UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Sede Amministrativa: Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN : FISICA
CICLO XXVII

La storia della Gravità Quantistica
Dalla nascita della Relatività Generale al secondo dopoguerra (1915-1945)

Direttore della Scuola : Ch.mo Prof. Andrea Vitturi

Supervisore : Ch.mo Prof. Giulio Peruzzi

Co-Supervisore : Ch.mo Prof. Kurt Lechner

Dottorando : Alessio Rocci

Indice

Introduzione

La storia della Gravità Quantistica comincia nei primi decenni del Novecento. Dopo i primi successi di quella che oggi è chiamata vecchia teoria dei quanti[1] e dopo la nascita nel 1915 della Relatività Generale cominciarono a farsi strada alcuni interrogativi, a molti dei quali tutt'oggi non sappiamo rispondere, che potremmo esplicitare con le seguenti domande: la nuova teoria della gravitazione di Einstein poteva giocare un ruolo anche nei fenomeni microscopici? Se l'unificazione operata da Maxwell aveva portato vantaggi essenziali nella comprensione dei fenomeni elettromagnetici, poteva l'unificazione di tutte le forze allora conosciute, ovvero la forza gravitazionale ed elettromagnetica già congetturata in un contesto diverso da vari autori come Faraday e Maxwell, portare un ulteriore approfondimento nella conoscenza del mondo fisico? E in questo eventuale quadro d'insieme come si inseriscono i nuovi fenomeni su scala atomica e sub-atomica, la cui descrizione è affidata alla nascente teoria dei quanti?

Un po' alla volta, con l'emergere del contrasto fra i principi della fisica quantistica e quelli della fisica classica, ci si rese conto che era necessaria una profonda riflessione se si voleva trovare un quadro d'unione per tutti i fenomeni fisici. All'inizio l'urgenza di tale riflessione preoccupò maggiormente la comunità di fisici che avevano scelto come priorità la risoluzione del problema dell'unificazione delle forze fondamentali, sull'onda dell'unificazione operata da Maxwell fra fenomeni elettrici e magnetici, e che quindi si occupavano dei fenomeni propri del mondo macroscopico[2], mentre quella parte dei fisici che lavoravano sui fenomeni microscopici era completamente assorbita dalla formulazione della "nuova meccanica" [RCK03]. Ben presto però molti autori cercarono di misurarsi con questo problema, producendo a volte soluzioni che non avranno seguito e a volte aprendo la strada ai moderni filoni di ricerca.

A tutt'oggi non abbiamo un'idea precisa di quale possa essere la forma di una teoria che possa essere chiamata Teoria Quantistica della Gravità. Per questo motivo abbiamo inteso

[1]Ricordiamo che la nascita ufficiale della meccanica quantistica è datata 1925-1926. I tentativi precedenti che cercavano di rendere conto dei nuovi fenomeni apparsi riguardo al mondo microscopico vengono riassunti tutti col nome di vecchia teoria dei quanti.

[2]Si veda [Goe04] per una dettagliata trattazione storica.

considerare appartenenti alla storia della Gravità Quantistica *tutti* i possibili tentativi di armonizzare una qualche teoria della forza gravitazionale con i principi che governano il mondo microscopico. Una ricerca sistematica su questo tipo di argomento risultava necessaria non solo per la frammentarietà dei contributi a tutt'oggi disponibili, ma anche perché ciclicamente si affaccia nel dibattito filosofico la questione della falsificabilità di una teoria e si pone, da parte di alcuni ambienti, l'interrogativo sulla scientificità dell'occuparsi di questioni che non abbiano immediata verifica sperimentale. La ricerca di una teoria che possa assurgere al ruolo di Gravità Quantistica offre interessanti spunti per approfondire tali questioni. Obiettivo di questa tesi è compiere un primo passo nella ricostruzione storica di questi primi tentativi che contengono molti dei germi degli sviluppi attuali nel settore e che, allo stesso tempo, possono offrire prezioso materiale alla riflessione filosofica sulla scienza e il suo farsi.

Abbiamo deciso di presentare la ricerca seguendo un percorso cronologico, riassumendo in maniera sintetica i contributi storici conosciuti ed approfondendo contemporaneamente alcuni lavori degni nota, fino ad oggi trascurati. Le motivazioni che ci hanno indotto a organizzare il materiale in questo modo sono due. La prima è che, come già detto, non siamo a conoscenza di alcun contributo ad oggi che abbia esplorato in maniera approfondita e articolata il periodo storico da noi analizzato. Era quindi prima necessario inquadrare tutti i contributi da noi analizzati in un quadro cronologico unitario, per poter evidenziarne poi, in un secondo tempo, eventuali dinamiche e ricostruire i rapporti dettagliati. Il secondo motivo è legato a quanto emerso dalla nostra ricerca. Gli avvenimenti che hanno impresso di volta in volta una spinta alla comprensione delle caratteristiche di un'eventuale teoria che unifichi gravità e quanti coincidono con le differenti formulazioni del concetto di *quantizzazione* e con le problematiche ad esse correlate. I quattro capitoli della tesi illustrano proprio quattro fasi dell'introduzione del nozione di quantizzazione nell'ambito della fisica del Novecento. Il primo capitolo descrive gli avvenimenti nel periodo precedente la nascita della Meccanica Quantistica, in cui per la descrizione quantistica della luce e della materia si utilizzavano le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld. Il secondo capitolo vede il dominio della Meccanica Ondulatoria e dell'idea che fosse sufficiente scrivere un'equazione d'onda su uno spazio-tempo curvo per armonizzare la Meccanica Quantistica con la Relatività Generale. Nel terzo capitolo giocano un ruolo fondamentale la nascita della teoria quantistica dei campi, con la quale si consolida l'idea che sia il campo stesso a dover essere quantizzato, con tutti i problemi dell'evidenziarsi di quantità divergenti associate ad osservabili. Infine il quarto capitolo dove, grazie all'evoluzione dello studio della descrizione dei campi quantistici con spin arbitrario, i mediatori dell'interazione gravitazionale vengono identificati con particelle di spin 2, i gravitoni.

Avendo a disposizione solo alcune indicazioni sommarie sugli avvenimenti principali derivanti dai lavori di John Stachel [Cao99] e di Dean Rickles [Ric05], [Ric12] e [Ric13] pubblicato durante lo svolgimento della nostra tesi, non era ovviamente chiaro, all'inizio della nostra ricerca, quanti contributi avremmo trovato, quanto questi fossero degni di nota, indipendentemente dal grado di risonanza che avrebbero avuto negli anni successivi, e non era chiaro quanto fossero articolati tali contributi. Per varie ragioni, non ultime quelle relative alla mole del lavoro, ci siamo fermati al 1945 con la conclusione della Seconda Guerra Mondiale, anno che sancisce però l'inizio di un nuovo periodo di pace e di ripresa delle collaborazioni, che come vedremo, però, la guerra aveva interrotto solo in parte.

La divisione in capitoli per certi aspetti può risultare arbitraria, proprio perché legata ad un'organizzazione cronologica. per esempio, una volta nata la Meccanica Quantistica, non tutti gli autori abbandoneranno l'idea, nata prima del 1925, di costruire una metrica dello spazio-tempo valida solo a livello atomico o di utilizzare le regole di Wilson-Sommerfeld. Così anche dopo il 1930 e i lavori di Rosenfeld, nonostante fosse chiaro che era necessario cercare di quantizzare il campo gravitazionale, alcuni autori continueranno a scrivere delle equazioni d'onda su spazi-tempo curvi in cui la metrica resta un oggetto classico. Al contrario vi sono anche delle anticipazioni, come i lavori di Rosenfeld e Klein del 1927, i quali trattano le vecchie funzioni d'onda della Meccanica Quantistica già come fossero dei campi scalari. Tutto questo ovviamente riflette il fatto che i vari approcci alla Gravità Quantistica, in un periodo di drammatici mutamenti di quadri interpretativi, non seguivano sempre percorsi lineari e che i concetti si affermavano, ieri più di oggi, con lentezza e gradualità.

I capitoli sono divisi in paragrafi che raggruppano anche più contributi, alcuni dei quali sono maggiormente articolati rispetto ad altri. Cercando di mettere a fuoco il lavoro dei singoli, sarà inevitabile fare dei piccoli salti temporali, abbiamo quindi deciso di mettere alla fine di ogni capitolo una *cronologia sintetica*, in cui, per ogni anno, gli autori sono elencati in ordine alfabetico. Per seguire con maggiore facilità il succedersi cronologico dei lavori dei singoli autori, anche la bibliografia è stata organizzata, capitolo per capitolo, in ordine alfabetico, unificando così i contributi di uno stesso autore. Le traduzioni degli articoli originali sono nostre, a meno che non sia esplicitamente detto il contrario, e saranno riportate utilizzando sempre il virgolettato singolo (ad es: 'Questo fatto potrebbe essere connesso con [...]'), mentre useremo il *corsivo* per mettere in evidenza alcuni termini per noi importanti. L'appendice riporta l'elenco delle riviste consultate e delle parole chiave utilizzate per la ricerca elettronica.

Ultimo ma non meno importante è doveroso dire che il nostro lavoro non ha alcuna pretesa di completezza: lo scopo principale era quello di presentare una sorta di *guida*, per offrire una base di partenza sufficientemente solida a futuri approfondimenti e sviluppi.

Simboli, convenzioni e richiami teorici

Le costanti fondamentali che incontreremo nel testo sono la velocità della luce c, la costante gravitazionale di Newton G e la costante di Planck h. Nelle equazioni tali costanti saranno sempre riportate, a meno che non sia esplicitamente detto. In alcuni casi, infatti, può essere utile il sistema detto delle *unità naturali*. In tale sistema si pongono tutte le costanti fondamentali pari ad uno e di conseguenza sopravvive un'unica grandezza di riferimento, ovvero la lunghezza. Nelle unità naturali l'energia e la massa hanno le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, mentre, per esempio, la carica elettrica dell'elettrone e diventa un numero adimensionale.

Nella nostra tesi la metrica dello spazio-tempo piatto quadridimensionale di Minkowski viene indicata con $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$, e tutti gli indici *greci* assumono i seguenti valori: $\mu = 0, 1, 2, 3$, dove la prima componente è quella temporale. In alcuni casi useremo degli indici *latini*, $i, j, k...$, che fanno riferimento ai soli indici spaziali. La metrica *curva* quadridimensionale viene indicata con $g_{\mu\nu}$ e il determinante di tale metrica è g. I tensori di Riemann, di Ricci e lo scalare di curvatura quadridimensionali sono indicati rispettivamente con $R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}$, $R_{\mu\nu}$ ed R e sono legati dalle seguenti relazioni:

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \qquad R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}.$$

Per la definizione del tensore di curvatura di Riemann si rimanda a [DC92].

Le equazioni di Einstein che determinano la struttura dello spazio-tempo, sono le seguenti:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

e si ottengono, utilizzando un principio variazionale nel seguente modo:

$$\delta\mathcal{S}_m + \delta\mathcal{S}_{EH} = \delta \int \mathcal{L} \sqrt{-g}\, d^4x - \delta \int \frac{c^4}{16\pi G} R\sqrt{-g}\, d^4x \;=\; 0$$

dove $\mathcal{S}_{EH}$ è detta azione di Einstein-Hilbert e la funzione $\mathcal{L}$ viene detta Lagrangiana[3](della materia) che descrive la sorgente del campo gravitazionale. Il membro di sinistra delle equazioni per il campo gravitazionale (1) definisce un tensore simmetrico $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} -$

[3]Più propriamente si tratta di una densità di Lagrangiana. La Lagrangiana è l'integrale di $\mathcal{L}$ su un volume tridimensionale. Nel testo incontreremo sia Lagrangiane che densità di Lagrangiane, ma noi parleremo sempre di Lagrangiana a meno che non sia necessario specificarlo.

$\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, noto anche come *tensore di Einstein.* Il membro di destra della (1), $T_{\mu\nu}$, viene chiamato *tensore energia-impulso* ed è definito nel seguente modo[4] ([DC92]; pag. 190):

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}\right)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}g_{\mu\nu}\ . \tag{2}$$

Le componenti del tensore energia-impulso rappresentano in generale una *densità* di energia o di quantità di moto: la presenza di questo tensore nelle equazioni di Einstein mette in rilievo come sia proprio l'*energia*, ovvero il quadri-momento, a essere la sorgente del campo gravitazionale. La forma da attribuire al tensore energia-impulso dunque cambia al variare della situazione fisica considerata. Se si considera per esempio lo spazio vuoto $T_{\mu\nu} = 0$, se invece si considera il campo elettromagnetico in interazione con quello gravitazionale si ha $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, dove $F_{\mu\nu}$ è legato ai potenziali elettromagnetici $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ dalla relazione $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

L'elemento di linea è definito da:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2d\tau^2 = -d\lambda^2,$$

dove abbiamo introdotto il tempo proprio τ e il *tempo proprio geometrizzato* λ. La traiettoria di una particella può essere parametrizzata usando il tempo proprio geometrizzato. In questo modo la quadrivelocità $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}$ sarà di tipo tempo, perché soddisfa alla relazione $u_\mu u^\mu = -1$.

L'azione di una particella di massa m e carica q con le nostre convenzioni è dunque[5]:

$$\mathcal{S} = -mc\int d\lambda + \frac{q}{c}\int A_\mu dx^\mu\ .$$

Notiamo che a causa della segnatura il principio dell'azione stazionaria non coinvolge l'elemento di linea ds, ma il tempo proprio geometrizzato, che è comunque invariante per diffeomorfismi.

L'equazione della geodetica per la stessa particella in un campo gravitazionale ed elettromagnetico è[6]:

$$mc\left[\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}u^\nu u^\rho\right] = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}u^\alpha\ ,$$

[4]Si ricordi che $\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$.

[5]Se si introduce un parametro affine qualsiasi $\tilde{\lambda}$ si avrà ovviamente $d\lambda = \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tilde{\lambda}}\frac{dx^\nu}{d\tilde{\lambda}}}d\tilde{\lambda}$.

[6]Se si deriva rispetto al tempo proprio non geometrizzato τ l'espressione è identica, ma al posto di mc nel membro di sinistra si avrà solamente la massa. Con la nostra segnatura le definizioni di campo elettrico e magnetico sono, rispettivamente, $F^{0i} = E^i$; $F^{ij} = \epsilon^{ijk}B^k$, dove ϵ^{ijk} è il simbolo di Levi-Civita che soddisfa a $\epsilon^{123} = 1$ e $\epsilon^{ijk} = 1$ se ijk è una permutazione pari di 123.

dove i simboli $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ sono detti simboli di Christoffel o “connessione affine”. Tali simboli servono anche per definire la derivata covariante, che per esempio agisce su un generico vettore covariante V^{μ} nel seguente modo:

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}V^{\rho}.$$

In particolare abbiamo che:

$$\nabla_{\mu}V^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}\,V^{\mu}\right).$$

Se f è una funzione scalare, per il gradiente in tre dimensioni (spaziali) useremo il simbolo $\vec{\nabla}f = \partial_i f(x, y, z)$. Per l'operatore d'Alambertiano $\Box$ useremo lo stesso simbolo, in quattro dimensioni, sia nel caso piatto che nel caso curvo. Sarà infatti il contesto a chiarire se, data una funzione scalare f, agisce nel seguente modo:

$$\Box f = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\partial_{\nu}f \qquad \text{spazio-tempo curvo,}$$

oppure nel seguente modo:

$$\Box f = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}f \qquad \text{spazio-tempo piatto.}$$

Data una funzione Hamiltoniana $H(\mathbf{q}\,,\mathbf{p}\,,t)$, dove $(\mathbf{q}\,;\,\mathbf{p}\,,t) = (q_1\,,\ldots,\,q_N\,;\,p_1,\ldots,p_N)$, e detta $S(\mathbf{q}\ ,\alpha\ ,\ \mathrm{t})$ una funzione di Jacobi dipendente da N coordinate ausiliarie $\alpha = \alpha_1,\ldots,\alpha_N$, l'equazione di Hamilton-Jacobi completa è la seguente:

$$H(\mathbf{q};\,\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Se la Hamiltoniana non dipende dal tempo la funzione di Jacobi soddisfa alla condizione di riduzione $\dfrac{\partial S}{\partial t} = -E$, dove E è una costante, e può essere scritta quindi nel seguente modo: $S = -Et + \tilde{S}(\mathbf{q};\,\mathbf{p})$. Si ottiene dunque l'equazione di Hamilton-Jacobi ridotta:

$$H(\mathbf{q};\,\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathbf{q}}) = E.$$

A meno che non sia diversamente specificato, utilizzeremo sempre l'equazione di Hamilton-Jacobi ridotta, ma la chiameremo semplicemente equazione di Hamilton-Jacobi, a meno che non sia diversamente specificato. Per esempio, con le nostre convenzioni, l'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella di massa m e carica q all'interno di un campo elettromagnetico esterno è:

$$\left(p_{\mu} - \frac{q}{c}A_{\mu}\right)\left(p^{\mu} - \frac{q}{c}A^{\mu}\right) = -m^2c^2,$$

e la sostituzione minimale quadridimensionale in presenza di un campo elettromagnetico è data da:

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c} A_\mu$$

dove q è la carica della particella.

Un sistema hamiltoniano classico si dice completamente, canonicamente integrabile se soddisfa le ipotesi del teorema di Liouville-Arnold di cui riportiamo l'enunciato ([Gra93]; pag. 11).

'Data la Hamiltoniana $H(\mathbf{q};\, \mathbf{p})$ dove le coordinate $(\mathbf{q};\, \mathbf{p}) \equiv (q_1, \ldots, q_N;\, p_1, \ldots, p_N)$ sono canoniche, $\{q_i\,,\, p_j\} = \delta_{ij}$ (ma non necessariamente cartesiane od ortogonali) supponiamo che:

i) Il sistema ammetta N integrali primi $F_i(\mathbf{q};\, \mathbf{p}) \ :\ i = 1, \ldots, N$ funzionalmente indipendenti ed in involuzione, cioè

$$\frac{\partial F_i}{\partial F_j} \neq 0 \quad e \quad \{F_i\,,\, F_j\} = 0,\, i \neq j = 1, \ldots, N$$

ii) Le superficie di livello

$$F_i(\mathbf{q};\, \mathbf{p}) = I_i \quad i = 1, \ldots, N$$

definiscono varietà differenziabili compatte, connesse e senza bordo.

È possibile allora associare ad ogni integrale primo $F_i \ :\ i = 1, \ldots, N$ un angolo $\phi_i \ :\ i = 1, \ldots, N$ in modo tale che

i) Le variabili $(\phi_i\,,\, I_i) \ :\ i = 1, \ldots, N$ sono canoniche: $\{\phi_i\,,\, I_j\} = \delta_{ij}$ ("variabili angolo-azione") e sono legate alle variabili $(\mathbf{q};\, \mathbf{p})$ da una trasformazione canonica;

ii) La Hamiltoniana, scritta in funzione delle $(\phi_i\,,\, I_i) \ :\ i = 1, \ldots, N$ tramite questa trasformazione, risulta una funzione delle sole variabili d'azione $I_i \ :\ i = 1, \ldots, N$. '

Il simbolo $\{q_i\,,\, p_j\} = \delta_{ij}$ denota le *parentesi di Poisson.*

La metrica di Schwarzschild è:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

dove M è l'energia totale della sorgente divisa per il quadrato della velocità della luce. Le *orbite equatoriali* si ottengono ponendo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

La metrica di Reissner-Nordström, invece, è:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

dove Q è la carica elettrica della sorgente.

Bibliografia

[Cao99] Tian Yu Cao (Editor), chapter V Quantum field theory and space-time. "Introduction" by John Stachel, pages 166–175 (Cambridge University Press, 1999).

[DC92] Fernando De Felice and C. J. S. Clarke, *Relativity on Curved Manifolds*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge: Cambridge University Press, 1992). Editors: P. V. Landshoff, D. R. Nelson, D. W. Sciama, S. Weinberg.

[Goe04] Hubert F.M. Goenner (2004). On the History of Unified Field Theories. Living Review in Relativity 7 (cited on March 2 2014) http://www.livingreviews.org/lrr-2004-2.

[Gra93] Sandro Graffi, *Le radici della quantizzazione*. I quaderni di fisica teorica (Università degli Studi di Pavia. Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica, 1993). Editore: Sigfrido Boffi.

[RCK03] J. Renn R. Cohen and K. Kavroglu (Editors), *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics. Festschrift in Honour of John Stachel* (Boston Studies, 2003).

[Ric05] Dean Rickles (2005); "Pioneers of Quantum Gravity". Talk presented at the Third Conference on History of Quantum Physics (HQ3).

[Ric12] "Quantum Gravity Meets &HPS" by Dean Rickles. In: *Integrating History and Philosophy of Science*, (Editors) Seymour Mauskopf and Tad Schmaltz, volume 263 of *Boston Studies in the Philosophy of Science*, pages 163–199 (Springer Netherlands, 2012).

[Ric13] "*Pourparlers* for Amalgamation: Some Early Sources of Quantum Gravity Research" by Dean Rickles. In: *Traditions and Transformations in the History of Quantum Physics*, (Editors) Christoph Lehner Shaul Katzir and Jürgen Renn, chapter 6 (Max Planck Research Library for the History and Development of Knoledge. Proceedins 5, 2013). Third International Conference on the History of Quantum Physics, Berlin, June 28 – July 2, 2010; http://www.edition-open-access.de/proceedings/5/index.html.

Capitolo 1

Prima della Meccanica Quantistica

In questo primo capitolo considereremo l'arco temporale che corre dal 1915, anno di nascita della Relatività Generale, fino al 1926. Infatti, immediatamente ci si chiese se ci potesse essere un qualche legame tra l'entrata in scena della nuova teoria della gravitazione e i nuovi fenomeni quantistici che avevano scosso la comunità dei fisici dall'inizio del Ventesimo secolo. Analizzeremo i primi tentativi fatti per capire come fosse possibile *conciliare* i principi della teoria di Einstein con quelli della teoria dei quanti. Il capitolo, infatti, finisce con la nascita della moderna Meccanica Quantistica.

Il filo conduttore che emerge in questo primo periodo è la convinzione che l'avvento della nuova teoria della gravitazione possa in qualche modo dar ragione dei fenomeni microscopici. Per questo motivo, probabilmente, in nessuno dei tentativi da noi analizzati si parlerà esplicitamente di effetti quantistici della gravità. Dopo le prime speculazioni di Hilbert, Einstein, ed Eddington, e dopo le prime resistenze all'applicazione della teoria di Einstein al mondo microscopico, nascono le prime generalizzazioni del modello atomico di Bohr. In questo primo periodo, infatti, la descrizione quantistica passa attraverso le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld, che generalizzano le regole di quantizzazione di Bohr. Il punto più alto viene raggiunto dalla figura di Vallarta che dedica la tesi di dottorato alla formulazione di tale modello, discutendo la compatibilità delle condizioni di quantizzazione con l'invarianza per diffeomorfismi.

L'eredità di Vallarta viene raccolta da De Donder, il quale, pur convinto del primato della Relatività Generale come Vallarta, comincia a spostare l'attenzione dalle regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld alla formulazione di un'equazione d'onda per le particelle materiali, cercando quindi di conciliare la teoria di Einstein con la nascente Meccanica Ondulatoria di Schrödinger.

1.1 Conciliare due mondi: dal 1915 al 1922

Il 1915 è l'anno di nascita della Relatività Generale, nel seguito RG. In quell'anno, infatti, vengono pubblicate sulla rivista *Preussische Akademie der Wissenschaften* le quattro comunicazioni di Albert Einstein [Ein15a] [Ein15b] [Ein15c] [Ein15d] in cui l'autore presenta i principi fondanti e la struttura della propria teoria, calcola e confronta con l'esperienza la precessione del perielio di Mercurio, calcola il corretto angolo di deflessione della luce dovuto alla presenza di un campo gravitazionale e, nell'ultima comunicazione, presenta le equazioni del campo gravitazionale oggi note come equazioni di Einstein. Nello stesso anno David Hilbert presenta una comunicazione all'Accademia delle Scienze di Gottinga [Hil15], in cui mostra come le equazioni di Einstein possano essere scritte in conseguenza di un principio variazionale. Ma il Novecento ha visto anche la scoperta di nuovi fenomeni microscopici, della cui spiegazione si era presa carico la fisica quantistica, e la nascita della teoria della Relatività Ristretta, a opera dello stesso Einstein. A nostro avviso, la storia della Gravità Quantistica, nel seguito GQ, può cominciare proprio con il 1915, praticamente contestualmente all'affacciarsi dell'idea che l'unificazione di diverse aree della fisica potesse portare a nuovi risultati, così come era stato con la teoria di Maxwell. Hilbert, nel proprio articolo, propone infatti l'idea che le equazioni dell'elettromagnetismo siano una conseguenza delle equazioni del campo gravitazionale[1], e sull'onda dell'entusiasmo prospetta che la nuova formulazione della teoria della gravitazione potrà aprire nuove prospettive anche nell'ambito della teoria atomica ([Hil15]; pag. 407). Come vedremo nel seguito dell'intero capitolo, le prime speculazioni che incontreremo riguarderanno soprattutto la possibilità di *conciliare* i principi della RG con quelli della fisica dei quanti. Non si parlerà invece necessariamente di effetti quantistici della gravitazione secondo l'idea che ne abbiamo noi oggi.

Riguardo alle convinzioni di Hilbert è importante fare alcune osservazioni. Innanzitutto sappiamo, da uno scambio epistolare tra Einstein e Hilbert, che lo stesso Einstein si poneva già il problema di unificare gravità ed elettromagnetismo [Goe04] e che i problemi sollevati dalla teoria dell'atomo di Bohr erano ben noti a Hilbert [Pai91]. In secondo luogo, nonostante il tono del lavoro di Hilbert fosse 'un po' megalomane' ([Pai91]; pag. 280), gli spunti di Hilbert verranno raccolti da chi cercherà proprio in una teoria unificata l'origine dei nuovi fenomeni microscopici e quindi un modo per conciliare due mondi così lontani. Da ultimo bisogna osservare che la convinzione maturata da Hilbert nel lavoro del 1915 sul

[1] Come osservato in [Pai91], pag. 281, l'idea di un collegamento fra la gravitazione e la luce era stata accarezzata anche da Bernhard Riemann. Inoltre un tentativo di unificazione tra gravitazione e teoria elettromagnetica si ritrova in Maxwell che sviluppa alcune congetture di Faraday.

legame tra gravità ed elettromagnetismo è errata ed è collegata all'errata interpretazione di un teorema di cui riparleremo più avanti. Hilbert correggerà questo ed altri errori solo nella nuova versione dell'articolo che sarà pubblicato nel 1924 [Pai91].

Anche lo stesso Einstein si scontra subito con l'incompatibilità tra i principi della propria teoria e quelli della fisica quantistica. Nel primo articolo sulle onde gravitazionali [Ein16], infatti, Einstein sembra far riferimento proprio al modello atomico di Bohr in cui l'emissione di onde elettromagnetiche da parte degli elettroni orbitanti attorno al nucleo viene proibita per ipotesi, in modo da ottenere un modello stabile dell'atomo. Einstein osserva che anche l'emissione di onde gravitazionali potrebbe minacciare la stabilità del modello e quindi sospetta che la teoria dei quanti modificherà la sua nuova teoria della gravitazione così come il modello di Bohr suggerisce che sia necessaria una revisione dell'elettrodinamica di Maxwell. Questo commento di Einstein verrà ripreso undici anni dopo da Werner Heisenberg e Wolfgang Pauli[2]. Einstein, tornerà a commentare brevemente[3] ancora la questione della modifica della RG nel suo secondo lavoro sulle onde gravitazionali [Ein18].

Negli anni in cui andava formandosi la RG, era attivo un filone di ricerca che cercava di stabilire una eventuale variazione della forza gravitazionale, descritta però dalla legge di Newton, al variare della temperatura dei corpi. In tale contesto era inevitabile chiamare in causa anche la teoria della radiazione di Planck che, come riporta E. H. Barton ([Bar16]; pg. 461), 'assegna una temperatura teorica allo spazio vuoto, che è un campo di radiazione'. Nonostante lo scopo non fosse certo quello di creare una teoria quantistica della gravitazione, questo è sicuramente un primo tentativo di mettere in relazione tra una teoria della gravitazione e una teoria che si occupava di spiegare la nascente fisica quantistica.

Prima di proseguire specifichiamo che abbiamo individuato solamente un altro tentativo di relazione tra la forza gravitazionale e la teoria dei quanti prima del 1915. Si tratta di un contributo scritto da L. Décombe nel 1913 [Dé13]. Cercando di dare una spiegazione microscopica della teoria di Newton, l'autore ricavava una relazione tra la costante G, la massa e la carica dell'elettrone. Nella derivazione rientra anche il quanto elementare ($h\nu$), ma è necessario dire che Décombe parte da un modello "a panettone" che è già obsoleto per l'epoca, costruendo un modello che sembra ad hoc. Anche per questo motivo abbiamo deciso di fissare la nascita della ricerca di una teoria della GQ proprio nell'anno di nascita della RG.

La diffusione della RG non è stata istantanea, e non tutti i fisici comprendono subito

[2]Si veda il paragrafo 2.5 del prossimo capitolo.

[3]Non riportiamo la citazione, già commentata in ([Cao99]; pag. 166).

la portata della teoria di Einstein. Unitamente a questo fatto la scoperta dei fenomeni microscopici aveva stimolato la fantasia di alcuni autori nel cercare una spiegazione microscopica della forza gravitazionale, come appena visto nel caso di Décombe. Questi due fattori hanno prodotto delle speculazioni, a volte errate, che miravano a trovare una connessione esplicita tra le costanti di Newton e Planck. È in questa cornice che si inserisce per esempio l'articolo di Albert C. Crehore [Cre18]. Riteniamo opportuno segnalare il contributo di Crehore perché si pone in controtendenza rispetto al pensiero dominante dell'epoca. Crehore, infatti, arriva a criticare l'approccio di Bohr, ipotizzando addirittura che l'atomo di idrogeno sia composto da due elettroni nell'orbita esterna ([Cre18]; pag. 16). L'autore dunque sceglie di forzare il proprio modello, a dispetto del fatto che Moseley, grazie alla tecnica dei raggi X, aveva ormai già stabilito sperimentalmente nel 1913 il valore del numero atomico Z per tutti gli elementi allora noti della tavola periodica [Per01]; la forzatura di Crehore mirava a ottenere il corretto valore della costante di Newton a partire dalle altre costanti note.

In un lavoro del 1918 [Ein18] Einstein rinforza il concetto già espresso due anni prima sull'emissione di onde gravitazionali, facendo però riferimento al fatto che sarebbe il moto stesso di agitazione termica degli atomi a produrre l'emissione di tali onde. Di nuovo sottolinea che, una volta raggiunta la piena maturazione, la teoria dei quanti porterà ad una revisione della teoria della gravitazione.

Un po' alla volta però Einstein si convincerà di poter trovare una soluzione al problema nell'ambito di una teoria unificata di tutte le forze allora note. Secondo Einstein proprio da una teoria unificata avrebbero dovuto emergere i caratteri quantistici del mondo microscopico.

Nel 1918, probabilmente per la prima volta [EK92], Arthur S. Eddington si interessa al concetto di *lunghezza minima*, che identificherà due anni dopo con quella che oggi chiamiamo lunghezza di Planck[4], e al suo possibile ruolo nella teoria di Einstein. In quest'anno vengono pubblicati infatti un intervento dell'autore sulla rivista *Nature* [Edd18a] e la prima edizione del suo lavoro di rassegna sulla RG [Edd18b]. Nell'intervento pubblicato su *Nature*, come riportato da Rickles ([Ric13]; pag. 160), Eddington menziona il fatto che è possibile ricavare una *lunghezza* calcolata a partire dalle costanti fondamentali c, G ed h, e riporta il valore $7 \times 10^{-28} cm$ che sembra riferito a tale lunghezza, osservando poi:

[4] I valori di grandezze fondamentali (lunghezza, energia, ecc.) ottenibili come combinazioni delle costanti fondamentali c, G, e h, furono introdotti da Planck nel 1899 [Pla99] (In realtà nel 1899 la costante h introdotta da Planck, che l'autore identificava con la costante universale b introdotta da Wien, non aveva ancora nessun legame con la quantizzazione.). Per questi si parla oggi di lunghezza di Planck, energia di Planck, ecc.

'Sembra inevitabile che questa lunghezza debba giocare un qualche ruolo fondamentale in ogni *interpretazione* completa della gravitazione' ([Edd18a]; pag. 36). Come sottolineato anche da Rickles, ([Ric13]; pag. 160, nota 22), il valore proposto da Eddington ha decisamente un ordine di grandezza molto differente da quello della lunghezza di Planck, il cui valore attuale [PJMN12] è $l_P = 1.616199(97) \times 10^{-33} cm$. A nostro avviso, per dare una possibile spiegazione a questo fatto, è necessario articolare il seguente ragionamento. Innanzitutto, prima di menzionare la lunghezza minima, Eddington parla della relazione fra la gravitazione e la teoria ondulatoria della materia. L'autore sembra convinto che per chiarire tale relazione sia necessario avere 'una teoria *meccanica* della gravitazione' ([Edd18a]; pag. 36) che possa evidentemente dar conto della forza gravitazionale in tali termini. Eddington ha in mente la teoria di Osborne Raynolds [Rey03], e infatti, poco dopo il commento sulla lunghezza minima chiude l'intervento precisando: 'Per esempio, nella teoria della materia di Osborne Reynolds compare proprio tale lunghezza, che corrisponde al libero cammino dei granuli del mezzo [di cui è composta la materia] [...] fino a quando non potremo apprezzare i dettagli della struttura [della materia] fino alla quadrillionesima o alla quintillionesima parte del centimetro, la più sublime di tutte le forze della Natura rimarrà fuori dall'ambito delle teorie della fisica'[5] ([Edd18a]; pag. 36). Come riporta Julio M. Ottino , infatti, 'Reynolds credeva che l'Universo fosse riempito di granuli ed era arrivato addirittura a calcolarne la grandezza [...] con un cammino libero medio di $8.612 \times 10^{-28} cm$' ([Ott06]; pag. 4168). A nostro avviso, per quanto possa sembrare inusuale, ai tempi della nota riportata su *Nature* probabilmente Eddington non aveva ancora fatto il calcolo esplicito di tale lunghezza, perché anche con i valori numerici dell'epoca il calcolo avrebbe restituito un ordine di grandezza simile a quello attuale, e ha semplicemente riportato il valore proposto da Reynolds ritenendolo evidentemente *plausibile*, senza però identificarlo esplicitamente con la formula della lunghezza di Planck che non compare nella nota. A riprova ulteriore di quanto affermiamo, consideriamo il lavoro di rassegna sulla RG di Eddington, poco sopra menzionato. In tale lavoro l'autore considera i tre test della RG, ovvero la misura dell'anomalia nella precessione del perielio di Mercurio, la deflessione della luce per azione di un corpo materiale e il red-shift gravitazionale, una sorta di "effetto Doppler" previsto per un atomo che emette radiazione elettromagnetica trovandosi in punti diversi di un campo gravitazionale[6]. Il lavoro di

[5]Anche per Eddington dunque, come per Crehore o Décombe, era necessario "spiegare" la forza gravitazionale attraverso una teoria fondamentale della materia. Eddington fa riferimento al quadrillionesimo e al quintillionesimo di centimetro che, nel Regno Unito, corrispondono rispettivamente a $10^{-24} cm$ e $10^{-30} cm$.

[6]Il confronto usuale si fa considerando un atomo che si trova nella fotosfera del Sole e lo stesso atomo sulla terra.

Eddington venne stampato in due distinte edizioni: la seconda uscirà nel 1920, ovvero dopo la spedizione tenuta dallo stesso in occasione dell'eclissi del 1919, il cui scopo era appunto quello di verificare sperimentalmente il secondo test, misurando la deflessione della luce. Nella seconda edizione[7], [Edd20], ovvero due anni dopo la nota pubblicata su *Nature*, l'esito del terzo test risultava ancora ambiguo[8]: a tal proposito Eddington osserva che se l'effetto non fosse confermato e volendo comunque salvare la teoria di Einstein, si potrebbe dedurre che la RG potrebbe valere per la materia (macroscopica) e non per ogni singolo atomo. Se invece l'effetto venisse confermato, continua Eddington, il test in questione potrebbe essere una prima conferma del fatto che la RG vale anche per i fenomeni *quantistici* ([Edd20]; pag. 58). Per concludere la questione riguardo alla lunghezza minima, prendiamo in considerazione le osservazioni fatte dall'autore nell'ultima pagina del proprio volume ([Edd20]; pag. 91). Come segnalato da Gorelik [EK92], qui Eddington evidenzia come non sia stata ancora *capita* né *cercata* la causa ultima della gravitazione, e sottolinea che la teoria di Einstein è in un certo senso indipendente da questa spiegazione ultima, esattamente come accade ai nostri giorni. L'autore sottolinea anche esplicitamente come la RG *postuli* un collegamento fra il campo gravitazionale e la misura dello spazio ed è a questo punto che Eddington ripropone le quantità introdotte da Planck, senza chiamarle ancora in questo modo. Eddington presenta però il valore $4 \times 10^{-33} cm$, che ha lo stesso ordine grandezza del valore attuale, e che questa volta è evidentemente ottenuto grazie al calcolo esplicito. Dunque l'autore è ancora convinto del fatto che per comprendere il significato di tale lunghezza sia necessario formulare una teoria *ultima* della materia che arrivi a fare delle congetture fino a tale scala. Come due anni prima, Eddington chiama in causa Reynolds, precisando che quello del fisico ed ingegnere inglese è l'unico approccio che *cerca* di formulare tale teoria ed è l'unico in cui emerge una forma simile di "granulosità". Ma ora Eddington distingue tra il valore suggerito dalla combinazione dimensionale delle costanti fondamentali, che rappresenta la *vera* lunghezza minima, e quello ricavato da Reynolds.

Torniamo indietro di un anno al 1919, anno nel quale Einstein intraprende ufficialmente la ricerca di una teoria di campo unificata[9]: Stachel suggerisce che in questo periodo si concretizzò un cambiamento di atteggiamento verso la teoria dei quanti. In particolare, da

[7]Si tratta dell'unica che abbiamo potuto consultare. Risulterà interessante cercare eventuali riferimenti alla teoria di Reynolds anche nell'edizione del 1918.

[8]Sottolineiamo che su Nature appare sempre nel 1920 una nota di Joly [Jol20] che pone un problema simile, ma nell'ambito della Relatività Ristretta, perché si parla dell'effetto di dilatazione dei tempi dovuto al moto di atomi che emettono radiazioni alfa. La questione della validità di entrambe le teorie di Einstein a livello microscopico non era ancora universalmente accettata.

[9]In particolare la ricerca di una teoria di campo che unificasse la RG e la teoria di Maxwell.

questo momento Einstein opererà nel proprio programma di ricerca un cambio di priorità: mentre prima di quest'anno sembrava accettare che la teoria dei quanti potesse influenzare la teoria della relatività, da questo momento cercherà sempre di trovare una teoria classica che possa rendere conto dei nuovi fenomeni microscopici[10].

