazione è relativa a una formazione che accogliendo il patrimonio di esperienze delle insegnanti e le indicazioni della pedagogia dell'insegnamento della matematica sull'importanza del riferimento della disciplina al mondo reale (Castelnuovo, 2008), non permetta che queste esperienze restino confinate alla mera esposizione in classe da parte dell'insegnante e possano condurre nel corso degli anni al cambiamento di prospettiva che porta la matematica come mezzo per modellizzare la realtà (Freudenthal, 1994). La pratica matematica condotta nelle aule purtroppo è alla base della sospensione della costruzione di senso dell'attività matematica prodotta dagli studenti (Schoenfeld, 1991; Reusser & Stabler, 1997). Come affermano Wyndhamn e Saljio (1997) «in generale il clima delle classi è tale da provocare la separazione tra la matematica scolastica e la realtà quotidiana» (ivi, pag.364). Di conseguenza per modificare questa situazione è necessario modificare le convinzioni degli studenti sulla matematica, ma oltre, e forse prima di ciò, bisogna che siano anche modificate le convinzioni e gli atteggiamenti dei docenti.

Predisporre attività di problem solving per gli insegnanti, su contenuti matematici stimolanti e attinenti con quelli presenti nei curricoli, proposti in situazioni ipotetiche modellate su scenari di classe, da affrontare in gruppi di docenti, permette il reciproco arricchimento a livello di contenuti (non tutti gli insegnanti possiedono i contenuti allo stesso livello di comprensione), un applicazione e uno scambio di conoscenze su didattiche differenziate in base alle singole esperienze e il confronto sugli aspetti relativi all’analisi del pensiero degli studenti che richiedono una sede opportuna dotata di tempi di riflessione adeguati che in classe non è sempre possibile che un insegnante abbia a disposizione (Even & Tirsosh,1995). Ciò può mettere in condizione le insegnanti di proporre situazioni problematiche che sono considerate troppo difficili per sola convinzione personale e mancanza di confronto con altri colleghi e che invece hanno la potenzialità di fornire agli studenti contesti di apprendimenti più ricchi e realistici. Inoltre questo approccio alla matematica come una disciplina che contribuisca alla creazione di senso della realtà è condiviso anche dagli stessi esperti:

> «Non credo che si debba estrarre dall’assiomatica di Hilbert la lezione da trovare qui; e la lezione è questa: si può accedere all’assoluto rigore solo eliminando il significato; il rigore assoluto è raggiungibile solo nella e con la destituzione di significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo senza esitazione il secondo [...]. Allora il vero problema dell’insegnamento della matematica non è quello del rigore, ma il problema dello sviluppo di un significato, dell’esistenza di ‘oggetti’ matematici’»(Thom, 1973, p.202).

Più che la critica del formalismo matematico degli anni ’60 quello che in questo estratto interessa è il significato da attribuire ad ‘oggetti’ matematici attraverso l’approccio che parta, sì dal reale, ma per arrivare alla costruzione di una matematica fatta di oggetti matematici dotati di relazioni reciproche che possano col tempo svincolarsi dai modelli concreti, per assumere una propria autonomia di significati senza perdere però il collegamento con la realtà data dalle potenzialità di modellizzazione (Freudenthal, 1994, Fischbein 1993, Verschaffel et al 2000).

La formazione matematica degli insegnanti non è però vincolata esclusivamente all’acquisizione o modifica delle conoscenze. Gli aspetti relativi alle credenze e attitudini dei docenti giocano un ruolo determinante nella costruzione del sistema di credenze e conoscenze matematiche e sull’apprendimento degli studenti. Le considerazione esposte sull’affettività messa in gioco da parte degli insegnanti nel loro rapporto con gli studenti, insieme a convinzioni sulla propensione innata degli studenti per la matematica può contribuire a diminuire la sensazione di frustrazione dell'insegnante verso gli studenti con maggiore lentezza o difficoltà nell'apprendimento e il senso di personale inadeguatezza nel far progredire l'apprendimento degli studenti. La possibilità di cambiare alcune delle credenze degli insegnanti che possono essere di ostacolo a una comprensione più profonda della matematica da parte di studenti e insegnanti richiede contesti di sviluppo professionale in cui si tenga conto dell'emotività coinvolta (Goldin, et al. 2009) e in cui non sia avvertito come potenzialmente pericoloso mettere in gioco "la propria faccia".

L'attenzione data dalle insegnanti di scuola primaria verso il benessere dei propri studenti e il coinvolgimento emotivo che ne è associato, sono molto superiori al coinvolgimento personale verso la matematica (Philipp, 2008). Partendo da questo che è un assunto, che dai risultati della ricerca ci sentiamo di condividere, vogliamo associarci a una proposta di formazione sviluppata per insegnanti in formazione ritenendo che possa essere adattata anche per insegnanti in servizio che hanno potuto usufruire di poca o nulla formazione specifica in matematica. La proposta di formazione è schematizzata in figura 13.1 e si fonda su quattro principi:

1. il modo in cui la maggior parte degli studenti impara la matematica è problematico. In particolare, gli studenti imparano a manipolare i simboli matematici senza sviluppare adeguati concetti per i simboli (ciò a nostro avviso può valere anche nel contesto italiano);
2. L'apprendimento orientato ai concetti dà maggiori potenzialità ed è più generativo dell'apprendimento delle procedure;
3. Il ragionamento degli studenti è complesso e generalmente differente dal tipo di ragionamento degli adulti;
4. La matematica della scuola elementare (primaria) non è così elementare (Phillip, 2008).

Ci sentiamo di aggiungere, rispetto al primo punto, che all'inizio del percorso scolastico, gli studenti imparano a utilizzare manipolativi che non sempre riescono poi a riutilizzare nella costruzione degli oggetti matematici.

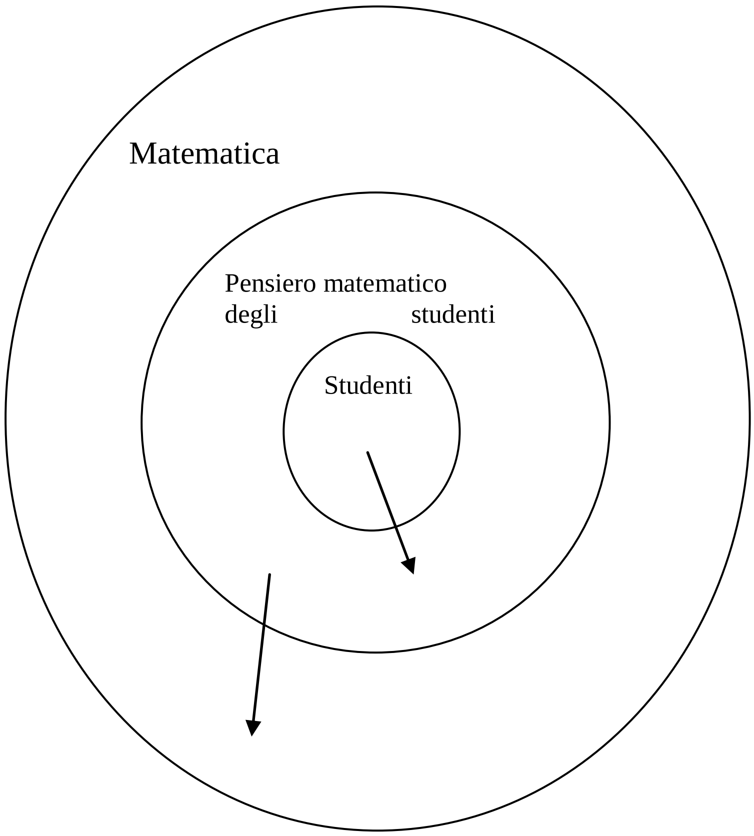


Figura 13.1(Philipp, 2008)

La proposta di formazione si richiama all’idea di Dewey (1990) per cui le discipline devono essere pensate sotto due aspetti: «uno per gli scienziati come scienziati, l’altro per gli insegnanti come insegnanti» (ivi p.351) in modo tale che la disciplina, nel caso degli insegnanti possa e debba essere psicologizzata (vedi cap.4). Il cerchio più interno riflette le preoccupazioni e interessi educativi e affettivi degli insegnanti in formazione (Philipp, 2008) che per «mantenere i bambini protetti, sicuri, fiduciosi e allegri [...]associano la loro preoccupazione per gli studenti con la credenza che devono evitare loro sfide troppo impegnative» (ivi, p.9). Ma se questi stessi insegnanti sono supportati nel loro percorso di sviluppo professionale in attività di reale problem solving matematico o se hanno l’opportunità di osservare video in cui gli studenti risolvono da soli problemi matematici che richiedono un elevato grado di impegno, (si può pensare ad attività di problem solving organizzate per operare in zona di sviluppo prossimale (Vygotskij, 1968)), questi stessi insegnanti iniziano a ridefinire i propri interessi includendovi il pensiero matematico degli studenti. Successivamente, formati sul pensiero matematico degli studenti, gli insegnanti possono ridefinire la loro preoccupazione per migliorare l'apprendimento dei loro studenti attraverso attività matematiche sfidanti e significative. Infine, nel percorso verso l'acquisizione di una comprensione sempre più sofisticata e sfumata del pensiero matematico degli studenti, molti insegnanti possono raggiungere la consapevolezza che per supportare il pensiero matematico degli studenti devono raggiungere essi stessi maggiori competenze in matematica competenze matematiche (Sbaragli, 2010; D'amore e Pinilla, 2003; Magnoler e Sorzio in corso di stampa). Il percorso proposto per gli insegnanti è quello di una formazione alla matematica vista attraverso il pensiero degli studenti e quindi una formazione nella disciplina che è tipica degli insegnanti e che può configurarsi come una loro specifica competenza (Philipp, 2008; Sbaragli, 2010; Magnoler e Sorzio in corso di stampa).

Abbiamo presentato questa proposta di formazione spinti dall'interesse suscitato dal fatto che quelle che nella proposta di Philipp (2008) sono date come assunzioni, sono per noi parte importante delle conclusioni della ricerca. Questo certamente senza la pretesa di risolvere i problemi di ricerca relativi alle competenze disciplinari associate al sapere docente, né quelli relativi al tipo di formazione in servizio che meglio può supportare l'acquisizione delle competenze matematiche tipiche degli insegnanti.

Un' ultima riflessione sulla validità di questa ricerca. Nove sono state le insegnanti partecipanti e certamente non si può parlare di generalizzabilità delle conclusioni raggiunte né di significatività del campione perché nove insegnanti non sono definibili come campione. Quello che invece ci preme sottolineare è come questo tipo di indagine abbia potuto fornire indicazioni su come l'attivazione delle conoscenze sui rimedi e sulle interpretazioni degli errori e difficoltà degli studenti da parte degli insegnanti vada considerata e meglio descritta oltre che alla luce delle conoscenze disciplinari degli insegnanti anche alla luce di alcune convinzioni specifiche sull’insegnamento e sull’apprendimento della matematica e sulla matematica stessa. Inoltre la ricerca è importante come contributo ai temi da approfondire in futuri studi di più ampio respiro, come ad esempio: quali aspetti del PCK degli insegnanti sono più critici nella pratica reale di insegnamento (Rowland et al. 2009), come indagare le convinzioni degli insegnanti in modo da poter descrivere sempre meglio l’influenza che hanno sulle scelte didattiche e sulla gestione delle conoscenze matematiche. Inoltre riteniamo che la migliore concettualizzazione del PCK in matematica se vuole essere produttiva per la definizione delle competenze dei docenti debba guardare anche alla ricomposizione delle concezioni matematiche degli insegnanti e delle concezioni dell’apprendimento degli studenti. A questo proposito vogliamo richiamare alla fine proprio un punto che forse non è stato ancora sottolineato a sufficienza. Le insegnanti che hanno partecipato all’indagine hanno spesso mostrato come, pur con determinate carenze a livello di conoscenza dei contenuti, non siano motivate a sfruttare a pieno tutte le loro conoscenze matematiche che restano in ombra, a volte inutilizzate. Sarebbe grave che questa fosse una situazione diffusa e che le conoscenze matematiche restassero relegate in una zona d’ombra di inutilizzo col rischio che nel corso del tempo possa aumentare invece che attenuarsi la tensione presente negli insegnanti tra cura verso gli studenti e cura verso la disciplina.

BIBLIOGRAFIA

ABELSON, R. (1979). "Differences between belief systems and knowledge systems", in *Cognitive Science,* 3(4), pp.355-366.

ACHINSTEIN, P. (1983) *The nature of explanation.* Oxford: Oxford University Press.

ADDEO, F. e MONTESPERELLI, P. (2007). *Esperienze di analisi di interviste non direttive.* Aracne. Roma.

ADLER,J. (2005), "Holding the past, living the present and imagining and creating a future: trands and challenges in research on mathematics teacher education", in R. Vithal, J.Adler & C. Keitel (Eds) *Researching mathematics education in South Africa: Perspectives, practices and possibilities.* HSRC Pretoria pp.163-182.

AJELLO, A.M. (2003). "La competenza professionale: I contribute della psicologia cognitive e della psicologia storico-culturale".In A.M. Ajello & S. Meghnagi (a cura di), *La competenza tra flessibilità e specializzazione*, Franco Angeli. Milano, pp.82-113.

ALBERS, D. & ALEXANDERSON, G.L. (1985). *Mathematical people: Profiles and interviews,* Birkhauser. Boston.

ALTET, M. (2008) "Rapport à la formation, à la pratique, aux savoirs et reconfiguration des savoirs professionnels par les stagiaires, in P.Perrenoud, M. Altet, C. Lessard, L. Paquay (sous la direction de), *Conflits de savoirs en formation des enseignants. Entre savoirs issus de la recherché et savoir issus de l'expérience,* Bruxelles, De Boeck, pp.91-105.

AMBROSE, R. (2004). "Initiating change in prospective elementary school teachers' orientation to mathematics teaching by building on beliefs". *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, pp.91-119.

AN, S., KULM, G. & WU, Z. (2004). "The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S." *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, pp.145-172.

ANDERSON, J., WHITE, P. & SULLIVAN, P. (2005). "Using a schematic model to represent influences on, and relationships between teachers' problem solving beliefs and practices", *Mathematics Education Research Journal*, 17(2), pp.9-38.

ANHALT, C.O., WARD, R.A. & VINSON, K.D. (2006). "Teacher candidates' growth in designing mathematical tasks as exhibited in their lesson planning". *The Teacher Educator*, 41(3), pp.172-186.

ARCHER, J. (2000). *Teacher beliefs about successful teaching and learning in English and mathematics.* Paper presented at the annual conference of the Australian Association for Research in Education, Sydney disponibile sul sito: htpp://www.aare.edu.au/00pap/arc00325.htm .

ARGYRIS, C. SCHON, D. (1998). *Apprendimento organizzativo: Teoria, metodo e prassi.* Guerini.Milano.

ARZARELLO, F. e ROBUTTI, O. (2002), *Matematica,* La Scuola. Brescia.

ASKEW, M. (2008). "Mathematical discipline knowledge. Requirements for prospective primary teachers, and the structure and teaching approaches of programs designed to develop that knowledge", in Sullivan P. and Wood T. (Eds) *The international handbook of mathematics teacher education,* Sense Publishers, Rotterdam/Taipei.

ASKEW, M., BROWN, M., RHODES, V., JOHNSON, D., WILIAM, D. (1997). *Effective Teacher of Numeracy* , London, King's College.

AUBREY, C. (1997). *Mathematical Teaching in the Early Years: An investigation of Teachers' Subject Knowledge,* London, The Falmer Press.

AUSTRALIAN EDUCATION COUNCIL (1990). *A national statement on mathematics for Australian Schools.* Melbourne: Curriculum Corporation.

BALDACCI, M. (2010). *Curricolo e competenze.* Mondadori Università.

BALL, D.L. (1988) "*Knowledge and reasoning in mathematics pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*". Unpublished Ph.D. thesis.

BALL, D.L. (1988a). "*Research on Teaching Mathematics: making subject matter knowledge part of the equation*". National Center for Research on Teacher Education. Research Report 88-102.

BALL, D.L. (1988b). "Prospective teachers understanding of mathematics: What do they bring with them to teacher education", *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans.

BALL, D.L., (1990a). "Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division". *Journal for Research In Mathematics education,* 21(2), 132-144.

BALL, D.L. (1990b). " The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education". *Elementary school journal,* 90(4), 449-466.

BALL, D.L., THAMES, M.H., PHELPS, G. (2008). "Content Knowledge for teaching: What makes it special?", *Journal of Teacher Education,* 59 (5), 389-407.

BARA, B.G. (1998). *Scienza cognitiva.* Bollati Boringhieri. Torino.

BARDELLI, M., SORZIO, P. e BORTOLOTTI, E. (2010) "Il problem solving e lo sviluppo delle epistemologie personali sulla matematica: una ricerca didattica nella scuola secondaria di I grado", *Difficoltà in matematica,*7/2 Erickson, pp.185-208.

BARKATSAS, A.T. & MALONE, J. (2005). "A typology of mathematics teachers' belief about teaching and learning mathematics and instructional practices". *Mathematics EducationResearch Journal*, 17(2), 69-90.

BARTOLINI BUSSI, M. (2009) "Una metodologia didattica efficace della scuola cinese: I problem con variazione" http://math.unipa.it/~grim/bartolini_IMSI2_giugno2009.pdf consultato nel 07/11.

BARUK, S. (1985) *L'age du capitain. De l'erreur en mathématiques. Edition du Seuil. Paris*

BAURSFELD, H. (1979). "Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom, in Lesh, R. e Secada, W. (Eds), *Some theoretical issues in mathematics education: papers from a research presession,* Columbus, OH: ERIC, pp. 13-32.

BAZELEY, P. (2007). *Qualitative analysis data with NVivo.* London. Sage.

BEGLE, E.G. (1968). "Curriculum research in mathematics". In Klausmeir, H.J. and O'Hearn, G.T. (Eds), *Research and development toward the improvement of education.* Madison, WI: Dembar Educational Research Services.

BEGLE, E.G. (1979). *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of empirical research,* Washington, DC: Mathematics Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics.

BENNET, N., CARRE' C. (Eds), (1993). *Learning to teach,* London: Routledge.

BERMAN, P. & McLAUGHLIN, M. (1975) *Federeal programs supporting educational change: Findings in review* (Vol.4). Santa Monica: Rand Corporation.

BERTONELLI, E. e RODANO, G. (2000). "Competenze e curricoli. Prime riflessioni", in *Annali della Pubblica Istruzione,* n.1.

BESWICK, K. (2004). "The impact of teachers' perceptions of student characteristics on the enactement of their beliefs". In M.J. Hoines & A.B. Fuglestad (Eds) *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2) Bergen: Bergen University College, pp.111-118

BESWICK, K. (2005). "The beliefs/practice connection in broadly defined contexts". *Mathematics Education Research Journal,* 17(2), pp.39-68.