Tra i fisici che si occupano dell'unificazione tra teoria della gravitazione, accettando o meno la RG come punto di partenza, e teoria elettromagnetica di Maxwell, si fa strada l'idea che la teoria dei quanti debba giocare un ruolo essenziale. Arthur Haas [Haa19], nel gruppo di coloro che accettano la formulazione di Einstein come punto di partenza per la forza gravitazionale, esprime esplicitamente questa convinzione definendo l'operazione di introdurre la teoria dei quanti all'interno della RG come un *passo importante*. Haas dichiara anche che tale introduzione potrebbe avvenire tramite una *discretizzazione* dello spazio-tempo. La visione di Haas riassumeva in sè l'approccio di Hilbert e alcune idee, che potremmo oggi definire profetiche, di Riemann; vediamo in che modo. Anche Haas mira ad una sistematizzazione *assiomatica* della fisica, esattamente come proposto da Hilbert[11] e riprende le idee suggerite dallo stesso in [Hil15], ovvero la questione dell'unificazione tra gravità ed elettromagnetismo. Haas, nel proprio articolo del 1919, dopo aver fatto una panoramica dettagliata della situazione in cui si trova la fisica del periodo, cerca di mettere in luce il ruolo del metodo assiomatico *anche* nella ricerca dell'armonizzazione tra la teoria della gravitazione e la fisica quantistica[12]. Per arrivare a questo, Haas comincia

[10]L'analisi del lavoro di Einstein in merito alla ricerca di una teoria di campo unificata esula dallo scopo del nostro lavoro. Come vedremo nel seguito del capitolo, però, avremo modo di occuparci di un particolare tentativo di unificazione, cominciato con un articolo di Theodor Kaluza [Kal21]. Analizzando questo lavoro ci siamo fatti l'idea che una possibile ragione del cambiamento di approccio di Einstein possa essere collegata con il suo scambio di idee proprio con Kaluza. Quest'ultimo aveva spedito proprio ad Einstein il lavoro già nel 1919 ed Einstein stesso lo comunicherà per la pubblicazione verso la fine dell'anno seguente. Grazie all'introduzione di una quinta dimensione spaziale e di alcuni postulati, Kaluza riesce a ottenere una descrizione "unificata" delle due forze allora conosciute, quella gravitazionale e quella elettromagnetica. Tralasciando, almeno per ora, gli aspetti tecnici, quello che colpisce leggendo gli ultimi paragrafi dell'articolo, è che Kaluza esplicitamente mette in guardia il lettore dal fatto che la nuova teoria dei quanti potrebbe mettere in pericolo la propria formulazione penta-dimensionale. Se sia questo il motivo per il cambio di atteggiamento di Einstein, non può certo essere dimostrato; sicuramente l'atteggiamento di Kaluza precorre quello di Einstein e sarà opposto a quello di Oskar Klein, come vedremo nel prossimo capitolo.

[11]Per Hilbert era importante assiomatizzare tutte le teorie matematizzate: 'Le ricerche dei fondamenti della geometria suggeriscono il problema: trattare nello stesso modo, per mezzo di assiomi, quelle scienze fisiche nelle quali la matematica gioca una parte importante, prima di tutto la teoria della probabilità e la meccanica' (Sesto dei 23 problemi presentati a Parigi da Hilbert al Congresso Internazionale dei Matematici, 1900 [Hil00]).

[12]Siamo debitori nei confronti del Prof. Kurt Lechner per l'aiuto nella traduzione e la comprensione

sottolineando come il metodo assiomatico abbia già permesso ad Hilbert di enunciare un teorema che traccia la strada dell'unificazione tra gravità ed elettromagnetismo. Spendiamo quindi ora alcune parole riguardo a questo teorema contenuto nella memoria di Hilbert [Hil15], utilizzando però un linguaggio moderno [Pau82]. All'inizio del proprio lavoro Hilbert enuncia i primi due assiomi della teoria della gravitazione, ovvero il principio di minima azione e l'invarianza locale per diffeomorfismi locali. Il primo asserisce che le equazioni dei campi si ottengono annullando la variazione di un funzionale detto azione. Ogni campo deve essere variato in maniera indipendente: grazie a questo principio variazionale si ottengono per esempio le equazioni di Einstein in RG per il campo gravitazionale[13]. Il secondo assioma è la "traduzione" matematica del principio di equivalenza di Einstein ed esprime la libertà di trovare, per ogni regione spazio-temporale infinitamente piccola, un sistema di coordinate in cui la variazione spaziale e temporale della gravità possa venire trascurata. Matematicamente questa libertà si esprime con l'ausilio di 4 funzioni, perché stiamo considerando uno spazio-tempo quadridimensionale, che servono proprio a *riparametrizzare* le coordinate della regione spazio-temporale. Il principio di equivalenza si traduce nell'invarianza del funzionale d'azione sotto l'azione di questo tipo di trasformazioni. Da questi fatti segue, ed è questo il teorema a cui fa riferimento Haas, che in generale, in una teoria relativistica, per m incognite devono esserci solo $m - 4$ equazioni indipendenti. Per esempio, nel caso del campo gravitazionale nel vuoto, le incognite sono i dieci potenziali gravitazionali racchiusi nel tensore simmetrico $g_{\mu\nu}$, che rappresenta la metrica dello spazio-tempo, e le equazioni che bisogna risolvere per determinare i potenziali sono le equazioni di Einstein. Ma il teorema, in questo caso[14], è equivalente alla richiesta che la quadri-divergenza del tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$ sia identicamente nulla e questo conduce a 4 identità[15] e dunque le equazioni indipendenti, necessarie per determinare i dieci potenziali, sono solamente sei[16]. Oggi sappiamo che se consideriamo per esempio il solo campo elettromagnetico, il teorema di Hilbert corrisponde alla conservazione del tensore energia-impulso. Se si considera invece, come nel caso preso in esame da Hilbert e da Haas, un sistema in cui sono presenti sia il campo gravitazionale che quello elettromagnetico, il teorema suggerisce che il numero di potenziali

del pensiero espresso da Haas.

[13] Si veda la sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici.*

[14] Ovvero nel caso del campo gravitazionale libero, descritto dalla densità di Lagrangiana $\mathcal{L} = -R$.

[15] Tali identità sono oggi note anche col nome di *identità di Bianchi* e la loro conoscenza non era scontata all'epoca [Pai91].

[16] Più precisamente tali identità vincolano il numero delle condizioni iniziali necessarie per risolvere il problema di Cauchy del moto: solo sei delle dieci equazioni di Einstein per il campo gravitazionale libero dipendono dalle derivate seconde rispetto al tempo e per dimostrare questo fatto si usano appunto le identità di Bianchi.

indipendenti che generano i campi non sia 14, ovvero 10 per quello gravitazionale e 4 per quello elettromagnetico, ma solamente 10, poiché il teorema riduce il numero di equazioni indipendenti da 14 a 10. Hilbert ed Haas interpretano erroneamente[17] questo fatto come un elemento di *unione* tra i due campi fisici e di conseguenza come un indizio del fatto che la determinazione di tutte le leggi fisiche possa ricondursi al problema della ricerca di una metrica dello spazio-tempo[18]. Con queste premesse anche Haas, come Hilbert, suggerisce che un'attenta analisi di questo problema potrebbe portare addirittura alla risoluzione dei problemi attuali come per esempio l'introduzione della teoria dei quanti all'interno del quadro della RG. Il problema della geometria colpisce molto Haas, poiché lega il problema dei fondamenti della fisica col problema dei fondamenti della geometria, ed è in questo aspetto che riprende le idee per la tesi dell'abilitazione di Riemann del 1854 [Rie67], pubblicata postuma[19] nel 1867. Nel suo lavoro Riemann parla di varietà n-dimensionali continue e *discrete*[20]. Haas prende spunto da questa osservazione per fare le seguenti speculazioni. Il tensore energia-impulso della materia ha le dimensioni di una densità[21] di energia e il prodotto di un'energia per un tempo ha le dimensioni di un'azione. Se noi integriamo dunque il tensore energia-impulso su una porzione arbitraria dello spazio-tempo quadridimensionale, continua Haas, otteniamo una quantità che ha le dimensioni di un'azione moltiplicata per la velocità della luce. Se supponiamo che

[17]Le identità di Bianchi sono indipendenti dalla formulazione del teorema enunciato da Hilbert e continuano a sussistere una volta postulata come azione l'azione di Einstein-Hilbert. Il legame non è quindi fra gravità ed elettromagnetismo, ma sempre fra i potenziali che generano il campo gravitazionale.

[18]Oggi sappiamo che per esempio la metrica di Reissner-Nordström, che si ottiene appunto risolvendo simultaneamente le equazioni di Einstein e di Maxwell, descrive lo spazio-tempo prodotto da una distribuzione di massa elettricamente carica, ma mostra solamente come i due fenomeni siano tra loro compatibili, considerandoli comunque *separati* come origine. Come vedremo più avanti, alcuni autori cercheranno di usare proprio tale metrica per descrivere l'atomo e cercare così di estendere il campo di indagine della RG ai fenomeni microscopici.

[19]Si veda [Rie73] per la traduzione in inglese.

[20]Ai tempi del lavoro di Riemann ovviamente non si conoscevano i fenomeni quantistici: Riemann fa riferimento a varietà astratte i cui elementi possono essere discreti oppure continui, pensando a queste ultime come al caso più generale che poi lui stesso studierà. La cosa interessante e forse poco conosciuta è che Riemann fosse molto interessato al ruolo che la fisica poteva giocare nella determinazione delle proprietà dello spazio e questo fatto viene messo chiaramente in luce in questo scritto. Molti scorgono in alcune sue affermazioni contenute in questo articolo una sorta di anticipazione del lavoro di Einstein. Infatti, Riemann ritiene che mentre i problemi dell'incommensurabilmente grande sono oziosi per la comprensione della natura, quelli dell'incommensurabilmente piccolo possono gettare luce sul fondamento delle relazioni metriche dello spazio. Alla fine dello scritto l'autore mette il destino delle proprie affermazioni nelle mani della *fisica*, mantenendo quindi una sorta di cautela, dovuta al fatto che le speculazioni fatte in ambito matematico sconfinano in un diverso campo d'indagine.

[21]Ovvero un'energia diviso per un volume tridimensionale.

la varietà dello spazio-tempo sia *discontinua*, sottolinea Haas, si potrebbe dunque forse spiegare l'esistenza di un *quanto d'azione elementare*[22]. Haas si spinge anche più in là. Infatti azzarda anche che la discretizzazione dello spazio-tempo potrebbe essere alla base di una possibile spiegazione dell'esistenza del *quanto elementare di carica elettrica*[23]. La panoramica di Haas si chiude sottolineando, come osservato anche da Rickles [Ric05], che un compito importante dell'assiomatizzazione sarà anche quello di spiegare l'esistenza delle costanti fondamentali della fisica. Questa spiegazione, conclude Haas citando ancora Hilbert, dovrebbe essere anch'essa collegata con la questione dell'integrazione tra 'la gravità, l'elettricità e l'ipotesi dei quanti' ([Haa19]; pag. 750).

Oltre alle considerazioni di carattere più generale che abbiamo appena visto, alcuni autori si concentrano su modelli che potremmo definire "più concreti". Infatti uno dei filoni di ricerca attivo nel periodo antecedente la nascita della Meccanica Quantistica è quello dei modelli *planetari* dell'atomo[24]. In particolare i tentativi di generalizzare il modello di Bohr cominciano a coinvolgere anche la RG, sia per studiarne gli effetti sul mondo microscopico sia, come vedremo, per trovare un'eventuale spiegazione dell'esistenza di orbite stazionarie. Nel 1921 George Barker Jeffery [Jef21] scrive una soluzione per le equazioni di Maxwell e di Einstein[25] che per lui corrisponde alla metrica generata da 'una singolarità *sia* del campo elettromagnetico che gravitazionale' ([Jef21]; pag. 126). Jeffery interpreta quindi l'elemento di linea come associato alla metrica generata da una particella carica[26]. Jeffery giustifica il proprio approccio sottolineando come nonostante la RG abbia riscosso successi nell'ambito della fisica del macrocosmo, tale teoria non è stata ancora applicata con successo al microcosmo. Per questo motivo, nel seguito del proprio lavoro, l'autore si chiede quali siano le possibili orbite di un elettrone, inteso come una carica

[22] Anche se non viene esplicitato il simbolo della costante di Planck, Haas si riferisce proprio ad h, perché usa la parola a cui h viene associata, in tedesco, in questo periodo: *Wirkungsquantum.*

[23] In questo frangente Haas cita, curiosamente, anche il lavoro di Felix Ehrenhaft che, contraddicendo gli esperimenti di Robert Andrews Millikan, ipotizzava l'esistenza di quantità di carica più piccole di quella dell'elettrone. Haas si augura che un chiarimento sulla possibile esistenza di uno spazio-tempo discontinuo possa fare luce sulla diatriba tra Ehrenhart e Millikan, diatriba che in realtà avrà conseguenze spiacevoli per quest'ultimo [Goo10].

[24] Ricordiamo che il principio di indeterminazione verrà formulato solo nel 1927.

[25] Questa soluzione, come già detto, è oggi nota come la metrica di Reissner-Nordström: Jeffery stesso ammette nell'articolo di aver riottenuto gli stessi risultati di Nordström (1916), non essendone a conoscenza.

[26] Ricordiamo che in questo periodo si conoscevano solamente protoni ed elettroni.

di prova[27], nel campo prodotto da un nucleo atomico[28]. In particolare questo articolo è interessante perché presentando il proprio modello atomico, Jeffery riprende la discussione iniziata da Einstein sull'emissione di onde gravitazionali da parte dell'atomo. Jeffery si limita a scrivere l'equazione che governa il moto di una carica negativa puntiforme che compie solo orbite equatoriali[29]. L'equazione delle orbite scritte, permette a Jeffery di notare come il moto dell'elettrone sarà sicuramente periodico, ma con un periodo che in generale non sarà di 2π, con la conseguenza che le orbite non saranno chiuse. In particolare, l'autore intuisce che rilassando l'approssimazione che l'elettrone sia una *carica di prova* si otterranno delle modifiche al *campo* risultante e come conseguenza in generale le orbite non potranno essere nemmeno periodiche. Per spiegare quest'ultimo fatto, Jeffery fa riferimento a due possibili spiegazioni. La prima è che la non periodicità corrisponda proprio all'instabilità dell'atomo causata dell'emissione di onde gravitazionali, come proposto da Einstein nel 1916. La seconda spiegazione, chiama in causa invece la fisica quantistica e verrà ripresa da altri autori, ma sopravviverà solo fino alla nascita della Meccanica Quantistica[30]: 'La soluzione completa del problema a due corpi porterà ad un'equazione in cui le orbite non saranno in generale periodiche, ma che *possono* in certe circostanze essere periodiche. Questo produrrebbe le orbite "quantizzate". Se dovesse emergere che le orbite non-periodiche tendono a orbite periodiche, il segreto dell'ipotesi dei Quanti verrebbe messo a nudo. Questa, ovviamente, è una mera speculazione, ma ci serve per sottolineare l'importanza di ottenere soluzioni esatte delle equazioni di Einstein, corrispondenti a *due* singolarità' ([Jef21]; pag. 130). La speranza di Jeffery sembra quindi quella di trovare nella soluzione generale del problema classico a due corpi la spiegazione dell'esistenza di orbite periodiche, fino ad allora giustificata solo dalle ipotesi della fisica quantistica.

Come abbiamo osservato nella nota ([8]), l'applicazione della teoria di Einstein al microcosmo non era una questione scontata. Nonostante questo l'approccio di Jeffery non è isolato e viene condiviso nello stesso anno da Oliver Lodge [Lod21]. Nella breve comunicazione che Lodge fa a Nature, per mettere in evidenza l'articolo di Jeffery, Lodge suppone che la metrica di Reissner-Nordström descriva lo spazio-tempo a livello microsco-

[27]L'autore sottolinea che intende trascurare gli effetti che potrebbero derivare sia da una modifica del campo elettromagnetico sia del campo gravitazionale del nucleo. Tale assunzione, come sottolinea Jeffery, risulta assolutamente giustificata nel secondo caso, data l'enorme differenza di massa tra protone ed elettrone, e dichiara anche che senza questa approssimazione non riesce ad ottenere dei risultati analitici.

[28]L'autore ha in mente l'atomo di idrogeno ed il campo del nucleo è quindi rappresentato dall'elemento di linea appena scritto.

[29]Jeffery si occuperà dello studio completo delle orbite solo cinque anni più tardi [BJ26].

[30]Dopo il 1926, infatti, non si parlerà quasi più di *orbite* elettroniche.

pico, generato da un elettrone. Il fisico inglese tenta addirittura di capire se l'introduzione della RG può in qualche modo essere d'aiuto per indagare la struttura stessa dell'elettrone. Uno dei problemi concettuali dibattuti in questo periodo era quello dell'origine della massa delle particelle cariche ed in particolare l'origine *elettromagnetica* della massa. Lodge sottolinea come la modifica alla soluzione delle equazioni di Einstein introdotta da Reissner-Nordström 'non sia pensabile come conseguenza della massa elettromagnetica' ([Lod21]; pag. 392). La deduzione di Lodge si basa sul fatto che nell'elemento di linea le correzioni alla metrica piatta hanno due segni opposti[31]. Viene anche sottolineato come questa modifica alla metrica di Schwarzschild non sia importante per dimensioni astronomiche. Il contesto sembra dunque suggerire, seppur in maniera non esplicita, che la nuova metrica sia una specie di risultato da attribuirsi agli effetti del mondo microscopico, in linea con la congettura fatta da Riemann[32].

Non tutti gli approcci planetari cercavano di conciliare da subito RG e teoria dei quanti. Nello stesso anno anche George Jaffé [Jaf22], come Jeffery, lavora sul problema del microcosmo, rappresentato dalla ricerca di una descrizione del campo gravitazionale dell'elettrone, e prende come punto di partenza l'approccio di Sommerfeld [Som16] applicando la teoria di Einstein al modello atomico di Bohr-Rutherford. Anche Jaffé adotta la metrica di Reissner-Nordström per descrivere l'atomo, ma il lavoro dell'autore è completamente classico: Jaffé fa un solo isolato accenno ai numeri quantici, ma il passaggio non ci sembra rilevante all'interno dell'articolo.

Nel 1922, infine, stimolati dalle idee di Eddington sopra menzionate sul legame tra la costante di Planck e le altre costanti della fisica, compaiono dei lavori che potremmo definire di "numerologia". Non si tratta infatti di articoli strettamente collegati alle caratteristiche quantistiche del campo gravitazionale, bensì di speculazioni sulla possibile relazione tra c, G e $\hbar$ [Lun22], legate ai valori *numerici* allora conosciuti delle costanti

[31]Riportiamo l'elemento g_{00} di tale metrica, presente nella sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici*, $g_{00} = -\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right)$. La differenza di segno tra il secondo ed il terzo termine, per Lodge, è significativa del fatto che quest'ultimo non possa essere pensato come derivante da una correzione elettromagnetica della massa.

[32]Oliver Lodge è stato decisamente un esempio di figura poco convenzionale nel panorama della fisica inglese dell'epoca. Pur rimanendo un sostenitore del concetto di etere anche dopo l'affermazione delle teorie di Einstein, il fisico inglese cominciò ad occuparsi proprio della RG e delle sue applicazioni dopo che Sir Frank Watson Dyson aveva annunciato nel 1919 i risultati della spedizione di Sir Arthur Eddington per misurare l'effetto di curvatura della luce, confermando così le predizioni di Einstein. In particolare Lodge, attratto dai problemi dell'origine elettromagnetica della massa e colpito dal lavoro di Jeffery, si ritrova a fare una brevissima incursione nella storia della GQ. Il lavoro del fisico inglese contiene anche altre intuizioni: per un approfondimento si veda, per esempio, [Roc15] e [Row90].

ritenute fondamentali per la fisica[33].

1.2 1923-1924: Wereide, Eckart e Vallarta.

Uno dei pilastri teorici della fisica quantistica prima del 1925 era rappresentato dalle condizioni di quantizzazione oggi note come *condizioni di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld*, o anche come *condizioni di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld*, perché vennero formulate indipendentemente da William Wilson ed Arthur Sommerfeld [Wil15] [Som16] e sono una generalizzazione delle regole di quantizzazione proposte da Bohr per il proprio modello atomico[34]. Tali regole di quantizzazione possono essere formulate nel seguente modo. Se consideriamo un sistema fisico in cui le variabili che descrivono il sistema sono funzioni periodiche del tempo (chiamiamole per esempio q_j con $j = 1 \dots N$), e se chiamiamo p_j le variabili a queste coniugate[35], per ogni coppia di queste variabili sussistono le seguenti condizioni di quantizzazione[36] (Wilson-Sommerfeld):

$$I_j = \oint p_j \, dq_j = nh \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

dove l'integrazione è estesa ad un periodo. Ricordiamo che in meccanica classica hamiltoniana le variabili I_j vengono chiamate anche *variabili azione*, mentre le variabili ad esse coniugate ϕ_j vengono detto *variabili angolo* e che per i sistemi detti *integrabili*[37] la Hamiltoniana del sistema si può scrivere in funzione delle sole variabili d'azione. Abbiamo visto come alcuni autori avessero già cercato di introdurre gli strumenti della RG per studiare la geometria dello spazio-tempo a livello microscopico. In tale contesto possiamo distinguere due differenti approcci: il primo consiste nel chiedersi se le condizioni di quantizzazione possano derivare da un contesto classico, approccio suggerito appunto nel precedente paragrafo da Jeffery, il secondo invece consiste nell'assumerle, seppure provvi-

[33] Le costanti ritenute fondamentali in questo periodo, come per esempio appare nell'articolo citato, sono molte di più delle tre sopra menzionate.

[34] Ricordiamo che per ottenere orbite quantizzate Bohr aveva postulato che il momento angolare L dell'elettrone fosse quantizzato nel seguente modo: $L = n\hbar \quad n \in \mathbb{N}$.

[35] Detta H la funzione hamiltoniana del sistema fisico, le variabili q_j e p_j sono legate dalle equazioni di Hamilton: $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$, $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$.

[36] Le condizioni di quantizzazione scritte in questa forma risultano valide *solamente* sotto determinate condizioni. La questione, ben analizzata in [Gra93], fu oggetto di un contributo poco noto di Einstein [Ein17] e la riprenderemo più avanti, in questo stesso paragrafo, discutendo i contributi del periodo.

[37] Per la definizione di sistema integrabile facciamo riferimento, come in [Gra93], alla nozione moderna di integrabilità espressa dal teorema di Liouville-Arnold. Si veda la sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici* per maggiori dettagli.

soriamente, come postulato e cercare di capire come si possano conciliare con i principi fondanti della RG,eventualmente modificandole.

Nel 1923, Thorstein Wereide si inserisce nello stesso filone di Jeffery e Jaffé [Wer23], cercando cioè di capire quale sia la metrica dello spazio-tempo a livello atomico, ed esprime esplicitamente la convinzione che è necessario applicare lo stesso principio di relatività sia al macrocosmo che al microcosmo [Kra00]. Wereide però non cita né il lavoro di Jeffery né quello di Jaffé. Diversamente da Jeffery, che potremmo inserire nel primo dei due approcci sopra esposti, Wereide è più incline al *secondo* approccio. Inoltre Wereide non tenta di risolvere le equazioni di Einstein e Maxwell; decide piuttosto di seguire un approccio più *euristico*, già usato da Eddington nelle applicazioni della RG ai fenomeni astronomici. L'intento principale dell'autore è quello di seguire la strada tracciata da Sommerfeld ([Som16]; pag. 349), il quale aveva spiegato con successo la struttura fine dell'idrogeno grazie all'utilizzo della Relatività Ristretta. Come accennato nel precedente paragrafo, la costruzione di modelli planetari dell'atomo cominciano a coinvolgere anche la teoria della gravitazione di Einstein. L'idea di Wereide è proprio quella di introdurre la RG al posto della Relatività Ristretta, come lo stesso autore afferma all'inizio del lavoro: 'Il principio di relatività applicato da Sommerfeld, d'altra parte, non è il principio generale ma quello speciale [...].In prima approssimazione la correzione relativistica di Sommerfeld è senza dubbio sufficiente, ma sarebbe più soddisfacente se tale approssimazione si potesse ottenere applicando il principio *generale* di relatività' ([Wer23]; pag. 392). Per poter raggiungere il proprio scopo l'autore riflette sulle seguenti domande: 'Qual è la forma esatta dell'elemento di linea ds dell'elettrone? Quali sono le forme esatte dell'energia e del campo dell'elettrone? Come vanno formulate le condizioni quantistiche?' ([Wer23]; pag. 392). Per rispondere alla prima domanda Wereide usa, come detto, un approccio ispirato ai metodi di Eddington. Il punto di partenza per descrivere orbite equatoriali[38] è una metrica della forma:

$$ds^2 = -\gamma\, c^2 dt^2 + \gamma'\, dr^2 + r^2 d\varphi^2 \ ,$$

in cui compaiono γ e γ', funzioni della sola coordinata radiale r, esprimibili per l'autore come serie di potenze nella variabile $\frac{1}{r}$:

$$\gamma = 1 + a\frac{k}{r} + b\frac{k}{r^2} + \dots \ ; \tag{1.2}$$

$$\gamma' = 1 + a'\frac{k}{r} + b'\frac{k}{r^2} + \dots \ , \tag{1.3}$$

[38]Usualmente tali orbite si ottengono ponendo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Si veda la sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici.*

dove $a, b, a', b', \ldots$ sono sono numeri puri, mentre k è una costante universale. Wereide vuole mettere in evidenza la differenza tra i due diversi tipi di costanti. Mentre le costanti $a, b, a', b', \ldots$ verranno determinate con il confronto con l'esperienza, in maniera tale che anche la nuova soluzione renda conto della struttura fine, la costante k avrà le dimensioni di una lunghezza ed è definita, in maniera analoga a quanto accade per la metrica di Schwarzschild, dall'identificazione del rapporto $-c^2\dfrac{k}{r}$ con il potenziale del campo prodotto dal nucleo[39]. La costante k corrisponde per l'autore ad una sorta di *lunghezza caratteristica* del sistema fisico che Wereide scrive alla fine del lavoro e che per l'atomo di idrogeno risulta essere appunto dell'ordine di grandezza delle dimensioni del nucleo atomico. Per rispondere alla seconda domanda Wereide generalizza la formula per l'energia di una particella di massa m della Relatività Ristretta, $\mathcal{E} = cp^0 = mc^2\dfrac{dx^0}{d\lambda}$, con $\mathcal{E}' = mc^2\gamma\dfrac{dx^0}{d\lambda}$ ([Wer23]; pag. 393), dove compare la funzione γ definita in (1.2). Il punto più interessante del lavoro è la discussione della risposta alla terza domanda sopra formulata, perché l'autore comincia ad introdurre le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld, con le quali quantizzerà anche la nuova formula per l'energia appena scritta. Wereide afferma che l'introduzione della RG *modifica esplicitamente* la formulazione di alcune delle condizioni di Wilson-Sommerfeld. Si tratta in particolare della regola di quantizzazione per le variabili coniugate r e p_r, che rappresentano il raggio e la quantità di moto, che Wereide suppone debba essere modificata nel seguente modo: $\oint \gamma' p_r dr = nh$ rispetto alle (1.1). Per l'autore le due variabili coniugate sono collegate dalla relazione $p_r = m\frac{dr}{d\lambda}$, dove compare il tempo proprio geometrizzato, che è invariante per diffeomorfismi come l'elemento di linea ds, al posto dell'usuale dt, come tentativo di generalizzazione al caso relativistico. Inoltre compare, in maniera non giustificata, un'ulteriore modifica dovuta appunto all'introduzione della RG, attraverso il fattore γ' che è lo stesso che compare nella metrica *atomica*. A tal proposito l'autore ci mette a conoscenza del fatto che il risultato è conseguenza di una discussione su tale argomento con Bohr e che i calcoli, che in qualche modo dovrebbero giustificare tale scelta, sarebbero opera di Hendrik Kramers ([Wer23]; pag. 394). Supponiamo che si tratti di comunicazioni private, poiché l'autore non fornisce alcun riferimento bibliografico. Una volta affrontate queste questioni, Wereide scrive delle metriche che però non contengono al loro interno la costante di Planck. Come detto, l'obiettivo dell'autore è infatti quello di utilizzare le nuove condizioni di quantizzazione "generali" per quantizzare l'energia[40].

[39] Ricordiamo che nel caso della la metrica di Schwarzschild, considerata la nostra segnatura e detta M la massa che crea il campo, si avrebbe $\gamma = 1 + a\frac{k}{r}$ con $a = -2$ e $k = \dfrac{MG}{c^2}$, poiché $-c^2\dfrac{k}{r} = \dfrac{MG}{r}$.

[40] Non riportiamo l'espressione dell'energia, perché da quanto ci risulta l'autore non tornerà più su tale questione.

Nel 1924 Carl Eckart [Eck24] suggerisce una strada che si inserisce decisamente nel primo dei due approcci menzionati all'inizio del paragrafo, benché l'autore non si occupi di modelli planetari dell'atomo, perché fa uso della RG per cercare di spiegare un fenomeno che oggi sappiamo non essere di natura classica. Eckart prende in esame l'effetto Compton e cerca di darne una spiegazione coinvolgendo la teoria ondulatoria, alternativa a quella corpuscolare formulata dallo stesso Compton [Com23]. In questo contesta cerca di interpretare l'influenza del campo gravitazionale sulle frequenze di un'onda monocromatica come un possibile punto di partenza per *spiegare* l'origine delle 'equazioni quantistiche' ([Eck24]; pag. 595). Più precisamente, Eckart si occupa dell'influenza del campo gravitazionale non-statico sulla frequenza di un'onda monocromatica: le formule che ottiene assomigliano molto a quelle dell'effetto Compton, ma ovviamente, come sappiamo oggi, non possono essere identiche. Il lavoro di Eckart ci interessa perché l'autore, nella parte finale dell'articolo, asserisce esplicitamente che grazie al suo punto di vista 'si può interpretare la non-staticità del campo gravitazionale come la causa del cambiamento di direzione dell'elettrone con conseguente emissione di un fotone nell'effetto Compton' ([Eck24]; pag. 595). La speranza di Eckart è che poiché 'nessuno ha mai tenuto in considerazione l'influenza che ha sull'elettrone il cambiamento di curvatura dello spazio nell'effetto fotoelettrico [...] un ulteriore approfondimento di quest'ipotesi potrebbe portare a capire se sia questa l'origine delle *equazioni quantistiche*'[41]. Si tratta quindi di una speculazione basata sullo strumento dell'analogia, di una possibile spiegazione degli effetti quantistici a partire dalla teoria di Einstein.

La discussione dell'inclusione della RG dei modelli planetari dell'atomo viene presa invece in seria considerazione dal fisico messicano Manuel Sandoval Vallarta, che nello stesso anno pubblica la propria tesi di dottorato [Val24a]. Nel proprio lavoro Vallarta riprende i lavori di Jeffery e Jaffé discussi nel precedente paragrafo, perché cerca di applicare la teoria di Einstein a livello atomico, ma a differenza degli altri autori, spende una parte considerevole della propria tesi per discutere come conciliare la RG con la teoria dei quanti, affrontando sia il problema di un'eventuale origine *classica* delle regole di quantizzazione, sia il problema di conciliarle con i principi della RG. Vallarta preferisce il primo dei due approcci menzionati all'inizio del paragrafo, ma mantiene un atteggiamento di apertura anche nei confronti del secondo. Nel riassunto iniziale della tesi, l'autore annuncia esplicitamente che uno degli obiettivi del suo lavoro[42] è proprio quello di tentare

[41] Il corsivo è nostro.

[42] La tesi si occupa anche di altre questioni: spiegare perché Sommerfeld riesce a dar conto della struttura fine dell'atomo di idrogeno ricorrendo solo alla relatività ristretta mentre per spiegare la precessione del perielio di Mercurio è necessaria la RG; analizzare la fondatezza dell'ipotesi, emersa in quegli anni, di una possibile coesistenza, in un'unica regione dello spazio-tempo, di diverse curvature; studiare l'applica-

di 'portare la teoria dei quanti all'interno del quadro della relatività generale' ([Val24a]; pag. 6). Vallarta considera come riferimento, per quanto riguarda la teoria dei quanti, i postulati proposti da Reinhard Mecke[43] [Mec24], che spiegheremo a breve, e annuncia che in relazione al proprio obiettivo, ovvero 'portare la teoria dei quanti all'interno del quadro della relatività generale', il tentativo è *parzialmente riuscito*[44]: l'autore pensa di avere una spiegazione per l'esistenza di orbite *non-meccaniche*[45] nell'atomo e un'interpretazione *unitaria* del secondo postulato[46] di Bohr e del principio di corrispondenza, grazie proprio all'uso della RG. Quello che resta da fare, secondo Vallarta, è formulare in maniera alternativa proprio le condizioni di quantizzazione, corrispondenti ad uno dei tre postulati di Mecke[47], perché incompatibili con la struttura della RG. Il punto di vista di Vallarta è dunque quello di chi crede che sia la fisica quantistica a dover essere modificata e non la RG. Vediamo ora più in dettaglio alcuni passi della tesi in riferimento agli "annunci" fatti dall'autore nel riassunto iniziale. Vallarta riparte dall'approccio di Jeffery, citandolo, per studiare le orbite di un elettrone di carica e nel campo prodotto da un nucleo atomico[48] di carica E. L'autore commenta il proprio approccio sottolineando che tratterà l'elettrone come una *carica di prova* sia per il campo gravitazionale che per quello elettromagnetico prodotti dal nucleo. L'autore arriva a scrivere correttamente l'equazione delle orbite che, come nel caso kepleriano, sono orbite piane, ma a differenza di quello kepleriano non sono ellittiche. Vallarta mostra anche che, nel limite in cui effetti di curvatura siano trascurabili, il suo risultato riproduce quello di Sommerfeld. Un punto interessante, per l'autore, riguarda il fatto che le orbite da lui trovate, valide per l'atomo di idrogeno e per tutti gli atomi idrogenoidi, dipendono da delle funzioni matematiche dette *funzioni*

bilità al modello atomico di Bohr delle varie teorie delle perturbazioni di sistemi hamiltoniani, formulate all'epoca. Sarebbe sicuramente interessante analizzare più in dettaglio il lavoro fatto da Vallarta in questi ambiti, ma questo esula dallo scopo del nostro lavoro.

[43] Vallarta sottolinea come Mecke abbia *enunciato* tali postulati, senza tuttavia usarli.

[44] Ricordiamo che il principio di indeterminazione, cardine dell'incompatibilità tra il concetto classico e quantistico di traiettoria, verrà formulato solo nel 1927.

[45] Vedremo a breve cosa intende l'autore.

[46] Vallarta fa riferimento al postulato che riguarda il fenomeno di emissione e assorbimento di onde elettromagnetiche da parte dell'atomo: quando un elettrone *salta* tra due orbite stazionarie, l'atomo emette/assorbe un'onda monocromatica la cui frequenza ν è proporzionale alla differenza di energia ΔE tra le due orbite ($\Delta E = h\nu$).

[47] Come vedremo si tratta di un tentativo di generalizzazione delle condizioni di Wilson-Sommerfeld.

[48] Vallarta considera l'equazione geodetica per il moto dell'elettrone tenendo conto sia del campo gravitazionale, ovvero la metrica di Reissner-Nordström, che del campo elettromagnetico, che ricordiamo essere $mc\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}u^\nu u^\rho = -\frac{e}{c}F^\mu{}_\nu u^\nu$ (Per il significato dei simboli si riveda la sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici*).

ellittiche[49], che sono delle funzioni periodiche, ma il cui periodo non è 2π . Questo risulta rilevante, per Vallarta, perché gli permette di sottolineare come, pur trascurando gli effetti dell'elettrone sul campo del nucleo e quindi nonostante le ipotesi di stazionarietà e simmetria sferica, le orbite previste dalla meccanica non risultino periodiche[50]. Conclude quindi che anche nel caso di altri sistemi atomici, per i quali non valgono sicuramente le approssimazioni di staticità e simmetria sferica, non si otterranno necessariamente delle orbite periodiche. A questo punto l'autore vuole giustificare l'assenza di orbite periodiche, quindi ripercorre lo stesso ragionamento fatto da Jeffery in relazione all'argomento di Einstein del 1916, collegandolo però con la fisica quantistica: 'Questo fatto potrebbe essere connesso con l'emissione da parte del sistema di onde *gravitazionali* ed elettromagnetiche. *Ma se noi ammettiamo che l'atomo è quantizzato nel senso di Bohr, allora dobbiamo ammettere che i postulati quantistici governino non solo la radiazione elettromagnetica, ma anche quella gravitazionale*'[51] ([Val24a]; pag. 39). Vallarta sottolinea che l'obiettivo di Jeffery, e cioè quello di trovare una soluzione esatta del problema a due corpi generico in RG, resta la strada maestra da perseguire. Questo fatto sottolinea, a nostro avviso, come per l'autore debba essere la fisica quantistica a dover subire delle modifiche. Per mostrare definitivamente la *debolezza* di quest'ultima, Vallarta decide quindi di analizzare l'inclusione dei principi quantistici all'interno della RG, per mostrare che: 'si deve ammettere che le nostre regole di quantizzazione, che, come risaputo, sono essenzialmente un'aggiunta alla dinamica classica, sono estremamente artificiali: la vera soluzione del problema delle orbite quantistiche deve essere indipendente da queste regole arbitrarie' ([Val24a]; pag. 39). Come accennato, l'autore fa riferimento alla formulazione *assiomatica* di Mecke della fisica *atomica*: con questo termine, in questo paragrafo, intenderemo una sorta di *unione* dei principi della fisica quantistica e della relatività di Einstein, ribadendo che l'introduzione di quest'ultima è motivata dall'approccio tracciato da Jeffery e connesso con l'utilizzo della metrica di Reissner-Nordström. Prima di procedere, approfondiamo quindi tale formulazione.

Secondo Mecke[52] la fisica quantistica doveva poggiarsi su tre postulati: il principio di minima azione, il principio degli integrali[53] e il principio di continuità. Il primo postulato

[49]Le funzioni usate da Vallarta hanno la forma $\int^x \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$, dove $f(u)$ è un polinomio di quarto grado nella variabile u, che è il reciproco della coordinata radiale.

[50]L'autore sottolinea 'praticamente quasi periodiche' ([Val24a]; pag. 38); letteralmente: *very nearly strictly periodic.*

[51]Il corsivo è nostro.

[52]Discuteremo brevemente anche alcuni aspetti del lavoro di Mecke [Mec24], perché intimamente connesso col lavoro di Vallarta.

[53]Letteralmente *the integral principle*, nella tesi di Vallarta, oppure *das Integrationsprinzip*, nell'articolo di Mecke ([Mec24]; pag. 29).

corrisponde sostanzialmente al *moderno* principio di minima azione[54] in RG ed è lo stesso principio presentato da Hilbert nella memoria del 1915. Vallarta definisce nel seguente modo l'azione $\mathcal{S}$ relativa al sistema *atomo* ([Val24a]; pag. 53):

$$\mathcal{S} = \int_\Omega \mathcal{L}_{atomo} \sqrt{-g}\, d^4x = \int (a + bR + \mathcal{L}_m)\, \sqrt{-g}\, d^4x \tag{1.4}$$

dove a e b sono costanti universali[55], R è l'usuale scalare di curvatura, Ω è una porzione dello spazio-tempo mentre $\mathcal{L}_m$ viene indicata dall'autore come la densità di lagrangiana della *materia*[56]. Il primo postulato asserisce che la condizione

$$\delta_g \mathcal{S} = 0 \tag{1.5}$$

ottenuta variando solo la metrica, deve valere per ogni porzione finita dello spazio-tempo[57]. Il secondo postulato vuole essere una generalizzazione delle condizioni di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld. Sia Mecke che Vallarta lo enunciano nel seguente modo[58] ([Val24a]; pag. 54) ([Mec24]; pag. 29):

$$\oint L\, d\lambda = nh \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

dove per gli autori l'integrazione viene intesa lungo un linea d'universo chiusa ([Mec24]; pag. 30) ed L è la Lagrangiana[59]. La presenza del tempo geometrizzato $d\lambda$ suggerisce una sorta di tentativo di generalizzazione al caso relativistico. Sappiamo però che non è corretto utilizzare il tempo proprio geometrizzato λ o l'invariante s nel definire l'azione, perché anch'esso dipende dalle coordinate, e non si potrebbero quindi derivare le equazioni di Eulero-Lagrange con il consueto procedimento della meccanica analitica[60] ([Bar04];

[54]Per questo postulato Vallarta fa riferimento alla formulazione di de Donder [De 22]. Adattiamo la notazione a quella moderna.

[55]La costante a gioca il ruolo della costante cosmologica, mentre la costante b è una combinazione delle costanti fondamentali c e G.