BESWICK, K., WATSON,J. &BROWN, N. (2006). "Teachers confidence and beliefs and their students' attitudes toward mathematics". In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinappan (Eds)*Identities cultures and learning spaces. Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research group of Australasia,* Adelaode, MERGA Inc, pp.68-75.

BISHOP, J., CLEMENTS, M.A., KEITEL, C., KILPATRICK, J. & LEUNG, F.K.S. (2003). *Second International Handbook of Mathematics Education.* The Netherlands: Kluwer.

BIZA, I., NARDI, E. & ZACHARIADES, T. (2007) "Using tasks to Explore Teacher Knowledge in Situation-Specific Contexts", *Journal of Mathematics Teacher Eduation,* n.10 pp.301-309.

BOALER, J. (1997). *Experiencing school mathematics: teaching styles, sex and setting,* Buckingham, UK, Open Universtity Press.

BOERO, P. (1986) “Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare”, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol.9 n.9.

BOERO, P. & FERRARI P.L. (1988) “Rasegna di alcune ricerche sul ‘problema dei problemi’: loro importanza per l’insegnamento”, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 7/8,11,pp.659-684.

BOLSTER, A.S. (1983). “Toward a more effective model of teaching” in *Harvard Educational Review,* 3, pp.286-308.

BORASI, R. (1984), “Che cos’è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica”, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 2,7. Pp.83-98.

BORKO, H. , LIVINGSTON, C. (1990). “High school mathematics review lessons:Expert-novice distinction”, *Journal for Research in Mathematics Education,* 21, 5, pp.372-387.

BOSCOLO, P. (1997). *Psicologia dell’apprendimento scolastico. Aspetti cognitivi e motivazionali.* Utet. Torino.

BROPHY, J. , GOOD, T. (1986). “Teacher behaviour and student behaviour” in WITTROCK, M. W. (Ed), *Handbook of Research on Teaching* (3rd ed., pp.328-375), New York, Macmillan.
BROUSSEAU, G. (1981) “Problèmes de didactique des décimaux”, *Recherches en didactiques des mathématiques,* 2,1, pp.37-127.

BRUNER, J. (1995) *Verso una teoria dell’istruzione,* Armando. Roma

BRYMAN, A. (2008). *Social Research Methods,* Oxford University Press.

BUCHMANN, M. (1982). “The flight away from content in teacher education and teaching” *Journal of Curriculum Studies,* 14, 1, pp. 61-68.

BUCHMANN, M. (1984). “The priority of knowledge and understanding in teaching”, in Katz, L. and Roth, J. (Eds) *Advances in Teacher Education* (Vol. 1), Norwood, NJ, Ablex, pp. 29-50.

BURBULES, N.C. (1995) “Reasonable doubt: Toward a postmodern defense of reason as an educational aim”, W. Kohli (Ed) *Critical Conversations in Philosophy of Education,* Routledge, New York, pp.82-102.

BURTON, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: learning about learning mathematics.* Dordercht:NL, Kluwer.

BYRNE, C.J. (1983). “Teacher knowledge and teacher effectivness”. *Paper presented at the 14th Annuual Convention of the North-eastern Educational Research Association:* Ellenville, NY.

CACCIAMANI, S. (2009) *Psicologia per l’Insegnamento* (seconda edizione). Carocci. Roma.

CANDY, P.C. (1986) “Personal constructs and personal learning style”, in Pope, M.L., Keen, T.R., *Practical Educational Applications of the Repertory Grid,*CyberSystems, London.

CANNIZZARO, L. (1996) *Alcune ricerche sull'insegnamento/apprendimento del numero nella scuola elementare*, Relazione presentata al Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica. Pisa, 18-20 Gennaio.

CARLSEN, W. (1988). *The Effects of Science Teacher Subject Matter Knowledge on Teacher Questioning and Classroom Discourse.* Unpublishd doctoral dissertation, Stanford University, Paolo Alto.

CARPENTER, T.P., FENNEMA, E., FRANKE, M., LEVI, L. & EMPSON, S. (1999). *Children's mathematics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

CASTENUOVO, E. (2008) *L'officina matematica: ragionare con i materiali.* La meridian. Bari.

CAVALLI (a cura di) (2000) *Gli insegnanti nella scuola che cambia,* Seconda indagine IARD sulle condizioni di vita e di lavoro nella scuola italiana. Il Mulino. Bologna.

CHAPMAN, O. (2002). "Belief structure and inservice high school mathematics teachers' growth". In G. Leder, E. Pekhonen and G. Torner (Eds), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Pp.177-194). Dordrecht, the Nederlands: Kluwer Academic Publishers.

CHAPMAN, O. (2008) "Narratives in mathematics teacher education", in D. Tirosh & T. Wood (Eds), *The international handbook of mathematics teacher education (vol.2),* Sense Publishers, pp.15-38.

CHI, M.T., FELTOVICH, P. & GLASER, R. (1981). "Categorization and representation of physics problem by expert and novice", *Cognitive Science,* n.5

CHI, M.T., GLASER, R & RESS, E. (1982). "Experrtise in problem solving" in R. Sternberg (Ed), *Advances in the psychology of Human intelligence,* Lawrence Erlbaum, Hillsdale, N.J.

CHI, M.T., GLASER, R. & FARR, M.J. (1988). *The nature of expertise,* Lawrence Erlbaum, Hillsdale, N.J.

CIARRAPICO, L. (2002). "L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità", in http://www.pianetascuola.it/risorse/media/riviste_def/riviste/archimede/archimede.htm consultato nel 07/2011.

CLARK, C.M. , PETERSON, P.L. (1986). "Teachers' thought processes", in Wittrock, M.W. (Ed) *Handbook of Research in Teaching,* New York, Macmillan, 255-296.

CLARK, C.M., YINGER, M. (1979). "Teachers thinking", in Peterson P.L. and Walberg H. (Eds) *Research on teaching: concepts, findings and implications (pp.231-263).* Berkeley McCutchan.

CLARKE, A.E. (1995). *Situational analysis: Grounded theory after the postmodern turn.* Thousand Oaks. CA: Sage.

CLARKE, D.M. (1997). "The changing role of the mathematics teacher." *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, pp.278-308.

COHEN, D. (1988). “Teaching practice: Plus ça change…, in Jackson, P.W. (Ed.) *Contributing to educational change: Perspectives on research and practice.* Berkeley, CA: McCuthan.

COLLIER, C.P. (1972). “Prospective elementary teachers’ intensity and ambivalence of beliefs about mathematics instruction”, *Journal for Research in Mathematics Education,* 3, pp.155-163.

COLLINS, H.M. (1990). *Artificial experts: social Knowledge and intelligent machines,* The Mit Press, Cambridge.

COMMISSIONE DELLE COMUNITA’ EUROPEE (1995). *White Paper on Education and Training Teaching and Learning. Towards the Learning Society,* Brussels 29 Novembre [COM(95)590 final].

CONSIGLIO D’EUROPA (2001). *Relazione del Consiglio (Istruzione) al Consiglio Europeo sugli obiettivi futuri e concreti dei sistemi di istruzione e di formazione,* Brussels, 14 febbraio (16.02), [5680/01 EDUC 18].

CORNOLDI, C. (1995). *Metacognizione e apprendimento.* Il Mulino. Bologna.

COTTI, R. & SCHIRO, M. (2004) “Connecting teachers beliefs to the use of children’s literature in the teaching of mathematics.” *Journal of Mathematics Teacher Education,* 7, pp.329-356.

CREM (1999) *Les mathematiques de la maternelle jusqu’a 18 ans. Essaid’elaboration d’un cadre global pour l’enseignement des mathematiques.* Collection: “De la prime enfance a l’age adulte” ed. or. 1996.

CRESWELL, J.W. (2009) *Research design: qualitative, quantitative and mixed approaches,* Sage. London.

CUBAN, L. (1984) “Trasforming the frog into a prince: Effective school research, policy and practice at the district level”, *Harvard educational review,* 54, pp. 129-150.

CUOCO, A., GOLDENBERG, P. & MARK, J. (1996).”Habits of mind: An organising principle for mathematics curricula”, *Journal of Mathematical Behavior,* 15, pp.375-402.

DAMIANO, E. (1988). “Analisi dei curricoli di educazione matematica”. In E. Damiano (ed), *Epistemologia e Didattica,* La Scuola. Brescia.

DAMIANO, E. (2006) *La nuova alleanza: Temi, problemi prospettive della nuova ricerca didattica.* La Scuola. Brescia.

DARLING-HAMMOND, L. & SCLAN, E.M. (1996) “Who teaches and why: Dilemmas of building a profession for twenty-first century schools. In J.P. Sikula, T.J. Buttery, & E. Guyton (Eds), *Handbook of Research on Teacher Education: A project of the Association of Teacher Educators* (2nd ed.), New York: MacMillan, pp.67-101.

DAVIS, P. & HERSH, R. (1981). *The mathematical experience*. New York: Houghton Mifflin.

DAVIS, R. (1967). “Mathematics teaching with special reference to epistemological problems” *Journal of Research and Development in Education,* Monograph, n.1.

DAVIS, R. (1986). “Conceptual and procedural knowledge in mathematics: A summary analysis”, in Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.265-300). Hillsdale NJ: Erlbaum.

DAVIS, R. (1989) *Learning mathematics: The cognitive approach to mathematics education.* Routledge. London.

DAVIS, R.B. (1975). “Cognitive processes involved in solving algebraic equations”, *Journal of Children’s mathematical behaviour,* 1(3),7-35.

DAWSON, S. (1999). “The enactive perspective on teacher development: “A path laid while walking””, in B. Jaworski, T. Wood & S. Dawson (Eds) *Mathematics teacher education: international critical perspectives,* London: The Falmer press, pp.148-162.

D’ALFONSO, R. (1999) “Quali competenze per i nuovi curricoli?”, in *Annali della Pubblica Istruzione,* n. 3-4.

D’AMORE, B. (1999) *Elementi di Didattica della Matematica.* Pitagora. Bologna.

D’AMORE, B. (2007) “Epistemologia, didattica della matematica e pratiche di insegnamento*”, La matematica e la sua didattica,* n.3, pp.347-369.

D’AMORE, B. e PINILLA, F.M. (2003) “La formazione iniziale degli insegnanti di matematica”, *La matematica e la sua didattica,* 4, pp.413-440.

D’AMORE, B. e PINILLA, F.M. (2009) “La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale”, in F. Frabboni, M. L. Giovannini (Eds), *Professione insegnante.* Franco Angeli. Milano

D’AMORE, B. e SANDRI, P. (1996) “Fa finta di essere…Indagine sull’uso della lingua comunein contest matematica nella scuola media” *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 19A, 3, pp.223-246.

DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (1989) “Teaching word problems in the primary school. What research had to say to the teacher”, in B. Greer, & G. Mulhern (Eds), *New developments in teaching mathematics,* London: Routledge, pp.85-106.

DE CORTE, E., GREER, B. & VERSCHAFFEL, L. (1996) “Learning and teaching mathematics “, D. Berliner & R. Calfee (Eds) *Handbook of educational psychology,* New York, Macmillan, pp.491-511.

DEVELAY, M. (1992). *De l’apprentissage à l’enseignement.* Paris, ESF Editeur.

DEWEY, J. (1961). *Come pensiamo.* La Nuova Italia, Firenze (Ed. Or. 1933).

DEWEY, J. (1990) *The school and society: The child and the curriculum.* Chicago: The University of Chiacago Press.

DOLE, J.A. & SINATRA, G.M. (1994). “Social psychology research on beliefs and attitudes: Implications for research on learning from text”, in P.A. Garner e P.Alexander (Eds), *Beliefs about text and instruction with text,* Erlbaum, Hillsdale (NJ), pp. 245-264.

DOYLE, W. (1986). "Classroom organisation and management", in Wittrock, M.C: (Ed) *Handbook of Research on Teaching,* New York, Macmillan.

DUBINSKY, E. (1991). "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", in D.Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

DWECK, C.S. & BEMPECHAT, J. (1983). Children theories of intelligence: Consequences for learning. In S.G. Paris, G.M. Olson & H.W. Stevenson (Eds), *Learning and motivation in the classroom (pp. 239-256).* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

ELGIN, C.Z. (1996) *Considered Judgements.* Princeton: Princeton University Press.

ENGLISH, L. (2002) (Ed) *Handbook of International Research in Mathematics Education.* Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.

ENGSTROM, Y., ENGSTROM, R. & KARKKAINEN, M. (1995) "Polycontextuality and boundary crossing in expert cognition: learning and problem solving in complex work activities", *Learning and Instruction,* Vol.5, n.4, pp.319-336.

ERNEST,P. (1988). "The impact of beliefs on the teaching of mathematics", in P.Ernest (Ed), *Mathematics Teaching: The state of the art,* London:Falmer, pp.249-254.

EVEN, R., Markovits, Z. (1993). "Teacher's pedagogical content knowledge of functions: characterization and applications". *Journal of Structural Learning,* 12 (1), pp.35-51.

EVEN, R., TIROSH, D. (1995). "Subject-matter knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject matter", *Educational Studies in Mathematics* 29, pp. 1-20.

FANDINO PINILLA, M.I. (2003) "«Diventare competente», una sfida con radici antropologiche", in B. D'Amore, D.J. Godino, G. Arrigo e M.I. Pinilla, *Competenze in matematica.* Bologna. Pitagora.

FENNEMA, E. & FRANKE, M.L. (1992). "Teachers' knowledge and its impact". In Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp.147-164).* New York, NY: Macmillan.

FENNEMA, E. & LOEF, M. (1992) "Teacher's knowledge and its impact", in D.A. Grouws (Ed), *Handbook of research on learning and teaching mathematics,* New York: macmilla, pp.147-164.

FENNEMA, E., CARPENTER, T.P., FRANKE, M.L., LEVI, L., JACOBS, V. & EMPSON, S.B. (1996). "A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction", *Journal for Research in Mathematics Education,* 27, pp.403-434.

FERRINI-MUNDI, J. (1986). "*Mathematics teachers attitudes and beliefs: Implications for in-service education".* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

FESTENRMACHER, G.D. (1994). "The knower and the known: The nature of knowledge in research on teaching", in *Review of Research in Education,* 20, pp.3-57.

FISCHBEIN, E. (1993). “The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity”, in B. Biehler, R. Scholz, R. Straser and B. Winkelmann (Eds), *Didacticsof Mathematics as a Scientific Discipline,* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, pp.231-245.

FISCHBEIN, E. & SCHNARCH, D. (1997). “The evolution with age of probabilistic, intuitively-based misconceptions, *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, pp.96-105.

FLODEN, R.E., BUCHMANN, M. (1990).“Philosophical inquiry in teacher education”, in Houston, W.R. (Ed) *Handbook of Research in Teacher Education,* New York, Macmillan, (pp. 42-58).

FORGASZ, H. & LEDER, G. (2008). “Beliefs about mathematics and mathematics teaching”, in P.Sullivan & T. Wood (Eds), *The International Handbook of Mathematical Teacher education* Vol.1, *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development,*Sense Publishers Rotterdam, pp.173-192.

FREUDENTHAL, H. (1975). *Mathematics as an educational task.* Dodrecht, the Netherlands: Reidel.

FREUDENTHAL, H. (1994). *Ripensando l’educazione matematica. Lezioni tenute in Cina.* A cura di Manara, C.F. La Scuola. Brescia.

FURINGHETTI, F. & PEHKONEN,E. (2002). “Rethinking characterizations of beliefs”. In G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Torner (Eds), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education.* Dordrecht: The Netherlands: Kluwer, pp.39-57.

GAGE, N.L. (1978). *The Scientific Basis of the Art of Teaching,* New York, Teachers’ College News.

GAGE, N.L. (1985). *Hard Gains in the Soft Sciences: The Case of Pedagogy,* Bloomington, IN, Center of Evaluation, Development and Research, Phi Delta Kappan.

GALLIANI, L. (2005). *Maestri all’Università. Curricolo, tirocinio e professione.* 2° Rapporto di ricerca sul caso di Padova, a cura di Galliani L. e Felisatti E. Pensa Multimedia, Lecce.

GATTEGNO, C. (1963) *For the teaching of mathematics,* Educational explorers. Reading

GAUTHIER, C. (1997). *Pour une théorie de la pédagogie. Rechrche contemporaines sur le savoir des enseignants,* De Boeck Université, Paris-Bruxelles.

GLASER, B.G. and STRAUSS, A.L. (1967). *The discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* New York: Aldine de Grutyer.

GLASER, R. (1985). *On the nature of expertise,* Learning research and Development Center, University of Pittsburg.

GOLDIN, G., ROSKEN,B. & TORNER, G. “Beliefs –no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes”,in J.Maas & W.Schloghnam (Eds) *Beliefs and attitudes in mathematics education,* Sense Publishers, pp.1-14.

GOOD, T., GROUWS, D. & EBMAIER, H. (1983). *Active mathematics teaching* New York: Longman.

GOODLAD, J. (1984), *A place called school: Prospects for the future.* New York : McGraw-Hill.

GRAEBER, A., & TIROSH D., (2008). “Pedagogical Content Knowledge: Useful Concept or Elusive Notion”, in Sullivan P. and Wood T. (Eds) *The International Handbook of Mathematics Teacher Education,* Sense Publishers Rotterdam/Taipei.

GRAY, E. & TALL, D. (1994). “Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic”, *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2), pp.115-141.

GREEN, T.F. (1971). *The activities of teaching.* New York: McGraw-Hill.

GREENO, J. (1978). “A study of problem solving abilities”, in W.K. Estes (Ed) *Handbook of learning and cognitive processes,* Lawrence Erlbaum, Hillsdale, N.J.

GREENO, J. (1989) “For the study of the epistemology”, in R. Charles e E.A. Silver (Eds), *The teaching and assessing of mathematical problem solving,* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, (pp. 23-31).

GREENO, J. (1991) “Number sense as sitiated knowing in a conceptual domain”, *Journal for Research in Mathematics Education,* 22,pp.170-218.

GREER, B. (1993) “The modeling perspective on wor(l)d problems”, *Journal of mathematics behaviour*, 12, pp.239-250.

GRION, V. (2008). *Insegnanti e formazione: realtà e prospettive.* Carocci. Roma.

GROPPO, M. (1975). *La comunicazione educative. Apprendimento e programmazione tecnologica, vol.I; La comunicazione educative. Le tecnologie dell’istruzione, vol.II*, Vita e Pensiero. Milano.

GROSSMAN, P.L. (1989). “A study in contrast : Sources of pedagogical content knowledge for secondary English”, *Journal of Teacher Education,* (40) S, pp.24-36.

GROSSMAN, P.L. (1990). *The Making of a Teacher: Teacher Knowledge and Teacher Education,* New York, Teachers College Press.