[56]$\mathcal{L}_m$ è funzione del campo di materia, del campo elettromagnetico e della metrica. La forma di tale Lagrangiana verrà discussa a breve. Nel testo originale tale Lagrangiana veniva indicata con Λ, simbolo non usato da noi perché potrebbe essere erroneamente confusa con il simbolo moderno per la costante cosmologica.

[57]L'autore sottolinea che al bordo della regione Ω il valore delle variazioni delle singole variabili vale zero.

[58]In riferimento alla formulazione di Vallarta abbiamo corretto un evidente errore di stampa, mentre in riferimento alla formulazione di Mecke è da notare che l'autore utilizza la lettera H per indicare la Lagrangiana, cosa inusuale per noi e che è forse la fonte di alcuni errori di Vallarta.

[59]La Lagrangiana è l'integrale della densità di Lagrangiana su un volume tridimensionale.

[60]La procedura corretta richiederebbe di scegliere un parametro arbitrario $\tilde{\lambda}$ per ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange e solo alla fine imporre che tale parametro diventi il tempo proprio geometrizzato. Abbiamo incontrato spesso tale "errore", anche in lavori posteriori a quello di Vallarta. È probabile che si tratti di una sorta di "abuso di linguaggio", quindi non sottolineeremo più la questione.

pag. 234). Inoltre Mecke *assume* che mediante una tecnica detta della separazione delle variabili[61], l'equazione (1.6) produca le condizioni di Wilson-Sommerfeld (1.1) per le variabili azione, definite all'inizio del paragrafo. Né Mecke né Vallarta ci dicono però *come* questo dovrebbe avvenire[62]. Il terzo postulato asserisce invece che date due differenti scelte di variabili coniugate angolo-azione, $(\phi_j^{(1)}; I_j^{(1)})$ e $(\phi_j^{(2)}; I_j^{(2)})$, l'azione sia *invariante* per la scelta di tali coordinate. Se chiamiamo cioè $\mathcal{S}_1$ l'azione calcolata usando le prime coordinate ed $\mathcal{S}_2$ quella calcolata usando le seconde, il terzo postulato asserisce che deve valere la relazione $\Delta\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1 = 0$. Nella tesi di dottorato non è chiaro se, nella formulazione del secondo postulato, Vallarta faccia riferimento alla densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_m$ oppure alla densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_{atomo}$. Se facesse riferimento a quest'ultima, infatti, il secondo postulato lascerebbe intendere che anche l'azione del campo gravitazionale dovrebbe essere *quantizzata*. In [Val24c] Vallarta specifica che Mecke fa riferimento all'azione composta utilizzando la Lagrangiana $\mathcal{L}_m$ ([Val24c]; pag. 181). Probabilmente per questo motivo il fisico messicano si occupa solamente di un caso particolare, ovvero il moto dell'elettrone, azzardando una formulazione della dinamica hamiltoniana in presenza di uno spazio-tempo curvo, a cui cerca di applicare il secondo e il terzo postulato. Torniamo a occuparci della tesi di Vallarta e alla sua discussione dei tre postulati.

Come già sottolineato, l'intervento della RG è collegato, per l'autore, con il fatto di aver introdotto la metrica di Reissner-Nordström. Infatti Vallarta dichiara: 'Adesso consideriamo il problema da un altro punto di vista. Postuliamo, come avviene in relatività generale, che tutti i fenomeni naturali siano manifestazione delle proprietà metriche quadridimensionali dello spazio[63]. Il concetto atomistico, che è un'idea essenziale della teoria dei quanti, fin'ora non trova posto nella relatività, anche se, per quanto ne sappiamo, non esiste alcuna contraddizione tra il postulato di relatività e l'ipotesi dei quanti'[64] ([Val24a]; pag. 51). Vallarta a questo punto si chiede quali siano i principi teorici necessari per la costruzione di una generica teoria del sistema atomo e se tali principi possano essere incorporati nella teoria della relatività, ed enuncia i postulati di Mecke. Per raggiungere il proprio scopo, Vallarta è alla ricerca di una giustificazione teorica per l'esistenza di orbite non-meccaniche nell'atomo, ovvero orbite che non siano governate dalle equazioni canoniche e che non siano ottenibili attraverso l'equazione di Hamilton-Jacobi. Per fare questo, come detto, l'autore comincia ad analizzare il moto dell'elettrone ($q = -e$) scrivendo il

[61]A volte tali sistemi vengono detti anche *sistemi separabili*: torneremo a breve su questa questione.

[62]In [Val24c], curiosamente, Vallarta afferma che la (1.6) dovrebbe produrre 'quattro condizioni $I_k = \int p_k dx_k$ con $k = 1, 2, 3, 4$' ([Val24c]; pag. 181), come se anche energia e tempo obbedissero alle condizioni di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld.

[63]L'autore sottintende spazio-tempo.

[64]Ricordiamo, come già ribadito, che il principio di indeterminazione verrà formulato nel 1927.

principio variazionale, trascurando la parte gravitazionale dell'azione[65] probabilmente per i motivi sopra specificati (1.4), ovvero $a + bR$, e per L_m sceglie la lagrangiana usuale per un elettrone che si muove in uno spazio-tempo curvo. L'azione scritta da Vallarta è la seguente[66] ([Val24a]; pag. 54):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{elettrone} &= \int L_m(x;\, u)\, d\lambda = \int \left(-mc\sqrt{-g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu} - \frac{e}{c}A_\mu u^\mu\right) d\lambda \\ u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \qquad \text{con} \qquad g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1, \end{aligned} \tag{1.7}$$

dove compare nell'azione, il tempo geometrizzato λ. A questo punto Vallarta cerca di calcolare la Hamiltoniana, ma è necessario fare delle puntualizzazioni prima di procedere. La condizione di normalizzazione del quadrivettore u^μ gioca il ruolo di un *vincolo* per la teoria lagrangiana. Infatti la relazione $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ implica che i momenti coniugati delle x^μ non saranno tutti indipendenti. Considerando la lagrangiana come funzione delle *sole* variabili $(x;\, u)$, bisognerebbe dunque tenere conto in maniera opportuna del vincolo, cosa che Vallarta fa in maniera un po' naïf, arrivando a scrivere una 'funzione "hamiltoniana" '[67] ([Val24a]; pag. 55, eq.(7)), che oggi sappiamo essere errata[68]. A nostro avviso l'errore è comunque comprensibile, visto che la trattazione dei sistemi lagrangiani vincolati dal punto di vista relativistico sarà formulata almeno vent'anni più tardi. Purtroppo è importante sottolineare questo fatto perché a partire da tale Hamiltoniana l'autore raggiunge delle conclusioni che rafforzano la propria convinzione, ribadita all'inizio del paragrafo, che sia la teoria dei quanti a dover subire delle modifiche. A partire dalla propria Hamiltoniana, infatti, Vallarta cerca di scrivere le equazioni del moto in forma hamiltoniana[69], ma riesce ad ottenere delle equazioni che hanno la forma delle usuali equazioni di Hamilton per la meccanica del punto solo nel caso di campi elettromagnetici

[65] Vallarta fa esplicito riferimento al testo di Hermann Weyl [Wey23].

[66] Abbiamo corretto un evidente errore di stampa.

[67] Le virgolette dell'autore denotano comunque una certa cautela nell'affermazione.

[68] Come già accennato nella nota ([60]) se si definisce la Lagrangiana $L_m(x;\, u) = -mc\sqrt{-g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu} - \frac{e}{c}A_\mu u^\mu$, con $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tilde{\lambda}}$ dove $\tilde{\lambda}$ è un parametro affine qualsiasi, è possibile effettivamente, per la particella relativistica, scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nel seguente modo: $\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial L_m}{\partial u^\mu} - \dfrac{\partial L_m}{\partial x^\mu} = 0$, dove compare il tempo proprio geometrizzato. Si possono quindi definire i momenti coniugati come fanno Vallarta e Mecke, $p_\mu = \frac{\partial L_m}{\partial u^\mu}$, ma si scopre che la Hamiltoniana risulta essere singolare ($H = 0$). Oggi sappiamo che tale fatto è dovuto all'invarianza per riparametrizzazioni della linea d'universo della Lagrangiana di partenza. Forse perché disturbato da questo fatto oppure forse per la confusione generata dall'uso improprio da parte di Mecke della lettera H, si riveda la nota ([58]), l'errore di Vallarta consiste nel decidere di utilizzare come "Hamiltoniana" la Lagrangiana L_m scritta in funzione delle variabili canoniche x^μ e p_μ, ovvero $H(x, p) = L_m(x, p)$.

[69] Cosa che non potrebbe fare con la Hamiltoniana singolare. Ipotizziamo che proprio per questi motivi Vallarta abbia scelto una funzione "hamiltoniana" *ad hoc*.

statici[70] ($A^\mu = (\phi, 0, 0, 0)$). Grazie a questo fatto l'autore si convince di avere in mano 'una giustificazione teorica dell'esistenza di orbite non meccaniche nell'atomo' ([Val24a]; pag. 57), una giustificazione quindi *alternativa* alle regole di quantizzazione, ovvero il secondo postulato di Mecke, grazie all'utilizzo della RG[71]. Tale giustificazione non è comunque sufficiente per Vallarta e l'indipendenza dal secondo postulato di Mecke non è completa[72]. Nel considerare i punti deboli del proprio ragionamento, ma sempre cercando di mettere in evidenza il ruolo da protagonista della RG, Vallarta passa alla discussione del secondo postulato di Mecke nell'ambito della RG. L'autore critica in particolare il presupposto secondo cui, tramite il procedimento della separazione delle variabili, l'eq.(1.6) generi le condizioni di Wilson-Sommerfeld. Infatti assumendo di usare la tecnica della separazione delle variabili, è necessario scegliere in modo appropriato le coordinate e questo, a nostro avviso, fa pensare all'autore che tale procedimento privilegi l'introduzione di uno specifico sistema di riferimento. Vallarta infatti osserva che a causa della scelta delle coordinate per separare le variabili 'si perde la proprietà di invarianza per diffeomorfismi[73] di $\oint L d\lambda$ e si introduce una restrizione nell'insieme delle variabili che risulta estranea al principio di relatività' ([Val24a]; pag. 59). Quest'ipotesi, dunque, dal punto di vista dell'autore è un punto a sfavore delle condizioni di quantizzazione, che vanno quindi riformulate[74].

Commentiamo brevemente l'osservazione del fisico messicano. Per separare le variabili è effettivamente necessario scegliere in modo appropriato le coordinate[75], ma la scelta di tali coordinate non è direttamente correlata all'invarianza *per diffeomorfismi* della definizione delle I_j nelle condizioni di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld (1.1). In queste ultime, infatti, la traiettoria su cui si integra si trova nel cosiddetto *spazio delle fasi* delle coordinate *canoniche* $(q_i\,; p^i)$ e non lungo una linea d'universo dello spazio-tempo, come nel caso della condizione proposta (1.6). D'altra parte le condizioni (1.1) effettivamente non sembrano invarianti per la scelta delle coordinate canoniche. Da questo punto di vi-

[70] Il calcolo di Vallarta è esattamente identico al calcolo effettuato da Mecke [Mec24].

[71] Questo risultato sembra essere un punto centrale della produzione di Vallarta in questo periodo. Si vedano per esempio [Val24b] e [Val24c]. La questione meriterà dunque ulteriori approfondimenti che vengono però rinviati a lavori futuri.

[72] Rimandiamo l'approfondimento di questo punto a un lavoro futuro.

[73] Abbiamo tradotto in maniera moderna la locuzione 'general relativistic invariance', usata dall'autore.

[74] L'autore quindi non è completamente contrario alle condizioni di quantizzazione. Lui stesso mostra che postulando di poter ottenere *quattro* condizioni di quantizzazione, una delle quali coinvolge la coordinata temporale, riuscirebbe a connettere quest'ultima con il principio di corrispondenza di Bohr. Anche per l'approfondimento di tale questione rimandiamo a un lavoro futuro.

[75] Ricordiamo che la separazione delle variabili si attua per poter risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi. Per degli esempi di meccanica non relativistica si veda ([LL04a]; pag. 218).

sta l'affermazione di Vallarta, a nostro avviso, sottolinea che anche l'autore ignora, come molti fisici dell'epoca, che nel 1917 Einstein si era occupato di questo problema fornendone la soluzione generale[76] [Ein17]. L'articolo di Einstein è poco noto e come evidenziato in [Gra93], una possibile spiegazione è da associare al fatto che, fino agli anni sessanta del Novecento, non si conoscevano sistemi integrabili per i quali non fosse applicabile il principio di separazione delle variabili e per di più, come sottolinea Einstein alla fine del proprio articolo, per i sistemi separabili la formulazione invariante si riduce esattamente alle condizioni di Wilson-Sommerfeld, che quindi, nonostante le apparenze, risultano invarianti[77]. Osserviamo infine che per quanto riguarda la questione della covarianza nel caso generale accennata da Vallarta, quello che a nostro avviso sarebbe corretto chiedersi è se la struttura simplettica[78] indotta dalla formulazione invariante di Einstein sia compatibile o meno con la metrica riemanniana dello spazio-tempo. Tuttavia a questo aspetto non fanno cenno né Einstein né Vallarta.

1.3 1925-26: Le lezioni di De Donder al MIT

Gli anni 1925 e 1926 vedono la nascita della Meccanica Quantistica, nel seguito MQ. Il 16 gennaio del 1925 Pauli [Pau25] enuncia il *principio di esclusione*, il 25 luglio dello stesso anno esce il primo degli articoli che segnano la nascita della cosiddetta Meccanica delle Matrici ad opera di Heisenberg [Hei25], mentre il 27 gennaio del 1926 viene pubblicato il primo dei quattro articoli che sanciscono la nascita della Meccanica Ondulatoria di Erwin Schrödinger[79] [Sch26a]. Questi due anni sono dunque sicuramente anni di transizione: come vedremo nel corso dei prossimi capitoli qualcuno tenterà subito di conciliare la

[76]Più precisamente Einstein nota in effetti che la formulazione delle condizioni di Wilson-Sommerfeld per sistemi meccanici *qualsiasi* ad N gradi di libertà non è invariante per trasformazioni *canoniche* e questo implica che per un sistema qualsiasi la definizione delle variabili azione I_j, si riveda l'equazione (1.1), non è corretta. La formulazione invariante si ottiene definendo le variabili azione nel seguente modo: $I_j = \int_{\gamma_j} p_i dq^i$, dove questa volta l'indice i è sommato e l'integrazione è fatta, per ogni j, sui cammini topologicamente equivalenti (γ_j). Il numero di cammini indipendenti definisce effettivamente il numero di condizioni di quantizzazione indipendenti [Gra93]. Ricordiamo che la 1-forma differenziale $p_i dq^i$ fornisce una struttura detta *simplettica* allo spazio delle fasi.

[77]La separazione delle variabili è equivalente alla possibilità di poter definire N variabili d'azione tutte *indipendenti* tra loro e questo implica che lo spazio delle fasi è topologicamente equivalente ad un toro di N dimensioni, ognuna delle quali genera un cammino indipendente (si veda la nota precedente). Ognuno degli N integrali $\oint_{\gamma_j} p_i dq^i \quad (j = 1, \ldots, N)$ si riduce ad una delle I_j dell'equazione (1.1), a causa dell'indipendenza dalle altre $N-1$ coordinate, e risulta quindi invariante per trasformazioni canoniche.

[78]Si rivedano le due note precedenti.

[79]La seconda delle quattro comunicazioni, [Sch26b], contiene l'omonima equazione, le altre sono [Sch26c] e [Sch26d]

nascente MQ con la RG, soprattutto utilizzando la Meccanica Ondulatoria, ma alcuni autori rimarranno comunque legati alla visione della *vecchia teoria dei quanti.*

Accanto ai tentativi matematicamente raffinati, non mancano le riflessioni sul problema. Nel 1925 viene proposta da James Jeans l'idea che si possano conciliare gravità e fisica quantistica a partire da una revisione del concetto di spazio-tempo in una lezione tenuta a Cambridge ([Jea26]; pag. 55), ma si tratta solo di una speculazione. Jeans, parlando dei contributi portati da Einstein alla fisica, ribadisce l'idea che i due "pilastri" su cui la fisica si poggia, ovvero la relatività e la teoria dei quanti, sembrano non "incontrarsi" [Ric05].

Nella primavera del 1926, il fisico belga Theofile De Donder tiene una serie di lezioni al MIT [De 27], che verranno poi pubblicate l'anno seguente. Queste lezioni raccolgono in maniera organica la visione di De Donder riguardo sia alla RG, sia all'applicazione di questa in vari ambiti, tra cui anche il mondo microscopico. Ovviamente noi siamo interessati all'approccio dell'autore a quest'ultimo aspetto, che De Donder aveva da poco pubblicato sulla rivista *Comptes Rendus* [De 26a] [Dv26] [De 26b]. Per la stesura di queste lezioni, l'autore si è avvalso anche dell'aiuto di Vallarta, che De Donder ringrazia nell'introduzione ([De 27]; pag. viii). È interessante per noi capire come l'approccio di De Donder si differenzi da quello di Vallarta, con il quale l'autore si pone, in un certo senso, in continuità. Per questo motivo, abbiamo riservato a questo capitolo la discussione sul lavoro del fisico belga, nonostante De Donder utilizzi già alcune idee proprie della Meccanica Ondulatoria.

Nell'introduzione alle lezioni De Donder scrive: 'Spenderemo alcune parole sul mistero dei quanti. Per gettare luce su questa entità fisica oscura estrarremo le equazioni della dinamica di un sistema molecolare o atomico a molti gradi di libertà a partire dalle equazioni dell'elettrodinamica relativistica di oggetti puntiformi che si muovono nello spazio-tempo. Dovremo quindi escogitare un metodo di quantizzazione generale nello *spazio-tempo*, che dovremo applicare alla quantizzazione dell'elettrone puntiforme e a quella dei sistemi continui' ([De 27]; pag. 8). Proseguendo sul solco tracciato da Vallarta, De Donder cerca di armonizzare la RG con la fisica quantistica cercando dunque di formulare una sorta di *metodo di quantizzazione per spazi-tempo curvi*, formulando quelle che per l'autore saranno delle *nuove regole di quantizzazione.* Il soggetto da quantizzare è comunque ancora l'elettrone e non verrà mai attribuito alcun comportamento quantistico alla gravitazione. De Donder inoltre continua: 'Mostreremo che questa quantizzazione è una conseguenza logica della nostra teoria della gravitazione [...]' ([De 27]; pag. 8). L'autore è convinto quindi, a nostro avviso sempre in continuità con l'approccio di Vallarta, che sia la RG a dar conto dei nuovi fenomeni microscopici. L'introduzione si chiude infatti con la seguente affermazione: 'Ancora di più la relatività svela il mistero delle leggi fisiche dell'universo rivestito di forma immutabile che porta l'impronta delle leggi eterne' ([De 27]; pag. 8).

Per studiare la dinamica dell'elettrone, ovvero di una particella di massa m e carica $-e$, nell'ambito della RG, De Donder utilizza la seguente Lagrangiana[80]:

$$L_{DD}(x;\, u) = \frac{mc}{2} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \frac{e}{c} A_\mu u^\mu \qquad \mathcal{S}_{DD} = \int L_{DD} d\lambda\,, \tag{1.8}$$

dove

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \qquad \text{e} \qquad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1, \tag{1.9}$$

per scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange che descrivono il moto della particella. Se facciamo il confronto con l'approccio di Vallarta è importante dire che De Donder è più accorto nella formulazione del principio variazionale[81], e si rende conto che la condizione di normalizzazione di u^μ produce una sorta di vincolo. Probabilmente in conseguenza del fatto che la Lagrangiana L_m utilizzata da Vallarta in (1.7) produce una Hamiltoniana nulla, De Donder utilizza una differente Lagrangiana. Con questa scelta infatti la Hamiltoniana[82] $\tilde{H} = p_\mu u^\mu - L_{DD}$ in funzione dei momenti coniugati $p_\mu = \dfrac{\partial L_{DD}}{\partial u^\mu} = mcu_\mu - \dfrac{e}{c} A_\mu$ non è più singolare e risulta:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2mc}\left(p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu\right)\left(p^\mu + \frac{e}{c} A^\mu\right). \tag{1.10}$$

Il vincolo $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ è equivalente alla relazione $\tilde{H} = -\frac{1}{2} mc$, che corrisponde all'equazione di Hamilton-Jacobi per la particella, e che De Donder scrive nel seguente modo:

$$g^{\mu\nu}\left(p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu\right)\left(p_\nu + \frac{e}{c} A_\nu\right) + m^2 c^2 = 0 \qquad , \qquad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \tag{1.11}$$

dove la funzione S è detta *funzione di Jacobi* nella meccanica classica. A questo punto, seguendo il percorso tracciato da Schrödinger[83] [Sch26a], De Donder utilizza l'analogia formale tra l'equazione di Hamilton-Jacobi per il moto di una particella e l'equazione delle onde nell'approssimazione dell'ottica geometrica. Ricordiamo brevemente qual è questa

[80] Abbiamo uniformato la notazione dell'autore a quella scelta da noi, per facilitare il confronto tra l'approccio di De Donder e quello di Vallarta. Nel lavoro originale De Donder utilizza una Lagrangiana proporzionale alla L_{DD} dell'equazione (1.8).

[81] Anche De Donder, come Vallarta, utilizza ancora il tempo proprio invece di utilizzare un parametro affine qualsiasi. Altri autori faranno questo tipo di "errore", quindi nel seguito non lo commenteremo più.

[82] Dimensionalmente L_{DD} corrisponderebbe ad una Lagrangiana diviso una velocità. Questo è dovuto al fatto che il tempo geometrizzato λ che De Donder usa per definire l'azione $\mathcal{S} = \int L_m d\lambda$ ha comunque le stesse dimensioni dell'invariante s, ovvero un tempo per una velocità. Di conseguenza anche $\tilde{H}$ corrisponderebbe, dimensionalmente, a una Hamiltoniana diviso una velocità. Per non appesantire la notazione continueremo comunque a utilizzare i termini Lagrangiana e Hamiltoniana.

[83] Come vedremo nel prossimo capitolo, anche Oskar Klein segue, nello stesso periodo, un percorso simile.

analogia. L'approssimazione di ottica geometrica della meccanica delle onde ([LL04b]; pag. 175) si ottiene scrivendo la funzione d'onda ψ nella forma $\psi = Ae^{i\omega S}$ dove A è l'ampiezza dell'onda e la fase ωS è detta *iconale*[84], e sono entrambe funzioni di tutte le coordinate spazio-temporali. A questo punto si osserva che l'iconale è una quantità molto grande, perché varia di 2π su una lunghezza d'onda, mentre nell'approssimazione di ottica geometrica la lunghezza d'onda λ tende a zero. Se si considera l'equazione d'onda per un'onda elettromagnetica nel vuoto in relatività ristretta, ogni componente dei campi soddisfa ad un'equazione scalare del tipo $\partial_\mu \partial^\mu \psi = 0$. Se si scrive la funzione d'onda nella forma appena suggerita e si usa il fatto che l'iconale è una quantità grande, si ottiene l'equazione dell'iconale[85] $\partial_\mu S \partial^\mu S = 0$. Tale equazione è formalmente identica all'equazione di Hamilton-Jacobi per particelle di massa nulla nel momento in cui si identifica il momento della particella p_μ con il vettore d'onda k_μ, legato all'iconale dalla relazione $k_\mu = \partial_\mu S$ e se si identifica l'iconale con la funzione di Jacobi della particella[86]. Un'analogia simile può essere stabilita anche per particelle massive. De Donder introduce quindi una funzione d'onda associata all'elettrone $\psi(\lambda, x)$, funzione sia delle coordinate che del tempo proprio geometrizzato λ. Per passare dall'equazione di Hamilton-Jacobi alla Meccanica Ondulatoria l'autore utilizza la seguente relazione:

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}S} \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{\hbar}{i} log\,(\psi)\,, \tag{1.12}$$

dove è stato posto $\omega = \frac{1}{\hbar}$ e la condizione di riduzione dell'equazione completa di Hamilton-Jacobi $\tilde{H}\left(x\,; \frac{\partial S}{\partial x}\right) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0$ diventa dunque[87]:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} mc. \tag{1.13}$$

Grazie alla definizione (1.12) l'autore può inoltre scrivere:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{\psi} \partial_\mu \psi, \tag{1.15}$$

che grazie alla relazione (1.13) danno rispettivamente:

$$\frac{1}{\psi} = \frac{imc}{2\hbar} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)^{-1}, \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \frac{mc}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)^{-1} \partial_\mu \psi. \tag{1.17}$$

[84] La costante ω verrà determinata più avanti.

[85] Tale equazione si può ottenere equivalentemente considerando il limite per ω grande, e trascurando i termini *lineari* in ω.

[86] Per questo motivo abbiamo utilizzato la stessa lettera S.

[87] Si riveda la sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici.*

Inserendo la relazione (1.17) nel membro di sinistra dell'equazione (1.11)[88] l'equazione è equivalente alla seguente ($\partial_\mu S = p_\mu$):

$$J(\psi) \equiv -g^{\mu\nu}\left(\frac{mc}{2}\partial_\mu\psi + \frac{e}{c}A_\mu\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\left(\frac{mc}{2}\partial_\nu\bar{\psi} - \frac{e}{c}A_\nu\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}\right) - m^2c^2\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s} = 0\,, \qquad (1.18)$$

equazione che per De Donder definisce il *funzionale* $J(\psi)$. Questo funzionale, che l'autore specifica essere 'invariante per tutti i cambiamenti nelle variabili $x^0, \ldots, x^3$ con $\lambda' = \lambda$.' ([De 27]; pag. 92), gioca un ruolo fondamentale per De Donder. Innanzitutto l'equazione di Hamilton-Jacobi (1.11), o 'equazione Jacobiana' come la chiama l'autore, diventa ora una relazione a cui deve soddisfare il funzionale $J(\psi)$, ovvero:

$$J(\psi) = 0\,. \qquad (1.19)$$

Inoltre è grazie a questo invariante che l'autore definisce la nuova *regola di quantizzazione*, valida per l'autore su uno spazio-tempo curvo. Vediamo di cosa si tratta per poi commentarla. De Donder introduce la seguente *derivata funzionale*:

$$\frac{\delta}{\delta\psi}J(\psi) = \frac{\partial J}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial J}{\partial\partial_\mu\psi} + \ldots \qquad (1.20)$$

e quindi continua: 'Applichiamo ora la seguente regola di quantizzazione[89]: la derivata variazionale del membro di sinistra dell'equazione Jacobiana (1.19), rispetto a ψ, deve essere nulla. Esplicitamente:

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\left(\sqrt{-g}J\right) = 0 \qquad (1.21)$$

[...]'[90] ([De 27]; pag. 92). Potrebbe risultare curiosa l'assenza dell'integrale nella (1.21), ma così non è perché la derivata funzionale (1.20) viene scelta ad hoc da De Donder in modo da produrre l'equazione d'onda oggi nota col nome di equazione di Klein-Gordon in presenza di uno spazio-tempo curvo e di un campo elettromagnetico[91]. Questo è il motivo per cui De Donder chiama la (1.21) regola di quantizzazione, perché produce un'equazione d'onda relativistica come suggerito dalla nascente Meccanica Ondulatoria.

Se si utilizza la relazione (1.16) per esplicitare $\dfrac{\partial\psi}{\partial s}$ il funzionale $J(\psi)$ di De Donder diventa:

$$J(\psi) = -\frac{m^2c^2}{4}\left[g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\psi + \frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}A_\mu\psi\right)\left(\partial_\nu\bar{\psi} - \frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}A_\nu\bar{\psi}\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\bar{\psi}\psi\right]. \qquad (1.22)$$

[88] A differenza di De Donder noi indichiamo *esplicitamente* il fatto che la funzione d'onda è una quantità complessa. Per il coniugato della funzione d'onda $\bar{\psi}$ valgono le relazioni coniugate alle (1.17) e (1.16) .

[89] T. De Donder e F.H. van den Dungen, "La quantizzazione dedotta dalla gravità einsteiniana", Comptes Rendus, 5 Luglio, 1926.

[90] La nota ([89]) è la traduzione della nota originale e i lavori a cui fa riferimento l'autore sono [Dv26] e [De 26b]. Inoltre abbiamo adattato i numeri delle equazioni al nostro testo.

[91] Non scriviamo ora tale equazione che in questi anni viene scoperta contemporaneamente da molti autori. Ne parleremo in dettaglio nel prossimo capitolo analizzando il lavoro di Oskar Klein.

Il funzionale introdotto da De Donder risulta quindi proporzionale alla densità di Lagrangiana $\mathcal{L}$ di un campo scalare *complesso* in presenza di un campo elettromagnetico e di un campo gravitazionale. La relazione esatta tra i due è data dalla seguente relazione:

$$J(\psi) = \frac{m^2c^2}{4}\mathcal{L} \tag{1.23}$$

Non sorprende dunque che l'autore ottenga l'equazione di Klein-Gordon per un campo complesso, perché le condizioni (1.20) e (1.21) producono effettivamente le equazioni del moto di tale campo. Come vedremo nel prossimo capitolo, il funzionale (1.22) di De Donder, a differenza di quello che scriverà Klein, ha il segno corretto per essere interpretato come una densità di Lagrangiana, vista la segnatura dello spazio-tempo. Ma mentre per il fisico belga ψ rappresenterà sempre una funzione d'onda, il fisico svedese come vedremo nel prossimo capitolo tratterà la funzione d'onda come un vero e proprio campo scalare[92], scrivendo un principio variazionale che coinvolgerà, oltre all'azione del campo stesso, anche l'azione del campo gravitazionale.

Poiché De Donder interpreta ψ come una funzione d'onda, per lui la "condizione di quantizzazione" (1.21) è la generalizzazione relativistica dell'equazione di Schrödinger in presenza di un campo elettromagnetico e gravitazionale e la presenza della radice del determinante della metrica, $\sqrt{-g}$, evidenzia secondo l'autore che si tratta di una *condizione di quantizzazione relativistica*. Risulta dunque evidente che per De Donder l'introduzione del concetto di *quantizzazione* era equivalente a scrivere un'equazione d'onda relativistica per l'elettrone, idea che, come anticipato all'inizio del paragrafo, è figlia dell'approccio dello stesso Schrödinger e della *Meccanica Ondulatoria*.

Per De Donder il fatto che l'equazione d'onda dell'elettrone sia conseguenza di un principio variazionale ha un significato profondo. Infatti, l'autore commenta questo fatto scrivendo: 'Abbiamo dunque mostrato che *la quantizzazione dell'elettrone puntiforme può essere dedotta dalla teoria della gravitazione di Einstein*' ([De 27]; pag. 95). A nostro avviso questo commento mostra come l'autore fosse convinto che le condizioni di quantizzazione dovessero avere un'origine *classica*[93], riconoscendo alla RG quindi sempre un ruolo da protagonista, esattamente come Vallarta[94]. Nella parte finale delle lezioni De Donder cerca di perseguire addirittura un'analogia tra il proprio approccio alla quantizzazione in ambito relativistico e la meccanica statistica ([De 27]; pag. 101). Tale confronto esula però dai nostri scopi e pertanto non ne riporteremo i dettagli. Nonostante questi sforzi,

[92] Come vedremo Klein è uno degli autori che contribuisce alla nascita della teoria quantistica dei campi.

[93] Anche Einstein perseguiva una soluzione classica al problema della quantizzazione, ma cercava di creare una sorta di nuova teoria unificata dei campi ([Pai91]).

[94] Sempre come Vallarta, De Donder cerca di trattare il problema della quantizzazione *senza rompere la covarianza delle equazioni.*

leggendo le note di De Donder appare chiaro che l'unico oggetto teorico che è depositario del concetto di quantizzazione è la funzione d'onda ψ e *non si fa alcun accenno ad alcun effetto quantistico del campo gravitazionale.*

De Donder è sicuramente uno dei primi autori che cerca di coinvolgere esplicitamente la nascente Meccanica Ondulatoria nel processo di armonizzazione tra i principi quantistici e la RG: mentre per noi il lavoro di De Donder ci porta al prossimo capitolo, dove vedremo molti tentativi ispirati dall'utilizzo della Meccanica Ondulatoria, tra i fisici del tempo il lavoro dell'autore non avrà particolare risonanza e De Donder rimarrà sempre ai margini dei filoni principali di ricerca. Nonostante questo molti fisici saranno suoi allievi, ed uno in particolare, Léon Rosenfeld, di cui parleremo nei prossimi due capitoli, avrà al contrario un ruolo essenziale nella storia della GQ.

1.4 Cronologia

1915 Vengono pubblicate le comunicazioni di *Einstein* che sanciscono la nascita della RG.

Hilbert scrive un lavoro in cui deduce le equazioni del campo gravitazionale a partire da un principio variazionale: suggerisce che grazie al metodo assiomatico la nuova teoria della gravità potrà gettare luce sui misteri della teoria atomica.

1916 *Barton* fa un tentativo primitivo di accostare la gravitazione newtoniana con la teoria di Planck.

Pensando al modello dell'atomo di Bohr, *Einstein* suggerisce che la RG potrà subire delle modifiche a causa della teoria dei quanti.

1918 *Crehore* azzarda una connessione tra la costante di Newton e quella di Planck.

Eddington si interessa alla lunghezza di Planck e al suo possibile ruolo per la teoria di Einstein nella prima edizione di un lavoro di rassegna sulla RG.

Einstein rinforza il concetto espresso due anni prima, facendo però riferimento al fatto che il moto stesso di agitazione termica degli atomi produrrebbe l'emissione di onde gravitazionali. Di nuovo sottolinea che, una volta raggiunta la piena maturazione, la teoria dei quanti porterà a una revisione della teoria della gravitazione.

1919 *Einstein* intraprende ufficialmente la ricerca di una teoria di campo unificata;

Haas propone che l'approccio assiomatico di Hilbert possa conciliare RG e teoria dei quanti. Suggerisce una *discretizzazione* dello spazio-tempo.

1920 Nella seconda edizione del proprio lavoro di rassegna sulla RG *Eddington* afferma la necessità di applicare la teoria di Einstein anche per indagare il microcosmo.

1921 *Kaluza* pubblica il proprio approccio penta-dimensionale.

Jeffery ricava la soluzione oggi nota come metrica di Reissner-Nordström e la propone come la metrica prodotta dal nucleo atomico. Jeffery riprende l'osservazione di Einstein del 1916, in connessione con l'assenza di orbite periodiche per l'elettrone che si muove nella metrica del nucleo.

Lodge utilizza la RG e l'approccio di Jeffery per indagare la struttura dell'atomo e la possibile origine elettromagnetica della massa.

1922 Stimolati dalle idee di Eddington sul legame tra la costante di Planck e le altre costanti della fisica compaiono dei lavori che potremmo definire di "numerologia", ovvero di speculazioni sulla possibile relazione tra c, G ed $\hbar$.

Jaffé lavora sul problema del "microcosmo", rappresentato dalla ricerca di una descrizione del campo gravitazionale dell'elettrone, e prende come punto di partenza l'approccio di Sommerfeld applicando la RG al modello atomico di Bohr-Rutherford.

1923 *Wereide* si inserisce nello stesso filone di Jaffé esprimendo la convinzione che sia necessario applicare lo stesso principio di relatività sia al macrocosmo che al microcosmo.

1924 *Eckart*, nell'ambito della discussione sulla spiegazione dell'effetto Compton attraverso la teoria ondulatoria, cerca di interpretare l'influenza del campo gravitazionale generico sulle frequenze di un'onda monocromatica come un possibile punto di partenza per *spiegare* l'origine delle "equazioni quantistiche".

Mecke cerca di stabilire tre postulati che forniscano una base assiomatica per la quantizzazione nell'ambito della RG.

Il fisico messicano *Vallarta* pubblica la propria tesi di dottorato in cui riprende i lavori di Jeffery e Jaffé e spende una parte considerevole della tesi per discutere come conciliare la RG con la teoria dei quanti. Cerca di trovare una giustificazione teorica all'assenza di orbite non periodiche dell'elettrone, discute i postulati di Mecke e la loro applicazione.

1925 *Heisenberg* pubblica il primo degli articoli che segnano la nascita della Meccanica delle Matrici.

Jeans tiene una lezione a Cambridge in cui paventa l'idea che si possano conciliare la gravità con la teoria quantistica a partire da una revisione del concetto di spazio-tempo.

1926 (*Prima parte*) *De Donder* tiene delle lezioni al MIT in cui espone le proprie idee riguardo alla quantizzazione relativistica, coinvolgendo la nascente Meccanica Ondulatoria.

Jeans ribadisce l'idea che i due pilastri su cui la fisica si poggia, ovvero la RG e la teoria dei quanti, sembrano non incontrarsi.

Vengono pubblicati i lavori di *Schrödinger*, che contengono l'omonima equazione e segnano la nascita della Meccanica Ondulatoria.

Bibliografia

[Bar16] Edwin. H. Barton (1916); Gravitation and Temperature. *Nature*, 97, pages 461–462. August.

[Bar04] Vincenzo Barone, *Relatività. Princìpi e applicazioni* (Torino: Bollati Boringhieri, 2004).

[BJ26] Oliver R. Baldwin and George B. Jeffery (1926); Electronic Orbits on the Relativity Theory. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 111, page 104.

[Cao99] Tian Yu Cao (Editor), chapter V Quantum field theory and space-time. "Introduction" by John Stachel, pages 166–175 (Cambridge University Press, 1999).

[Com23] Arthur Holly Compton (1923); A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements. *Physical Review*, 21, pages 483–502.

[Cre18] Albert Cushing Crehore (1918); Derivation of the Newtonian Constant of Gravitation in Terms of the Properties of Electrons . *Pysical Review*, 12, pages 13–18.

[De 22] Theophile De Donder (1922); La gravifique einsteinienne. *Annales de l'Observatoire royal de Belgique*, 1, pages 73–268.

[De 26a] Theophile De Donder (a1926); Application de la relativité aux le systèmes atomiques et moléculaires. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 182, pages 1380–1382.

[De 26b] Theophile De Donder (b1926); Application de la quantification déduite de la Gravifique einsteinienne. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 183, pages 594–595.

[De 27] Theophile De Donder, *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge, MA: MIT, 1927).

[Dv26] Theophile De Donder and Fr. H. van den Dungen (1926); La quantification déduite de la Gravifique einsteinienne. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 183, pages 22–24.

[Dé13] Louis Décombe (1913); Théorie électronique de la gravitation. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, Tome 156, page 940.

[Eck24] Carl Eckart (1924); The wave theory of the Compton effect. *Pysical Review*, 24, pages 591–596.

[Edd18a] Arthur S. Eddington (1918); Gravitation and the Principle of Relativity II. *Nature*, 101, pages 34–36.

[Edd18b] Arthur S. Eddington, *Report on the Relativity Theory of Gravitation* (London: Fleetway Press, 1918).

[Edd20] Arthur S. Eddington, *Report on the Relativity Theory of Gravitation.* (London: Fleetway Press, 1920).

[Ein15a] Albert Einstein (a1915); Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, part 1, page 315.

[Ein15b] Albert Einstein (b1915); Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, part 2. Part A p. 778–786, part B p. 799–801.

[Ein15c] Albert Einstein (c1915); Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, part 2, pages 831–839.

[Ein15d] Albert Einstein (d1915); Feldgleichungen der Gravitation. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, part 2, pages 844–847.

[Ein16] Albert Einstein (1916); Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. *Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 688–96.

[Ein17] Albert Einstein (1917); Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein. *Deutsche Physikalische Gesellschaft.*, 19, pages 82–92.

[Ein18] Albert Einstein (1918); Über die Gravitationswellen. *Preussische Akademie der Wissenschaften; Sitzungsberichte.*, pages 154–167. Berlin.

[EK92] J. Eisenstaedt and A. J. Kox (Editors), *"The first steps of quantum gravity and the Planck values" by Gennady E. Gorelick*, pages 364–376 (Boston: Birkhaeuser: Cambridge University Press, 1992).