GROSSMAN, P.L. (1991). What are we talking about anyway? Subject matter knowledge of secondary English teachers. In J. Brophy (Ed.) *Advances in research on Teaching Vol.2,* Greenwich CT: JAI Press pp. *245-264.*

GROSSMAN, P. L. , WILSON, S.M., SHULMAN, L.S. (1989). “Teachers of substance. Subject matter knowledge for teaching. In Reynolds M. (Ed), *The Knowledge base for Beginning Teachers,* New York, Pergamon.

GROUWS, D.A. (1992) (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* NY: MacMillan.

GUTIERREZ, A. & BOERO, P. (2006) (Ed) *Handbook of Research on PME: Past, present and future.* Rotterdam, the Netherlands: Sense.

HALAI, A. (1998). "Mentor, mentee and mathematics: A story of professional development. *Journal of mathematics Teacher Education*, 1, pp.295-315.

HANDAL, B. (2003) "Teacher's mathematical beliefs: A review", *The Mathematics Educator,* Vol.13,n.2 pp.47-57.

HAREL, G. (2009). "Mantaining the mathematical integrity of school curricula: the challenge". *For the Learning of Mathematics,* 28(3), pag. 10.

HERSH,D. (1986). "Some proposals for revising the philosophy of mathematics", in T.Tymoczko (Ed), *New directions in the philosophy of mathematics,* Boston: Birkhauser pp. 9-28.

HERSHKOWITZ, R. (1987). "The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry-Or 'when a little learning' is a dangerous thing", in D.Novak (Ed), *Proceedings of the second international seminar on misconceptions and educational strategies in science and mathematics,* Itacha, NY: Cornell University, (Vol. 3), pp.238-251.

HIEBERT, J. and LEFEVRE, P. (1986). "Conceptual and procedural knowledge". In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

HILL, H.C. & BALL, D.L. (2004). "Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes", *Journal of Research in Mathematics Education,* 35(5), pp.330-351.

HILL, H.C., ROWAN, B. e BALL, D.L. (2005). "Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement", *American Educational Research Journal,* 42(2), pp. 371-406.

HILL, H.C., BALL, D.L. & SCHILLING, S.C. (2008). "Unpacking pedagogical content knowledge in mathematics: conceptualising and measuring teachers' topic-specific knowledge of students", *Journal of Research in Mathematics Education* 39 (4), pp. 372-400.

HOFFMAN, K. (1989). *The science of patterns: A practical philosophy of mathematics education.* Articolo presentato allo Special Interest Group for Research in Mathematics Education all' Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

HUSEN, T. (1974). *Learning society.* Routledge. London.

HUTCHINS, R.M. (1969). *The learning society.* NY: Praeger.

IMBERCIADORI, F. L’insegnante al centro di un sistema educativo di qualità, in http://www.bdp.it/socrates/content/index.php?action=read_rivista&id=6432 citato in GRION, V. (2008).

MPI (Ministero della Pubblica Istruzione), (2007). *Indicazione per il Currricolo*. Roma

JACKSON, P. (1986). *The practice of teaching,* New York: Teacher College Press.

JAWORSKI, B. (1994) *Investigating mathematics teaching.* The Falmer Press

JOB, R., & RUMIATI, R. (1984). *Linguaggio e pensiero.* Il Mulino. Bologna.

KITCHER, P. (1984) *The nature of mathematical knowledge*, New York: Oxford University Press.

KITCHNER, K.S. (1983) “Cognition, metacognition and epistemic cognition. A three-level model of cognition processing, in *Human Development,* 26(4), pp.222-232.

KUHN, T. (1962) *The structure of the scientific revolution.* Chicago : University of Chicago Press.

KVALE, S. (1996) *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing,* London. Sage.

KYLEVE, J.I. & J.S. WILLIAMS (1996). “Measures of teachers’ attitudes towards mathematical modelling,”. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics education,* (Vol.3), Valenicia, Spain: Universitat de Valencia, pp.209-216.

LAKATOS, I. (1977). *Proof and refutations*, Cambridge: Cambridge University Press.

LAKATOS, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology,* Cambridge: Cambridge University Press.

LAMON, S.J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* (2nd edition). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

LAMPERT, M. (1985) “How do teachers manage to teach? Perspectives on problems in practice”, *Harvaard Education Review,* 53, 2, pp. 178-194.

LAMPERT, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* Yale University Press

LAVE, J. (1988). *Word problems: A microcosm of theories of learning.* Relazione presentata all’incontro annuale dell’AERA, New Orleans.

LEINHARDT, G. (1987) “Development of an expert explanation: An analysis of a sequence of subtraction lessons”, *Cognition and Istruction,* 4, 4, pp.225-282.

LEINHARDT, G. (1989) “Math lessons: A contrast of novice and expert competence”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 1, pp.52-75.

LEINHARDT, G. (1993) “On teaching”, in Glaser, R. (Ed) *Advances in instructional psychology* (Vol.4), Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp.1-54.

LEINHARDT, G., SMITH, D.A. (1985). “Expertise in mathematics instruction: Subject Matter Knowledge”, *Journal of Educational Psychology,*77, 3, pp.247-271.

LEINHARDT, G., PUTNAM, R.T., STEIN, M.K., e BAXTER, J. (1991) “Where subject knowledge matters”, in Brophy, J. (Ed) *Advances in Research on Teaching* (Vol.2), Greenweech, CT, JAI Press, PP.87-113.

LEVENSON, E., (2010) “Fifth grade students’ use and preference for mathematically and practically based explanation”, *Educational studies in mathematics,* 73(2), pp.121-142.

LEVENSON, E., TIROSH, D. & TSAMIR P. (2005) “Mathematically based and practically based explanations in the elementary school: teachers’preferences” *International journal of science and mathematics education,* 4(2) pp.319-344.

LINDGREN, S. (2000) *Teachers’ beliefs about mathematics and the epistemology of their practical knowledge,* Paper presented at the Research on Mathematical Beliefs: Proceedings of the MAVI-9 European Workshop, University of Vienna, Austria.

LLENARES, S. (2004) *Costruire le conoscenze necessarie per insegnare la matematica,* Seminario ticinese sulla didattica della matematica, ASP Locarno, reperibile su web alla pagina: http://math.unipa.it/~grim/dott_HD_MphCh/Llinares_7_locarno_04_it.pdf

LLOYD, G. (2002). “Mathematical teachers’ beliefs and experiences with innovative curriculum materials”,.In G.C. Leder E. Pehkonen & G. Torner (Eds), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp.149-159.

LOCATELLO, S., MELONI, G e SBARAGLI, S. (2008) “’Soli, muretti, regoli e coppie…’ Riflessioni sull’uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno: I numeri in colore”, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 31A, 5, 455-483.

LOCKHART, P. (2010). *Contro l’ora di matematica.* Rizzoli.

LOKAN, J., FORD, P. & GREENWOOD, L. (1997) *Maths and science on the line: Australian middle primary students’ performance in the Third International Mathematics and Science Study. Melbourne: ACER.*

LORTIE, D. (1975) *Schoolteacher: A sociological study,* Chicago: University of Chicago Press.

LOUGHRAN, J. (2006) *Developing a pedagogy of teacher education. Understanding teaching and learning about teaching,* Routledge, London,

MA, L. (1999). *Knowing and teaching mathematics: Teachers’ understanding of fundamental mathematics in China and the United States,* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

MAGNOLER, P. e SORZIO, P. (curatori) (in corso di stampa), *Mediazione didattica e competenze*, Macerata: EUM.

MALARA, N. e GHERPELLI, L. (2002) “Un approccio ai razionali centrato sugli aspetti di rappresentazione e sul ragionamento per analogia”, in N. Malara (a cura di) *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell’obbligo,* Pitagora. Bologna pp.211-222.

MANTOVANI, S. (2000) *La ricerca sul campo in educazione* (a cura di). B. Mondadori.

MARKS, R. (1990). *Pedagogical Content Knowledge in Elementary Mathematics.* Unpublished doctoral dissertation.

MARKOVITS, Z., HERSHKOWITZ, R. & BRUCKHEIMER, M. (1984), “Algortihm leading to absurdity, leading to conflict, leading to algorithm review”, in B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Confrey & K. Collis (Eds), *Proceedings of the eighth international conference for Psychology of Mathematics Education,* Sydney, Australia,: International Group for the Psychology of mathematics education, pp.244-250.

MARKOVITS, Z. & EVEN, R. (1999). “The decimal point situation: a close look at the use of mathematics-classroom-situation in teacher education” *Teaching and Teacher Education* 15, pp. 653-665.

MARKOVITS, Z. & EVEN, R. (1999) “Mathematics classroom situations: an inservice course for elementary school teachers”, in B. Jaworski, T. Wood & S. Dawson (Eds) *Mathematics teacher education: critical international perspectives,* Falmer Press, London, pp.59-67.

MARKOVITS, Z. & SMITH, M. (2008) “Cases as tools in mathematics teacher education” in D. Tirosh & T. Wood (Eds), *The international handbook of mathematics teacher education (vol.2),* Sense Publishers, pp.39-64.

MARKOVITS, Z. & SOWDER, J. (1994) “Developing number sense: An intervention study in grade 7.” *Journal for Research in Mathematics education,* 25(1), pp.4-29.

MASON, J. & SPENCE, M. (1999). “Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment, *Educational Studies in Mathematics,* 38, pp. 135-161.

MASON, L. (2001) *Verità e certezze. Natura e sviluppo delle epistemologie ingenue.* Carocci Roma.

MASON, L., (2006). *Psicologia dell’apprendimento e dell’istruzione.* Il Mulino. Bologna.

MAYER, M.E., (2000). “Intelligence and education”, in R.J. Sternberg (Ed), *Handbook of intelligence (pp.519-533),* Cambridge University Press.

McANINCH, A.M. (1993) *Teacher thinking and the case method*. New York: Teachers College Press.

McEWAN, H. & BULL, B. (1991). “The pedagogic nature of subject matter knowledge”, *American Educational research Journal,* 28, pp.316-334.

McNAMARA, D. (1991). “Subject knowledge and its application: problems and possibilities or teacher educators” *Journal of Education for Teaching,* 17(2), pp. 1113-128.

McNAMARA, O., JAWORSKI, B., ROWLAND, T., HODGEN, J. & PRESTAGE, S. (2002). *Developing mathematics teaching and teachers: A research monograph.* Consultato 28/02/2008 da http://www.maths-ed.org.uk/mathsteachdev/pdf/mathsdev.pdf

MEDLEY, D. (1979). “The effectiveness of teachers”. In Peterson, P.L. and Walberg H. (Eds.) *Research on Teaching: concepts, findings and implications (pp.11-26)*. Berkeley McCutchan.

MERSETH, K.K. (1996). “Cases and case methods in teacher education”, in Sikula, T. Buttery, T.J. & Guyton, E. (Eds). *Handbook of research on teacher education,* pp.722-744. NY: Macmillan.

MEIRIEU, P. (1990). *Enseigner, scénario pour un métier nouveau.* Paris ESF Editeur.

MENDICK, H. (2009). “What’s go great about doing mathematics like a mathematician?”. *For the Learning of Mathematics*, 28(3), pag.15.

MEREDITH, A. (1993). “Knowledge for teaching mathematics: some student teachers’ views” *Journal of Education for Teaching*, 19 (3), pp. 325-338.

MEREDITH, A. (1995). “Terry’s learning: some limitations of Shulman’s pedagogical content knowledge” *Cambridge Journal of Education,*25 (2), pp. 175-187.

MEWBORN, D.S. (1999). “Preservice elementary mathematics teachers”. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30, pp.316-341.

MILES, M., (1964) *Innovation in Education.* Teachers College Press, New York.

MINGUS, T.T.Y. & GRASSEL, R.M. (1999). “Preservice teachers beliefs about proofs”, *School Science and Mathematics,* 99(8), pp.438-444.

MORENO, J.M. (2007) “Do the initial and the continuous teachers’ professional development sufficiently prepare teachers to understand and cope with the complexities of today and tomorrow’s education?”, *Journal of educational change,* 8 pp.169-173.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston. VA: Author.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education,* Washington DC: National Academy Press.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* J.Kilpatrick, J. Swafford & B. Findell (Eds), National Academy Press, Washington DC.

NESHER, P. (1980) “The stereotyped nature of school word problems”, *For the Learning of Mathematic,* 1(1), pp.41-48.

NESHER, P. (1986) “Are mathematical understanding and algorithmic performance related?”, *For the Learning of Mathematics,* 6(3), pp.2-9.

NESHER, P. & KILPATRICK, J. (1990). *Mathematics and Cognition.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

NESPOR, J. (1987). “The role of beliefs in the practice of teaching”, in *Journal of Curriculum Studies,* 10(4), pp.317-328.

OCSE (2005). *Attracting, Developing and Retaining Effective Teachers,* in www.oecd/edu/teacherpolicy. citato in GRION, V. (2008).

PAQUAY, L. (2000) “Donner du sense à la formation continuée”, in G. Carlier, J.P. Renard, L. Paquay (sous la direction de), *La formation continue des enseignents. Enjeux, innovation et réflexivité.* Bruxelles. De Boeck.

PELLEREY, M. (1979). Introduzione a *La probabilità nella scuola dell'obbligo,* di Glaymann, M. & Varga, T. , Armando: Roma.

PENG, A. & LUO, Z. (2009). “A framework for examining teacher knowledge as used in error analysis”, *For the learning of mathematics,* 29 (3), pp.22-25.

PEPIN, B. (1999). *Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: The theory and what is manifested in mathematics teachers work in England, France and Germany,* TNTEE Publications, 2(1), pp.127-146.

PERRENOUD, P. (2002). *Dieci nuove competenze per insegnare.* Anicia. Roma.

PERRENOUD, P., ALTET, M., LESSARD C., & PAQUAY, L. (2008) (sous la direction de), *Conflits de savoirs en formation des enseignants. Entre savoirs issus de la recherché et savoir issus de l'expérience,* Bruxelles, De Boeck.

PERRY, B., HOWARD, P. & TRACEY, D. (1999) “Head mathematics teachers' beliefs about the learning and teaching of Mathematics, *Mathematics Education Research Journal,* 11,pp.39-57.

PETERSON, P. (1979). “Direct instruction reconsidered”, in Peterson P.L. and Walberg H. (Eds) *Research on teaching: concepts, findings and implications (pp.57-69).* Berkeley McCutchan.

PHILIPP, R.A. (2007). “Mathematics teachers' beliefs and affect”, in F.K. Lester (Ed) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* Information age Pub Inc, pp.257-315.

PHILIPP, R.A. (2008). “Motivating prospective elementary schoolteachers to learn mathematics by focusing upon children's mathematical thinking”, *Issues in teacher education,* 17(2),pp.7-26.

POLANYI, M. (1962). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago: University of Chicago Press.

POPE, M.L. & SCOTT, E.M. (1984). “Teachers epistemology and practice”, in R. Halkes, J.K. Olson (Eds), *Teachers' thinking: A new perspective on persisting problems in education,* Lisse: Swets & Zeitlinger, pp.112-122.

PORTER, A.C., e BROPHY, J. (1988). “Synthesis of research on Good Teaching: insights from the work of the Institute for Research on Teaching”, in *Educational Leadership,* 8, pp.74-85.

POVEY, H. (2009). “Teacher as a model learner”. *For the Learning of Mathematics*, 28(3), pag.13.

PRESTAGE, S. e PERKS, P. (1999). “Towards a pedagogy of mathematics initial teacher education” in L. Bills (Eds), *Proceedings of the BSRLM Day Conference.* Warwick University. Coventry: University of Warwick, pp.91-96.

PUCHALSKA, E & SEMADENI, Z. (1997) “Children’s reaction to verbal arithmetical problems with missing, surplus or contradictory data”, *For the Learning of Mathematics,* 7(3), pp.9-16.

PUTNAM, R. (1987). “Structuring and adjusting content for students: A study of live and simulated tutoring of addition”, *American Educational Research Journal*, 24, pp.13-48.

PUTNAM, R.T. (1992). “Teaching the ‘hows’ of mathemarics for everyday life: A case study of a fifth grade teacher, *Elementary School Journal,* 93(2), pp.163-177.

QUAGLINO, G.P. (1999) *Scritti di formazione 1978-1998.* F. Angeli. Milano.

QUINN, R.J. & WILSON, M.M. (1997). “Writing in mathematics classroom: Teacher beliefs and practices.” *The Clearing House,* 7(1), pp. 14-20.

RADATZ, H. (1983) “Untersuchungen zum Losen eingekleideter Aufgaben” *Zeitschrift fur Mathematick-Didactik*, 4, pp.205-217.

RADATZ, H. (1984) “Schwierigkeiten der Anwendung arithmetischer Wissen am Beispiel des Sacherechnens”, in *Unterscuschungen zum Mathematikunterricht,* Band 10 ,Universitaat, Biefield, pp.17-29.

RAYMOND, A.M. (1997). “Inconsistency between a beginning elementary school teacher’s mathematical beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28(5), pp.550-576.

RAYMOND, D., BUTT,R. & TOWSEND, D. (1991) “Contexts for teacher development: Insights from teachers stories”, in A. Hargreaves & M. Fullan (Eds) *Understanding teachers development,* London: Cassels, pp.196-221.

RESNICK, L. (1989). “Treating mathematics as an ill-structured discipline”, in R. Charles e E.A. Silver (Eds), *Teaching and assessing mathematical problem solving,* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp.32-60.

RESNICK, L. & FORD, W.W. (1981) *The psychology of Mathematics for Instruction,* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

RESNICK, L., SALJO, R., PONTECORVO, C. & BURGE, B. (Eds) (1997). *Discourse, Tools, and Reasoning. Essays on Situated Cognition,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

REUSSER, K. (1988) “Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems”, *Instructional Science,* 17, pp.309-338.

REUSSER, K. & STEBLER, R. (1997) "Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense making in the culture of school mathematics", *Learning and Instruction,* 7, pp.309-328.

RICHARDS, L. & MORSE, J.M. (2007). *Readme first for a user's guide to qualitative methods.* Thousand Oaks. CA: Sage.

RICHARDSON, V. (1996). "The role of attitudes and beliefs in learning to teach". In J.P.Sikula, T.J. Buttery & E. Guyton (Eds), *Handbook of Research on Teacher Education: A Project of the Association of Teacher Educators* (2nd ed.) New York MacMillan, pp.102-119.

ROLETTO, E. & GHIRARDI, M. (2005). "La competenza: una moda o un'idea utile? (parte prima)", in *Naturalmente,* 18(3) pp. 59-65. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali. Pisa-Roma.

ROMBERG, T. (1983). "A common curriculum for mathematics", in Fenstermarcher, G. & Goodlad, J. (Eds.) *Individual differences and the common curriculum (82nd yearbook of the National Society for the Study of Education).* Chicago: University of Chicago Press.