[Goe04] Hubert F.M. Goenner (2004). On the History of Unified Field Theories. Living Review in Relativity 7 (cited on March 2 2014) http://www.livingreviews.org/lrr-2004-2.

[Goo10] David Goodstein, *On Fact and Fraud. Cautionary Tales From The Front Line of Science* (Princeton: Princeton University Press, 2010).

[Gra93] Sandro Graffi, *Le radici della quantizzazione.* I quaderni di fisica teorica (Università degli Studi di Pavia. Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica, 1993). Editore: Sigfrido Boffi.

[Haa19] Arthur Haas (1919); Die Axiomatik der modernen Physik. *Die Natürwissenschaften*, 41, pages 744–750.

[Hei25] Werner Heisenberg (1925); Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehunge. *Zeitschrift für Physik*, 33, pages 879–893.

[Hil00] David Hilbert (1900); Mathematische Probleme – Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreßzu Paris 1900. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 253–297.

[Hil15] David Hilbert (1915); Die Grundlagen der Physik I. *Göttinger Nachrichten. Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 395–407.

[Jaf22] George Jaffé (1922); Bemerkungen über die relativistischen Keplerellipsen. *Annalen der Physik*, 372, page 212.

[Jea26] James Jeans, *Atomicity and Quanta* (Cambridge Library Collection, 1926). Cambridge.

[Jef21] George Barker Jeffery (1921); The Field of an Electron on Einstein's Theory of Gravitation. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 99, pages 123–134.

[Jol20] J. Joly (1920); Relativity and Radioactivity. *Nature*, 104, page 468.

[Kal21] Theodore Kaluza (1921); Zum Unitätsproblem in der Physik. *Sitzungsberichte der Koniglich Akademieder Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1, pages 966–972.

[Kra00] Helge Kragh (2000); Relativity and quantum theory from Sommerfeld to Dirac. *Annalen der Physik*, 9, pages 961–974.

[LL04a] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifšits, *Meccanica*, volume Fisica teorica 1 (Edizioni Mir, 2004). Editori Riuniti: V edizione, I ristampa. Traduzione di Aleksandr Machov.

[LL04b] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifšits, *Teoria dei campi*, volume Fisica teorica 2 (Edizioni Mir, 2004). Editori Riuniti: III edizione, I ristampa. Traduzione di Aleksandr Machov.

[Lod21] Oliver Lodge (1921); The Gravitational Field of an Electron. *Nature*, 107, page 392.

[Lun22] Arthur C. Lunn (1922); Atomic constants and dimensional invariants. *Pysical Review*, 20, pages 1–14.

[Mec24] Reinhard Mecke (1924); Beiträge zur Deutung der Quantentheorie. *Zeitschrift für Physik*, 21, pages 26–37.

[Ott06] Julio M. Ottino (2006); Granular matter as a window into collective systems far from equilibrium, complexity, and scientific prematurity. *Chemical Engineering Science*, 61, pages 4165–4171.

[Pai91] Abraham Pais, *"Sottile è il Signore..." La scienza e la vita di Albert Einstein* (Torino: Collana: Gli Archi, 1991). Bollati Boringhieri.

[Pau25] Wolfgang Pauli (1925); On the Connexion between the Completion of Electron Groups in an Atom with the Complex Structure of Spectra. *Zeitschrift für Physik*, 31, pages 765–783.

[Pau82] Wolfgang Pauli, *Teoria della Relatività* (Torino, 1982), Traduzione italiana di Paolo Gulmanelli edition. Boringhieri: Prima edizione 1958.

[Per01] Giulio Peruzzi (2001); Niels Bohr. Collana 'I grandi della scienza'. Edizioni Le Scienze: Anno IV n. 23.

[PJMN12] Barry N. Taylor Peter J. Mohr and David B. Newell (2012); CODATA recommended values of the fundamental physical constants. *Review of Modern Physics*, 84, pages 1527–1605.

[Pla99] Max Plank (1899); Über di irreversible Strahlungsvorgänge. Fünfte Mittelung. *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte*, pages 440–480.

[Rey03] Osborne Reynolds, *Papers on Mechanical and Physical Subjects. The Submechanics of the Universe* (Cambridge University Press, 1903).

[Ric05] Dean Rickles (2005); "Pioneers of Quantum Gravity". Talk presented at the Third Conference on History of Quantum Physics (HQ3).

[Ric13] "*Pourparlers* for Amalgamation: Some Early Sources of Quantum Gravity Research" by Dean Rickles. In: *Traditions and Transformations in the History of Quantum Physics*, (Editors) Christoph Lehner Shaul Katzir and Jürgen Renn, chapter 6 (Max Planck Research Library for the History and Development of Knoledge. Proceedins 5, 2013). Third International Conference on the History of Quantum Physics, Berlin, June 28 – July 2, 2010; http://www.edition-open-access.de/proceedings/5/index.html.

[Rie67] Bernhard Riemann (1867); Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13, pages 133–152.

[Rie73] Bernhard Riemann (1873); On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry. *Nature*, 8, pages 14–17, 36, 37. Translated by William Kingdon Clifford.

[Roc15] Alessio Rocci (2015). Oliver in Quantum-Gravity-land. http://www.oliverlodge.org/oliver-in-quantum-gravity-land/. Based on talk given at 3rd Making Waves Workshop. October, 31 Liverpool.

[Row90] Peter Rowlands, *Oliver Lodge and the Liverpool Physical Society* (Liverpool: Liverpool University Press, 1990).

[Sch26a] Erwin Schrödinger (a1926); Quantisierung als Eigenwertproblem. (Erste Mitteilung.). *Annalen der Physik*, 79, pages 361–376.

[Sch26b] Erwin Schrödinger (b1926); Quantisierung als Eigenwertproblem. (Zweite Mitteilung.). *Annalen der Physik*, 79, page 489–527.

[Sch26c] Erwin Schrödinger (c1926); Quantisierung als Eigenwertproblem. (Dritte Mitteilung.). *Annalen der Physik*, 79, pages 734–756.

[Sch26d] Erwin Schrödinger (d1926); Quantisierung als Eigenwertproblem. (Vierte Mitteilung.). *Annalen der Physik*, 81, pages 109–139.

[Som16] Arthur Sommerfeld (1916); Zur Quantentheorie der Spektrallinien. *Annalen der Physik*, 51, pages 1–94.

[Val24a] Manuel Sandoval Vallarta (1924); *Bohr's Atomic Model from the Standpoint of the General Theory of Relativity and of the Calculus Of Perturbations*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA. PhD Thesis.

[Val24b] Manuel Sandoval Vallarta (1924); Note on the quantization of non-conditioned-periodic systems. *Journal of Mathematics and Physics*, 3, pages 108–117.

[Val24c] Manuel Sandoval Vallarta (1924); Notes on dynamical systems non-integrable by separation of variables and on the existence of "unmechanical" orbits in the atom. *Journal of Mathematics and Physics*, 3, pages 174–181.

[Wer23] Thorstein Wereide (1923); The General Principle of Relativity applied to the Rutherford-Bohr Atom-Model. *Pysical Review*, 21, pages 391–396.

[Wey23] Hermann Weyl, *Raum, Zeit, Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* (Berlin: Springer, 1923). 5th edition.

[Wil15] Wilson William (1915); The quantum-theory of radiation and line spectra. *Philosophical Magazine Series 6*, 29, pages 795–802.

Capitolo 2

Il dominio della Meccanica Ondulatoria

Con questo secondo capitolo copriamo l'arco temporale che va dal 1926 fino al 1930. La nascita della Meccanica Quantistica è segnata dall'entrata in scena di due formulazioni rivali: la Meccanica delle Matrici e la Meccanica Ondulatoria. Nel periodo che stiamo per analizzare è la seconda delle due formulazioni a giocare il ruolo di protagonista: nella maggior parte degli approcci analizzati l'obiettivo è l'introduzione di un'equazione d'onda relativistica che descriva la dinamica su uno spazio-tempo curvo. Molti autori sviluppano l'idea che per descrivere in maniera coerente tutti i fenomeni allora conosciuti fosse necessario immaginare un Universo penta-dimensionale. Il più famoso è il contributo di Klein, ma intervengono anche De Broglie e Rosenfeld, quest'ultimo recupera alcune idee dell'approccio di De Donder e Klein, arrivando a formulare una prima *metrica quantistica*, mentre i matematici Wiener e Struik capovolgono l'approccio di De Donder cercando di partire da un'equazione d'onda quantistica per ottenere una teoria della gravitazione, analogamente a quanto proposto molti anni più tardi dalla teoria delle Stringhe.

Nel 1927 il problema dell'armonizzazione tra la Meccanica Ondulatoria e la teoria di Einstein fa la sua comparsa a un congresso: la quinta conferenza Solvay. Assieme alle discussioni intorno a molti aspetti della neonata Meccanica Quantistica, in questo periodo compaiono i lavori che segneranno la nascita della moderna teoria dei campi quantistici, vengono formulati il principio di indeterminazione di Heisenberg e l'equazione di Dirac.

Con il 1930 nasceranno due dei moderni approcci alla quantizzazione del campo gravitazionale, che analizzeremo in dettaglio nel prossimo capitolo, mentre tutti gli altri approcci verranno reinterpretati dalla teoria quantistica dei campi come approcci semi-classici: per questo motivo abbiamo deciso di denominare *preistoria della Gravità Quantistica* l'arco temporale di questi primi due capitoli.

2.1 1926-1927: Il mondo penta-dimensionale di Klein

Nel 1926 Oskar Klein pubblica il primo di una serie di articoli [Kle26a] in cui cercherà di inserire in un quadro unitario la MQ, la RG e l'elettromagnetismo[1]. Una delle ipotesi dell'approccio di Klein è che lo spazio-tempo sia formato da *quattro* dimensioni spaziali e una temporale, un'idea utilizzata anche da Kaluza[2] nel 1921 [Kal21], come già accennato nel precedente capitolo[3]. Entrambi gli autori, infatti, avevano notato che grazie a questa idea, unita ad altre premesse di cui parleremo a breve, era possibile "unificare" la teoria di Einstein con l'elettromagnetismo[4]. Mentre Kaluza non tornerà più sul proprio approccio, per Klein questo fatto era solo di un punto di partenza che ha poi cercato *concretamente* di sviluppare nei lavori seguenti. Un'altra differenza tra i due autori emerge esplicitamente leggendo alcuni passi dei due lavori[5]. Alla fine del proprio articolo Kaluza dichiara apertamente che a suo avviso la teoria dei quanti è un pericoloso nemico della sua teoria, e definisce la teoria dei quanti come 'la sfinge della fisica moderna' ([Kal84]; pag. 8). Al contrario, Klein esprime sin dal riassunto del lavoro il proprio intento, ovvero un'armonizzazione fra le due teorie, RG ed elettromagnetismo, e la MQ, attraverso una descrizione *unitaria* di tutti i fenomeni fisici: '[...] vorrei mostrare la semplice relazione che c'è tra la teoria proposta da Kaluza [...] da un lato e i metodi sviluppati da de Broglie[...] e Schrödinger [...] per trattare i problemi quantistici dall'altro lato' ([Kle84]; pag. 10). Stachel scrive ([Cao99]; pag 167) che nel 1927 Klein aveva intuito che la teoria dei quanti avrebbe modificato il concetto di spazio-tempo. L'idea di Klein nasce proprio in questo articolo del 1926, dove l'autore propone, con le dovute cautele, che la necessità di introdurre la quinta dimensione spaziale sia da attribuirsi proprio alla MQ. Vediamo i passi in questione: 'Nonostante l'introduzione di una quinta dimensione nelle nostre considerazioni fisiche possa sembrare strana in prima battuta, si può comprendere questa *modifica della base geometrica* delle equazioni di campo, *attraverso l'introduzione della teoria dei quanti* [...] [C]ome è risaputo è diventato sempre meno probabile riuscire a trovare una descrizione *unificata* della teoria dei quanti e dello spazio-tempo, d'altra parte la

[1] Il tentativo era forse troppo ambizioso e come Klein racconterà [Eks91], Dirac stesso gli avrebbe detto che la fonte principale del suo insuccesso sarebbe stata proprio la volontà di risolvere troppi problemi in una sola volta.

[2] L'uso delle cinque dimensioni era già stato adottato anche da Nordström, [Nor14], per motivi simili.

[3] Si veda la nota ([10]) del Capitolo 1.

[4] Klein [Eks91] ci informa che quando ha cominciato a pensare all'unificazione tra RG e teoria di Maxwell, non era a conoscenza del lavoro di Kaluza, ma in [Kle26a] Klein fa esplicito riferimento alla teoria di Kaluza. Ad alcuni risultati giunge in maniera indipendente anche Vladimir Fock [Foc26a] e l'approccio penta-dimensionale verrà tentato anche da altri autori, come vedremo nei prossimi paragrafi.

[5] Abbiamo fatto riferimento alle traduzioni in inglese che sono rispettivamente [Kal84] e [Kle84].

possibilità di esprimete questi fenomeni attraverso un sistema penta-dimensionale non è esclusa a priori[6] . Ovviamente lasciamo al futuro il compito di stabilire se esista qualcosa di reale dietro a questa proposta. In ogni caso è necessario insistere sul fatto che il metodo qui sviluppato [...] deve essere considerato *assolutamente provvisorio*'[7] Le ultime parole di Klein sottolineano la cautela dovuta al fatto che quella dell'autore è una proposta su cui si riserva di tornare a ragionare. Comunque, come accennato, Klein pensa già a una modifica della geometria dello spazio-tempo che gli deriva dalla personale convinzione che l'introduzione della quinta dimensione gli permetta di ottenere una teoria *unitaria*, e si fa forza delle discussioni che evidentemente aveva avuto con Bohr.

Nonostante la mancanza, ancora una volta, di un qualche tentativo di quantizzazione del campo gravitazionale, il lavoro di Klein entra a buon diritto nella storia della Gravità Quantistica per almeno due motivi. Il primo riguarda le intenzioni dell'autore. Klein infatti aveva un preciso progetto che per quanto riguarda la fusione della RG con la MQ, può essere riassunto nei seguenti tre punti:

- scrivere un'equazione d'onda in cinque dimensioni,
- immergerla in uno spazio-tempo curvo,
- ottenere un principio variazionale *unificante*

Il secondo motivo riguarda l'importanza *storica* che ha assunto il tentativo di Klein. Il suo approccio, infatti, è stato recuperato dai promotori dello studio della dinamica di campi quantistici su spazi-tempo curvi[8]. Dal punto di vista moderno lo studio di questa dinamica rappresenta l'approssimazione semi-classica di una qualche teoria quantistica della gravitazione e ha prodotto negli anni 1970 la scoperta del fenomeno dell'emissione di radiazione elettromagnetica da parte dei dei Buchi Neri [Haw75]. Quest'ultima scoperta, dovuta Stephen Hawking, ha aperto le porte allo studio della termodinamica dei Buchi Neri e alla formulazione di nuovi problemi non ancora risolti [Haw76], che si pensa troveranno una spiegazione soddisfacente nel quadro di una teoria quantistica della gravitazione. Cerchiamo ora di entrare con un po' più in dettaglio nel mondo penta-dimensionale di Klein[9] e di

[6]Osservazioni di questo tipo, fatte in varie occasioni dal Professor Bohr, hanno avuto un'influenza determinante per la genesi di questa nota.

[7]I corsivi sono nostri. La nota ([6]) è parte integrante del testo originale.

[8]In questo approccio tutti i campi, a eccezione del campo gravitazionale, vengono quantizzati. Lo spazio-tempo e la metrica restano dunque oggetti classici.

[9]Una panoramica sul lavoro dell'autore si rende necessaria per *contestualizzare* e comprendere al meglio il lavoro dell'autore nel suo complesso. L'analisi dei primi due articoli di Klein, [Kle26a] [Kle26b], è stata già presa in considerazione in dettaglio da almeno due autorevoli autori [Kra84] [OS00].

seguire, attraverso i successivi articoli[10], come questa convinzione dell'autore che la MQ influenzi il concetto di spazio-tempo, si affievolirà a poco a poco, fino all'ultimo lavoro del biennio, in cui Klein stesso decreterà esplicitamente il fallimento di questo progetto[11].

2.1.1 L'analogia con la luce.

Cominciamo a considerare quindi più in dettaglio il primo lavoro di Klein sull'argomento [Kle26a]. Per includere in un quadro unitario l'elettromagnetismo e la RG, Klein immagina un mondo penta-dimensionale[12], il cui elemento di linea è il seguente:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}} dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}} \tag{2.1}$$

e si assume che la metrica non dipenda dalla quinta coordinata x^5, $\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x)$. In questo modo le trasformazioni di coordinate più generali che lasciano invariante l'elemento di linea (2.1), possono essere scritte nella seguente forma:

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= f^{\mu}(x) \\ x'^{5} &= x^5 + f^5(x) \ , \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove f^μ e f^5 sono cinque funzioni che dipendono solo dalle coordinate x^μ. In questo modo la componente γ_{55} della metrica risulta *invariante* per le (2.2) e Klein sceglie di porre $\gamma_{55} = \alpha =$ costante[13]. Il valore di tale costante viene fissato, come vedremo a breve, dalla richiesta che le equazioni di Einstein penta-dimensionali riproducano le equazioni di Einstein quadridimensionali con la corretta normalizzazione[14], e vale $\alpha = \frac{16\pi G}{e^2 c^2}$. Questo significa che la coordinata x^5, così definita, non ha le dimensioni di una lunghezza[15]:

[10]I lavori analizzati in questo paragrafo hanno delle convenzioni *differenti* tra loro sulla metrica e sulla segnatura della metrica. Ovviamente abbiamo tradotto le formule nella nostra notazione, segnalando, dove era necessario, le differenze tra i vari lavori.

[11]In realtà, da quello che lo stesso autore ci dice in [Eks91], Klein resterà sempre *affezionato* alla propria idea e cercherà negli anni nuovi spunti per farla rivivere.

[12]Gli indici barrati faranno riferimento allo spazio-tempo penta-dimensionale, $\bar{\mu} = 0, 1, 2, 3, 5$, dove al solito la prima componente è quella temporale, mentre le altre sono spaziali. Gli indici non barrati faranno riferimento alle prime quattro componenti. La segnatura della metrica è sempre $(-, +, +, +, +)$. Per un approccio moderno alle teorie in cinque dimensioni si veda per esempio [SD92].

[13]L'invarianza di γ_{55} non ne implica ovviamente la costanza, bensì che γ_{55} sia in generale una funzione scalare. Nelle moderne teorie multidimensionali à la Kaluza-Klein tale funzione scalare si chiama *dilatone*, un campo scalare vero e proprio, che all'epoca non è stato tenuto in considerazione da Klein. Oggi sappiamo che per poter ottenere, come fece Klein, le ordinarie equazioni di Einstein e di Maxwell è necessario imporre appunto che il dilatone sia costante. Come sottolineato da Lochlain O'Raifeartaigh, si veda [OS00] per i dettagli tecnici, la scelta fatta da Klein *a priori* ha *nascosto* all'autore un'inconsistenza interna del proprio modello.

[14]Stiamo facendo riferimento alla corretta normalizzazione del membro di destra nelle equazioni (2.7a)

[15]Infatti x^5 ha le dimensioni di un'azione.

dalla (2.1) si deduce che la quinta coordinata con le corrette dimensioni fisiche[16] sarebbe $\tilde{x}^5 = \sqrt{\alpha}x^5$. Riscriviamo ora l'elemento di linea (2.1), come fa Klein, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \gamma_{55}(dx^5)^2 + 2\gamma_{5\mu}dx^5dx^\mu + \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= \alpha\left(dx^5 + \frac{\gamma_{5\mu}}{\alpha}dx^\mu\right)^2 + \left(\gamma_{\mu\nu} - \frac{\gamma_{5\mu}\gamma_{5\nu}}{\alpha}\right)dx^\mu dx^\nu . \end{aligned}$$

Se ora poniamo

$$\frac{\gamma_{5\mu}}{\alpha} = \frac{e}{c}A_\mu \tag{2.3}$$

$$d\vartheta = dx^5 + \frac{e}{c}A_\mu dx^\mu \tag{2.4}$$

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{\gamma_{5\mu}\gamma_{5\nu}}{\alpha} \quad , \quad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \ , \tag{2.5}$$

allora la metrica può essere scritta nella seguente forma compatta:

$$d\sigma^2 = \alpha d\vartheta^2 + ds^2 \ . \tag{2.6}$$

Klein identifica le quantità A_μ definite dalla (2.3) con gli usuali potenziali elettromagnetici[17], e le quantità $g_{\mu\nu}$ definite dalla (2.5) con la metrica quadri-dimensionale. Con queste premesse, se calcoliamo lo scalare di curvatura $R^{(5)}$ relativo alla metrica penta-dimensionale e scriviamo il seguente principio variazionale[18]

$$\delta \int d^5x\sqrt{-\gamma}R^{(5)} = 0,$$

si ottengono le equazioni di Einstein penta-dimensionali. Se tralasciamo per un momento l'equazione corrispondente alla variazione di γ_{55}, le restanti equazioni sono equivalenti a un sistema di equazioni quadridimensionali:

$$R^{(5)}_{\bar{\mu}\nu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\bar{\mu}\nu}R^{(5)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \dfrac{8\pi G}{c^4}T^{em}_{\mu\nu} & \text{(2.7a)} \\ \partial^\mu\left(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}\right) = 0 & \text{(2.7b)} \end{cases}$$

dove i simboli hanno il significato usuale[19]. Come anticipato grazie alla scelta per la quinta componente della metrica $\alpha = \frac{16\pi G}{e^2c^2}$ e alle identificazioni appena fatte le (2.7a) sono

[16]In unità naturali α ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato e un'azione è adimensionale. Usare come quinta coordinata $\tilde{x}^5$ suggerisce di porre $\gamma_{55} = \alpha = 1$, come sempre si fa nei moderni lavori di rassegna delle teorie di Kaluza-Klein e come farà Klein nel suo ultimo lavoro del 1927. In questo modo si stabilisce però una relazione tra le costanti in gioco: $\frac{e^2}{c^2} = \frac{16\pi G}{c^4}$.

[17]Secondo le (2.2) tali quantità trasformano come un quadrivettore.

[18]γ è il determinante della metrica (2.1).

[19]Si veda la sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici.* In particolare in questo caso il tensore energia impulso del campo elettromagnetico è $T^{em}_{\mu\nu} = F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$.

le equazioni di Einstein accoppiate[20] con quelle di Maxwell, le (2.7b), in assenza di sorgenti. Prima di proseguire spendiamo due parole sull'equazione relativa alle componenti 55. Come accennato nella nota ([13]), porre γ_{55} = costante nasconde un'inconsistenza del modello. Se si considera il "dilatone" α non costante, l'equazione trascurata da Klein ha la seguente forma schematica: $\Box\sqrt{\alpha} \sim \left(\sqrt{\alpha}\right)^3 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ [OW97]. Quindi se il dilatone è costante tale equazione richiede che la Lagrangiana del campo elettromagnetico sia nulla. Come vedremo anche altri autori trascureranno tale equazione, forse pensando che questo fatto non porti a delle conseguenze. Come riportato in [OW97], i primi che metteranno in luce questa inconsistenza saranno Pascual Jordan e Yves Thiry rispettivamente nel 1947 e nel 1948.

Torniamo ad occuparci delle (2.7a) e (2.7a). Queste sono le stesse equazioni ricavate anche da Kaluza[21]. Un *unico* principio variazionale produce quindi le equazioni del moto sia della RG sia dell'elettromagnetismo: in questo senso, per Klein, si ottiene una teoria *unitaria*. A questo punto Klein cercherà, attraverso la stessa idea di unificazione, di inglobare anche il moto delle particelle cariche introducendo cioè un tensore energia-impulso penta-dimensionale, in modo da avere un principio variazionale che unisca i tre fenomeni. Klein è però cosciente del fatto che la meccanica delle particelle materiali deve essere descritta dalla Meccanica Ondulatoria e utilizza, come Schrödinger in [Sch26a], l'analogia formale tra l'equazione di Hamilton-Jacobi per il moto di una particella e l'equazione delle onde nell'approssimazione dell'ottica geometrica già descritta nel paragrafo 1.3. Per ripercorrere più agevolmente i ragionamenti dell'autore conviene ripetere brevemente quanto detto nel precedente capitolo. L'approssimazione di ottica geometrica della meccanica delle onde ([LL04]; pag. 175) si ottiene scrivendo la funzione d'onda Ψ nella forma $\Psi = Ae^{i\omega\Phi}$ dove A è l'ampiezza dell'onda e la fase $\omega\Phi$ è detta *iconale*[22], e sono entrambe funzioni di tutte le coordinate spazio-temporali. A questo punto si osserva che l'iconale è una quantità molto grande, perché varia di 2π su una lunghezza d'onda, mentre nell'approssimazione di ottica geometrica la lunghezza d'onda λ tende a zero. Se si considera l'equazione d'onda per un'onda elettromagnetica nel vuoto in relatività ristretta, ogni componente dei campi è soluzione di un'equazione scalare del tipo $\partial_\mu\partial^\mu\Psi = 0$. Se si scrive la funzione d'onda nella forma appena suggerita e si usa il fatto che l'iconale

[20]Il tensore $T_{\mu\nu}$ compare perché gli indici sommati restano sempre penta-dimensionali. Tale tensore, grazie alle identificazioni fatte, è proprio il moderno tensore energia-impulso del campo elettromagnetico.

[21]Invece delle (2.2) Kaluza aveva assunto, come Nordström prima di lui, l'ipotesi di *cilindricità*, ovvero che la quinta coordinata fosse arrotolata e quindi periodica. Klein introdurrà esplicitamente questa ipotesi solo in seguito.

[22]La costante ω verrà determinata più avanti.

è una quantità grande, si ottiene l'equazione dell'iconale[23] $\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi = 0$. Tale equazione è formalmente identica all'equazione di Hamilton-Jacobi per particelle di massa nulla nel momento in cui si identifica il momento della particella p_μ con il vettore d'onda k_μ, legato all'iconale dalla relazione $k_\mu = \partial_\mu\Phi$. L'intenzione di Klein è quella di partire proprio dall'equazione $\partial_\mu\partial^\mu\Psi = 0$, generalizzandola al caso di uno spazio-tempo curvo, per poi riuscire a riottenere le equazioni del moto delle particelle cariche[24]. Analizziamo in dettaglio la generalizzazione dell'equazione $\partial_\mu\partial^\mu\Psi = 0$ proposta da Klein:

$$a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\left(\delta^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\bar{\mu}}} - \Gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)\partial_{\bar{\sigma}}\Psi = a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\nabla_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\nu}}\Psi = 0. \tag{2.8}$$

L'autore usa la derivata covariante $\nabla_{\bar{\mu}}$, definita usando i simboli di Christoffel $\Gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ calcolati usando la metrica definita in (2.1)[25]. Questo ci dice che la dinamica avviene su uno spazio-tempo curvo[26]. Curiosamente, però, le derivate covarianti non vengono contratte dalle componenti contravarianti del tensore metrico $\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, come ci si aspetterebbe, ma dal tensore simmetrico $a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$. Klein utilizza questo accorgimento proprio perché vuole ottenere l'usuale equazione quadridimensionale delle particelle cariche e *massive* a partire da un'equazione d'onda penta-dimensionale dove *non compare* la massa. Klein infatti, in questo lavoro, dichiara esplicitamente di seguire l'analogia con la luce: l'equazione d'onda penta-dimensionale (2.8) assomiglia a quella che noi oggi chiameremmo *equazione di Klein-Gordon*[27] *per un campo scalare a massa nulla*[28]; l'analogia con la luce è dovuta quindi al fatto che la massa, associata a questa funzione d'onda nel mondo penta-dimensionale, è nulla. Un'altra anomalia di questa equazione è dovuta al fatto che la derivata che si ottiene ponendo $\bar{\mu} = 5$ è la derivata lungo la direzione x^5, una variabile *anomala* perché non ha le dimensioni di una lunghezza, come precedentemente detto.

Vale la pena addentrarsi maggiormente nei dettagli matematici. Dopo aver presentato l'equazione (2.8) Klein mostra il legame tra la Meccanica Ondulatoria e la meccanica del

[23]Tale equazione si può ottenere, equivalentemente, considerando il limite per ω grande e trascurando i termini *lineari* in ω.

[24]Poco sopra abbiamo accennato al fatto che Klein abbia ripercorso le orme di Schrödinger. Più precisamente il percorso di Klein è *opposto* a quello pubblicato da Schrödinger. Quest'ultimo, infatti, parte dalla funzione hamiltoniana per poi ricavare l'equazione d'onda non relativistica.

[25]All'inizio l'autore suppone solo che la (2.8) sia 'invariante per trasformazioni di coordinate' ([Kle84]; pag. 16) e questo ci fa supporre che i simboli della connessione siano calcolati usando la metrica $\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$.

[26]Ricordiamo che una sola derivata covariante che agisce su una funzione scalare è equivalente alla derivata usuale.

[27]Nel 1926, l'equazione oggi nota come equazione di Klein-Gordon venne scritta da moltissimi autori e dalla fine dell'anno era nota praticamente a quasi tutti i fisici dell'epoca [Kra84].

[28]Nella moderna equazione di Klein-Gordon, però, il tensore che contrae le due derivate dovrebbe essere la metrica definita in (2.1).

punto nel formalismo hamiltoniano. L'autore infatti scrive l'equazione dell'iconale che si ricava dalla (2.8)[29], $a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\partial_{\bar{\mu}}\Phi\partial_{\bar{\mu}}\Phi = 0$, e scrive la relazione[30] $p_{\bar{\mu}} = \partial_{\bar{\mu}}\Phi$, per ricavare una funzione hamiltoniana[31] $H = \frac{1}{2}a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}p_{\bar{\mu}}p_{\bar{\nu}}$. Poiché l'obiettivo di Klein è quello di scrivere un principio variazionale, l'autore passa al formalismo lagrangiano e scrive la seguente funzione lagrangiana[32]:

$$L = \frac{1}{2}a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\frac{dx^{\bar{\mu}}}{d\tilde{\lambda}}\frac{dx^{\bar{\nu}}}{d\tilde{\lambda}} \tag{2.9}$$

dove $\tilde{\lambda}$ è il parametro affine, che parametrizza la linea d'universo della "particella" nel mondo penta-dimensionale e $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ è il tensore inverso di $a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ definito dalla relazione: $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}a^{\bar{\nu}\bar{\lambda}} = \delta^{\bar{\lambda}}_{\bar{\mu}}$. A questo punto Klein determina quale forma debba avere il tensore $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, affinché le equazioni di Eulero-Lagrange ottenute dalla (2.9) si riducano alle equazioni quadri-dimensionali di una particella massiva e carica. La relazione che ci presenta Klein, $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}dx^{\bar{\mu}}dx^{\bar{\nu}} = \frac{1}{m^2c^2}d\vartheta^2 + ds^2$, a nostro avviso è ambigua[33], infatti sembra suggerire che il tensore $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ debba essere una sorta di *seconda metrica* $d\hat{\sigma}^2 = a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}dx^{\bar{\mu}}dx^{\bar{\nu}}$. L'autore stesso sembra volerlo interpretare in questo modo parlando di 'geodetiche *nulle* associate alla forma differenziale $d\hat{\sigma}^2$'[34] ([Kle84]; pag. 17). In realtà la relazione usata da Klein equivale semplicemente a scegliere come Lagrangiana di partenza la seguente espressione:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m^2c^2}\left(\frac{d\vartheta}{d\tilde{\lambda}}\right)^2 + \left(\frac{ds}{d\tilde{\lambda}}\right)^2\right] && (2.10)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m^2c^2}\left(\frac{dx^5}{d\tilde{\lambda}} + \frac{e}{c}A_\mu\frac{dx^\mu}{d\tilde{\lambda}}\right)^2 + g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tilde{\lambda}}\frac{dx^\nu}{d\tilde{\lambda}}\right], && (2.11)\end{aligned}$$

[29] Le derivate covarianti spariscono nel momento in cui si considera che l'iconale è una quantità grande.

[30] Ricordiamo che in Meccanica Ondulatoria il vettore d'onda e l'impulso sono tra loro proporzionali.

[31] L'equazione dell'iconale si ottiene ponendo $H = 0$, ma questo non significa che la Hamiltoniana sia singolare, mentre le equazioni di Hamilton $\frac{dx^{\bar{\mu}}}{d\tilde{\lambda}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{\mu}}}$ e $\frac{dp_{\bar{\mu}}}{d\tilde{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial x^{\bar{\mu}}}$ corrispondono, nell'analogia tra la meccanica del punto e la Meccanica Ondulatoria, alle equazioni dei *raggi*, ovvero delle linee le cui tangenti coincidono con la direzione di propagazione dell'onda.

[32] La Lagrangiana (2.9) si può ottenere dalla Hamiltoniana $H = \frac{1}{2}a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}p_{\bar{\mu}}p_{\bar{\nu}}$ attraverso una trasformazione di Legendre supponendo come fa Klein che il tensore simmetrico $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ sia invertibile. Se $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ fosse la metrica dello spazio-tempo utilizzata da Klein l'azione ottenuta utilizzando la (2.9) coinciderebbe con la Lagrangiana utilizzata in RG per descrivere il moto di una particella di massa qualunque tramite il principio dell'azione stazionaria. Ricordiamo che tale azione, scritta utilizzando la generalizzazione dell'usuale Lagrangiana cinetica, è estremale per curve geodetiche *se e solo se* il parametro $\tilde{\lambda}$ è un parametro affine. Per i dettagli si veda ([CWMW73]; pag. 323). Ribadiamo però che per Klein $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ *non* è la metrica dello spazio-tempo.

[33] $d\vartheta$ e ds sono i differenziali definiti in (2.4) e (2.5). Il parametro m è la massa *quadridimensionale* della particella considerata e per Klein può assumere quindi sia il valore della massa dell'elettrone che quella del protone.

[34] Klein non è disturbato da questa ambiguità, come vedremo de Broglie interverrà per eliminare questo scomodo tensore.

ottenuta inserendo la relazione $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}dx^{\bar{\mu}}dx^{\bar{\nu}} = \frac{1}{m^2c^2}d\vartheta^2 + ds^2$ nella lagrangiana (2.9). Le equazioni di Eulero-Lagrange che si ricavano dalla (2.10)

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\frac{\partial L}{\partial\left(dx^5/d\tilde{\lambda}\right)} = \frac{\partial L}{\partial x^5} \tag{2.12a}$$

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\frac{\partial L}{\partial\left(dx^\mu/d\tilde{\lambda}\right)} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \tag{2.12b}$$

diventano, rispettivamente:

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}}p_5 = \frac{d}{d\tilde{\lambda}}\left(\frac{1}{m^2c^2}\frac{d\vartheta}{d\tilde{\lambda}}\right) = 0 \tag{2.13a}$$

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\left[p_5\frac{e}{c}A_\mu + g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tilde{\lambda}}\right] = \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\nu}\frac{dx^\rho}{d\tilde{\lambda}}\frac{dx^\nu}{d\tilde{\lambda}} + p_5\frac{e}{c}\partial_\mu A_\nu\frac{dx^\nu}{d\tilde{\lambda}} \tag{2.13b}$$

La (2.13a) è conseguenza del fatto che la Lagrangiana (2.10) non dipende esplicitamente dalla coordinata x^5 e autorizza Klein a dedurre che p_5 = costante[35]. In particolare se m rappresenta la massa dell'elettrone, Klein pone $p_5 = -1$, mentre pone $p_5 = +1$ se m rappresenta la massa del protone[36]. A questo punto Klein usa l'arbitrarietà che sussiste nella scelta della costante di proporzionalità tra il tempo proprio geometrizzato λ e il parametro affine, ponendo $\frac{d\lambda}{d\tilde{\lambda}} = m$, dove m rappresenta sempre la massa della particella in esame. Grazie a questa scelta, l'autore può introdurre il vettore $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{1}{m}\frac{dx^\mu}{d\tilde{\lambda}}$ e finalmente la seconda equazione diventa *l'usuale equazione del moto delle cariche con massa all'interno di un campo gravitazionale ed elettromagnetico*. Per esempio per l'elettrone ($m = m_e$; carica $= -e$; $p_5 = -1$; $\frac{d\lambda}{d\tilde{\lambda}} = m_e$) la (2.13b), diventa:

$$m_e\left(\frac{g_{\mu\nu}du^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\rho\nu}u^\rho u^\nu\right) = -\frac{e}{c}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)u^\nu \tag{2.14}$$

che è equivalente a quella usuale[37]. Dal punto di vista dell'autore le equazioni (2.13a) e (2.13b) offrono una sorta di *unificazione*, anche se non ancora accettabile, del moto delle particelle allora conosciute. E poiché il punto di partenza è un'equazione d'onda, Klein crederà di essere sulla buona strada per conciliare la MQ con la RG.

Nonostante, come già osservato, Klein non assuma inizialmente l'ipotesi di cilindricità per lo spazio-tempo, cercando una connessione esplicita con il lavoro di Schrödinger, l'autore prende in considerazione le soluzioni dell'equazione d'onda (2.8) che hanno una dipendenza *periodica* dalla quinta coordinata. In particolare Klein considera il caso particolare

[35] Anche le dimensioni fisiche di p_5 sono *anomale*. Vedremo nel prossimo paragrafo come Klein tratterà la cosa.

[36] L'autore definisce 'non soddisfacente' questa ambiguità ([Kle84]; pag. 19).

[37] Grazie a delle identità a cui soddisfano i simboli della connessione si dimostra che l'espressione è equivalente a quella riportata nella sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici*

di un campo *elettrostatico*, si mette ancora nell'approssimazione di ottica geometrica, e cerca soluzioni *stazionarie* dell'equazione d'onda, ovvero che siano soluzione dell'equazione $H\Psi = 0$, utilizzando la Hamiltoniana precedentemente calcolata. La funzione d'onda Ψ è della seguente forma:

$$\Psi = \psi(x, y, z)e^{-2\pi i\left(\frac{x^5}{h} - \nu t\right)} , \tag{2.15}$$

dove ν rappresenta la frequenza dell'onda. La presenza della costante di Planck in una posizione *anomala* è comprensibile dal punto di vista dimensionale, perché ricordiamo che le dimensioni di x^5 sono proprio quelle di un'azione secondo le convenzioni usate in quest'articolo da Klein. L'autore *giustifica* la presenza di h collegando la periodicità della funzione d'onda, nell'approssimazione di ottica geometrica, con le condizioni di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld[38]. Utilizzando la (2.15) e le approssimazioni sopra illustrate, l'equazione agli autovalori penta-dimensionale $H\Psi = 0$ diventa[39]:

$$\vec{\nabla}^2\psi + \frac{4\pi^2}{c^2h^2}\left[(h\nu - e\phi)^2 - m^2c^4\right]\psi = 0. \tag{2.16}$$

Ponendo $h\nu = mc^2 + E$, dove E rappresenta l'energia non relativistica, passando al limite non relativistico si ottiene l'equazione di Scrödinger[40].

2.1.2 Origine *geometrica* della quantizzazione della carica.

Sempre nel 1926, Klein presenta a *Nature* una nota molto breve che coinvolge proprio la periodicità della quinta dimensione [Kle26b]. L'autore si rende infatti conto che può utilizzare questo fatto, connesso con l'ipotesi di cilindricità, per "spiegare" in maniera geometrica la quantizzazione della carica elettrica.

La nota è molto breve e anche se le prime righe sembrano solamente riportare i risultati del lavoro precedente, in realtà Klein comincia a cambiare in maniera significativa una parte della sua precedente formulazione. Innanzitutto Klein riscrive l'elemento di linea

[38] Se la funzione d'onda viene scritta in approssimazione geometrica, $\Psi = e^{i\omega\Phi}$, e se $p_5 = -1$, come nel caso dell'elettrone, allora si può scrivere $\Phi = -x^5 + S(x^0, \dots, x^3)$, e se x^5 è periodica il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La condizione di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld per le variabili coniugate x^5 e p_5 è $\oint p_5 dx^5 = nh$ da cui, sostituendo, si ottiene $\frac{2\pi}{\omega} = nh$. Posto $n = 1$ si ha quindi $\omega = \frac{2\pi}{h}$.

[39] I dettagli tecnici non sono rilevanti.

[40] Klein conosce il primo lavoro di Schrödinger, perché lo cita, e sa quindi che Schrödinger stesso dichiara di aver scritto un'equazione relativistica che non dà i risultati sperati. Forse perché Schrödinger non la pubblicò nel suo primo lavoro o forse perché le priorità di Klein erano altre, quest'ultimo non si pone il problema di analizzare le soluzioni generali dell'equazione, che avrebbe messo in luce le inconsistenze dell'interpretazione dell'equazione di Klein-Gordon come equazione d'onda per una singola particella.

(2.6)[41] nel seguente modo:

$$d\sigma^2 = \left(d\tilde{x}^5 + \sqrt{2\kappa}A_\mu dx^\mu\right)^2 + ds^2 \tag{2.17}$$

dove la costante α è stata assorbita nella nuova coordinata $\tilde{x}^5$ che, come già detto, ora ha le dimensioni di una lunghezza e $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ viene spesso chiamata *costante di Einstein.* La seconda differenza con la precedente formulazione è che Klein non menziona più il tensore $a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ per scrivere la Lagrangiana, ma utilizza, come è in effetti più consono in RG, l'elemento di linea (2.17). Infatti identifica le traiettorie delle particelle come le 'geodetiche appartenenti all'elemento di linea $d\sigma^2$' ([Kle26b]; pag. 516). Quindi non utilizza più la Lagrangiana (2.10), ma una nuova Lagrangiana[42]:

$$L = \frac{1}{2}m\left[\alpha\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2\right] \tag{2.18}$$

dove, come prima, m è la massa della particella e τ è il tempo proprio. Ripetendo il precedente procedimento dell'autore e scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange, in luogo della (2.13a) si ottiene:

$$\frac{d}{d\lambda}\tilde{p}_5 = \frac{d}{d\lambda}m\left(\frac{d\tilde{x}^5}{d\tau} + \frac{\sqrt{2\kappa}A_\mu dx^\mu}{d\tau}\right) = 0. \tag{2.19}$$

Questa volta è il nuovo momento $\tilde{p}_5$, momento coniugato alla nuova coordinata $\tilde{x}^5$ che deve essere *costante* lungo le geodetiche: questa volta $\tilde{p}_5$ ha le usuali dimensioni fisiche. In luogo della (2.13b) si ottiene un'altra equazione quadridimensionale che si riduce ancora alla (2.14) se il momento $\tilde{p}_5$ soddisfa la relazione $\sqrt{\alpha}\tilde{p}_5 = 1$. Klein è molto colpito da questa relazione. Infatti la riscrive nel seguente modo:

$$\tilde{p}_5 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \tag{2.20}$$

e considera questo risultato valido per una particella di carica *e qualsiasi.* A questo punto Klein introduce esplicitamente l'ipotesi di cilindricità della quinta dimensione, perché grazie a quella si può scrivere per il momento $\tilde{p}_5$ una condizione di quantizzazione che coinvolge il *raggio* l del cilindro:

$$\tilde{p}_5 = n\frac{h}{l} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Quindi, sapendo che in natura tutte le cariche sono multipli della carica dell'elettrone, che solo per il momento indicheremo con $\tilde{e}$, potremo scrivere $e = n\tilde{e}$ $n \in \mathbb{N}$, e l'equazione

[41] Si veda anche la definizione (2.4).

[42] La parte quadridimensionale di L è identica alla Lagrangiana (1.8) utilizzata da De Donder nel precedente capitolo. Si ricordi che $\lambda = c\tau$.

(2.20) diventa:

$$\tilde{p}_5 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = n\frac{\tilde{e}}{c}\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}. \tag{2.22}$$

Unendo dunque (2.21) e (2.22) si ottiene così una stima della dimensione arrotolata, stima che differisce dalla *lunghezza di Planck* l_P per una radice della costante di struttura fine[43] $\tilde{\alpha}$:

$$l = \frac{hc\sqrt{2\kappa}}{\tilde{e}} = \frac{4\pi l_P}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} \sim 0.8\,\mathrm{x}\,10^{-30}\,cm. \tag{2.23}$$

Data la brevità della comunicazione, l'autore non approfondisce alcuni particolari. Il primo è che la nuova Lagrangiana (2.18) non è più collegata alla Hamiltoniana ottenuta dall'autore a partire dall'equazione d'onda (2.8). Non sappiamo con esattezza cosa avesse in mente Klein, ma possiamo supporre che per l'autore questo fosse un primo passo per eliminare l'ambiguità derivante dall'uso del tensore $a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ nell'equazione (2.8). Nel prossimo paragrafo vedremo come l'autore correggerà definitivamente il tiro nel lavoro pubblicato verso la fine del 1926. Il secondo particolare che Klein non approfondisce riguarda l'ipotesi di cilindricità. Nella breve comunicazione a *Nature*, Klein ricorda l'ultima osservazione del nostro precedente paragrafo, ovvero che proprio grazie all'ipotesi della periodicità della quinta dimensione era riuscito, nel suo precedente lavoro, a riprodurre l'equazione di Schrödinger. Questo fatto, unito alla quantizzazione della carica elettrica ottenuta per la prima volta in forma geometrica passando attraverso la struttura dello spazio-tempo, rinforza la sua idea di un legame tra la teoria quantistica e il proprio approccio penta-dimensionale. Tale procedimento di quantizzazione viene usato anche oggi nelle moderne teorie di stringa, con una sostanziale differenza. Questo meccanismo, infatti, produce *contemporaneamente* la quantizzazione della carica e della massa[44] la quale, anche per il valore più basso scelto da Klein ($n = 1$), ha il valore della massa di Planck. Pur essendo

[43] La costante di struttura fine viene usualmente indicata col simbolo α. Abbiamo deciso di modificarne il simbolo perché non si confondesse con la costante α usata da Klein. Posto $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 1$ la costante di struttura fine è: $\tilde{\alpha} = \frac{e^2}{\hbar c}$. Notiamo anche che, come abbiamo fatto osservare più volte, la coordinata della quinta direzione spaziale che ha le dimensioni di una lunghezza è $\tilde{x}^5 = \sqrt{\alpha}x^5$, dove x^5 aveva invece le dimensioni di un'azione. Non stupisce quindi il fatto che la (2.23) possa essere scritta nella forma $l = \sqrt{\alpha}h$ e che rappresenti una sorta di lunghezza caratteristica del sistema in esame.

[44] Mettiamoci momentaneamente nel sistema di unità naturali. Si consideri l'azione di un campo scalare *reale* a massa nulla in cinque dimensioni, $\mathcal{S}_\Phi = -\int \frac{1}{2}\partial_{\bar{\mu}}\Phi\partial^{\bar{\mu}}\Phi\sqrt{-\gamma}\,d^5x$, si usi (2.17) e si scriva il campo scalare, usando uno sviluppo di Fourier proprio grazie all'ipotesi di cilindricità, nel seguente modo $\Phi\left(x^\mu, \theta = \frac{\tilde{x}^5}{l}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\phi_n e^{in\theta}$. Per noi i campi scalari in quattro dimensioni sono campi complessi: se per $n = 1, \ldots, +\infty$ si definisce $\bar{\phi}_n = \phi_{-n}$, l'azione diventa $\mathcal{S}_\Phi = l\int\sqrt{-g}d^4x\sum_0^{+\infty}\left[\left(\partial_\mu\bar{\phi}_n + ieA_\mu\bar{\phi}_n\right)\left(\partial^\mu\phi_n - ieA^\mu\phi_n\right) + m^2\bar{\phi}_n\phi_n\right]$, ovvero l'azione di *infiniti* campi *complessi* in cui massa e carica sono legate dalla relazione $m = e = \frac{n}{l}$.

sicuramente a conoscenza che la periodicità della quinta dimensione gli permetterebbe di scrivere uno sviluppo di Fourier della funzione d'onda, Klein non sembra interessato a quello che succede per valori di $n \neq \pm 1$, forse perché questi sono i valori che per lui riproducono il moto dell'elettrone e del protone.

2.1.3 L'intervento di de Broglie.

Alla fine del 1926 [Kle27a], Klein pubblica l'articolo in cui studia in maniera più ampia l'equazione che porta il suo nome, ma in quattro dimensioni. Nella parte finale di questo lungo lavoro, l'autore ritorna sul problema della Meccanica Ondulatoria in cinque dimensioni, ma senza considerare la gravità. Faremo quindi solo alcune brevi osservazioni.

Come anticipato in precedenza, l'autore corregge il tiro riguardo alla sua "equazione d'onda dell'elettrone" sia in quattro che in cinque dimensioni. Cominciamo dalle quattro dimensioni. Klein parte finalmente dall'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella massiva e carica in un campo elettromagnetico, e utilizza, per l'elettrone, la Hamiltoniana[45]

$$H = \frac{1}{2m} g^{\mu\nu} \left(p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu + \frac{e}{c} A_\nu \right) + \frac{1}{2} mc^2. \tag{2.24}$$

Come prima l'equazione d'onda *classica* corrisponde all'equazione di Hamilton-Jacobi[46] $H = 0$ dopo aver posto $p_\mu = \partial_\mu \Phi_4$ dove come prima Φ_4 è l'iconale, ma in quattro dimensioni. L'equazione *quantistica* per Klein si ottiene sempre tramite l'analogia esposta nel precedente paragrafo. Infatti l'autore scrive l'equazione[47] $H\Psi_4 = 0$ che, imponendo $\partial_\mu A^\mu = 0$, diventa

$$\frac{h^2}{4\pi^2} \Box \Psi_4 - 2 \frac{h}{2\pi i} \frac{e}{c} A_\mu \partial^\mu \Psi_4 - \left(m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} A_\mu A^\mu \right) \Psi_4 = 0 \; . \tag{2.25}$$

Questa si riduce all'equazione d'onda classica in approssimazione geometrica, ovvero ancora ponendo $\Psi_4 = e^{\frac{2\pi i}{h} \Phi_4}$ e considerando il limite[48] per $h \to 0$. Da questa equazione, ponendo $A_\mu = 0$, Klein ottiene quella che per lui è l'equazione dell'elettrone libero, ovvero

[45] Torniamo a indicare la carica dell'elettrone col simbolo usuale.

[46] Le funzioni Hamiltoniane $\tilde{H}$, usata da De Donder nel capitolo precedente (1.10), e H, usata da Klein (2.24), sono legate dalla relazione $H = c\tilde{H} + \frac{mc^2}{2}$ e sono equivalenti.

[47] Ancora il simbolo Ψ_4 indica la funzione d'onda in quattro dimensioni. È la stessa equazione scritta da De Donder e menzionata nel paragrafo 1.3.

[48] Ricordiamo che anche l'equazione di Klein-Gordon, come l'equazione di Dirac, nel limite non relativistico, si riduce all'equazione di Schrödinger. In questo senso è quindi comprensibile l'errore di Klein, che evidentemente non confronterà mai la sua equazione con i risultati sperimentali in questo periodo, al contrario di quello che aveva fatto Schrödinger, come detto nel precedente paragrafo.

in assenza del campo elettromagnetico esterno:

$$\Box\Psi_4 = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2}\Psi_4, \tag{2.26}$$

che oggi è l'equazione di un campo scalare libero. Nella parte finale del lavoro Klein cerca di generalizzare al caso penta-dimensionale la nuova Hamiltoniana (2.24), ma non ci interesseremo di questo fatto. In questa parte del lavoro per la prima volta scrive esplicitamente la funzione d'onda penta-dimensionale[49] nella seguente forma[50] ([Kle27a]; pag. 441):

$$\Psi = A(x)e^{-\frac{2\pi i}{l}\tilde{x}^5} + A^*(x)e^{\frac{2\pi i}{l}\tilde{x}^5} . \tag{2.27}$$

L'idea di Klein è quella di *unificare* ancora una volta le funzioni d'onda del protone e dell'elettrone, che si ottengono, ricordiamo, con le seguenti scelte per l'iconale[51]: $\Phi = \pm x^5 + S(x)$. Le due funzioni d'onda quadridimensionali $A(x)$ e $A^*(x)$, per Klein, sono funzioni complesse, più precisamente $A^*(x)$ è la complessa coniugata di $A(x)$. A nostro avviso risultano quindi ancora più evidenti due fatti: in primo luogo la funzione Ψ è reale e comincia ad assomigliare sempre più a un campo scalare, in secondo luogo l'equazione appena scritta ricorda sempre più da vicino uno sviluppo di Fourier, a causa del fatto che la quinta dimensione risulta essere arrotolata[52], in cui ci sono solo le componenti corrispondenti a $n = \pm 1$, come ribadito alla fine del paragrafo[53] 2.1.2.

Nel febbraio del 1927, de Broglie [dB27] indaga l'idea di un Universo penta-dimensionale come Klein, ma con motivazioni differenti[54]. Come ci racconta lo stesso de Broglie nell'introduzione al lavoro, infatti, per l'autore uno dei successi della teoria di Einstein era stato quello di *bandire* dalla meccanica classica il concetto di forza. Questo perché in RG è la geometria dello spazio-tempo che *mima* la forza gravitazionale. Nel tentativo di Klein di geometrizzazione dell'elettromagnetismo e della Meccanica Ondulatoria, De Broglie intravede quindi la possibilità di bandire *da tutta la fisica* il concetto di forza. L'autore infatti mostra che l'equazione del moto delle particelle elementari ottenuta da Klein è equivalente alla richiesta che la variazione[55] $\delta \int d\sigma$ sia nulla. L'autore mostra quindi come la traiettoria della particella carica all'interno di un campo elettromagnetico e gravitazionale sia

[49] Si ricordi che $\tilde{x}^5$ ha le dimensioni di una lunghezza e che la lunghezza l della dimensione arrotolata è data dalla (2.23).

[50] In [Kle27a] l'autore usa una *terza* convenzione per la quinta dimensione, che poi abbandonerà nel lavoro seguente per sposare definitivamente la notazione con $\tilde{x}^5$. Ci è sembrato quindi naturale usare già quest'ultima notazione.

[51] Si confronti la (2.27) con la (2.15) e la nota [38].

[52] Letteralmente: 'geschlossen'.

[53] Si riveda anche la nota ([44]).

[54] Come vedremo nel paragrafo 2.2.1 sarà Léon Rosenfeld a introdurlo alla teoria di Klein.

[55] Stiamo facendo riferimento all'elemento di linea penta-dimensionale (2.1).

una *geodetica* nel mondo penta-dimensionale. Abbiamo visto che Klein aveva già discusso questa possibilità in ([Kle26a]), ma nel cercare l'analogia con la luce aveva introdotto il tensore simmetrico ausiliario $a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ per far corrispondere le traiettorie delle particelle a una sorta di geodetiche penta-dimensionali *nulle*. Nell'approccio di de Broglie, invece, le traiettorie non corrispondono a delle geodetiche nulle, ma a geodetiche qualsiasi. Utilizzando la metrica (2.1) i due approcci risultano comunque equivalenti, perché anche nella relatività penta-dimensionale, come in RG, l'equazione delle geodetiche può essere ottenuta equivalentemente sia per via lagrangiana, come fatto da Klein partendo da (2.18), sia usando la definizione di geodetica, $\delta \int d\sigma = 0$, come fatto da de Broglie. Klein stesso scrive una breve nota per sottolineare l'equivalenza tra il suo approccio e quello di de Broglie [Kle27b]. Questo fatto, a nostro avviso, risulta però importante, perché segna il definitivo allontanamento da parte di Klein dall'analogia con la luce.

A causa di questo cambiamento di rotta l'equazione d'onda penta-dimensionale che dovrebbe generalizzare quella quadridimensionale non è più la (2.8), né per il fisico francese né per quello svedese. De Broglie dopo aver scritto l'equazione (2.26), la generalizza "a mano" al caso curvo penta-dimensionale nel seguente modo[56]:

$$\gamma^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \nabla_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} \Psi \;=\; \frac{4\pi^2}{h^2} \mathcal{I}^2 \Psi \;, \tag{2.28}$$

dove abbiamo indicato, come d'ora in poi faranno sempre sia Klein che de Broglie, $\mathcal{I}^2 = \left(m^2c^2 - \frac{e^2c^2}{16\pi G} \right)$, in modo che l'equazione (2.28) si riduca, in quattro dimensioni e nel caso in cui la carica sia nulla, alla (2.26). Klein invece, in [Kle27b], confronta l'equazione (2.8) da lui scritta con la (2.28) per mostrare che sono la stessa equazione. Klein inserisce l'espressione esplicita del tensore[57] $a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ nella (2.8) e usando l'ipotesi di cilindricità mostra che la (2.8) e la (2.26) sono equivalenti. Quindi i due autori si convincono entrambi, anche se per vie differenti, che l'invariante $\mathcal{I}^2 = \left(m^2c^2 - \frac{e^2c^2}{16\pi G} \right)$ nella (2.28) sia

[56] Anche in questo caso abbiamo uniformato le notazioni per un più agile confronto tra l'approccio di de Broglie e quello di Klein.

[57] Se poniamo $\mu = \frac{1}{m^2c^2}$ come Klein per comodità, dalla relazione $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}} dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}} = \mu d\vartheta^2 + ds^2$ si ricavano le componenti covarianti del tensore $a_{\mu\nu}$:

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \mu \frac{e^2}{c^2} A_\mu A_\nu \qquad a_{\mu 5} = \mu \frac{e}{c} A_\mu \qquad a_{55} = \mu, \tag{2.29}$$

mentre utilizzando la relazione $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}} a^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} = \delta^{\bar{\rho}}_{\bar{\mu}} \delta^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}}$ si ottengono le componenti contro-varianti:

$$a^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \qquad a^{\mu 5} = -\frac{e}{c} A^\mu \qquad a^{55} = \frac{1}{\mu} + \frac{e^2}{c^2} A_\mu A^\mu \tag{2.30}$$

che usa Klein.

una sorta di *generalizzazione* della massa per il mondo penta-dimensionale[58]. Riportiamo infine il commento di de Broglie sull'equazione (2.28) che per l'autore ha una forma 'rimarchevole' ([dB27]; pag. 73), perché contiene tutte le costanti fondamentali della Natura, un commento che suona anche come un appoggio incondizionato al progetto di Klein: 'Per approfondire il problema della materia e della sua struttura atomica, sarà necessario approfondire in maniera sistematica il punto di vista dell'Universo penta-dimensionale, che sembra più fecondo di quello di Weyl[59]. Se si arriverà a comprendere in che modo sono coinvolte, nell'equazione (2.28)[60], le costanti e, m, c, h, e G, si arriverà molto vicino alla comprensione di uno dei problemi tra i più complessi della Natura' ([dB27]; pag. 73).

2.1.4 L'azione di un campo scalare in uno spazio-tempo curvo.

Nel 1927, la collaborazione tra Jordan e Klein porta alla determinazione della statistica associata al campo *complesso* [JK27]. In questo lavoro non si menziona la RG, ma ci sembra comunque importante sottolinearne alcuni particolari. In quest'occasione i due autori si occupano di quello che noi oggi chiameremmo campo scalare complesso, che però Jordan e Klein considerano ancora come la funzione d'onda dell'elettrone[61]. I due autori scrivono l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda e la sua coniugata complessa e cercano di ottenere le due equazioni da un unico principio variazionale[62]. Jordan e Klein scrivono un'azione che *assomiglia*, anche se solo in parte, alla odierna azione di un campo scalare complesso ϕ. Ci si potrebbe chiedere come sia possibile ottenere l'equazione di Schrödinger, che ha un sola derivata temporale, dall'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare complesso. L'azione scritta da Jordan e Klein infatti *non è* l'azione di un campo complesso; i due autori scrivono una *densità di Lagrangiana* $\mathcal{L}$ i cui termini contenenti le derivate hanno la seguente forma[63]: $\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\phi^*\vec{\nabla}\phi$ e $\frac{\hbar}{i}\left(\phi^*\partial_t\phi + \phi\partial_t\phi^*\right)$ e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange producono effettivamente l'equazione di Schrödinger. Il punto cruciale del lavoro è che i due autori *promuovono esplicitamente* le funzioni com-

[58] Mentre Klein si convince della cosa *a posteriori*, ovvero come conseguenza del proprio modello, de Broglie si ricava l'invariante $\mathcal{I}^2$ in modo che l'azione penta-dimensionale per la particella $\mathcal{I}^2\int d\sigma$ si riduca all'azione quadri-dimensionale di una particella di massa m e carica e: $x^5+\int \frac{e}{c}A_\mu dx^\mu - mc\int d\lambda$. Nel lavoro di de Broglie l'invariante è però $\mathcal{I}^2 = \left(m^2c^2 + \frac{e^2c^2}{16\pi G}\right)$. La differenza di segno tra i due invarianti, come osservato anche da Klein in [Kle27b], è dovuta a una differente scelta della segnatura per lo spazio-tempo.

[59] Nel seguito del capitolo torneremo a parlare in maniera più approfondita della proposta di Weyl.

[60] Abbiamo uniformato la numerazione delle equazioni a quella da noi usata.

[61] Ricordiamo che l'equazione di Dirac verrà pubblicata solo l'anno seguente (1928).

[62] Ovviamente gli autori si occupano anche di altri aspetti relativi alla sola MQ di cui noi non ci occupiamo in questa sede.

[63] L'azione non è scritta in forma Lorentz invariante: compaiono le derivate temporali del "campo", $\partial_t\phi$, e le derivate spaziali, $\vec{\nabla}\phi$.

plesse al ruolo di *operatori*[64], e tutte condizioni di quantizzazione[65] sono scritte usando i commutatori[66]. Il lavoro è quindi un ponte tra quella che noi oggi chiamiamo "prima" e "seconda" quantizzazione, perché si parla ancora di funzione d'onda, ma i *metodi* sono quelli propri della teoria dei campi. Dopo questa collaborazione con Jordan, Klein torna a occuparsi del proprio progetto.

Nell'ultimo articolo di questo periodo [Kle27c], Klein tenta di approfondire il proprio approccio, cercando un nuovo principio variazionale per connettere la geometria penta-dimensionale con il campo scalare. Forse influenzato dal precedente lavoro con Jordan, Klein scrive un principio variazionale che dà direttamente l'equazione d'onda penta-dimensionale per l'elettrone, ovvero l'eq. (2.28). Klein spende una parte dell'articolo per esporre in maniera organica il proprio approccio e approfondisce una serie di aspetti classici che noi trascureremo. Klein stesso sottolinea che l'articolo è incentrato quasi tutto sul punto di vista *classico*, 'tranne una riflessione introduttiva sulla meccanica delle onde' ([Kle27c]; pag. 189). A nostro avviso questo commento dell'autore è collegabile al fatto che Klein non utilizzerà il formalismo dei commutatori, introdotto nel precedente articolo e scritto in collaborazione con Jordan. Forse tale commento esprime l'intenzione dell'autore di tornare sull'argomento proprio per quantizzare i campi, cosa che Klein non farà nell'immediato futuro[67]. Concentriamoci quindi sulla parte che riguarda questo nuovo principio variazionale, per tornare poi sui commenti di Klein al proprio lavoro.

A nostro avviso, in questo lavoro compare, per la prima volta, quella che sarà *l'azione del campo scalare in uno spazio-tempo curvo*[68] ([Kle27c]; pag. 201):

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-\gamma}\,\mathcal{L}\,d^5x = \int \sqrt{-\gamma}\,\frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{1}{2}\gamma^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\partial_{\bar{\mu}}\Psi\partial_{\bar{\nu}}\Psi + \frac{1}{2\hbar^2}\mathcal{I}^2\Psi^2\right]\,d^5x, \tag{2.31}$$

dove i simboli hanno lo stesso significato del precedente paragrafo. Notiamo che come nel precedente lavoro con Jordan, l'autore utilizza una *densità di Lagrangiana*. L'azione

[64] Il campo complesso coniugato ϕ^* diventa $\phi^\dagger$.

[65] Jordan e Klein introducono anche gli operatori di "creazione" e di "distruzione". A quel tempo si parlava di *q-numeri*, q sta per *quantistici*, in riferimento agli operatori, in contrasto con i *c-numeri*, c sta per *classici*, in riferimento ai numeri usuali.

[66] Per i campi, per esempio, Jordan e Klein scrivono $[\phi(r)\,,\,\phi^\dagger(r')] = \delta(r-r')$ dove compare la funzione delta di Dirac e la variabile r fa riferimento alle tre coordinate spaziali: il commutatore non è quello dell'usuale campo complesso, perché come detto poco sopra la Lagrangiana contiene il termine $\frac{\hbar}{i}\phi^\dagger\partial_t\phi + \phi^\dagger\partial_t\phi$ da cui gli autori deducono che il momento coniugato a ϕ è proprio $\phi^\dagger$, analogamente a quanto accadrà per il campo di Dirac.

[67] Come detto nella nota ([11]) Klein tornerà più volte nel corso della sua vita ad occuparsi dell'approccio penta-dimensionale, ma di volta in volta con intenti differenti.

[68] La variabile x^5 ha le dimensioni di una lunghezza e coincide con la variabile $\tilde{x}^5$ da noi definita prima.

così scritta produce le equazioni del moto corrette per il campo *scalare reale*[69] Ψ, ovvero l'equazione (2.28), ma rispetto alla notazione moderna manca un segno negativo davanti a tutta l'azione[70]. Questa mancanza, probabilmente, è dovuta al fatto che l'azione per Klein non aveva ancora il significato che le diamo noi oggi nella teoria dei campi[71]. Anche in questo frangente, a differenza dell'approccio di De Donder visto nel precedente capitolo al paragrafo 1.3, le tecniche usate da Klein sono quelle proprie della moderna teoria dei campi. A questo punto Klein discute il legame tra l'equazione d'onda e il principio di conservazione dell'energia nel suo Universo penta-dimensionale. Poiché sta considerando uno spazio-tempo curvo, le variabili dell'equazione d'onda (2.28) sono sia la metrica penta-dimensionale $\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ che il campo scalare Ψ. Variando l'azione rispetto a queste due variabili Klein ottiene:

$$\delta\mathcal{S} = \delta_\gamma\mathcal{S} + \delta_\Psi\mathcal{S} = \int \sqrt{-\gamma}\, \left[\Theta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\delta\gamma^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \frac{\hbar^2}{m}\left(\gamma^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\nabla_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\nu}}\Psi - \frac{1}{2\hbar^2}\mathcal{I}^2\Psi\right)\delta\Psi\right] d^5x \qquad (2.32)$$

dove $\Theta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ è il tensore energia-impulso per un campo scalare[72]. Considerando ora una variazione infinitesima delle coordinate, $x^{\bar{\mu}} \to x^{\bar{\mu}} + \xi^{\bar{\mu}}$ per cui $\delta\mathcal{S} = 0$, e definendo le variazioni infinitesime dei campi nel modo usuale, $\delta\Psi = \partial_{\bar{\mu}}\Psi\xi^{\bar{\mu}}$ e $\delta\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = D_{(\bar{\mu}}\xi_{\bar{\nu})}$, con un'integrazione per parti e usando l'invarianza per diffeomorfismi dell'azione, Klein ottiene:

$$\delta\mathcal{S} = \int \sqrt{-\gamma}\, \left[\nabla^{\bar{\mu}}\Theta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \frac{\hbar^2}{m}\left(\gamma^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\nabla_{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\Psi - \frac{1}{2\hbar^2}\mathcal{I}^2\Psi\right)\partial_{\bar{\nu}}\Psi\right]\xi^{\bar{\nu}} d^5x = 0. \qquad (2.33)$$

[69] Come già detto il fatto che la "funzione d'onda" penta-dimensionale di Klein sia un campo scalare reale lo si evince dalla relazione (2.27). Le funzioni d'onda quadridimensionali, invece, continuano a essere funzioni complesse.

[70] Un'altra differenza è la presenza del coefficiente $\hbar^2/m$ che per noi è *anomalo*. Una possibile spiegazione di questa "anomalia" si ottiene se si considerano i seguenti fatti. Innanzitutto Klein non chiama esplicitamente la $\mathcal{L}$ dell'equazione (2.31) Lagrangiana. Infatti, riferendosi a $\mathcal{L}$, dice semplicemente 'Consideriamo il seguente invariante [...]' [Kle27c]; pag. 201). Inoltre, ed è questa a nostro avviso la spiegazione più plausibile, definisce una densità di quadricorrente conservata a partire dal tensore energia-impulso penta-dimensionale. Il coefficiente anomalo della (2.31) è necessario affinché tale quadricorrente, nel limite non relativistico, dia la corretta corrente associata all'equazione di Schrödinger, in presenza di un campo elettromagnetico. Oggi non siamo più interessati a riottene tale equazione di continuità, che era legata alla vecchia interpretazione di tipo particella singola della "funzione d'onda", precedente alla moderna formulazione della teoria de campi.

[71] Anche nella teoria dei campi la Lagrangiana viene definita come in meccanica classica $\mathcal{L} = T - V$ dove T è la densità di energia cinetica, mentre V è la densità di energia potenziale. Il segno del termine cinetico, anche in teoria dei campi, va scelto in modo tale che la componente temporale sia definita positiva, indipendentemente dalla segnatura della metrica, proprio perché generalizza il termine cinetico della meccanica classica $\frac{1}{2}mv^2$.

[72] Rispetto all'espressione moderna, quello ottenuto da Klein è metà del tensore energia impulso odierno [DC92].

Discutendo quest'ultima equazione, l'autore nota come imponendo l'equazione d'onda (2.28) si ottenga quella che per Klein è una generalizzazione del principio di conservazione dell'energia[73], ovvero $\nabla^{\bar{\mu}}\Theta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$. Nella parte finale dell'articolo, inoltre, l'autore scrive un'azione totale in cui accoppia l'azione del campo scalare (2.31) con la gravità pura in cinque dimensioni[74] ([Kle27c]; pag. 207):

$$\mathcal{S}_{tot} = \int d^5x\sqrt{-\gamma}\left[-R^{(5)} + \frac{16\pi G}{c^4}\mathcal{L}\right]. \tag{2.34}$$

Klein non ottiene ulteriori risultati sul versante quantistico, e come già anticipato non tenta di *quantizzare* il campo scalare[75], come aveva fatto nel lavoro con Jordan, forse perché pensa di occuparsene in un secondo momento o forse perché, come discuteremo a breve, prevede che nemmeno questo passo porterà a ulteriori sviluppi.

Prima di concludere il nostro viaggio nel mondo penta-dimensionale di Klein, vale la pena considerare alcune riflessioni generali fatte dall'autore. L'introduzione a quest'ultimo lavoro ([Kle27c]; pagg. 188-189-190) è particolarmente interessante, perché ci permette di capire come l'autore abbia avuto un qualche ripensamento, durante la stesura del lavoro stesso. All'inizio Klein riprende e approfondisce la discussione sulla relazione fra la natura *classica* del concetto di spazio-tempo e il comportamento di luce e materia governato dal dualismo onda-corpuscolo, sottolineando ancora, come aveva fatto nel suo primo articolo, l'influenza di Niels Bohr. Klein afferma infatti che 'i concetti di spazio e tempo hanno perso il loro senso intuitivo. Questo è connesso con il fatto che i nostri strumenti di misura (luce e particelle) mostrano un comportamento caratterizzato dal dualismo onda-corpuscolo, come ha già sottolineato Bohr[76] [Boh28] [Hei27]. Diventa quindi impossibile definire in maniera precisa i punti dello spazio-tempo, su cui è costruita la nostra concezione abituale dello spazio-tempo. In questa prospettiva è necessaria una revisione della teoria della relatività che tenga conto dei postulati della teoria quantistica' Dopo questo commento, come già riportato da Stachel ([Cao99]; pag. 167), segue una nota di Klein dove l'autore commenta gli effetti di un *effetto Compton gravitazionale*, ovvero un'interazione tra le onde gravitazionali e la radiazione elettromagnetica. Questa nota verrà richiamata[77] in un lavoro di Heisenberg e Pauli del 1929. Queste affermazioni vanno interpretate, come ribadisce anche Stachel ([Cao99]; pag. 167, come un contributo di

[73]Per essere realmente un principio di conservazione tuttavia la derivata non dovrebbe essere covariante.

[74]Nelle moderne teorie di stringa, però, si sarebbe usata una costante di Newton *penta-dimensionale* $G^{(5)}$.

[75]Conviene ribadire che Klein tratta ancora la funzione Ψ come una funzione d'onda.

[76]Klein cita Bohr, ma in maniera incompleta: a nostro avviso Klein fa riferimento all'intervento fatto da Bohr al congresso di Como del 1927, tenutosi per celebrare i cent'anni dalla morte di Alessandro Volta. Klein ha assistito Bohr nella stesura di tale testo (cfr. *http://okc.albanova.se/about/oskar_klein/*).

[77]Si veda il paragrafo 2.5.

Klein all'idea che la teoria quantistica della gravità cambierà la nostra concezione dello spazio-tempo. A nostro avviso, però, è necessario aggiungere che Klein era disposto ad accettare una modifica dello spazio-tempo, come accade tutt'oggi nella ricerca della GQ, basandosi su considerazioni puramente teoriche che però non hanno nulla a che vedere con le idee moderne, e che la modifica dello spazio-tempo proposta da Klein era *concretamente* ispirata dall'armonizzazione tra la RG e la Meccanica Ondulatoria che offriva il suo Universo penta-dimensionale. L'autore poi sottolinea che 'una modifica del concetto di spazio-tempo si riflette anche in una modifica del principio di conservazione dell'Energia-Impulso. Queste due cose sono connesse dalla teoria di de Broglie che tratta in maniera simmetrica le coordinate dello spazio-tempo e il vettore Energia-Impulso' La modifica del principio di conservazione che Klein ha in mente è rappresentata dall'equazione $\nabla^{\bar{\mu}}\Theta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$ che, come spiegato poco sopra, si ottiene imponendo l'equazione d'onda nella (2.32). A conferma del fatto che Klein fa sempre concretamente riferimento al proprio approccio, basta continuare nella lettura dell'introduzione[78], perché dice esplicitamente che 'l'introduzione di nuove variabili coordinate (la quinta dimensione) è la modifica necessaria per armonizzare tutto questo', facendo riferimento al rapporto fra la teoria della dei quanti e la RG. Continuando a leggere questa introduzione, che rappresenta una sorta di manifesto del proprio approccio, l'autore sottolinea ancora come la propria teoria permetta di inglobare anche l'esistenza di un quanto elettrico elementare[79].

L'introduzione al lavoro risulta interessante anche per un altro motivo. Infatti in una nota Klein esprime delle *serie* perplessità rispetto al proprio approccio[80]. L'autore afferma infatti: 'difficilmente ci aspettiamo che possa venire qualcosa di nuovo dai risultati matematici' ([Kle27c]; pag. 190). Sottolinea però anche che spera che il proprio lavoro sollevi l'interesse per il problema dell'armonizzazione fra le due teorie e dichiara definitivamente: 'non riteniamo più possibile che l'introduzione della quinta dimensione porti a una revisione dei concetti classici di spazio-tempo' ([Kle27c]; pag. 190). Si tratta quindi di un Klein confuso, e infatti questo sarà l'ultimo articolo su questo argomento in questo periodo. Nelle battute finali, si dichiara comunque convinto che il proprio approccio sia 'il corretto punto di vista per mostrare la costruzione di una *teoria generale dei campi quantistici*' ([Kle27c]; pag. 190). Il corsivo è nostro. L'espressione utilizzata da Klein è 'allgemeine quantenfeldtheorie', dove l'aggettivo *allgemein* in tedesco significa *generale*, ed è lo stesso che si usa per fare riferimento alla Relatività Generale, mentre la parola composta *quantenfeldtheorie* si traduce usualmente con *teoria quantistica dei campi.* A

[78]Facciamo riferimento a una parte che Stachel non traduce.
[79]Klein fa riferimento a quanto esposto nel paragrafo 2.1.2
[80]Anche questa parte non viene tradotta da Stachel.

nostro avviso risulta quindi chiaro che Klein avesse in mente una sorta di teoria quantistica che comprendesse in qualche modo anche il campo gravitazionale. Quest'ultimo commento, unito al fatto che nel precedente lavoro Jordan e Klein hanno introdotto i metodi che saranno propri della teoria quantistica dei campi, ha rafforzato in noi la convinzione che quest'ultimo lavoro di Klein sia da inserire nella storia della teoria dei campi su spazi-tempo curvi, idea di cui, a nostro avviso, Klein è stato un precursore.

2.2 La quinta conferenza Solvay

L'approccio penta-dimensionale di Klein verrà condiviso da molti autori, ognuno dei quali cercherà di personalizzarlo adattandolo alle proprie esigenze. Oltre a de Broglie, è interessante considerare alcuni lavori pubblicati da un fisico belga, Léon Rosenfeld, nel 1927. Nel 1926 Rosenfeld aveva cominciato il dottorato a Liege, una piccola Università dove, come ricorda l'autore in un'intervista con Kuhn [KH63], c'era un evidente scollamento tra i problemi affrontati nelle lezioni e quello che stava accadendo nel mondo scientifico[81]. Per questo motivo, come ricorda Rosenfeld nella stessa intervista, dopo essersi imbattuto per caso nei lavori di Schrödinger apparsi sugli *Annalen der Physik* dello stesso anno[82], il fisico belga decide di andare a Parigi, alla Ecole Normale Superiore, per cercare de Broglie e lavorare sulla Meccanica Ondulatoria. Durante il suo anno di permanenza a Parigi Rosenfeld instaura un rapporto di amicizia e di lavoro con de Broglie, approfondisce le proprie conoscenze sulla Meccanica Ondulatoria e sulla relatività, e decide, come riporta nell'intervista, 'di provare a combinare queste nuove conoscenze' [KH63]. Scrive quindi una nota e la spedisce a De Donder affinché venisse pubblicata dall'Accademia Belga sulla rivista *Comptes Rendus*. È grazie a questo fatto che De Donder lo chiama per una lavorare con sè a Brussels durante l'estate del 1927. Come ricorda lo stesso Rosenfeld, una delle conseguenze di questa collaborazione fu che, nonostante non fosse stato ammesso al congresso Solvay che si tenne quell'anno a ottobre, De Donder lo portò con sè. Oltre a dare risonanza al lavoro di Rosenfeld durante il convegno, De Donder diede al giovane fisico belga la possibilità di conoscere altri fisici di spicco. È infatti in quell'occasione che Rosenfeld conosce per esempio Pauli. Si trattava della *quinta conferenza Solvay* che aveva come argomento generale "Elettroni e fotoni", ospitava ben 19 premi Nobel tra i partecipanti ed era dedicata alla discussione della neonata Meccanica Quantistica. Si tratta forse della più nota tra le conferenze Solvay, perché è quella in cui ha inizio il dibattito

[81] Rosenfeld ricorda anche che non andò a studiare a Brussels per motivi personali.

[82] Sono le quattro comunicazioni che sanciscono la nascita della MQ citate nel precedente capitolo: [Sch26a], [Sch26b], [Sch26c] e [Sch26d].

tra Einstein e Bohr. Cominciamo con l'occuparci del lavoro di Rosenfeld nell'estate del 1927, per passare poi alla quinta conferenza Solvay.

2.2.1 Rosenfeld: origine quantistica della metrica di Schwarzschild

Il lavoro di Rosenfeld riguarda non solo l'unificazione della RG con la Meccanica Ondulatoria, ma coinvolge tutto l'apparato del mondo penta-dimensionale di Klein. Nell'intervista rilasciata a Kuhn Rosenfeld ricorda di essersi interessato all'utilizzo della quinta dimensione dopo aver letto il lavoro di Kaluza, e di essere stato lui stesso ad aver appassionato de Broglie alla questione [KH63]. Il fisico belga ricorda che è in conseguenza delle sue discussioni con de Broglie che quest'ultimo scrive il lavoro che abbiamo brevemente discusso nel paragrafo 2.1.3. Rosenfeld ammette che nel proprio percorso il formalismo penta-dimensionale ha occupato una parentesi molto breve, ma vedremo che alcune delle idee nate in questo frangente verranno riutilizzate dall'autore nei suoi successivi lavori. L'autore pubblica quattro comunicazioni [Ros27a], [Ros27b], [Ros27c] e [Ros27d], ma noi ci occuperemo solo della prima e della terza, perché le altre affrontano questioni tecniche non correlate ai nostri scopi.