ROMBERG, T.A. (1992). "Toward a world class curriculum in the United States", in I. Wirszup, L.Streit (Eds), *Development in school mathematics education around the world:* Vol.3, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp.223-235.

ROSENSHINE, B. e FURST, N. (1971). "New directions for research on teaching", in *How teachers Make a Difference,* US Department of Health, Education and Welfare, Washington D.C.

ROSS, S.M. (1983) "Increasing the meaningfulness of quantitative material by adapting context to student background", *Journal of educational psychology,* 75, pp.519-529.

ROULET, R.G. (1998). *Exemplary mathematics teachers: Subject conceptions and instructional practices,* Doctoral dissertation , Ontario Institute for Studies in education of the University of Toronto.

ROWLAND, T., MARTYN, S., BARBER, P. and HEAL, C. (2000). Primary teacher trainees' mathmatics subject knowledge and classroom performance, in T. Rowland & C. Morgan (Eds) *Research in Mathematics Education Volume 2* London, British Society for Research into Learning Mathematics.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P. & THWAITES, A. (2005). "Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi", *Journal of Mathematics Teacher Education,* 8, pp.225-281.

ROWLAND, T., TURNER, F., THWAITES, A., HUCKSTEP, P. (2009). *Developing Primary Mathematic Teaching.* London: Sage.

RUBIN, H.J. & RUBIN, I.S. (1995) *Qualitative interviewing: The art of heating data.* Thousand Oaks, CA: Sage.

SALDANA, J. (2009) *The coding manual for qualitative researchers.* Sage. London.

SALJIO, R. & WYNDHAMN, J. (1990) “Problem solving , academic performance and situationed reasoning: A study of joint cogniyive activity in the formal setting”, *British Journal of Educational Psychology*,60, pp.245-254.

SARASON, S.B. *The culture of the school and the problem of change,* Boston: Allyn & Bacon.

SBARAGLI, S. (2010) “Le competenze nell’ambito della matematica”, *Difficoltà in matematica,* 7/2 Erickson, pp.143-156.

SCHOENFELD, A.H. (1985). “Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding”, in Silver, E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 361-379). Hillsdale NJ: Erlbaum.

SCHOENFELD, A.H. (1988). “When good teaching leads to bad results: The disasters of well-taught mathematics courses”, in: http://www.ithaca.edu/compass/pdf/schoenfeld.pdf, consultato nel 04/2008.

SCHOENFELD, A.H. (1991) “On mathematics as sense –making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics”, in J.F. Voss, D.N. Perkins & J.W. Segal (Eds), *Informal reasoning and education,* Hillsadale, NY, Lawrence Erlabaum Associates, pp.311-343.

SCHOENFELD, A.H. (1992). “Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, in D. Grouws (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 334-370) New York: MacMillan.

SCHOENFELD, A.H., SMITH, J.P. III & ARCAVI, A. (1993). “Learning: The microgenetic analysis of one student’s evolving understanding of a complex subject matter domain”, in R. Glaser (Ed) *Advances in instructional psychology* (Vol.4, pp.55-175). NJ:Erlbaum.

SCHWAB, J.J. (1978). “Education and the structure of the disciplines”, in Westbury, I., Wilkof, N.J. (Eds) *Science, Curriculum and Liberal Education,* Chicago, University of Chicago Press, pp.229-272.

SCOTT, A:L: (2005). “Pre-serviceteachers’ experiences and the influences on their intentions for teaching primary school mathematics”. *Mathematics Education Research Journal,* 17(3), pp.62-90.

SCUOLA DI BARBIANA, (1967), *Lettere a una professoressa.* Libreria editrice fiorentina.

SEAMAN, C.E., SZYDLIK, J.E. SZYDLIK, S.D. & BEAM,J.E. (2005) “A comparison of preservice elementary teachers’ beliefs about mathematics and mathematics teaching: 1968 and 1998”, *School Science and Mathematics,* 105(4), pp.197-210.

SENGER, E.S. (1998). “Reflective reform in mathematics: The recursive nature of teacher change”. *Educational Studies in Mathematics,* 37(3), pp.199-221.

SFARD, A. (1991). “On two metaphors for learning and the danger of choosing just one”, *Educational Researcher,* 27(2), pp.4-13.

SHAW, M.E. & WRIGHT, J.M. (1967). *Scales for the measurement of attitudes*. New York: McGraw-Hill.

SHULMAN, L.S. (1986). “Those who understand: Knowledge growth in teaching”, *Educational Researcher,* 15, 2, pp.4-14.

SHULMAN, L.S. (1987). “Knowledge and teaching: Foundation of the new reform”, *Harvard Educational Review”,*57, pp.1-22.

SIERPINSKA, A. (1996) “Whither mathematics education?” Plenary Address, in C. Alsina, J.M. Alvarez, M. Niss, A. Perez and A. Sfard (eds), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematics Education,* Seville, 14-21 July pp.21-46.

SILVER, E.A. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving. Multiple research perspectives.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

SITA’, C. (2012) *Indagare l’esperienza.* Carocci. Roma.

SKEMP, R. (1978). “Relational understanding and instrumental understanding”, *Arithmetic Teacher,* 26 pp.9-15.

SMITH, J.P.III, diSESSA, A.A. & ROSCHELLE, J. (1993). “Misconceptions reconceived: a constructivistic analysis of knowledge in transition. *Journal of the Learning Science,* 3, pp.115-163.

SORZIO, P. (2005). *La ricerca qualitativa in educazione.* Carocci. Roma.

SOSNIAK, L.A., ETHINGTON, C.A. & VARELAS, M. (1991) “Teaching mathematics without a coherent point of view: Findings from the IEA Second International Mathematics Study. *Journal of Curriculum Studies*, 23, pp.119-131.

SOWDER, J. (1992) “Estimation and number sense”, in D.A. Grouws (ed), *Handbook for research on mathematical teaching and learning,* New York: McMillan.

SPERANZA, F. (1996). “I fondamenti epistemologici della matematica”, in AA.VV., *I fondamenti della matematica per la sua didattica e nei loro legami con la società contemporanea,* Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Verona 28/39 Novembre, pp. 35-46.

SPIELMAN, L.J. & LLOYD, G.M. (2004). “The impact of enacted mathematics curriculum models on prospective elementary teachers’course perceptions and beliefs”. *School Science and Mathematics,* 104(1), pp.32-44.

STAUB, F.C. & STERN, E. (2002). “The nature of teachers’ pedagogical content beliefs matters for students’ achievement gains: Quasi experimental evidence from elementary mathematics”. *Journal of Educational Psychology,* 94, pp.344-355.

STAVY, R. & TIROSH, D. (2001). *Perchè gli studenti fraintendono matematica e scienze?* (Ed. Originale, 2000). Erickson. Trento.

STEELE, D.F. (2001). “The interfacing of preservice and inservice experiences of reform –based teaching: A longitudinal study. *Journal of MathematicsTeacher Education,* 4,pp.139-172.

STEEN, L. (1988). “The science of patterns”, in *Science,* 240, pp. 611-616.

STEIN, M.K., BAXTER, J.A. e LEINHARDT, G. (1990). “Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing”, *American education Research Journal,* 27, pp. 639-663.

STIGLER, J. & PERRY, M. (1989). “Cross cultural studies of mathematics teaching and learning: Recent findings and new directions”. In D. Grouws & T. Cooney (Eds), *Effective mathematics teaching,* Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp.194-223.

STODOLSKY, S.S (1985). “Telling math: The origins of math aversion and anxiety” *Educational Psychologist*, 20, 125-133.

STONES, E. (1992), *Quality Teaching: a sample of cases* .London: Routledge.

STREETFLAND, L. (1993) “Fractions a realistic approach”, in T.R.Carpenter, E.Fennema & T.A. Romberg (Eds) *Rational numbers: An integration of Research.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum, pp.289-325.

SUMMA, I. (2001) “Lo sviluppo della professione docente tra innovazione continua e formazione”, in L. Lelli, I. Summa (a cura di), *Professionalità docente per l’ innovazione,* Tecnodid. Napoli.

SZTAJN, P. (2003). “Adapting reform ideas in different mathematics classrooms: Beliefs beyond mathematics”. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 53-75.

TEACHER TRAINING AGENCY (1999). Auditing subject knowledge in primary English and mathematics in: http://www.canteach.gov.uk/itt/providers/auditing.htm citato in GRION, V. (2008).

TEO, W.L. (1997). *Espoused beliefs of Singapore Teachers about Mathematics and its Teaching and learning,* Master paper, Ontario Institute for studies in Education of the University of Toronto.

THOMPSON, A. (1984). “The relationship of teachers’ conception of mathematics and mathematics teaching to instructional practice”, *Educational Studies in Mathematics,* 15, 105-127.

THOMPSON, A. (1985). “Teachers conceptions of mathematics and the teaching of problem solving”, in E. Silver (Ed), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives,* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

THOMPSON, A. (1992). “Teachers beliefs and conceptions: A synthesis of the research”, in D.A. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* NY: MacMillan, pp.127-146.

TIMMERMAN, M:A: (2004). “The influence of three interventions on prospective teachers’ perceptions in elementary school mathematics”. *Educational Studies in Mathematics,* 50(1), pp.49-62.

TIROSH, D., EVEN, R. & ROBINSON, N. (1998) “Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches”, *Educational Studies in Mathematics,* 35, pp.51-64.