Nell'introduzione alla prima comunicazione [Ros27a], l'autore annuncia di voler calcolare, per alcuni casi specifici, i potenziali gravitazionali ed elettromagnetici in funzione della funzione d'onda Ψ. Per fare questo, Rosenfeld innanzitutto definisce la *propria* metrica penta-dimensionale nel seguente modo[83]:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2\kappa A_\mu A_\nu \qquad \gamma_{\mu 5} = \alpha \frac{e}{c} A_\mu \qquad \gamma_{55} = \alpha, \tag{2.35}$$

dove $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ e, come per Klein, α soddisfa alla relazione:

$$\alpha \frac{e^2}{c^2} = 2\kappa = \frac{16\pi G}{c^4} \,. \tag{2.36}$$

Ricordiamo che è necessario imporre la relazione (2.36) perché l'azione gravitazionale penta-dimensionale si riduca alla somma dell'usuale azione del campo gravitazionale con quella del campo elettromagnetico come in (2.7)[84]. Dopo queste premesse Rosenfeld introduce una funzione d'onda *complessa* penta-dimensionale:

$$\Psi\left(x^\mu; x^5\right) = A\left(x^\mu\right) e^{\frac{i}{\hbar}\bar{S}} \,, \tag{2.37}$$

[83] Come nel precedente paragrafo gli indici barrati sono indici penta-dimensionali. Si noti che anche in questa metrica la coordinata x^5 ha le dimensioni di un'azione.

[84] Esistono diversi modi per imporre questo fatto e ognuno dipende dalla definizione di metrica penta-dimensionale di partenza. Ovviamente la metrica $\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ di Rosenfeld non è la stessa di quella usata da Klein. Non abbiamo cambiato la notazione per non appesantirla.

dove $\bar{S}(x^\mu; x^5) = x^5 + S(x^\mu)$ è la funzione di Jacobi penta-dimensionale, analoga a quella introdotta da De Donder, mentre $S(x^\mu)$ è l'usuale funzione di Jacobi quadridimensionale. Imponendo che l'ampiezza A della funzione d'onda sia costante Rosenfeld può mostrare che valgono le relazioni di De Donder (1.17) e che l'equazione di Jacobi quadridimensionale (1.11) può essere scritta utilizzando non il funzionale $J(\Psi)$ introdotto da De Donder (1.22), ma un funzionale penta-dimensionale $\mathcal{L}(\Psi)$ che ha la seguente forma:

$$\mathcal{L}(\Psi) = -\gamma^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} \bar{\Psi} \partial_{\bar{\nu}} \Psi - \frac{\mathcal{I}^2}{\hbar^2} \bar{\Psi} \Psi \,, \tag{2.38}$$

dove, come per Klein e de Broglie, $\mathcal{I}^2 = \left(m^2 c^2 - \frac{e^2 c^2}{16\pi G} \right)$. Come Klein anche Rosenfeld ha come obiettivo quello di scrivere un principio variazionale penta-dimensionale, infatti utilizzerà la Lagrangiana (2.38) per scrivere un'azione analoga alla (2.34) scritta da Klein. A differenza di De Donder, Rosenfeld utilizza la (2.38) come una *densità di Lagrangiana*[85]. Diversamente da De Donder, inoltre, nel lavoro di Rosenfeld compaiono sia la funzione d'onda complessa che la sua coniugata. A differenza di Klein, e coerentemente con quanto ottenuto da De Donder, il segno della parte cinetica risulta corretto: nonostante nelle intenzioni di Rosenfeld Ψ rappresenti una funzione d'onda di de Broglie, la Lagrangiana scritta dall'autore è quella di un campo scalare complesso in cinque dimensioni che vive su uno spazio-tempo curvo. Il principio variazionale scritto da Rosenfeld è il seguente:

$$\delta \mathcal{S}_{tot} = \delta \int d^5 x \sqrt{-\gamma} \left[-R^{(5)} + \frac{16\pi G}{c^4} \mathcal{L} \right] = 0 \,, \tag{2.39}$$

dove, come detto, la lagrangiana $\mathcal{L}$ è la (2.38)[86] e l'azione viene variata non solo rispetto alla metrica $\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, ma anche rispetto a Ψ e $\bar{\Psi}$, esattamente come si farebbe nella moderna teoria dei campi per ottenere le equazioni del moto per un campo scalare complesso. Il fisico belga e Klein formulano dunque *contemporaneamente* due principi variazionali simili. Rosenfeld conosce i primi lavori di Klein, perché li cita, ma i due principi, pur essendo simili, vengono pubblicati *indipendentemente* l'uno dall'altro. Entrambi gli autori cominciano dunque a trattare la funzione d'onda come un campo scalare. La differenza tra i due autori è che mentre Klein, come abbiamo visto, esprime delle perplessità sull'effettiva efficacia del principio variazionale per descrivere la fusione tra la teoria di Einstein e i principi quantistici, Rosenfeld era convinto che le equazioni derivanti dal principio variazionale (2.39) rappresentassero efficacemente la sintesi della RG con la Meccanica Ondulatoria.

[85] Ovviamente Rosenfeld non usa questa terminologia, ma la chiama 'Weltfunktion' ([Ros27a]; pag. 311).

[86] Nello scrivere il principio variazionale Rosenfeld specifica che nel caso generale l'ampiezza A dell'onda sarà funzione delle coordinate dello spazio-tempo penta-dimensionale.

Per questi motivi, a differenza di Klein, Rosenfeld spinge oltre la propria analisi e cerca di capire quali siano gli effetti dell'introduzione della funzione d'onda Ψ, definita in (2.37), sulla metrica stessa. Nonostante dal punto di vista moderno si tratti di un procedimento completamente classico, perché nemmeno Rosenfeld tenta di quantizzare il campo scalare, l'autore era convinto di considerare gli effetti di origine *quantistica* sulla metrica dello spazio-tempo, perché per Rosenfeld, come per Klein, l'introduzione di un'equazione d'onda era *equivalente* al considerare la natura quantistica della materia. In questo senso possiamo classificare l'approccio di Rosenfeld come *semi-classico* e, per le stesse ragioni espresse riguardo all'ultimo lavoro di Klein, riteniamo sia corretto inserire anche questi lavori di Rosenfeld nella storia della teoria dei campi su spazi tempo curvi. Vediamo ora sommariamente il percorso seguito da Rosenfeld. Come Klein anche Rosenfeld tralascia la componente 55 delle equazioni di Einstein penta-dimensionali[87], scrivendo che a causa della costanza di γ_{55}, si dovrà avere $\delta\gamma_{55} = 0$ ([Ros27a]; pag. 314). Anche noi dunque non considereremo tale equazione. Considerando dunque la sola variazione rispetto ai potenziali gravitazionali $\gamma_{\bar{\mu}\nu}$ in (2.39), si ottiene, analogamente al caso quadridimensionale:

$$R^{(5)}_{\bar{\mu}\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\bar{\mu}\nu}R^{(5)} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\bar{\mu}\nu}\,, \tag{2.40}$$

dove[88]

$$T_{\bar{\mu}\nu} = \partial_{\bar{\mu}}\bar{\Psi}\partial_\nu\Psi + \partial_\nu\bar{\Psi}\partial_{\bar{\mu}}\Psi + \gamma_{\bar{\mu}\nu}\mathcal{L} \tag{2.41}$$

è il tensore energia-impulso associato al campo scalare[89] Ψ. A questo punto, nell'ottavo paragrafo del proprio lavoro, il fisico belga utilizza la procedura, già introdotta da Einstein nel 1916, per studiare le equazioni del moto del campo gravitazionale penta-dimensionale, nell'*approssimazione di campo debole* ([Ros27a]; pag. 319). In questa approssimazione, infatti, è possibile risolvere esplicitamente le equazioni di Einstein penta-dimensionali, una tecnica che l'autore recupererà anche tre anni più tardi per studiare il campo gravitazionale generato dai quanti del campo gravitazionale, come vedremo nel prossimo capitolo. Infatti, innanzitutto si scrive la metrica nel seguente modo[90]:

$$\gamma_{\bar{\mu}\nu} = \eta_{\bar{\mu}\nu} + h_{\bar{\mu}\nu}\,, \tag{2.42}$$

[87]Ricordiamo che tale equazione nasconde un'inconsistenza della teoria penta-dimensionale di Kaluza-Klein.

[88]Le componenti covarianti sono definite, a parte un segno, come riportato nella sezione *Simboli, convenzioni e richiami teorici*. La segnatura dei lavori di Rosenfeld è differente dalla nostra.

[89]Nel caso più generale possibile T_{55} non è nullo, ma come detto anche Rosenfeld la componente 55 delle Equazioni di Einstein, che infatti non compaiono nell'equazione (2.40).

[90]Come già detto Rosenfeld non si occupa della componente 55 della metrica.

dove $\eta_{\bar{\mu}\nu}$ è la metrica di Minkowski in cinque dimensioni e $h_{\bar{\mu}\nu}$ rappresenta una "piccola" perturbazione alla metrica piatta[91]. A questo punto si inserisce la (2.42) nelle equazioni (2.40) e si considerano solamente i termini lineari in $h_{\bar{\mu}\nu}$, ovvero i contributi del *primo ordine* alla perturbazione della metrica piatta[92]. Le equazioni penta-dimensionali di Einstein (2.40) assumono quindi la seguente forma[93]:

$$\Box H_{\bar{\mu}\nu} = -\kappa T_{\bar{\mu}\nu} \qquad \text{con} \qquad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}\,, \tag{2.43}$$

dove il tensore energia-impulso che compare al membro di destra della (2.43) ora è indipendente dalla perturbazione[94], e dove compare per convenienza[95] $H_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{2}h\eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$. In questo approccio gli indici vengono alzati, abbassati e contratti dalla metrica piatta. A questo punto Rosenfeld risolve esplicitamente la (2.43) ottenendo ([Ros27a]; pag. 319):

$$H_{\bar{\mu}\nu} = -\frac{\kappa}{2\pi}\int \{T_{\bar{\mu}\nu}\}_{t-\frac{r}{c}}\,\frac{dxdydz}{r}\,, \tag{2.44}$$

dove, per Rosenfeld, r è la distanza radiale e la scrittura $\{u\}_{t-\frac{r}{c}}$ indica che la funzione u viene calcolata nella variabile $t-\frac{r}{c}$, per questo motivo le componenti (2.44) vengono dette *potenziali ritardati*[96]. La tecnica esposta fino a ora è del tutto generale. A questo punto l'autore considera due casi particolari: quello di una carica di massa m e immobile, e il caso particolare in cui la stessa carica si muova di moto uniforme a velocità v piccola rispetto alla velocità della luce[97] lungo l'asse x. Vediamo in dettaglio quello che fa Rosenfeld solo per il primo dei due casi, sufficiente a comprendere l'approccio dell'autore. Rosenfeld utilizza la forma esplicita della funzione d'onda Ψ scegliendo un'opportuna funzione di

---

[91] Ovvero $|h_{\bar{\mu}\nu}| << 1$

[92] Nel prossimo capitolo vedremo che Rosenfeld preferirà invece sviluppare la metrica utilizzando il parametro $\varepsilon = \sqrt{\frac{8\pi G}{c^4}}$.

[93] È necessario anche fissare la gauge imponendo $\partial^{\bar{\mu}} H_{\bar{\mu}\nu} = \partial^{\bar{\mu}}\left(h_{\bar{\mu}\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\bar{\mu}\nu}\right) = 0$, dove $h = \eta^{\bar{\mu}\bar{\nu}}h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ è la traccia del tensore $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, condizione che Rosenfeld non nomina in questi lavori, ma che ovviamente impone: probabilmente per l'autore è scontata, poiché non gioca alcun ruolo particolare in questo articolo. Nel prossimo capitolo vedremo che l'autore sarà costretto a discuterla più nel dettaglio. Le formule per l'approssimazione di campo debole in cinque dimensioni sono identiche a quelle usuali in quattro dimensioni [SD92].

[94] Per comodità continueremo a indicarlo con la stessa lettera, ma l'espressione esplicita si ottiene sostituendo la metrica $\gamma_{\bar{\mu}\nu}$ con la metrica piatta in (2.41).

[95] Ricordiamo che dove $h = \eta^{\bar{\mu}\bar{\nu}}h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ è la traccia del tensore $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$.

[96] Nella (2.44) abbiamo riportato la soluzione come viene scritta dall'autore. La scrittura corretta sarebbe la seguente:

$$H_{\bar{\mu}\nu}(t;\vec{x}) = -\frac{\kappa}{2\pi}\int T_{\bar{\mu}\nu}\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c};\vec{y}\right)\frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{2.45}$$

([LL04]; pag. 212 e segg.). Nel seguito continueremo a usare la notazione di Rosenfeld.

[97] L'autore trascura cioè i termini di ordine superiore a $\frac{v^2}{c^2}$.

Jacobi[98] ([Ros27a]; pag. 320):

$$\Psi(x;x^5) = A(x)e^{\frac{i}{\hbar}\bar{S}} \qquad \bar{S} = x^5 + mcx^0\,, \tag{2.46}$$

per calcolare il tensore energia-impulso che compare nella (2.44). La funzione d'onda utilizzata da Rosenfeld dovrebbe corrispondere alla funzione d'onda per una particella "a riposo" con energia $E = mc^2$; ovviamente, per motivi legati al principio di indeterminazione Heisenberg, tale funzione d'onda dovrebbe essere infinitamente estesa. L'idea dell'autore può essere interpretata come una sorta di approssimazione semi-classica, d'altra parte la (2.46) ricorda l'approssimazione geometrica usata da Klein, e come vedremo a breve, Rosenfeld userà proprio una sorta di localizzazione del pacchetto d'onda, propria dell'approssimazione semi-classica. Definiamo a questo punto, per comodità, le seguenti grandezze:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{2mc^2}{\hbar^2}\int \left\{A^2\right\}_{t-\frac{r}{c}} \frac{dxdydz}{r}\,, && (2.47)\\ \mathcal{W}_{\mu\nu} &= \int \left\{\partial_\mu A \partial_\nu A\right\}_{t-\frac{r}{c}} \frac{dxdydz}{r}\,, && (2.48)\\ \mathcal{G} &= \int \left\{\partial_\mu A \partial^\mu A\right\}_{t-\frac{r}{c}} \frac{dxdydz}{r}\,, && (2.49) \end{aligned}$$

dove compaiono l'ampiezza A della funzione d'onda e la massa m della particella. Dopo aver invertito la relazione $H_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - \frac{1}{2}h\eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, le perturbazioni alla metrica piatta trovate da Rosenfeld sono le seguenti[99]:

$$\begin{aligned} h_{5i} &= 0\,, \qquad\qquad i = 1,2,3\,,\\ h_{50} &= -\alpha\frac{e}{c}\left(\frac{e}{4\pi}\frac{\mathcal{F}}{c^2}\right)\,,\\ h_{\mu\nu} &= \frac{8G}{c^4}\mathcal{W}_{\mu\nu} \qquad\qquad \mu \neq \nu\,,\\ h_{\mu\mu} &= \frac{2mG}{c^4}\mathcal{F} + \frac{8G}{c^4}\mathcal{G}\,, \end{aligned} \tag{2.50}$$

dove, come nella forma generale della metrica (2.35), $\mu = \frac{1}{m^2c^2}$. Rosenfeld ottiene quindi delle espressioni, la seconda e la quarta delle (2.50), in cui compare la costante di Planck: per questo motivo le perturbazioni alla metrica piatta calcolate da Rosenfeld potrebbero essere interpretate come una sorta di correzione "quantistica". Rosenfeld però non si sofferma su questo fatto e continua a ragionare sulla metrica trovata. Infatti Rosenfeld

[98]Si ricordi che come per Klein x^5 ha le dimensioni di un'azione e che come al solito stiamo adattando la notazione dell'autore alla nostra.

[99]Alcune semplificazioni non sono state operate per rendere più evidente, a breve, il confronto con un'altra metrica.

nota che nel primo dei due casi presi in esame la (2.35) deve ridursi alla metrica *classica* che descrive il campo di una carica puntiforme. Considerando solo l'approssimazione di campo debole e tenendo conto delle correzioni alla metrica piatta fino all'ordine $\frac{1}{r}$ come fa Rosenfeld, allora per l'autore la metrica $\gamma_{\bar{\mu}\nu} = \eta_{\bar{\mu}\nu} + h_{\bar{\mu}\nu}$ ottenuta usando le (2.50) deve coincidere con quella di Schwarzschild in campo debole. In particolare, quindi, le (2.50) devono coincidere con le seguenti[100]:

$$\begin{aligned} h_{5i} &= 0\,, \qquad i = 1,\,2,\,3\,, \\ h_{50} &= \alpha\frac{e}{c}A_0 \quad con \quad A_0 = -A^0 = -\frac{e}{4\pi r_0}\,, \\ h_{\mu\nu} &= 0 \qquad \mu \neq \nu\,, \\ h_{\mu\mu} &= \frac{2mG}{c^2 r_0}\,, \end{aligned} \tag{2.51}$$

dove, per Rosenfeld, la massa si trova nell'origine e r_0 rappresenta 'la distanza di un punto generico dal punto **O** dove si trova la carica'[101] ([Ros27a]; pag. 321). Affinché questo accada Rosenfeld impone le seguenti condizioni:

$$\partial_\mu A = 0\,, \tag{2.52}$$

$$\mathcal{F} = \frac{c^2}{r_0}\,, \tag{2.53}$$

per poi discuterle brevemente. 'La prima condizione indica che la carica immobile viene rappresentata da un'onda con fase stazionaria e ampiezza costante' ([Ros27a]; pag. 322). Se grazie alla (2.52) Rosenfeld stabilisce che l'ampiezza A deve essere costante, grazie alla (2.53), invece, ottiene una relazione quantitativa per A. L'autore suppone che l'ampiezza sia diversa da zero in un volume finito V, non necessariamente sferico, e quindi che l'ampiezza A sia costante a tratti: come anticipato, dunque, Rosenfeld ha in mente una funzione d'onda *localizzata* in un volume finito, che corrisponde effettivamente a una particella quantistica essenzialmente a riposo. A questo punto utilizza il teorema della media integrale per definire la distanza r_0 dalla particella[102] ([Ros27a]; pag. 322):

$$\frac{V}{r_0} = \int \frac{dxdydz}{r}\,, \tag{2.54}$$

[100]Nel lavoro originale Rosenfeld utilizza una segnatura differente e come sempre abbiamo adattato i risultati dell'autore alla nostra segnatura.

[101]La definizione di r_0 verrà discussa a breve.

[102]Al solito in (2.54) stiamo utilizzando la notazione di Rosenfeld. Più precisamente se indichiamo con $\vec{y}$ un punto del volume V e con $\vec{x}$ un punto qualsiasi, la "distanza media" dal corpo $r_0(\vec{x})$ sarà definita da: $\frac{V}{r_0(\vec{x})} = \int_{corpo} \frac{dV}{|\vec{x}-\vec{y}|}$.

e grazie a questa relazione, ricordando la definizione (2.47) e che l'ampiezza è costante, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \frac{2mc^2}{\hbar^2}\int \left\{A^2\right\}_{t-\frac{r}{c}} \frac{dxdydz}{r} &= \frac{c^2}{r_0} \\ \frac{2m}{\hbar^2}A^2 \int \frac{dxdydz}{r} &= \frac{1}{r_0} \\ \frac{2mA^2}{\hbar^2}\frac{V}{r_0} &= \frac{1}{r_0}\,, \end{aligned}$$

da cui si deduce

$$\frac{2mA^2V}{\hbar^2} = 1\,, \tag{2.55}$$

che coincide con la condizione scritta da Rosenfeld ([Ros27a]; pag. 322). L'autore non commenta esplicitamente la (2.55), ma a nostro avviso conviene soffermarci sul suo significato. Utilizziamo momentaneamente le unità geometrizzate $\hbar = c = 1$ e ricordiamo che la coordinata x^5 ha le dimensioni di un'azione. Da (2.38) e (2.39) si evince quindi che il campo scalare penta-dimensionale ha le stesse dimensioni di quello quadridimensionale, ovvero l'inverso di una lunghezza. La definizione (2.46) ci dice che anche l'ampiezza A ha le stesse unità di misura e quindi la condizione (2.55) è dimensionalmente coerente. Un'altra osservazione che Rosenfeld non può riportare riguarda il significato che assume tale condizione nella moderna teoria dei campi. Usualmente, per quantizzare un campo scalare quadridimensionale ψ su uno spazio-tempo piatto[103], lo si considera in un volume finito V e si scrivono le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon utilizzando uno sviluppo di Fourier nel seguente modo: $\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) = \sum_k A_k \left[a(\mathbf{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\right]$, dove la costante di normalizzazione per ogni energia $E_k = \hbar\omega_k$ è da $A_k = \sqrt{\frac{\hbar^2 c^2}{2VE_k}}$ ([MS84]; pag. 48). Se come detto più volte consideriamo un'approssimazione non relativistica, nel senso che interpretiamo il campo scalare come la funzione d'onda localizzata di una particella "a riposo", nello sviluppo di Fourier sopravvive un'unica frequenza, quella per cui $E = mc^2$, e la condizione di normalizzazione del campo scalare diventa $A = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2Vm}}$, ovvero proprio la (2.55)[104]. Concludendo Rosenfeld è riuscito a mostrare come la MQ, nell'approssimazione di campo debole, riesca a riprodurre la metrica *classica* di Schwarzschild.

Rosenfeld tornerà brevemente sulla questione nella terza comunicazione [Ros27c]. L'autore sottolinea l'importanza del principio variazionale (2.39), perché secondo il fisico belga 'realizza *formalmente* la fusione della teoria generale della relatività e della teoria dei quanti' ([Ros27c]; pag. 574). Viste tutte le approssimazioni fatte, l'autore è chiaramente

[103] Ricordiamo che stiamo considerando il campo gravitazionale nell'approssimazione di campo debole.
[104] Si ricordi che l'ampiezza A di Rosenfeld non dipende dalla coordinata x^5.

convinto che il lavoro sia parziale, e aggiunge che è necessario 'mettere in evidenza le eventuali modifiche che apporta alla Gravità l'introduzione della grandezza che corrisponde alla quantizzazione Ψ' ([Ros27c]; pag. 575). Per Rosenfeld, infatti, è il campo Ψ a essere il depositario degli effetti quantistici e se in prima analisi l'autore è riuscito a riprodurre una metrica classica, il fisico belga sembra chiedersi quali siano gli effetti sulla metrica di un *qualsiasi* campo scalare. Questi commenti sottolineano che per Rosenfeld il risultato ottenuto rappresentava effettivamente un effetto di natura quantistica, e mettono in evidenza come l'autore fosse sensibile a questa tematica, su cui tornerà tre anni più tardi.

2.2.2 La Gravità Quantistica alla conferenza Solvay

Alla quinta conferenza Solvay, che si tiene dopo l'estate, De Donder cerca di dare risonanza nei suoi interventi ai risultati ottenuti dalla collaborazione con Rosenfeld cercando di stimolare un'eventuale discussione sull'armonizzazione tra RG e MQ. Gli interventi di De Donder sembrano non generare alcuna riflessione sul tema, secondo quanto riportato nella trascrizione dei *Proceeding* della conferenza. L'unico interessato alla questione sembra de Broglie, il quale è però informato per i motivi già esposti dei lavori di Rosenfeld e della collaborazione di quest'ultimo con De Donder. La pubblicazione della traduzione inglese delle lezioni e delle discussioni della conferenza stessa [BV09] ci permettono di riportare proprio tali osservazioni.

De Broglie riporta l'equazione d'onda scritta dall'autore e da Klein, e afferma esplicitamente che De Donder è riuscito ad armonizzare la Meccanica Ondulatoria con la teoria di Einstein ([BV09]; pag. 381). De Donder cerca di portare all'attenzione dei presenti le lezioni da lui tenute al MIT (che abbiamo discusso nel precedente capitolo), speculando su un possibile legame tra le proprie considerazioni e le riflessioni di Bohr[105] ([BV09]; pag. 483). In un intervento successivo, sempre De Donder afferma che sussiste un collegamento fra il proprio lavoro e quello di de Broglie, illustrato brevemente da noi in questo capitolo, e richiama l'attenzione sui contributi di Rosenfeld di cui abbiamo parlato nel precedente paragrafo ([BV09]; pag. 499 e 514).

De Donder tenta ancora in altre occasioni ([BV09]; pag. 470; 471; 510) di richiamare l'attenzione sul proprio approccio: i commenti successivi, però, non si soffermano mai sulle questioni sollevate da De Donder o da de Broglie. Nonostante questo le idee di De Donder e l'approccio penta-dimensionale continuano a essere protagonisti in quest'anno.

[105]De Donder è però molto vago sulla natura di tali legami. Il fisico belga fa riferimento anche alla formulazione di un personale *principio di corrispondenza*, che abbiamo deciso di non approfondire in questa sede.

2.3 1927: un antenato della teoria delle stringhe

Come detto anche nell'introduzione alla tesi, l'armonizzazione tra RG e MQ viene spesso affrontata dagli autori che si occupano del problema di trovare una teoria unitaria. Heinrich Mandel, cerca di porre le basi per l'*assiomatizzazione* di una eventuale teoria unitaria ([Man27]; pag. 299 e segg.). Quello che a nostro avviso sembra emergere, per esempio dall'articolo di Mandel, è che solo la materia e la luce vengono trattate come *oggetti quantistici*. La quantizzazione del campo gravitazionale quindi non sembra essere un obiettivo del programma di unificazione dell'autore e forse questa è una *parziale* giustificazione dell'assenza esplicita di tali tentativi. Un altro motivo plausibile è che, come visto nel precedente paragrafo, i metodi della quantizzazione dei campi erano ancora in fase di sviluppo. Altri autori tentano una strada alternativa e cercano di sviluppare l'idea che la teoria quantistica porti a una revisione del concetto di spazio-tempo in cui il tempo stesso è quantizzato. Uno degli autori che avanza tale proposta è Robert Lévi [Lé27], il quale dà il nome di *cronone* al quanto temporale. Anticipiamo che dall'anno successivo l'idea di Lévi verrà condivisa da altri autori. Di alcuni di essi parleremo nel prosieguo, mentre di altri esistono già degli studi che ne hanno ricostruito il pensiero. Di questi ultimi fanno parte quegli autori che sposano esplicitamente l'approccio di Lévi e formano con l'autore una sorta di filone di ricerca[106]. Per esempio i lavori di Pokrowski [Pok28] e Gottfried Beck [Bec29] sono stati presentati da Helge Kragh, il quale ha redatto una trattazione dettagliata dello sviluppo dell'idea di quantizzazione dello spazio-tempo in questi primi anni [KC94].

Nel 1927, torna alla ribalta anche una teoria della gravitazione alternativa alla RG, sviluppata da Hermann Weyl a partire dal 1918 in una serie di lavori. La teoria del matematico tedesco verrà indicata più volte, negli anni a venire, sia come una teoria unificata della forza gravitazionale ed elettromagnetica, sia come base di partenza per l'armonizzazione dei principi quantistici con la RG, di cui rappresenta una sorta di "generalizzazione metrica". Per questo motivo nel prossimo paragrafo ne riporteremo alcune idee essenziali[107] che verranno riprese dagli autori che discuteremo nel prosieguo.

2.3.1 La teoria della gravitazione di Weyl

La teoria sviluppata da Weyl era un tentativo di "unificazione" dei fenomeni gravitazionali ed elettromagnetici. L'idea centrale dell'autore prendeva spunto da una modifica della

[106] Tale filone non porterà a nulla di fatto.

[107] Per una trattazione più dettagliata si veda ([Pau82]; pag. 290) e le referenze dei lavori originali in esso contenute.

geometria dello spazio-tempo della RG: si trattava di un tentativo di carattere *teorico*, non supportato da particolari evidenze sperimentali e anzi in contrasto con alcune di esse[108]. Con il passaggio dalla geometria euclidea della teoria della gravitazione di Newton a quella riemanniana della RG, cade l'ipotesi che trasportando un vettore lungo un cammino qualsiasi tra due punti P e P', la *direzione* finale del vettore non debba dipendere dal cammino stesso. L'idea centrale della geometria pensata da Weyl è ammettere che anche la *lunghezza* del vettore non debba necessariamente restare invariata: l'autore era convinto che si potessero confrontare delle lunghezze misurate solamente nello *stesso* punto di Universo. Di conseguenza nella geometria di Weyl i valori delle grandezze $g_{\mu\nu}$ sono fissabili a meno di un fattore di scala $\Omega(x)$ e quindi gli elementi di lunghezza $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ non hanno un significato *assoluto*, perché un confronto tra lunghezze misurate tra due punti differenti coinvolge il fattore di scala Ω, mentre invece i *rapporti* tra lunghezze infinitesime sono ben definiti quando entrambe le lunghezze si riferiscono allo stesso punto[109]. Approfondiamo alcuni particolari tecnici, che chiariscono ulteriormente quanto affermato.

In RG, data una curva $x^\mu(\tilde{\lambda})$ e detto $\xi^\mu(\tilde{\lambda})$ un qualsiasi vettore uscente da un suo generico punto P, se la lunghezza di tale vettore deve restare invariata lungo la curva si avrà

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\left(g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu\right) = 0. \tag{2.56}$$

Per una traslazione *infinitesima* lungo una qualche curva uscente da P, deve sempre esistere un sistema di riferimento per cui valga nel punto P, $\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\xi^\mu = 0$ e di conseguenza, per un qualsiasi altro sistema di riferimento[110] deve valere l'*equazione del trasporto parallelo*:

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\xi^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\rho}\left(x^\mu\right)\xi^\nu\frac{dx^\rho}{d\tilde{\lambda}}. \tag{2.57}$$

Nella teoria di Weyl, invece, si postula che la lunghezza l del vettore vari per una quantità proporzionale alla lunghezza del vettore stesso

$$\frac{dl}{d\tilde{\lambda}} = -l\frac{dA}{d\tilde{\lambda}a} \tag{2.58}$$

dove si assume che $A(\tilde{\lambda})$ sia una funzione che non dipende dalla lunghezza del vettore. Con questa premessa la (2.56) viene modificata nel seguente modo:

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\left(g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu\right) = -g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu\frac{dA}{d\tilde{\lambda}} \tag{2.59}$$

[108]Facciamo riferimento a delle osservazioni di Einstein di cui parleremo a breve. Probabilmente questo fatto sarà uno dei motivi per cui l'autore stesso deciderà di abbandonare la propria teoria.

[109]Per una discussione dettagliata di questi aspetti si veda ([TFW62]; pag. 446) e per un'introduzione *moderna* alla teoria di Weyl, che ritorna periodicamente a calcare il palco della fisica teorica, si veda per esempio [Sch14]

[110]Ricordiamo che il fatto che per ogni punto esista sempre un sistema di coordinate in cui i simboli di Christoffel si annullino è sostanzialmente equivalente al principio di equivalenza di Einstein.

e si può introdurre una nuova connessione $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho}$, detta *connessione di Weyl*, per scrivere una nuova equazione del trasporto parallelo (2.57):

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}}\xi^{\mu} = -\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho}\left(x^{\mu}\right)\xi^{\nu}\frac{dx^{\rho}}{d\tilde{\lambda}}\ , \tag{2.60}$$

supponendo che $\frac{dA}{d\tilde{\lambda}}$ sia una forma lineare nelle $\frac{dx^{\rho}}{d\tilde{\lambda}}$, ovvero $dA = A_{\rho}dx^{\rho}$. I simboli di Christoffel $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho}$ per questa nuova geometria differiscono da quelli della geometria riemanniana per l'aggiunta di un termine che dipende da questa nuova funzione A[111]. Un ragionamento analogo può essere ripetuto anche per le espressioni del tensore di curvatura e delle sue contrazioni, calcolati tramite definizioni identiche a quelle della RG, ma che coinvolgono la nuova connessione. Nel paragrafo seguente indicheremo tutte queste nuove quantità con la stessa lettera usata in RG, ma con un segno distintivo, analogamente a quanto fatto per i simboli della connessione: per esempio se usualmente lo scalare di curvatura in RG viene indicato con R, lo stesso scalare costruito con la connessione di Weyl sarà $\tilde{R}$. Abbiamo detto che questa teoria metrica di Weyl "unifica" gravità ed elettromagnetismo. L'elettromagnetismo emerge proprio dal quadrivettore A_{μ}, vediamo brevemente come[112]. Se integriamo l'equazione (2.58) otteniamo

$$l_{P'} = l_P\, exp\left[-\int_P^{P'} A_{\mu}dx^{\mu}\right]. \tag{2.61}$$

Un regolo di misura la cui lunghezza l_P si comporti secondo la (2.61) si chiama *scala di gauge* di Weyl. Un caso particolare della (2.61) si ha quando la forma lineare $A_{\mu}dx^{\mu}$ è un differenziale *esatto*. In tal caso allora si annullerà il tensore $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$. Quest'ultima condizione mostra la forte analogia con la teoria di Maxwell[113], e questo è il motivo originale per cui Weyl aveva deciso di identificare le componenti di A_{μ} con i potenziali elettromagnetici.

Abbiamo detto che i valori assoluti delle grandezze $g_{\mu\nu}$ sono fissabili a meno di un valore di scala Ω. Se dunque invece della metrica $g_{\mu\nu}$ scegliamo $g'_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}$, dalla (2.58) si deduce la legge di trasformazione per i potenziali elettromagnetici[114]: $A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial x^{\mu}}$. Nella teoria di Weyl, dunque, oltre all'invarianza per trasformazioni arbitrarie delle coordinate come in RG, si deve chiedere l'invarianza delle relazioni geometriche e delle leggi fisiche

[111] L'espressione per la connessione di Weyl è: $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\delta^{\mu}_{\alpha}A_{\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}A_{\alpha} - g_{\alpha\beta}A^{\mu}\right)$.

[112] Quanto stiamo per esporre corrisponde all'interpretazione originale di Weyl. Nelle versioni successive della teoria, che come detto tornerà periodicamente in auge, tale quadrivettore verrà interpretato diversamente.

[113] Dalla definizione di $F_{\mu\nu}$ seguono anche le identità di Bianchi per tale tensore.

[114] Si ricordi che Ω è una funzione delle coordinate.

rispetto alle seguenti sostituzioni:

$$g'_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu} \,, \tag{2.62}$$

$$A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial x^{\mu}}. \tag{2.63}$$

Tale invarianza venne chiamata da Weyl *invarianza di gauge*: la trasformazioni di gauge moderna, che deve il suo nome proprio all'idea originale di Weyl [OS00], corrisponde alla (2.63), la grandezza Ω verrà chiamata anche *lunghezza di gauge*, mentre la (2.62) viene detta *trasformazione conforme della metrica*[115]. In termini moderni possiamo definire la metrica di Weyl come l'insieme di tutte le classi di equivalenza delle coppie (g, A) definite dalla relazione $(g', A') \sim (g, A)$ tramite le trasformazioni (2.62) e (2.63).

Prima di proseguire consideriamo ancora l'equazione (2.61). Grazie alla (2.63), se $F^{\mu\nu} = 0$, allora con una scelta opportuna della funzione Ω è possibile porre $A_{\mu} = 0$: quindi la (2.61) si riduce a $l_{P'} = l_P$, come nella geometria riemanniana. In questo modo si chiarisce come la geometria della RG sia un caso particolare della geometria di Weyl. Se però $F^{\mu\nu} \neq 0$, come accade in generale, una conseguenza della (2.61) è che il campo elettromagnetico dovrebbe influenzare le lunghezze dei regoli, nel senso che tale lunghezza dovrebbe dipendere dalla storia passata. Einstein, per primo, osservò che se la relazione fosse corretta se ne dovrebbe poter scrivere una *analoga* per gli intervalli temporali, con la conseguenza che anche gli intervalli temporali misurati da un orologio dovrebbero dipendere dalla storia passata e infine che, contrariamente a quanto accade, si sarebbe dovuta trovare traccia di questo fenomeno nell'analisi delle linee spettrali degli atomi ([Pau82]; pag. 294). Questo è uno dei limiti empirici dell'interpretazione delle componenti di A_{μ} come i potenziali elettromagnetici.

2.3.2 Wiener e Struik: origine quantistica della gravitazione

Come detto alla fine del paragrafo 2.2.2, le idee di De Donder e l'Universo penta-dimensionale di Klein influenzano vari autori nello stesso periodo. Nel 1927 Norbert Wiener[116] e Dirk J. Struik danno comunicazione a Nature [WS27b] di un loro lavoro in cui affrontano il problema dell'unificazione tra elettromagnetismo, RG e MQ. Gli autori annunciano che i dettagli verranno presentati su una rivista del MIT [WS27a] che pubblicherà il lavoro nello stesso anno. Il lavoro di Wiener e Struik si inserisce nello stesso periodo in cui Klein e De Donder stanno cercando di sviluppare il proprio progetto di unificazione, e quindi in una parte dell'articolo Wiener e Struik cercheranno di evidenziare le differenze tra il

[115]Sottintenderemo sempre che si tratta di trasformazioni *non rigide*, nel senso che $\Omega = \Omega(x)$.

[116]Wiener è più noto per i suoi successivi contributi alla nascita della cibernetica.

loro approccio e quello di Klein e De Donder. Cominciamo con l'analizzare i ragionamenti fatti dai due autori nell'introduzione al lavoro.

Come per Klein, anche per Wiener e Struik le caratteristiche quantistiche della materia vengono ben rappresentate dall'approccio ondulatorio di Schrödinger, ma anche loro, per quanto riguarda la sua generalizzazione relativistica, faranno riferimento all'equazione di Klein-Gordon. Lo scopo di Wiener e Struik è esplicito sin da subito: 'sviluppare una forma della teoria della relatività[117] che dovrebbe contenere la teoria dei quanti, rappresentata dalla Meccanica Ondulatoria di Schrödinger, non come una semplice aggiunta, ma come parte integrante ed essenziale' ([WS27a]; pag. 1). I due autori dichiarano di arrivare alla 'sorprendente conclusione che ci sia un'intima connessione tra le equazioni di campo di Einstein e l'equazione d'onda di Schrödinger nella formulazione di Fock-De Donder [Foc26a] [De 27]' ([WS27a]; pag. 1). Come vedremo a breve l'approccio dei due autori è essenzialmente *speculare* rispetto a quello di De Donder. I due autori conoscono la teoria di Weyl, che ha il pregio, dal loro punto di vista, di aver unificato la RG con l'elettromagnetismo[118], ma ha il difetto di offrire solo una delle possibili scelte riguardo alla geometria dello spazio-tempo[119]. Un altro difetto dichiarato della teoria di Weyl è quello di non contenere la descrizione dei fenomeni quantistici: Wiener e Struik sottolineano quindi che 'si rende necessaria una nuova teoria' che abbracci i fenomeni gravitazionali, elettromagnetici e quantistici e che, aggiungono, 'è naturale cercare suggerimenti per questa nuova teoria [...] a partire dalla Meccanica Ondulatoria di Schrödinger' ([WS27a]; pag. 1). Il punto di partenza dei due autori è però *completamente differente* dagli altri approcci del periodo. Wiener e Struik si chiedono infatti se sia possibile 'a partire da un'equazione di questo tipo[120], formulare una definizione non ambigua dei campi gravitazionali ed elettromagnetici' e subito continuano: 'Risponderemo a questa domanda affermativamente. Discuteremo inoltre gli effetti delle equazioni di campo di Einstein sulla forma dell'equazione d'onda originale' ([WS27a]; pag. 3). Alla fine dell'introduzione al lavoro, dopo aver richiamato i successi e i limiti della generalizzazione relativistica[121] dell'equazione di Schrödinger, Wiener e Struik sottolineano la differenza tra il loro lavoro e quelli di Klein e di De Donder: 'Abbiamo già citato Klein e De Donder che realizzano

[117] Si sottintende la RG.

[118] Evidentemente ignorano, coscientemente o meno, le critiche di Einstein all'approccio di Weyl.

[119] I due autori fanno riferimento alla teoria della connessione affine di Eddington e ai lavori di Jan Schouten, di cui Struik era diventato assistente nel 1917, sulla teoria delle connessioni lineari a cui aveva contribuito lo stesso Struik. Per un approfondimento delle idee di Eddington si veda, per esempio, [Ryc05], mentre per un approfondimento del lavoro di Schouten si veda [Goe04].

[120] Gli autori intendono una qualche equazione d'onda.

[121] Si sottintende la relatività speciale.

un'ulteriore generalizzazione [dell'equazione di Schrödinger] al caso della relatività generale. *Nessuno di questi lavori deriva il tensore fondamentale gravitazionale*[122] *a partire dalla stessa equazione di Schrödinger*, ma partono piuttosto dalla metrica [...] In questo articolo la teoria dei quanti e la relatività vengono entrambe derivate dalla teoria invariante di una singola equazione differenziale'[123] ([WS27a]; pag. 3). Quello che effettivamente otterranno i due autori, però, è una sorta di principio fondante che integra *entrambe* le teorie, senza però che queste cambino in qualche modo il loro carattere originario. In tal senso, dunque, non si può parlare di modificazioni quantistiche della RG e quindi di effetti quantistici della gravità, anche se Wiener e Struik discutono come RG e Meccanica Ondulatoria "interagiscano" nella loro teoria. Quello che contraddistingue il loro lavoro da quello degli altri autori del periodo è che Wiener e Struik non definiranno la metrica dello spazio-tempo a priori, ma che cercheranno di "definirla" a partire da un'equazione che dal punto di vista degli autori è un'equazione quantistica. In questo senso la gravità *emerge*, a partire da un'equazione d'onda e quindi dalla Meccanica Ondulatoria. Per questo motivo abbiamo quindi deciso di definire l'approccio di Wiener e Struik come un *antenato* della moderna teoria delle stringhe dove la RG emerge a partire dalle equazioni quantistiche di una stringa[124].

Il punto di partenza dei due autori è la teoria matematica di Émile Cotton [Cot00], formulata nel 1900 nell'ambito della geometria differenziale, che studia alcuni invarianti delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del second'ordine. Questo perché Wiener e Struik non pensavano solamente che la Meccanica Ondulatoria di Schrödinger spiegasse bene la fisica dell'elettrone, ma erano *fortemente convinti* che la generalizzazione relativistica corretta fosse proprio l'equazione di Klein-Gordon. A differenza dei loro colleghi, Wiener e Struik menzionano esplicitamente due questioni fondamentali riguardo a tale equazione. La prima questione è rappresentata dai problemi di cui soffre l'equazione di Klein-Gordon nel confronto sperimentale con la struttura fine dell'atomo di idrogeno, preannunciati da Schrödinger[125]. La seconda questione è l'idea dello *spin*, introdotta dai colleghi Samuel A. Goudsmit e George E. Uhlenbeck [GU25]. Wiener e Struik esprimono esplicitamente la loro fiducia nell'equazione di K-G: 'Recentemente Epstein [Eps27b] [Ric27] ha portato a termine un'analisi matematicamente dettagliata della

[122] Ovvero il tensore metrico $g_{\mu\nu}$.

[123] Il corsivo è nostro.

[124] Ovviamente i dettagli tecnici sono completamente differenti, ma la filosofia è la stessa: i modi di vibrazione di una stringa chiusa vengono quantizzati e alcuni di questi rappresentano essi stessi il quanto dell'interazione gravitazionale.

[125] In particolare in relazione allo sdoppiamento delle linee spettrali dovuto alla presenza di una campo magnetico esterno, come ribadiremo a breve.

struttura fine, usando come punto di partenza un caso speciale della generalizzazione relativistico-magnetica dell'equazione di Schrödinger' ([WS27a]; pag. 4). Vista la forte convinzione dei due autori, unita al fatto che noi oggi sappiamo bene che solo l'equazione di Dirac offre una spiegazione ragionevolmente in accordo coi dati sperimentali dell'effetto noto come struttura fine, apriamo una piccola parentesi per capire a cosa facessero riferimento.

Il lavoro di Paul Epstein citato dai due autori prende spunto da un precedente articolo, [Foc26b], dove Fock esplicita il calcolo dello sdoppiamento delle linee spettrali della struttura fine dell'atomo di idrogeno, dovuto alla presenza di un campo magnetico, utilizzando proprio l'equazione di K-G e ottenendo il risultato annunciato da Schrödinger. Notiamo che nella ricerca di soluzioni stazionarie in coordinate radiali[126] dell'equazione d'onda, usando l'equazione di K-G compaiono, nella Hamiltoniana, un termine costante e un termine dipendente da $\frac{1}{r}$, dove r è la coordinata radiale, che riproducono il risultato non-relativistico, e un termine proporzionale a $\frac{1}{r^2}$ che dà la correzione relativistica *errata* di K-G ([Foc26b]; pag. 248). Nello stesso lavoro, ma poche righe più sopra, Fock aveva considerato anche la Hamiltoniana[127] di un elettrone nel campo magnetico esterno prodotto da un dipolo magnetico[128]. Nella Hamiltoniana quindi, al posto del termine proporzionale a $\frac{1}{r^2}$ è presente un termine correttivo dell'ordine di $\frac{1}{r^3}$ ([Foc26b]; pag. 247). Anche Epstein, in [Eps27a], aveva notato la presenza del termine proporzionale a $\frac{1}{r^2}$ nell'equazione di K-G e in [Eps27b], il lavoro citato da Wiener e Struik, esegue il calcolo della struttura fine utilizzando *tutti* i termini correttivi, compreso quello proporzionale a $\frac{1}{r^3}$, derivante dalla forma del dipolo magnetico. A questo punto Epstein identifica il momento magnetico con quello che lui chiama il 'momento di spin corretto' ([Eps27b]; pag. 237), come viene introdotto anche in qualche moderno testo di MQ [Bor07]: l'autore conosce sia la proposta di Goudsmit e Ulenbeck di identificare il momento magnetico come derivante dallo spin dell'elettrone, sia la correzione relativistica calcolata da Thomas [Tho26]. In questo modo Epstein ottiene il computo corretto dello sdoppiamento delle linee spettrali, esattamente come accadrà nella trattazione di Dirac[129] [Dir28a] [Dir28b]. Notiamo innanzitutto che in [Tho26] Thomas annunciava che Heisenberg e Pauli erano già a conoscenza di un risultato simile, ma non abbiamo trovato alcuna pubblicazione a

[126] La funzione d'onda in coordinate radiali può essere scritta nel seguente modo: $\psi(\vec{r},t) = u(\vec{r})exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ dove E rappresenta l'energia dello stato stazionario e $\vec{r}$ è la coordinata radiale.

[127] Fock non usa un formalismo Lorentz invariante.

[128] Fock *non* propone questa Hamiltoniana come alternativa all'altra.

[129] La cosa non deve stupire perché la correzione dovuta all'equazione di Dirac deriva proprio dal termine di interazione spin-orbita. Nella trattazione di Dirac, però, la "correzione" dovuta a Thomas è automaticamente contenuta nella teoria stessa.

riguardo prima del risultato di Epstein. Poi dobbiamo sottolineare come il lavoro di Epstein non parta da un'equazione relativistica ben precisa: Epstein assume implicitamente che il termine correttivo proporzionale a $\frac{1}{r^3}$ derivi da una qualche modifica dell'equazione di K-G e sappiamo, da Wiener e Struik, che il lavoro di Epstein è stato criticato ([WS27a]; pag. 4). A questo punto, finalmente, comprendiamo la fiducia espressa anche da Wiener e Struik, i quali, parlando delle critiche al lavoro di Epstein, asseriscono che: 'La critica riguarda probabilmente l'interpretazione del risultato, più che la scelta dell'equazione differenziale. Si può dire a ogni modo che l'equazione relativistico-magnetica di Schrödinger è adeguata alla discussione delle orbite quantizzate di una singola particella carica in Relatività Ristretta' ([WS27a]; pag. 4). A nostro avviso risulta dunque evidente come tutti questi autori non immaginassero che da una *piccola* modifica derivasse in realtà un enorme cambiamento di prospettiva. Oggi sappiamo bene[130] che i risultati finali del calcolo dell'energia di struttura fine nei due casi, equazione di K-G e di Dirac, sono simili, se approssimati all'ordine α^4, dove, in unità naturali, $\alpha = \frac{1}{137}$: la differenza sostanziale sta nel fatto che nel risultato ottenuto con l'equazione di K-G compare solo il momento angolare orbitale l, mentre nel risultato di Dirac compare il momento angolare totale $j = l + s$, dove s è il valore dello spin, che per l'elettrone è diverso da zero, a dimostrazione del fatto che l'equazione di K-G non può descrivere particelle con spin. Possiamo aggiungere, a discolpa degli "imputati", che le matrici che si usano per trattare lo spin in MQ verranno introdotte da Pauli in quello stesso anno [Pau27]: è con il lavoro del fisico austriaco che si fa strada la convinzione che non fosse sufficiente una sola funzione d'onda, ma che ne servissero *due* per trattare la dinamica corretta dell'elettrone[131] [Pai88]. Torniamo ora alla discussione del lavoro di Wiener e Struik.

Come detto in precedenza, Wiener e Struik partono dalla teoria delle equazioni differenziali, sviluppata da Cotton, quindi ne fanno una breve introduzione. Nella prima parte del lavoro quindi sviluppano alcuni particolari più matematici per concentrarsi poi sugli sviluppi fisici del lavoro. Leggendo la prima parte, dunque, possiamo comprendere come si possa definire in maniera univoca una particolare metrica dello spazio-tempo[132] a partire da un'equazione differenziale, mentre nella seconda parte, identificando tale equazione differenziale con la generalizzazione dell'equazione di K-G, Wiener e Struik attuano il loro progetto di mettere a punto una teoria che spieghi come la metrica dello spazio-tempo, e quindi la gravità, *emerga a partire da un'equazione quantistica.* Cominciano dunque, come i due autori, con il considerare un generico operatore differenziale alle derivate parziali

[130] Si veda per esempio [Sch40] e si confrontino le equazioni (42.21) e (44.27).
[131] Una per ogni valore dello spin s dell'elettrone: $s = \pm\frac{1}{2}$.
[132] Vedremo a breve che si tratta della metrica di Weyl.

del second'ordine F e immaginiamo che tale operatore agisca su una generica funzione delle coordinate, $\psi(x)$, che rappresenterà la funzione d'onda dell'elettrone. Allora l'equazione $F(\psi) = 0$ rappresenterà la generalizzazione dell'equazione d'onda. Come al solito scriviamo l'equazione scritta da Wiener e Struik, per poi commentarla:

$$F(\psi) = \sum_{\lambda,\mu}^{0,\ldots,n-1} a_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \sum_{\lambda}^{0,\ldots,n-1} a_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} + a_0 \psi = 0. \tag{2.64}$$

Notiamo che le dimensioni dello spazio-tempo sono n e che, per il momento, nell'equazione non compare alcuna metrica: i simboli $a_{\lambda\mu}$ e a_λ e a_0 indicano solo delle *generiche* componenti, funzioni delle sole coordinate[133] x^μ, e non le componenti di un tensore, di un vettore o un qualche scalare, quindi la posizione degli indici per ora non è importante. Nella teoria di Cotton la (2.64) viene detta *forma fondamentale* o *equazione fondamentale*. Ora consideriamo una trasformazione invertibile[134] delle variabili[135]

$$'x^\nu = f^\nu(x^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{2.65}$$

Dopo questo cambio di variabili, l'operatore F applicato a $\psi('x^\mu)$ darà luogo a una nuova equazione che avrà la stessa forma della (2.64), ovvero

$$'F(\psi) = \sum_{\lambda,\mu}^{0,\ldots,n-1} {}'a_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial\, 'x^\lambda \partial\, 'x^\mu} + \sum_{\lambda}^{0,\ldots,n-1} {}'a_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial\, 'x^\lambda} + {}'a_0 \psi = 0\ , \tag{2.66}$$

se le componenti $a_{\lambda\mu}$ e a_λ e a_0 trasformano nel seguente modo:

$$'a_{\lambda\mu} = \sum_{\rho\sigma} a_{\rho\sigma} \frac{\partial\, 'x^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial\, 'x^\mu}{\partial x^\nu}\ , \tag{2.67}$$

$$'a_\lambda = \sum_{\rho\sigma} a_{\rho\sigma} \frac{\partial^2\, 'x^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\nu} + \sum_\rho a_\rho \frac{\partial\, 'x^\lambda}{\partial x^\rho}\ , \tag{2.68}$$

$$'a_0 = a_0\ . \tag{2.69}$$

L'equazione (2.67) è la legge di trasformazione per le componenti contro-varianti di un tensore simmetrico[136], che indicheremo con $g^{\lambda\mu}$ e, se il determinante Δ di $g^{\lambda\mu}$ è non nullo, se ne possono definire le relative componenti covarianti e una connessione $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, come in RG. Questo è quindi il primo punto importante per i due autori, i quali affermano che

[133] I due autori chiedono che tutte le funzioni presenti nel loro lavoro siano continue assieme alle loro derivate prima e seconda, ovvero $C^2(\mathbb{R}^n)$.

[134] La matrice Jacobiana della trasformazione deve avere determinante non nullo.

[135] Vista la presenza degli indici, anche noi, come Wiener e Struik, scriveremo $'x^\mu$ per intendere $(x')^\mu$. Le trasformazioni in questione sono gli usuali *diffeomorfismi*.

[136] La simmetria deriva ovviamente dal fatto che le derivate parziali commutano.

ipotizzando l'invarianza in forma per diffeomorfismi dell'equazione d'onda, si può *introdurre* un tensore metrico[137] ([WS27a]; pag. 8). Introducendo anche la derivata covariante nel modo usuale e tenendo conto che i simboli della connessione non trasformano come tensori, l'equazione fondamentale (2.64) può essere riscritta nel seguente modo:

$$F(\psi) = \Box\psi - 2b^\lambda \partial_\lambda \psi + a_0 \psi = 0 \ , \tag{2.70}$$

dove l'operatore $\Box$ coinvolge le derivate covarianti, gli indici sono alzati e abbassati dal tensore metrico appena definito e da ora sono di nuovo sommati secondo la solita convenzione di Einstein. Si può dimostrare che le quantità

$$b^\lambda = -\frac{1}{2}\left(a_\lambda + g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.71}$$

trasformano come un vettore[138] $n-$dimensionale rispetto alle (2.65), come richiede la (2.70).

È importante fare due osservazioni. La prima è che la geometria dello spazio-tempo che ottengono i due autori *non* è quella della RG, bensì quella di Weyl: questo fatto non è ancora evidente da quanto detto fin'ora, ma risulterà più chiaro nel prossimo paragrafo dove mostreremo come Wiener e Struik collegano il vettore b^λ con il campo elettromagnetico. La seconda osservazione riguarda ancora il legame tra la gravità e la MQ: i due autori riusciranno a collegare la condizione che definisce lo spazio vuoto in RG, $R_{\mu\nu} = 0$, con la costante di Planck. Per capire come ciò sia possibile dobbiamo chiarire la prima osservazione, entrando un po' più in dettaglio nel lavoro dei due autori.

2.3.3 Un legame tra il vuoto in RG e la costante di Planck

Prima di arrivare alla sezione dell'articolo dedicata alle caratteristiche *fisiche* del loro approccio, Wiener e Struik discutono l'effetto delle trasformazioni conformi della metrica sulla forma fondamentale. I due autori sono interessati a scrivere le leggi di trasformazione per gli elementi appena definiti della forma fondamentale (2.70), affinché l'equazione resti *invariata nella sua forma* dopo la trasformazione della metrica. Affinché questo accada, se la trasformazione conforme della metrica è del tipo $'g_{\mu\nu} = Kg^{\mu\nu}$, la (2.70) dovrà

[137] Gli autori dedicano a questo fatto un *teorema*, il cui enunciato recita: una forma fondamentale $F(\psi)$ *determina* un tensore controvariante $g^{\lambda\mu}$ e una funzione scalare a_0. Se il determinante di $g^{\lambda\mu}$ è non nullo, essa *determina* anche un tensore covariante $g_{\lambda\mu}$ e un vettore controvariante p^λ.

[138] Per dimostrarlo si usano le leggi di trasformazione dei coefficienti della connessione: si veda per esempio ([LL04]; pag. 316).

trasformare nel seguente modo[139]:

$$'F(\psi) = KF(\psi) \ , \tag{2.72}$$

dove K è una funzione delle n variabili x^ν. Le leggi di trasformazione cercate da Wiener e Struik sono le seguenti[140]:

$$\begin{aligned}
'g^{\mu\nu} &= Kg^{\mu\nu} \ , && (2.73)\\
'g_{\mu\nu} &= K^{-1}g_{\mu\nu} \qquad 'g = K^{-n}g \ , && (2.74)\\
'a_0 &= Ka_0 \ , && (2.75)\\
'a_\lambda &= Ka_\lambda \ , && (2.76)\\
'g^{\mu\nu}\,'\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(n-2)g^{\mu\nu}\partial_\lambda K \ , && (2.77)\\
'b_\mu &= b_\mu - \frac{1}{4}(n-2)\partial_\mu\left(\log K\right) \ . && (2.78)
\end{aligned}$$

In (2.74) g è il determinante di $g_{\mu\nu}$; per ottenere la trasformazione (2.77) si usi la definizione $g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\nu\lambda}\right)$ assieme alle relazioni (2.73) e (2.74); per ottenere la (2.78) si ricordi la definizione delle componenti covarianti: $b_\mu = g_{\lambda\mu}b^\lambda$. Osserviamo proprio la (2.78): quando la metrica è soggetta a una trasformazione conforme il vettore b_μ è soggetto a una trasformazione che ricorda le trasformazioni di Weyl, (2.62) e (2.63), definite nel paragrafo 2.3.1. In particolare, ponendo $\Omega = K^{-1}$ e definendo il vettore[141] $\phi_\mu = \frac{4}{2-n}b_\mu$, la (2.74) e la (2.78) diventano[142] le (2.62) e (2.63). Wiener e Struik, dunque, deducono che 'un'equazione fondamentale $F(\psi) = 0$ determina in maniera univoca una connessione lineare di Weyl'[143] ([WS27a]; teorema II, pag. 9). Più precisamente[144] i due autori dimostrano che richiedendo quella che viene oggi chiamata *covarianza conforme*[145], ovvero l'invarianza in forma, per diffeomorfismi e per trasformazioni conformi della metrica dell'operatore differenziale F, si ottiene una connessione di Weyl. A questo punto i due autori considerano lo scalare di curvatura della geometria di Weyl $\tilde{R}$, che si ottiene

[139] Abbiamo cambiato la notazione di Wiener e Struik: i due autori, per esempio, usano la lettera R per indicare la matrice di trasformazione che noi indicheremo con K, per non confonderla con lo scalare di curvatura.

[140] Abbiamo corretto degli errori di stampa presenti nel lavoro originale.

[141] Anche in questo caso abbiamo corretto un probabile errore di stampa.

[142] Volutamente, non abbiamo ancora usato il simbolo A_μ, che usiamo solitamente per i potenziali elettromagnetici e che definiremo a breve, ma che sarà comunque *proporzionale* al vettore b_μ.

[143] Ricordiamo che tale connessione, definita nel precedente paragrafo, corrisponde ai simboli $\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$, e che è a sua volta Weyl-invariante.

[144] I due autori omettono di ribadire tutte le ipotesi nella formulazione del teorema.

[145] Wiener e Struik non la chiamano in questo modo. Non si tratta dell'invarianza conforme, bensì di una condizione *più generale*. Torneremo sull'argomento.

con una definizione identica a quella che si usa in RG, ma utilizzando la connessione di Weyl. Per variazioni conformi della metrica, $\tilde{R}$ trasforma in maniera analoga alla (2.75), e la sua espressione esplicita, in relazione agli elementi geometrici presentati nel lavoro, è la seguente[146]:

$$\tilde{R} = R + 4\frac{n-1}{n-2}\left(\nabla_\mu b^\mu - b_\mu b^\mu\right). \tag{2.79}$$

Dalla sua legge di trasformazione si può dedurre che, detto c_1 un qualsiasi scalare invariante per le trasformazioni (2.73), una qualunque combinazione lineare di $\tilde{R}$ e a_0 trasformerà nel seguente modo: $'\tilde{R} + c_1\,'a_0 = K\left(\tilde{R} + c_1\,a_0\right)$. Questa relazione, per Wiener e Struik, suggerisce il fatto che si possa determinare una particolare trasformazione $\bar{K}$ in modo tale che la combinazione $\tilde{R} + c_1\,a_0$ corrisponda a una funzione costante[147] C non nulla[148]. Fissando per comodità[149] $c_1 = 4\frac{n-1}{n-2}$, si ottiene un modo per fissare la gauge dell'invarianza conforme:

$$\tilde{R} + c_1 a_0 = C \quad \rightarrow \quad R + 4\frac{n-1}{n-2}\left(\nabla_\mu b^\mu - b_\mu b^\mu\right) + 4\left(\frac{n-1}{n-2}\right) a_0 = C. \tag{2.80}$$

La (2.80) viene chiamata da Wiener e Struik *condizione di normalizzazione*. A partire da questa condizione è possibile ricavare a_0 in funzione dello scalare di curvatura R e del vettore b_μ, e sostituire tale espressione nell'equazione d'onda generica, ottenendone una *particolare* che gli autori chiamano *equazione fondamentale normalizzata*. A questo punto Wiener e Struik sono quasi pronti per collegare la condizione che definisce lo spazio vuoto[150] in RG, $R_{\mu\nu} = 0$, con la costante di Planck. Prima di questo i due autori si occupano sia di altri aspetti tecnici, che noi non considereremo ora[151] perché non inficiano la comprensione del resto del lavoro, sia dell'interpretazione fisica del modello. Passiamo quindi alla parte del lavoro in cui Wiener e Struik si occupano delle applicazioni fisiche del proprio approccio, per capire il legame tra il vuoto e la costante di Planck.

Nella seconda parte dell'articolo, intitolata 'La teoria fisica' ([WS27a]; pag. 14), i due autori pongono le basi per l'interpretazione *fisica* del loro approccio: 'sembra che in natu-

---

[146] Wiener e Struik vogliono usare in maniera *esplicita* gli elementi che caratterizzano la RG e quindi, nell'espressione a destra del simbolo di uguale, le derivate covarianti sono tutte calcolate tramite gli usuali simboli di Christoffel. Per questa espressione i due autori fanno riferimento al testo di Eddington ([Edd23]; pag. 205).

[147] I due autori, in realtà, fanno riferimento giustamente a una funzione *qualsiasi* delle coordinate, ma dopo poche righe, e per il resto dell'articolo, considerano solo il caso particolare in cui questa funzione non dipenda dalle coordinate, dopo la particolare trasformazione scelta.

[148] I due autori non ne specificano il perché. A nostro avviso la questione è legata all'interpretazione fisica del modello, che analizzeremo a breve.

[149] Un numero adimensionale è ovviamente invariante per le (2.73).

[150] Oggi parleremmo di *stato di vuoto* della teoria

[151] Li riprenderemo alla fine del prossimo paragrafo.

ra il fenomeno più elementare sia quello che chiamiamo moto di un elettrone. Quello che chiamiamo classicamente elettrone è una piccola particella carica massiva [...] In questo articolo ci liberiamo completamente da questa concezione e seguiamo Schrödinger definendo il moto di un elettrone come un fenomeno ondulatorio determinato dall'equazione $F(\psi) = 0$ [...] dove la forma $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ha segnatura $+++-$ (oppure $-+++$). Quindi l'equazione $F(\psi) = 0$ è del tipo *normale iperbolico* (Hadamard)'[152] ([WS27a]; pagg. 14-15). A questo punto Wiener e Struik specificano il ruolo di ψ: 'Grazie alle condizioni (6.2) e (6.3)[153] le soluzioni dell'equazione fondamentale vengono determinate dai propri valori iniziali e dai valori iniziali delle loro derivate appartenenti a una ipersuperficie che non contenga elementi differenziali determinati dalle caratteristiche $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$. Questo significa che *se interpretiamo una particolare ipersuperficie di questo tipo come lo spazio delle configurazioni a un dato istante e definiamo tempo la restante variabile, il valore di ψ, una soluzione dell'equazione fondamentale, viene determinato dai suoi valori iniziali, spaziali e temporale, e dalle loro variazioni*'[154] ([WS27a]; pag. 15). Con questa premessa Wiener e Struik sottolineano il carattere *deterministico* dell'equazione d'onda, chiamandola poco dopo *legge della causalità* di Newton. I due autori non fanno alcun riferimento, nemmeno in altre parti del lavoro, all'interpretazione statistica della funzione d'onda, che con questo commento, a nostro avviso, sembrano rifiutare. L'interpretazione della ψ ci sembra quindi più simile all'idea moderna di *campo scalare*. Da questo punto di vista, però, benché i due autori insistano nell'interpretare la forma fondamentale come un'equazione di carattere quantistico[155], la (2.70) resterebbe l'equazione del moto di un campo classico.

Veniamo finalmente al legame tra le equazioni di Einstein nel vuoto e la costante di Planck. Come accennato poco sopra, la condizione di normalizzazione (2.80) permette di esplicitare la funzione a_0:

$$a_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)(C-R) + b_\mu b^\mu - \nabla_\mu b^\mu. \tag{2.81}$$

Wiener e Struik specificano che, se anche non avessero scelto $C =$ costante, avrebbero ottenuto solamente una teoria più complessa dal punto di vista formale, ma con lo stesso contenuto fisico. Inserendo la (2.81) nella (2.70) si ottiene quindi l'equazione fondamentale normalizzata:

$$F(\psi) = \Box\psi - 2b^\lambda\partial_\lambda\psi + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)(C-R) + b_\mu b^\mu - \nabla_\mu b^\mu\right]\psi = 0. \tag{2.82}$$

[152] Il fatto che la metrica abbia una particolare segnatura è dunque un'ulteriore assunzione.

[153] Gli autori fanno riferimento alla questione della segnatura e al fatto che il determinante Δ di $g^{\mu\nu}$ è diverso da zero.

[154] Il corsivo è nostro.

[155] Perché in fisica classica il moto di una particella non è rappresentato da un'equazione d'onda.

Per Wiener e Struik questa equazione deve essere una generalizzazione dell'equazione dell'elettrone libero[156] al caso curvo e in presenza di un campo elettromagnetico esterno, rappresentato dal potenziale b^μ. Questo fatto genera per gli autori il legame tra la gravità e la costante di Planck. A questo punto, se si suppone che nell'equazione *normalizzata* (2.82) si abbia $R = 0$, ovvero che lo spazio-tempo sia piatto, e si definiscono i potenziali elettromagnetici nel seguente modo $A_\mu = -\dfrac{ihc}{2\pi e} b_\mu$, allora $\nabla_\mu b^\mu$ diventa la *gauge di Lorenz*[157]. Imponendo tale scelta per la gauge, per riottenere l'equazione di Klein-Gordon (2.25) è necessario scegliere[158] $\frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) C = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$, dove m è la massa dell'elettrone. Ecco dunque il legame tra la definizione dello stato di vuoto in RG e la costante di Planck. Infatti, come osservano anche Wiener e Struik, se valgono le equazioni di Einstein nel vuoto, $R_{\mu\nu} = 0$, allora si avrà anche $R = 0$. L'idea che la *normalizzazione* di un'equazione d'onda crei un ponte tra la Meccanica Ondulatoria e la RG è l'idea *principale* del lavoro di Wiener e Struik. Nel confronto con l'approccio di Klein, i due autori sottolineano come l'idea sia innovativa: 'La nostra normalizzazione, d'altra parte, che è l'idea portante della nostra teoria, e che offre una connessione tra le equazioni di campo di Einstein e la teoria dei quanti, [...] non è mai stata introdotta nella teoria penta-dimensionale [...]' ([WS27a]; pag. 16). Prima di proseguire si rende necessario fare una serie di osservazioni sull'equazione fondamentale normalizzata (2.82).

La prima osservazione riguarda il fatto che in unità naturali la costante C ha le stesse dimensioni dello scalare di curvatura R, ovvero le dimensioni dell'inverso di una lunghezza al quadrato. Dal punto di vista di Wiener e Struik, l'unico modo per armonizzare la loro teoria con quelle esistenti è quello di utilizzare le grandezze h, c e m e come sappiamo bene oggi, con queste tre grandezze si ottiene la lunghezza d'onda Compton $l_C = \frac{\hbar}{mc}$ dell'elettrone, che è una sorta di *lunghezza caratteristica* del fenomeno in questione e il limite di applicazione dell'elettromagnetismo classico, e che compare proprio nella definizione di C: $\frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) C = -\frac{1}{l_C^2}$. Wiener e Struik però, non approfondiscono ulteriormente la questione delle dimensioni di C.

La seconda osservazione riguarda il *motivo* per cui i due autori avevano specificato

---

[156] Ovvero in assenza di altri campi.

[157] Non si tratta di un errore di stampa: il nome fa riferimento al fisico danese Ludvig Lorenz, da non confondere con l'olandese Hendrik A. Lorentz, che per primo ha utilizzato questa condizione nel 1867, ovvero più di 25 anni prima dell'olandese. La figura di Lorentz ha però condizionato la diffusione dell'elettrodinamica classica più del fisico danese e ha preso il sopravvento su quella del danese per varie ragioni. Per una trattazione approfondita di tali questioni si veda [JO01]. La tendenza degli ultimi anni è quella di rivalutare il ruolo di Lorenz attribuendogli correttamente la paternità della scelta della gauge [Ili].

[158] E identificare $\Psi_4 \equiv \psi$.

che la costante C dovesse essere diversa da zero. La scelta $C = 0$, infatti, porterebbe a un'equazione d'onda per una particella a massa nulla, mentre i due autori stanno cercando di scrivere un'equazione d'onda per l'elettrone. Per Wiener e Struik la costante C ha un ruolo speciale e le danno il nome di *costante di quantizzazione*, sottolineando che deve essere 'una costante data *a priori*' ([WS27a]; pag. 16), e poiché la scelta di C è legata alla condizione $R = 0$, chiamano quest'ultima condizione *condizione quantistica* .

A questo punto, però, ci si potrebbe chiedere come facciano i due autori a ottenere un'equazione invariante in forma per trasformazioni conformi della metrica che contenga al proprio interno un termine di massa, visto che solitamente, per scrivere una teoria di campo invariante per trasformazioni conformi della metrica, la massa del campo deve essere nulla. Il mistero si spiega riconsiderando la legge di trasformazione, proposta da Wiener e Struik per il termine a_0, ovvero l'equazione (2.75). Nell'equazione fondamentale normalizzata, dopo aver sostituito il valore di C si ha $a_0 = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2} + b_\mu b^\mu - \nabla_\mu b^\mu$. Quindi, *implicitamente* e senza discuterne eventuali conseguenze dal punto di vista fisico, i due autori suppongono che la massa *non* sia un invariante per trasformazioni conformi della metrica, ma che trasformi come una qualsiasi funzione scalare delle coordinate[159]. Con un tale stratagemma, anche l'equazione di un campo scalare massivo può essere invariante per trasformazioni conformi della metrica[160].

La proposta che le masse trasformino in questo modo verrà fatta successivamente, in maniera *esplicita*, da Schouten e Johannes Haantjes [SH36], i quali non citano il lavoro di Wiener e Struik. Schouten e Haantjes cercheranno un modo per ottenere una versione dell'equazione di Lorentz per l'elettrone in RG, che sia invariante per trasformazioni conformi della metrica: l'equazione di Lorentz, si riveda per esempio (2.14), contiene la massa della particella e per renderla invariante Schouten e Haantjes imporranno proprio la legge di trasformazione (2.75) per la massa. Questo tipo di massa verrà chiamata *massa conforme* e la plausibilità della sua introduzione dal punto di vista fisico viene discussa approfonditamente in [TFW62], dove però si indica erroneamente il lavoro di Schouten e Haantjes come il primo in cui viene introdotta tale legge di trasformazione per le masse.

Anche l'invarianza dell'equazione di Lorentz, usando la (2.75), discende dal risultato di Wiener e Struik, anche se questi non lo dimostrano. Vediamo brevemente come procederebbe la dimostrazione. Abbiamo già notato che introducendo il campo elettromagnetico

[159]Con questa legge di trasformazione per le masse, la massa nulla è l'unica massa invariante per trasformazioni conformi della metrica, mentre la combinazione $\frac{h}{c}$ è un invariante perché ha le dimensioni di una massa per una lunghezza.

[160]C'è anche un'altra differenza con l'usuale procedura utilizzata in teoria dei campi, di cui parleremo a breve.

tramite[161] $A_\mu = -\dfrac{ihc}{2\pi e} b_\mu$ la (2.82) diventa l'equazione[162] (2.25) se lo spazio-tempo è piatto. Questa volta Wiener e Struik considerano il caso più generale di uno spazio-tempo curvo ed è necessario imporre la condizione[163] $\nabla_\mu b^\mu = 0$, condizione che Wiener e Struik chiamano 'condizione supplementare di Maxwell', e che per noi è la gauge di Lorenz adattata a uno spazio-tempo curvo. A questo punto si ricordi, come abbiamo già detto, che l'equazione (2.25) si riduce, in approssimazione geometrica, all'equazione di Hamilton-Jacobi per l'elettrone in un campo elettromagnetico esterno $H = 0$, dove la Hamiltoniana è (2.24). Infine le equazioni di Hamilton

$$\frac{dp_\sigma}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \left(\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right)} \quad \text{e} \quad \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{dp_\sigma}{d\lambda}\right)}, \tag{2.83}$$

ottenute usando la Hamiltoniana (2.24), si riducono proprio all'equazione di Lorentz dell'elettrone[164]. Immaginiamo che anche Wiener e Struik fossero a conoscenza di questa procedura[165]. Dopo l'introduzione di A_μ e postulando le equazioni di Maxwell $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$, Wiener e Struik tornano sulla questione della struttura fine dell'atomo di idrogeno con le seguenti osservazioni[166]: 'l'insieme più semplice di valori A_μ che soddisfa le [equazioni di Maxwell] è quello che rappresenta il campo elettrico di Coulomb

$$A_i = 0\ , \quad A_0 = \frac{e}{r} \quad \text{dove} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2.84}$$

Questo dà i valori corretti per i livelli energetici principali dell'atomo di idrogeno, come ha mostrato lo stesso Schrödinger. Questo [insieme] dà anche un modo per calcolare i valori della struttura fine [...], ma non quelli corretti [...]. Come abbiamo detto nell'introduzione, Epstein ha recentemente sviluppato una teoria che porta al calcolo corretto dei livelli della struttura fine. Il suo insieme di valori A_μ è

$$A_x = -\frac{\mu y}{r^3}\ , \quad A_y = -\frac{\mu x}{r^3}\ , \quad A_z = 0\ , \quad A_0 = \frac{e}{r} \tag{2.85}$$

[161] I coefficienti dell'equazione differenziale di partenza possono essere in generale complessi. In questo caso, anche se gli autori non lo specificano, *devono* essere complessi, affinché i potenziali elettromagnetici siano reali.

[162] I due autori fanno riferimento, come nell'introduzione, al fatto che tale equazione era stata scritta da Fock e De Donder: ovviamente, nel caso di una metrica non banale anche in (2.25), l'operatore $\Box$ va inteso come la contrazione di due derivate *covarianti*.

[163] I due autori scrivono più precisamente: 'se si calibra la funzione d'onda ψ in modo che sia soddisfatta la condizione $\nabla_\mu b^\mu = 0$' ([WS27a]; pag. 17). Per comprendere questa affermazione sarebbe necessario considerare alcuni particolari tecnici che noi abbiamo deciso di non menzionare. Per un approfondimento si veda il paragrafo 4 di [WS27a] (pag. 12).

[164] Si rammenti che λ è un parametro affine che parametrizza la geodetica.

[165] Conoscevano i lavori sia di De Donder che di Klein.

[166] I numeri delle equazioni sono ovviamente differenti rispetto al lavoro originale.

che, come il precedente insieme soddisfa le equazioni di Maxwell eccetto che nell'origine'[167] ([WS27a]; pag. 19). Per Wiener e Struik dunque non è necessario trovare una nuova funzione d'onda per descrivere correttamente la struttura fine, come fece invece Dirac. Per i due autori basta scegliere opportunamente i potenziali elettromagnetici A_μ. La scelta (2.84) corrisponde, come dicono gli autori, al potenziale coulombiano di una carica puntiforme, che soddisfa le equazioni di Maxwell nella forma $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$, eccetto che nell'origine. Nell'equazione (2.85) le componenti A_x, A_y e A_z sono le componenti del potenziale di un dipolo magnetico $\vec{\mu}$ parallelo all'asse z che, come specificato nell'introduzione al lavoro da Wiener e Struik, corrisponde al potenziale elettromagnetico introdotto da Epstein per il calcolo della struttura fine (commentato da noi nel paragrafo 2.3.2).

Continuiamo a osservare l'equazione (2.82). Nell'equazione di Wiener e Struik sembra comparire *per la prima volta* il termine $\xi R\psi$, dove $\xi = \frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)$: oggi sappiamo che tale termine è *l'unico* possibile per accoppiare un campo scalare ψ con la metrica, in modo che la Lagrangiana del campo scalare sia invariante per trasformazioni conformi della metrica; si tratta del cosiddetto accoppiamento *non-minimale conforme* (non-minimal conformal coupling). Solitamente si attribuisce la paternità di tale termine a Penrose [WW64], per la versione in quattro dimensioni, e a Chernikov e Tagirov[168] per la versione $n-$dimensionale [CT68]. Inoltre, se per un momento dimentichiamo la legge di trasformazione della massa e poniamo $b_\mu = 0$ in (2.82), la forma fondamentale normalizzata si riduce all'equazione oggi nota come equazione di Penrose-Chernikov-Tagirov (o equazione PCT dall'acronimo dei tre fisici)[169]:

$$\Box\psi + \xi R\psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi. \tag{2.86}$$

Vale la pena spendere qualche parola sul collegamento tra le equazioni, perché ci sono delle *differenze*, che non appaiano immediatamente chiare. Cominciamo con il contestualizzare brevemente i due lavori: quello di Penrose e quello di Chernikov e Tagirov. In entrambi i casi si tratta di lavori svolti nell'ambito della teoria quantistica dei campi su spazi-tempo curvi[170]. Il lavoro di Penrose riguardava la possibilità di trattare il concetto di "infinito" attraverso l'ausilio delle trasformazioni conformi della metrica. Nel lavoro di

[167] Nell'equazione (2.85) abbiamo corretto un evidente errore di stampa.

[168] Tale termine verrà poi introdotto anche da Curtis G. Callan e altri [CGCJ70], ma per motivi legati alla *rinormalizzazione* dei campi in teoria quantistica dei campi, perché un termine con la struttura $\xi R\frac{\psi^2}{2}$ è l'unico termine locale inseribile nella densità di Lagrangiana che permette di accoppiare il campo scalare con la gravità tramite una costante di accoppiamento *adimensionale* ξ.

[169] L'equazione (2.86) corrisponde alle equazioni di Eulero-Lagrange che si ottengono variando la seguente Lagrangiana: $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{1}{2}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^2 + \xi R\psi^2$.

[170] Si ricordi che già parlando del lavoro di Klein abbiamo sottolineato come questa branca della teoria dei campi abbia portato contributi notevoli alla odierna idea di GQ.