TIROSH, D. & GRAEBER, A. (2003). “Challenging and changing mathematics teaching classroom practices”, in J. Bishop, M.A. Clements, C.Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp.643-688). The Netherlands: Kluwer.

TIROSH, D. & STAVY, R. (2000) *Perchè gli studenti fraintendono matematica e scienze?,* Erickson. Trento.

TOMASSINI, M. (1993). *Alla ricerca dell’organizzazione che apprende.* Edizioni Lavoro. Roma

TRINCHERO, R. (2002). *Manuale di ricerca educativa.* F. Angeli. Roma.

TSAMIR, P. and TIRODH, D. (2003). “Errors in an in-service mathematics teacher classroom”. *Paper presented at the Seventh International Symposium on Elementary Mathematics Teaching.* Charles University, Prague Czech Republic.

TURNER-BISSET, R. (1999). “The knowledge bases of the expert teacher”, *British Education Research Journal,* 25 (1), pp. 39-55.

UMI (Unione Matematica Italiana) (2001). (a cura di) F. Arzarello, *Materiali per un nuovo curricolo di matematica*: http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/arzarello/index.htm

VACC, N.N. & BRIGHT, G.W. (1999). “Elementary preservice teachers’ changing beliefs and instructional use of children’s mathematical thinking”. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30, pp.89-110.

VAN HIELE, P.M. (1986). *Structure and Insights. A theory of mathematical education.* London. Academic Press.

VARISCO, B.M. (2004). *Portfolio. Valutare gli apprendimenti e le competenze.* Carocci. Roma.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, B. & LASURE, S. (1994) “Realistic considerations min mathematical modelling of school arithmetic word problems”, *Learning and instruction,* 4, pp.273-294.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, B. & BORGHART, I. (1997) “Pre-service teachers’ conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of schoolword problems”, *Learning and Instruction,* 4, pp.339-359.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000), *Making sense of word problems,* Swets & Zeitlinger publishers.

VITERITTI, A. (2004) “Le competenze degli insegnanti traducono i cambiamenti della scuola”, in L. Benadusi, F. Consoli (a cura di), *La governance della scuola. Istituzioni e soggetti alla prova dell’autonomia,* Il Mulino. Bologna, pp.101-146.

von GLASERFELD, E. (1984). “An introduction to radical constructivism”. In P.Watzlawick (Ed.) *The invented reality,* New York: W.W. Norton, pp.17-40.

VOSNIADOU, S. & VERSCHAFFEL, L. (2004) “Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching”, *Learning and Instruction*, 14, pp.445-451.

WADDINGTON, S. (1997). *Relazione sul Libro Bianco della Commissione su Istruzione e Formazione -Insegnare e Apprendere-Verso la società conoscitiva,* COM (95) 0590-C4-0597/95, in http://www.europarl.europa.eu/sidesSearch/sipadeMapUrl.do?PROG=REPORT&language=IT&startValue=4510.

WATSON, A. (2009). “School mathematics as a special kind of mathematics”, *For the Learning of Mathematics* 28(3), pp.3-8.

WESTON, C., GANDELL,T., BEAUCHAMP, J., McALPINE, L., WISEMAN, C., & BEAUCHAMP, C. (2001). “Analyzing interview data: The development and evolution of a coding system”. *Qualitative Sociology* 24(3), pp.381-400.

WHITEHEAD, A. N. (1962). *Introduzione alla matematica*, Sansoni, Firenze, Edizione Originale 1911.

WILDAVSKY,A. & GIADOMENICO, M. (1979) “Implementation as evolution”, in A. Widldavsky & J. Pressman (Eds) *Implemetation*, Berkeley: University California Press.

WILSON, J. (1975). *Education Theory and the Preparation of Teachers*, Windsor, NFER.

WILSON, J., SHULMAN, L.S., RICHERT, A. (1987). “150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching” in Calderhead, J. (Ed) *Exploring Teachers’ Thinking,* London, Cassell.

WILSON, M. S. & COONEY, T. (2002). “Mathematics teacher change and development”. In G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Torner (Eds), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education.* Dordrecht: The Netherlands: Kluwer, pp.127-147.

WILSON, S. M. (1988). *Understanding Historical Understanding: Subject Matter Knowledge and the Teaching of American History*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University, Palo Alto.

WILSON, S. M. & BERNE, J. (1999). “Teacher learning and the acquisition of professional knowledge: An examination of research on contemporary professional development. IN A. Iran-Nejad & P.D. Pearson (Eds), *Review of Research in Education*, 24, pp.173-209.

YOSHIDA, M. (2008) “Exploring ideas for a mathematics teacher educator’s. Contribution to lesson study: Towards improving teachers’ mathematical content and pedagogical knowledge”, in D. Tirosh & T. Wood (Eds), *The international handbook of mathematics teacher education (vol.2),* Sense Publishers, pp.85-106.

ZACK, V. & REID, D. (2003). “Good Enough understanding: theorizing about the learning of complex ideas (pt.1)” *For the Learning of Mathematics,* 23(3), pp. 43-50.

ZAN, R. (1996a). “Un intervento metacognitivo di ‘recupero’ a livello universitario”, *La matematica e la sua didattica,* n.1.

ZAN, R. (1996b). “Difficoltà d’apprendimento e problem solving: proposte per un’attività di recupero”, *L’insegnamento della matematica e delle scinze integrate,* vol19B, n.5.

ZAN, R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Pitagora. Bologna

ZAN, R. (2007) *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Springer.

ZASLAVSKY, O. & RON, G. (1998). “Students’ understanding of the role of counter-examples”, in A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Stellenbosch, South Africa, University of Stellenbosch, 4,pp.225-233.

ZAZKIS, R. (2009). “Looking for a possible intersection”, *For the Learning of Mathematics,* 28(3), pag.8

Appendice

Metodo:

Domande aperte a partire dalle esperienze concrete per arrivare a esprimere le convinzioni dei docenti sui tre temi in indagine. Presenza di domande sonda per un aiuto nell'esplicitazione delle opinioni.

Prima di cominciare ti voglio rassicurare sul fatto che ti puoi esprimere liberamente su quello che dirai,perché l'intervista è anonima e non è tesa a determinare conoscenze ma a ricercare i significati da te autonomamente attribuiti agli aspetti oggetto dell'indagine.

Domanda d'inizio intervista:

0) Che ricordi hai della formazione scolastica o universitaria riguardo la matematica e i metodi di insegnamento, partendo da quello che vuoi, (senti più rilevante)?

PARTE 1: SIGNIFICATI DELLA MATEMATICA COME DISCIPLINA

1) Che visione ti sei fatto della matematica come disciplina?
- Che cosa intendi dire?
- Puoi farmi un esempio?
- Da cosa dipende questo modo di interpretare la disciplina?

PARTE 2:SIGNIFICATI ATTRIBUITI ALL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

2) A seguito della tua esperienza di insegnante di matematica, quali argomenti della disciplina gli studenti è più importante che imparino?

- Perché proprio questo/i?
- Puoi fare un esempio specifico?
- All'inizio della tua attività la pensavi allo stesso modo?

(SE NO: quali esperienze ti hanno portato a cambiare idea?)

- Ci sono, secondo te argomenti che amplieresti o aggiungeresti e che invece normalmente non hai la possibilità di svolgere come vorresti? Perché?

3) Cosa vuol dire: essere un bravo insegnante di matematica? Conosci qualcuno che secondo te lo è?

- Cosa intendi dire?
- Perché secondo te è bravo?
- Puoi farmi un esempio?
- Come andrebbe organizzata e spiegata la matematica perché sia ben compresa dagli studenti?

4) Pensando alla tua vita professionale di docente di matematica, che parte ha nella tua vita quotidiana la disciplina che insegni?

- Cosa intendi dire?
- Puoi farmi un esempio?

5) Quali possono essere i vincoli dovuti all'organizzazione scolastica (durata anno scolastico, organizzazione orario, organizzazione spazi, personale scolastico, classi) che influiscono sulla didattica della matematica?

- Cosa intendi dire esattamente?
- Puoi fare un esempio concreto?

PARTE 3 SIGNIFICATI ATTRIBUITI ALL'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

6) Ci sono degli argomenti di matematica che, nell'esperienza di ogni docente, risultano di più difficile comprensione da parte degli alunni. Pensando a uno specifico argomento che dalla tua esperienza che risulti difficile, quali sono i motivi di questa difficoltà per gli alunni?

- Cosa intendi dire esattamente?
- Da cosa rilevi che c'è questa particolare difficoltà?
- Puoi fare un esempio concreto?
- Hai adottato strategie particolari per risolvere le difficoltà?

7) Come docente ti sarai trovato spesso a dover correggere nei compiti numerosi errori. Ricordi qualche particolare errore che ti ha"fatto sobbalzare"?
(Altrimenti: ricordi qualche alunno che spesso faceva sempre lo stesso tipo di errore? Quale?)

- Secondo te perché?

- Come cercavi di utilizzare le conoscenze acquisite dalla tua esperienza sui classici errori degli studenti?
- Se l'errore è compiuto a casa o direttamente in classe che strategie usi per affrontarlo?

8) Pensa ad alcuni dei migliori allievi che hai avuto in matematica: secondo te perché raggiungevano risultati migliori degli altri?

- Cosa intendi dire esattamente?
- In quali circostanze accade ciò?
- Da cosa dipende quello che dici?

9) Viceversa, perché alcuni allievi non raggiungevano gli obiettivi minimi?

a. Cosa intendi dire esattamente?
b. In quali circostanze accade ciò?
c. Da cosa dipende quello che dici?

Grazie della collaborazione