Penrose, l'autore introduce i diagrammi oggi noti come *diagrammi di Penrose*, che descrivono un qualunque spazio-tempo reale attraverso delle coordinate, dette dall'autore *fittizie*, che si ottengono facendo delle trasformazioni conformi della metrica[171]. L'idea è motivata da ragioni di tipo *cosmologico*, perché gli autori si inserivano in un filone di ricerca in cui si discuteva intorno alle implicazioni dell'utilizzo di varie metriche per descrivere la geometria dell'Universo, tra cui le metriche di Friedmann-Robertson-Walker e la metrica degli spazi di de Sitter. Legato a questo si discuteva la dinamica dei campi quantistici su questi spazi particolari. Dai lavori dei tre fisici si evince inoltre che gli spazi di de Sitter in particolare riscuotessero un particolare successo. Notiamo che siamo *ben lontani* dalla scoperta del fenomeno di espansione accelerata [Pa99], per spiegare il quale si introduce oggi una costante cosmologica positiva[172]. L'interesse di Penrose derivava dal fatto che una delle metriche di Friedmann-Robertson-Walker è proprio la metrica di uno spazio di de Sitter e gli spazi di de Sitter sono spazi *conformemente piatti*, ovvero tramite una trasformazione conforme della metrica si può ottenere la metrica piatta di Minkowski. A questo uniamo il fatto che, a quanto ci risulta, Penrose dimostra effettivamente per la prima volta che in RG, imponendo opportune trasformazioni, tutte le equazioni dei campi liberi e senza massa possono essere espresse in una forma invariante per trasformazioni conformi della metrica. Il primo esempio portato da Penrose è proprio quello del campo scalare[173] in quattro dimensioni ($n = 4$) e l'equazione che presenta l'autore è la seguente[174]:

$$\Box\psi - \frac{1}{6}R\psi = 0. \tag{2.87}$$

Il punto di contatto con il lavoro di Wiener e Struik è rappresentato dal fatto che Penrose considera trasformazioni conformi della metrica e quindi il termine $\frac{1}{6}R\psi$ emerge in maniera *naturale* come nel lavoro di Wiener e Struik, perché tale termine deriva dalla legge con cui lo scalare di curvatura varia per trasformazioni conformi della metrica. Infatti, in RG, se si fa una trasformazione conforme della metrica (2.73), lo scalare di curvatura R assume la forma $'R = K\tilde{R}$, dove l'espressione di $\tilde{R}$ è proprio data dall'equazione (2.79), dove però il vettore b_μ è legato alla trasformazione conforme dalla relazione $b_\mu = \frac{n-2}{4}\partial_\mu log(K)$

[171] Il lavoro di Penrose tratta anche altre questioni di cui qui non ci occuperemo.

[172] Ottenendo in questo modo la geometria di uno spazio di de Sitter.

[173] Degli altri casi non parleremo. Accenniamo solo al fatto che a metà degli anni trenta anche Dirac si era posto il problema di formulare la propria equazione in modo che fosse invariante per trasformazioni conformi della metrica [Dir36].

[174] Continuiamo a indicare il campo scalare con ψ, e ricordiamo che le derivate sono sempre covarianti. Se si esegue il confronto l'equazione scritta da noi e il lavoro di Penrose, oppure con i molti lavori o libri sull'argomento, si ricordi che il termine $\Box\psi$ cambia segno, a seconda della segnatura e si ricordi che noi, ovviamente, abbiamo scritto tutte le formule secondo la nostra convenzione.

e non ha nulla a che vedere con il campo elettromagnetico. Una differenza *sostanziale* però fra il lavoro di Wiener e Struik e l'approccio di Penrose è che nel lavoro di Wiener e Struik le variazioni del "campo" ψ sono ininfluenti[175], perché l'operatore F trasforma secondo la legge $'F(\psi) = KF(\psi)$, mentre nell'approccio di Penrose, esattamente come avviene nell'approccio moderno in RG, per l'invarianza si chiede non solo la trasformazione della metrica, ma anche la trasformazione del campo scalare, che deve soddisfare a una *particolare* legge di trasformazione: $'\psi = K^{\frac{n-2}{2}}\psi$. Il meccanismo di invarianza dunque è differente e, mentre nell'approccio moderno il termine in questione emerge come *necessario*, nell'approccio di Wiener e Struik risulta un termine *accessorio.* Infatti, se nell'equazione (2.70) poniamo $a_0 = 0$, l'equazione sarà comunque invariante secondo le (2.73) e il termine $\frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) R$ non comparirà più. Osserviamo anche che se si pone[176] $a_0 = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$ e si introduce una derivata covariante definita utilizzando la connessione di Weyl $\tilde{\nabla}_\mu$, l'equazione fondamentale (2.70) assume la forma[177] $g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\partial_\nu\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0$, che è la generalizzazione dell'equazione di Klein-Gordon alla geometria di Weyl dove, come già detto, non compare il termine $\frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) R$. Si può addirittura tentare un approccio intermedio, come fatto più recentemente da Lochlain O'Raifeartaigh [O'R96], che introduce l'analogo del nostro vettore b_μ, chiamandolo W_μ, con una procedura detta 'Weyl gauging' ([O'R96]; sezione 8) e riproponendo, in una parte del lavoro, considerazioni simili a quelle fatte da Wiener e Struik[178], ma assumendo che il campo scalare trasformi come detto poco sopra.

Paradossalmente, dunque, se Wiener e Struik non avessero mantenuto esplicito, nel loro formalismo, il legame con la RG e non avessero cercato un modo per collegare la gravità con la MQ, il termine dell'accoppiamento conforme non sarebbe emerso. Per gli stessi motivi, la somiglianza con l'equazione PCT è solo nella forma, visto che anche per Chernikov e Tagirov il campo scalare deve trasformare per variazioni conformi e la massa è un invariante. Concludiamo accennando che l'interesse per le trasformazioni conformi verso la metà degli anni sessanta del novecento, come suggerito proprio da Chernikov e Tagirov, sarà dovuto anche a un tentativo di unificazione "antagonista" del Modello Standard della forza forte con la forza elettro-debole, in cui si cercherà di inglobare anche

[175] I dettagli tecnici di questo aspetto non sono rilevanti.

[176] Ovviamente assumendo che la massa del campo scalare sia la massa conforme e che il campo sia invariante.

[177] Per i particolari si veda [TFW62].

[178] Si ritrovano per esempio le leggi di trasformazioni della funzione scalare $R + b_\mu b^\mu - \nabla_\mu b^\mu$. In questo lavoro, poiché per O'Raifeartaigh la massa *non* è la massa conforme, l'autore pone necessariamente per la costante C il valore nullo. Il lavoro di Wiener e Struik non viene citato.

la gravità, proprio grazie agli spazi di de Sitter[179]. Ma ora torniamo a occuparci della collaborazione tra Wiener e Struik nel 1927.

2.3.4 Una nota sulla costante cosmologica e la costante di Planck

Nello stesso anno in cui compare l'articolo appena commentato, compaiono anche due brevi comunicazioni sulla rivista *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* [WS27c] [WS27d]. L'argomento delle due brevi comunicazioni è praticamente lo stesso del lavoro appena commentato. Poiché in [WS27c] i due autori auspicano di poter ampliare il proprio lavoro, crediamo che le due comunicazioni siano precedenti al lavoro sopra descritto. Decidiamo comunque di illustrarle ora, solo perché il lavoro comparso sulla rivista del MIT ha una struttura più organica. Si possono anche notare delle piccole differenze, che riportiamo per completezza, e un commento a nostro avviso interessante. In [WS27c] e [WS27d] Wiener e Struik si limitano al caso quadridimensionale, le relazioni che scrivono si possono dunque ottenere da quelle del paragrafo precedente come caso particolare, ponendo $n = 4$. Un'altra differenza si trova nella definizione del campo elettromagnetico: in [WS27c] Wiener e Struik lo definiscono come $A_\mu = \frac{\hbar}{i} b_\mu$ invece che $A_\mu = \left(\frac{c}{e}\right) \frac{\hbar}{i} b_\mu$. *Contestualmente* cambia anche la definizione della costante C, perché i due autori pongono $\frac{1}{6}C = -\left(\frac{c^2}{e^2}\right) \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$ invece di $\frac{1}{6}C = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$: in questo modo si ottiene comunque l'equazione di Klein-Gordon corretta[180].

In una nota [WS27d] Wiener e Struik discutono brevemente dell'eventuale introduzione della costante cosmologica Λ. I due autori premettono che l'introduzione di una costante cosmologica non altererebbe sostanzialmente i ragionamenti fatti, e questo a nostro avviso significa che necessariamente per trasformazioni conformi della metrica la "costante" cosmologica deve trasformare come la funzione scalare a_0: $'\Lambda = K\Lambda$. Poi osservano che la costante cosmologica 'suggerisce una relazione tra la costante di Planck e le caratteristiche del campo gravitazionale all'infinito' ([WS27d]; nota 3; pag. 184) Gli autori non specificano a quale "infinito" facciano riferimento, ma a nostro avviso intendono l'infinito *temporale*. All'infinito temporale, infatti, possiamo considerare le equazioni le equazioni di Einstein n-dimensionali in assenza di materia ($T^{\mu\nu} = 0$) e in assenza di radiazione elettromagnetica ($b_\mu = 0$) che sono, introducendo il termine cosmologico, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = 0$ e prendendone la traccia si avrà $R = \frac{2n}{n-2}\Lambda$, ottenendo un valore di R è diverso da zero. Inserendo questa relazione in (2.82), per riottenere l'equazione di Klein-Gordon, invece di porre $\frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) C = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$, si dovrà ora imporre $\frac{1}{4}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\left(C - \frac{2n}{n-2}\Lambda\right) = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$. Si ottiene così un legame tra la costante di Planck e le caratteristiche del campo gravitazio-

[179] Di questo ci occuperemo in un lavoro futuro.

[180] Noi continueremo a mantenere la notazione del precedente paragrafo.

nale all'infinito temporale, come affermato dagli autori, e un collegamento tra la costante cosmologica e la costante di Planck, come affermato da noi nel titolo del paragrafo.

L'anno seguente, dopo aver preso le distanze dall'approccio di Klein, Wiener e Struik tornano sui loro passi, cercando di integrare il loro punto di vista con quello del fisico svedese [WS28]. In questo lavoro cercano di coinvolgere nel loro approccio anche l'interpretazione *statistica* della funzione d'onda, che come detto in precedenza non veniva trattata nei precedenti lavori, e cercano di convincerci che è proprio grazie all'introduzione della quinta dimensione che questa integrazione ha luogo. Non approfondiremo i particolari tecnici, perché a nostro avviso non ci sembrano degni di nota. Osserviamo solamente che per la prima volta Wiener e Struik propongono di scrivere il "campo scalare" penta-dimensionale nel seguente modo:

$$\Psi = \sum_{1}^{N} \psi_n(x^0, \ldots, x^3) e^{i\lambda_n x^5}, \tag{2.88}$$

ammettendo che con opportune condizioni di convergenza la somma può essere fatta su un *continuo* infinito di frequenze $\lambda_n/2\pi$, esattamente come viene fatto oggi nell'approccio noto come *riduzione dimensionale*[181]

2.3.5 London: riflessioni sul concetto di misura

In questo stesso anno anche Fritz London [Lon27] tenta un approccio penta-dimensionale. A differenza di altri autori, però, London vorrebbe interpretare da un punto di vista quanto-meccanico la teoria della gravità di Weyl. London è interessato alla scala di gauge[182]. A noi il tentativo di London interessa perché possiamo leggere il suo approccio come un tentativo di conciliare il *concetto di misura* dello spazio-tempo introdotto da Weyl, con la difficoltà di avere dei *regoli di riferimento* per definire il concetto di geometria a livello atomico[183]. London infatti vede un'incompatibilità tra l'approccio ondulatorio della teoria di Schrödinger e quello metrico della RG: 'Se prendiamo seriamente l'ipotesi radicale del continuo, e quindi la dissoluzione del concetto di elettrone discreto in una variabile di campo che dipende in maniera continua dallo spazio-tempo, così come suggerito dalla

[181]Si riveda la nota ([44]) dove viene mostrato come venga introdotto uno sviluppo di Fourier simile alla (2.88).

[182]Si riveda la relazione (2.61)

[183]Il lavoro di London è interessante anche per altri aspetti. Uno di questi è che il suo lavoro è stato studiato nell'ambito della storia delle teorie di gauge, come più sotto indicato, ma anche per altri motivi. Un altro aspetto interessante è che, a detta dello stesso London, il lavoro contiene in una nota *per la prima volta* una generalizzazione *relativistica* del teorema del viriale ([Lon27]; si legga la nota a pag. 383). Tutti aspetti che qui non tratteremo.

teoria di de Broglie e più consistentemente dalla teoria di Schrödinger che verrà discussa più sotto, allora bisogna affrontare la straordinaria e fondamentale difficoltà di dare un significato agli enunciati metrici all'interno del continuo delle onde. In un mezzo che oscilla e fluttua, infinitamente esteso, che prende il posto dell'elettrone discreto, non ci sono discontinuità non-variabili, né corpi rigidi che, come una scala riproducibile, ci permettano la determinazione di una misura' ([Lon27]; pagg. 377-378). London ha in mente il fatto che per definire in maniera *operativa* una misura in fisica è necessario avere una sorta di *metro di riferimento*, e in un mondo permeato da quantità continue dal carattere ondulatorio non riesce a vedere tale riferimento. Infatti continua: 'Intendo considerare il punto di vista in cui bisogna dare una misura pratica per parlare di geometria nella regione atomica; d'altra parte non si può dire che tale prescrizione esista. Ma se si vuole assegnare un significato preciso alle regole di misura mi sembra che il minimo che si possa richiedere sono i riferimenti di un qualche oggetto reale (una specie di "prototipo"), che sia già legato alle regole di misura: il diametro di un elettrone o una distanza, *etc.*, nonostante tale riferimento possa avere un rapporto problematico con un'effettiva misura' ([Lon27]; pag. 378) Per London dunque il vecchio modello di elettrone come una sfera rigida era una sicurezza, la sicurezza che esistesse una sorta di scala di riferimento a livello atomico. 'Tale oggetto reale non è presente in un continuo di onde. [...] nel continuo non c'è alcun attributo che possa essere fissato per essere identificato con una misura riproducibile' ([Lon27]; pag. 388). Con la teoria ondulatoria di Schrödinger dunque, per London, diventa *necessario* trovare un'altra grandezza di riferimento: è in quest'ottica che l'autore si confronta con la teoria di Weyl in cui compare una sorta di lunghezza di riferimento fondamentale, la scala di gauge. Il *trait d'union* tra la geometria e la meccanica quantistica si concretizza con l'identificazione della funzione d'onda ψ proprio con la scala di gauge. London tenta dunque di interpretare la teoria di Weyl come una *teoria della metrica a livello atomico.* L'autore incontra però delle difficoltà che non riuscirà a superare[184] e che lo spingono a concludere che comunque 'la teoria di Weyl deve essere modificata in accordo con le correzioni quantistiche alle leggi classiche' ([Lon27]; pag. 386). L'origine di tali difficoltà e gli sviluppi ulteriori del concetto di gauge sono ampiamente trattati da altri autori. Si veda per esempio [O'R97].

[184]Non ultimo il fatto che alla scala di gauge è associato, nella teoria di Weyl, un numero reale ($\mathbb{R}$), mentre ψ è un'ampiezza complessa ($\mathbb{C}$).

2.4 1927-1930: I tentativi di Fisher e Flint

A partire dal 1927, Henry T. Flint e J. W. Fisher avviano una serie di riflessioni sul problema dell'unificazione. Alcuni lavori sono firmati da entrambi mentre in altri compare solo il nome di uno dei due. Ciononostante i due fisici saranno sempre in contatto[185] in questo periodo. I due autori intraprenderanno molte strade che a volte saranno collegate tra di esse altre volte saranno estranee tra loro. Cercheremo di analizzare le varie proposte dei due autori senza entrare *troppo* nei dettagli tecnici, perché spesso non si discostano molto dai tentativi visti finora e inoltre, da quanto ne sappiamo, le loro proposte non hanno prodotto conseguenze di rilievo.

Nel primo lavoro che consideriamo, [FF27], Fisher e Flint tentano un approccio al problema dell'armonizzazione tra la gravità, l'elettromagnetismo e la meccanica quantistica, partendo dalla RG. Gli autori osservano che '[...] se si suppone che l'energia e il momento associati ai fenomeni elettromagnetici influenzino la geometria dello spazio' ([FF27]; pag. 210) allora non è sufficiente introdurre solo la metrica per la descrizione di tali fenomeni. Per questo motivo i due fisici introducono un quadrivettore[186] J^μ, 'associato agli elementi di volume tridimensionale' ([FF27]; pag. 210), e che altro non è che la moderna densità di corrente, che deve soddisfare alla relazione[187] $\nabla_\mu J^\mu = 0$, ovvero l'equazione di continuità. Da questa relazione introducono il tensore antisimmetrico $F^{\mu\nu}$ che soddisfa alla relazione $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ e il suo *duale* $G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, anch'egli antisimmetrico, che soddisfa $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$. In questo modo Fisher e Flint identificano le ultime due equazioni con le equazioni di Maxwell. Ma gli autori vedono questo sistema di equazioni come *incompleto* e decidono di aggiungere una quarta equazione per completarlo nel seguente modo:

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \qquad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{2.89}$$

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \qquad \nabla_\mu r^\mu = \psi, \tag{2.90}$$

[185] Per esempio, nei ringraziamenti di uno degli articoli di Fisher, viene ringraziato esplicitamente Flint per la discussione dei risultati.

[186] I due autori usano la notazione s^μ. Noi utilizziamo la lettera J^μ, che è la più usata nei testi moderni, visto il ruolo che assumerà tale quadrivettore.

[187] Per gli operatori di derivazione sullo spazio-tempo quadridimensionale curvo, Fisher e Flint usano una notazione simile a quello dello spazio tridimensionale. Dato uno scalare ψ, per indicare $\partial^\mu\psi$ scrivono $(grad.\,\psi)^\mu$, dove *grad.* è l'abbreviazione di *gradiente*; dato un quadrivettore s^μ, per indicare $\nabla_\mu s^\mu$ scrivono $div.\,\mathbf{s}$, dove *div.* è l'abbreviazione di *divergenza*; dato un tensore $F^{\mu\nu}$, per indicare $\nabla_\mu F^{\mu\nu}$ scrivono $(Lor.\,\mathbf{F})^\nu$, dove *Lor.* è l'abbreviazione di *Lorentziano*. Traducendo il testo originale abbiamo modificato la notazione usata da Fisher e Flint per gli operatori differenziali per una più facile lettura.

ipotizzando una sorta di *simmetria* tra la prima riga e la seconda, dove r^μ è un nuovo quadrivettore[188] e ψ uno scalare. A questo punto, usando l'Ansatz $J^\mu + r^\mu = k\partial^\mu\psi$, dove k è una costante qualsiasi, la somma della prima delle (2.89) e la seconda delle (2.90) dà un'equazione d'onda la cui forma è quella dell'equazione di Klein-Gordon:

$$k\,\nabla_\mu \partial^\mu \psi = \psi. \tag{2.91}$$

A causa di questa analogia gli autori speculano sulla possibilità di collegare così la costante incognita k con la costante di Planck, ma si riservano di analizzare la questione più in dettaglio in comunicazioni successive. Infatti, negli anni successivi, gli autori cercano di mettere a fuoco il legame tra la metrica dello spazio-tempo e l'equazione di K-G. Nel fare questo, però, introducono anche delle varianti al proprio approccio iniziale, e queste varianti possono venire raggruppate in due diversi filoni che abbiamo chiamato approcci quadri-dimensionali e penta-dimensionali, per la differente dimensionalità attribuita allo spazio-tempo.

2.4.1 Approcci quadri-dimensionali

Il primo filone, quello in cui lo spazio-tempo è quadridimensionale, inizia con un lavoro del 1928 [FF28], che Flint scrive ancora in collaborazione con Fisher. In questo articolo gli autori cercano di sviluppare l'idea di ricavare un'equazione d'onda partendo da considerazioni *metriche*: con questo obiettivo il punto di partenza più naturale è quello della geometria di Weyl. Flint e Fisher cercano di identificare lo scalare ψ della (2.90) con la funzione Ω che compare nelle equazioni (2.62) e (2.63). La funzione Ω non ha restrizioni di sorta nella teoria di Weyl, mentre per Flint e Fisher Ω deve soddisfare a un'equazione simile alla (2.91), ma scritta utilizzando la connessione di Weyl $\tilde{\nabla}_\mu$: $g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\partial_\nu\Omega = \tilde{k}\Omega$, dove $\tilde{k}$ è una costante qualsiasi. Quest'ultima equazione, come detto alla fine del paragrafo 2.3.3, è la (2.70) e anche Fisher e Flint dimostrano, in maniera simile a quanto fanno Wiener e Struik, che essa è collegata all'equazione (2.25). A differenza di Wiener e Struik però, Flint e Fisher non cercano di interpretare il quadrivettore[189] b^μ come il solo campo elettromagnetico A^μ, ma in maniera inusuale, criticata anche da uno dei referenti per la pubblicazione ([FF28]; pag. 629), pongono, per l'elettrone, $b^\mu = \frac{i}{\hbar}\left(p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu\right)$. L'espressione è inusuale perché compare il quadri-momento p^μ, ma Flint cercherà di difendere questa scelta, nel lavoro successivo. Flint e Fisher difendono l'uso della metrica di Weyl e dell'identificazione della funzione d'onda con la *lunghezza* di gauge asserendo che con questo approccio 'l'equazione d'onda assume il ruolo di una legge *metrica*, così come la

[188] La *lettera* in questo caso è quella del lavoro originale.
[189] Fisher e Flint lavorano in quattro dimensioni.

legge della gravitazione ha il ruolo di una legge geometrica'[190] ([FF28]; pag. 625). Alla fine del lavoro i due autori fanno presente che la loro interpretazione ha comunque dei limiti, che qui non è necessario menzionare, e si riservano di approfondire la questione in futuro.

Nel lavoro seguente [Fli28a], Flint torna da solo sulla questione dell'interpretazione del quadrivettore b^μ, convinto che il suo approccio permetta di superare i vecchi problemi della teoria di Weyl. Vediamone brevemente il perché e quali osservazioni emergono. In particolare da questo lavoro di Flint emerge l'idea del *quanto temporale* che, come detto all'inizio del paragrafo 2.3, era stato introdotto l'anno precedente[191]. Come vedremo la proposta di Flint mette assieme sia il concetto di traiettoria sia le vecchie condizioni di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld, e risulta quindi un po' anacronistica.

Come detto precedentemente una delle critiche alla teoria di Weyl era che non vi fossero evidenze sperimentali per l'equazione (2.61). Dopo aver ripreso i risultati del precedente lavoro redatto con Fisher, Flint sottolinea l'importanza dell'identificazione del quadrivettore della metrica di Weyl b^μ con quello che oggi chiameremmo *momento generalizzato*[192] $\Pi_\mu = p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu$, che si usa in meccanica quando si descrive il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico: $b_\mu = \frac{i}{\hbar}\Pi_\mu$. Usando la sua nuova identificazione Flint riscrive la legge di trasformazione delle lunghezze (2.61) nel seguente modo:

$$l_{P'} = l_P \, exp\left(\int b_\mu dx^\mu\right) = exp\left[\frac{i}{\hbar}\int\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right)dx^\mu\right] \ , \qquad (2.92)$$

e imponendo che questa espressione si riduca a $l_{P'} = l_P$ in assenza di campo elettromagnetico, Flint ottiene, dalla (2.92), delle condizioni di quantizzazioni che *assomigliano* a quelle di Wilson-Sommerfeld:

$$\int p_\mu dx^\mu = nh \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (2.93)$$

dove, a differenza delle (1.1) del precedente capitolo, è sufficiente che n sia intero[193], l'integrazione è intesa su una linea non necessariamente chiusa e l'integrale è una somma di quattro termini. A nostro avviso Flint è convinto di aver ottenuto un modo per

[190] Il corsivo è nostro.

[191] Alcune delle considerazioni che faremo su questo lavoro sono state accennate anche da Kragh [KC94] proprio nel contesto specifico della storia, in questi anni, del concetto di quanto temporale.

[192] Flint lo chiama semplicemente *momento* e lo giustifica nel seguente modo: 'Questo uso del termine momento ha una ragione, Π_μ all'interno di un campo gravitazionale ed elettromagnetico ha lo stesso significato di p_μ per la dinamica generalizzata [Wil23]' ([Fli28a]; pag. 635). Il termine dinamica generalizzata fa riferimento al lavoro citato di Wilson dove quest'ultimo, per la prima volta, modifica le vecchie relazioni di quantizzazione, introducendo, al posto del momento p_μ, la combinazione $p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu$, che gli permette di descrivere in termini quantistici l'effetto Zeeman.

[193] Infatti se $n \in \mathbb{Z}$ si ha $e^{i2\pi n} = 1$.

inglobare la meccanica quantistica nella teoria di Weyl, e di aver contemporaneamente trovato una giustificazione "empirica" della (2.61). Per mostrare poi l'interpretazione *metrica* della (2.92) considera il moto di un elettrone nel caso in cui non vi sia un campo elettromagnetico. Unendo le sue condizioni di quantizzazione (2.93) e la definizione di momento $p_\mu = mcg_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}$, dove al solito m è la massa dell'elettrone e λ il tempo proprio geometrizzato, ottiene[194]:

$$nh = \int p_\mu dx^\mu = mc \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda = -mc \int d\lambda\,, \tag{2.94}$$

ottenendo infine $\lambda = n\frac{h}{mc}$, che l'autore commenta nel seguente modo: 'il cammino di un elettrone è formato da multipli interi dell'unità fondamentale $\dfrac{h}{mc}$. Il risultato segue anche da altre considerazioni [FR28], e da entrambi i punti di vista la linea d'Universo dell'elettrone è da considerarsi suddivisa in queste unità fondamentali, nonostante esse non siano osservabili né direttamente né indirettamente negli esperimenti. Poiché lunghezza e tempo sono fondamentalmente la stessa cosa, ne segue che anche il tempo è misurabile attraverso un'unità fondamentale indivisibile'[195] ([Fli28a]; pag. 636). La cosa che più preme a Flint, in questa derivazione, è stabilire un legame con la Meccanica Ondulatoria per colmare quel vuoto sulla definizione del concetto operativo di misura a cui aveva accennato anche London, e di cui abbiamo parlato nel paragrafo 2.3.5. Infatti Flint conclude con le seguenti osservazioni: 'Questo fatto[196] impone un limite superiore alle frequenze osservabili, tale massimo è [...] mc^2/h, che corrisponde alla frequenza dei "fenomeni periodici" di de Broglie'[197] ([Fli28a]; pagg. 636-637). A questo punto Flint ribadisce che il fatto che la linea d'Universo vada pensata come un multiplo della grandezza elementare da lui introdotta, il quanto di lunghezza, risulta importante perché reintroduce nel mondo atomico una lunghezza di riferimento e conclude: 'assumendo che il sistema metrico descritto abbia una qualche applicazione in fisica, dobbiamo concludere che l'equazione d'onda ci fornisce un fattore di scala e questo significa che analizzando i fenomeni atomici abbiamo scoperto

[194]È utile ricordare che, a causa della nostra segnatura $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = -1$. Flint usa una segnatura differente dalla nostra per la metrica e pone $c = 1$. Nella (2.94) e nei commenti seguenti abbiamo adattato le formule alla nostra segnatura e reintrodotto la velocità della luce.

[195]Il calcolo appena presentato e questo commento sono entrambe accennate da Kragh nel lavoro citato poco sopra che riguarda lo sviluppo storico, in questi anni, del concetto di *quanto del tempo*. Le considerazioni che seguiranno, invece, non vengono commentate da Kragh. Nello stesso volume in cui viene pubblicato il lavoro di Flint [Fli28a], troviamo un articolo scritto sempre da Flint in collaborazione con Richardson, [FR28], che si inserisce in questo filone, che non approfondiremo, perché in questo lavoro Flint si occupa del concetto di *quanto temporale* e delle relazioni di indeterminazione solamente dal punto di vista della Relatività Ristretta.

[196]Ovvero la quantizzazione del tempo appena proposta.

[197]Ricordiamo che il tempo proprio τ è definito da $\lambda = c\tau$.

una sorta di fattore di scala naturale. [...] L'equazione d'onda quindi rappresenta una "legge per la metrica", e deve essere confrontata con la legge della gravitazione, la quale può essere descritta da una legge geometrica' ([Fli28a]; pag. 637). Per Flint, dunque, è importante l'analogia che lui stabilisce tra gravità e meccanica quantistica, l'una come teoria *geometrica*, l'altra come teoria *metrica*.

Nel terzo articolo di questo filone [Fli28b], scritto ancora da solo, Flint abbandona la geometria di Weyl e si muove in tutt'altra direzione. L'autore sceglie infatti come punto di partenza la modifica alla RG proposta da Einstein [Ein28a] nello stesso anno[198]. Flint comincia chiedendosi quale forma assumesse l'equazione d'onda per l'elettrone, che aveva precedentemente considerato, nel linguaggio della nuova metrica introdotta da Einstein. Lo scopo di Flint è sempre quello di occuparsi dell'unificazione tra gravità e teoria dei quanti. Facendo riferimento all'articolo di Einstein, Flint osserva che un caso particolare affrontato da Einstein è quello in cui la nuova metrica viene generata da uno scalare[199], e cerca di interpretare questo scalare proprio come la funzione d'onda che dà luogo all'equazione relativistica di Klein-Gordon. Il tentativo di Flint dunque si inserisce nella corrente di pensiero proposta da Cartan [Goe04] che cerca di *geometrizzare* tutte le teorie fisiche, per ottenere più facilmente una teoria unificata di tutte le forze. A nostro avviso il punto di vista di Flint può essere interpretato come un tentativo di studiare effetti quantistici sulla metrica[200], e quindi sulla gravitazione: l'approccio è infatti quello di cercare di capire quale metrica sia *generata* dai campi di materia[201] e non quello di capire come si comportano i campi quantistici in spazi-tempo curvi, come verrà più tardi correttamente interpretato il formalismo.

2.4.2 Approcci penta-dimensionali

Come detto i filoni di ricerca di Fisher e Flint in questi anni si differenziano soprattutto per la dimensionalità dello spazio-tempo. Nel secondo filone di ricerca, quello penta-dimensionale, Flint abbraccia l'idea che lo spazio-tempo sia composto da cinque dimensioni. Il primo dei lavori che coinvolgono le cinque dimensioni, [Fli29], ha delle connessioni con l'articolo scritto nel 1927. Nel 1929 infatti, Flint riprende l'idea di utilizzare il vettore

[198] Einstein cerca di introdurre una nuova geometria a partire da *sedici* potenziali, raggruppati in quattro quadrivettori ortogonali, perché era alla ricerca di una teoria che unificasse gravità ed elettromagnetismo. La geometria che ne risulta è una geometria di tipo riemanniano con torsione [Pai91].

[199] Oggi diremmo un *campo scalare*.

[200] Anche in questo articolo Flint sottolinea più volte che il suo scopo è che 'l'equazione d'onda trovi un'interpretazione metrica' ([Fli28b]; pag. 678).

[201] Non riportiamo i dettagli tecnici dell'approccio di Flint perché si tratta di un approccio più inusuale rispetto a quello di Rosenfeld, visto nel paragrafo 2.2.1.

r^μ che compare nella (2.90) per introdurre la funzione d'onda e affianca quest'idea all'estensione delle dimensioni dello spazio tempo in cui rappresentare la fisica: da quattro a cinque. In alcuni punti, i risultati ottenuti da Flint sono molto simili a quelli ottenuti da Klein, che peraltro non cita mai. Diversamente da Klein, Flint è a conoscenza dell'equazione di Dirac e non può ignorare che i risultati ottenuti da quest'ultimo sono più in sintonia con i dati sperimentali. Flint continua a investigare l'equazione di K-G, ma è conscio che non rappresenta l'usuale elettrone, bensì quello che chiama 'elettrone non rotante' ([Fli29]; pag. 144). Sempre diversamente da Klein, Flint si rende anche conto del fatto che le equazioni che ottiene per i campi di materia descrivono il comportamento di questi ultimi come 'attori su una scena alla quale non prendono parte loro stessi' ([Fli29]; pag. 144). Flint si rende dunque conto, non sappiamo se per la prima volta in questo periodo, che scrivere un'equazione d'onda in uno spazio-tempo curvo non descrive affatto gli effetti quantistici dello spazio-tempo e che si tratta quindi di un approccio 'insoddisfacente dal punto di vista dell'unità della fisica' ([Fli29]; pag. 144).

Anche Fisher [Fis29] cerca di utilizzare un approccio penta-dimensionale, nel quale, come detto all'inizio del paragrafo, Flint compare esplicitamente nei ringraziamenti di Fisher. Prima di proseguire, facciamo una breve digressione sui risultati del lavoro di Fisher pubblicato nel 1929. L'approccio di quest'ultimo è basato su una modifica della teoria elaborata da Klein in [Kle27c]. Ricordiamo che nei primi lavori, per cercare di armonizzare la RG con la teoria dei quanti, Klein scrive un'equazione d'onda per l'elettrone in uno spazio-tempo curvo a cinque dimensioni usando l'analogia con la luce in cui non compare la massa dell'elettrone[202]. L'idea era quella di descrivere il moto dell'elettrone attraverso *geodetiche nulle*. Dopo l'intervento di de Broglie, però, Klein ha sempre utilizzato l'equazione d'onda in cui compare la massa. Fisher *senza rendersene conto* opera lo stesso processo di Klein al *contrario*[203]. Fisher scrive una *propria* metrica penta-dimensionale $\tilde{a}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, per cercare di esprimere l'equazione d'onda per l'elettrone *senza* il termine di massa, mosso però da motivazioni di tipo *estetico*, invece che dall'analogia con la luce: '[...] ci dovremmo aspettare in maniera naturale che tale equazione fondamentale[204] abbia una forma matematica *particolarmente semplice*[205], e la forma più naturale che ci viene suggerita è

$$\tilde{a}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\nabla_\mu\partial_\nu\psi = 0\,.\text{'}\,, \tag{2.95}$$

[202]Si riveda l'equazione (2.8).

[203]Siamo convinti che Fisher non se ne renda conto, perché non cita i *primi* lavori di Klein, nonostante l'approccio sia *quasi identico* a quello operato da Klein in [Kle26a].

[204]Fisher si riferisce all'equazione d'onda per l'elettrone che sta cercando di generalizzare.

[205]Il corsivo è nostro.

([Fis29]; pag. 490) dove, a differenza dell'equazione di Klein (2.8), i simboli di Christoffel delle derivate covarianti sono calcolati rispetto a questa nuova metrica. Non è necessario scrivere la metrica esplicitamente per confrontarla con quelle di Klein[206], riportiamo solamente alcune conseguenze della scelta di Fisher.

Una prima conseguenza è che 'le componenti del tensore fondamentale non sono funzione solo delle coordinate, ma dipendono anche dalla natura della particella usata per esplorare il campo[207]. *Questa idea è diversa da quella delle teorie di campo classiche, in cui il campo in un determinato punto non viene influenzato dalla carica di prova*' ([Fis29]; pag. 490). Il corsivo è nostro: Fisher sembra essere convinto che la modifica della metrica, dettata dall'esigenza di scrivere in un certo modo l'equazione d'onda, si rifletta in una modifica *non classica* della metrica e quindi del campo gravitazionale. Fisher non parla esplicitamente di effetti quantistici, ma il commento seguente ci fa pensare che abbia in mente qualcosa del genere. Infatti l'autore continua: 'D'altra parte, poiché tutte le nostre verifiche sperimentali sui principi della geometria[208] coinvolgono l'utilizzo di particelle (elettroni, protoni o quanti), questo fatto[209] può difficilmente essere letto come un'obiezione; infatti questa è la cosa più naturale da assumere, perché l'interazione mutua è l'unica cosa che realmente ci riguarda e dipende ovviamente sia dalla natura delle cariche di prova che dalle particelle già presenti' ([Fis29]; pag. 490) Quindi Fisher sembra convinto, come accade effettivamente in meccanica quantistica, che l'osservazione perturbi in qualche modo lo stato del sistema osservato.

Un'altra conseguenza dell'utilizzo della metrica $\tilde{a}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ è che il momento coniugato lungo la quinta dimensione, p_5, risulta essere diverso da zero anche se la carica di prova è elettricamente neutra. Se la carica è neutra, infatti, p_5 risulta proporzionale alla *massa* della carica di prova[210] e non alla carica elettrica, come nel caso di Klein[211]. Per Fisher questa caratteristica è interessante per il seguente motivo. L'autore considera un oggetto neutro particolare, l'atomo di idrogeno[212]: se l'atomo ha un momento nullo lungo la direzione x^5 come nella teoria di Klein, allora possiamo pensare che le due cariche abbiano

[206] La forma della metrica $\tilde{a}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ è molto simile all'espressione data da Klein per il tensore $a_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ (2.29): le osservazioni che seguono sono comunque comprensibili osservando la forma di (2.29).

[207] Nella metrica di Fisher, come in (2.29), compaiono sia la massa che la carica elettrica della particella e, come osservato, Fisher la usa per calcolare i coefficienti della connessione.

[208] Fisher sottintende la geometria dello spazio-tempo.

[209] Il fatto che le geodetiche dipendano dalla carica di prova.

[210] La relazione è $p_5 = imc\sqrt{\tilde{a}_{55}}$.

[211] Si riveda per esempio (2.20).

[212] Fisher considera, forse in maniera un po' anacronistica, il modello di Bohr: due cariche, l'elettrone e il protone, in cui l'una gira attorno all'altra.

un momento opposto lungo la quinta dimensione, e dal punto di vista penta-dimensionale le due cariche sicuramente si allontaneranno: 'Nella teoria di Klein [...] l'atomo non rimarrà confinato entro limiti finiti dal punto di vista del mondo penta-dimensionale ' ([Fis29]; pag. 492). Se invece il momento totale dell'atomo è diverso da zero, secondo Fisher, questo non accade: 'Con il presente schema si evita questa conseguenza' ([Fis29]; pag. 492). Ovviamente bisogna fare un'ipotesi aggiuntiva, ovvero *supporre* che i momenti p_5 di elettrone e protone siano paralleli.

L'ultima conseguenza che presentiamo rende inusuale lo schema di Fisher. Lo scalare di curvatura penta-dimensionale dell'autore può essere scritto nel seguente modo:

$$R^{(5)} = R + \left(\frac{e^2}{m^2c^4}\right)\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2.96}$$

Fisher stesso nota l'ambiguità di questo risultato[213]: 'Non possiamo più, come fanno Rosenfeld e Klein, identificare [...] $\frac{e^2}{m^2c^4}$ con $\frac{8\pi G}{c^4}$ [...], perché $\frac{e^2}{m^2c^4}$ non è una costante universale per tutte le particelle'[214] ([Fis29]; pag. 493). Quindi l'azione di Fisher risulta differente da quella usuale e mostra come sia anomalo utilizzare metriche come $a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$. Al contrario questo fatto non disturba troppo l'autore che, anzi, lo giustifica osservando che 'non sembra desiderabile aspettarsi che la curvatura penta-dimensionale introduca il valore di G' ([Fis29]; pag. 493)

Nel 1930 esce un altro contributo nato dalla collaborazione tra Fisher e Flint [FF30], dove gli autori dichiarano esplicitamente di voler portare avanti l'approccio di Fisher appena descritto. I due fisici si inseriscono nella linea di ricerca di James M. Whittaker e altri autori, i quali avevano mostrato come fosse possibile ottenere l'equazione di Dirac utilizzando un'analogia con le equazioni di Maxwell[215]. Fisher e Flint, dopo aver notato che questi precedenti contributi presentavano degli inconvenienti[216], si occupano di mostrare come tali inconvenienti possano essere risolti *utilizzando proprio l'approccio penta-dimensionale* di Fisher. Gli autori infatti scrivono un'equazione penta-dimensionale che riproduce, sotto opportune condizioni un'equazione quadridimensionale contenuta nel lavoro di Whittaker [Whi28]: poiché Whittaker ha mostrato che la sua equazione si riduce

[213]L'accoppiamento usuale tra gravità ed elettromagnetismo è $-\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

[214]Fisher fa riferimento alla (2.36) di Rosenfeld. Da quanto ci risulta Klein non adotterà mai questa convenzione

[215]I due autori citano, per esempio, un articolo di Whittaker [Whi28]. Questo lavoro aveva come scopo quello di unificare, in uno spazio piatto, l'elettromagnetismo con l'equazione di Dirac, utilizzando per quest'ultima una notazione *tensoriale* e non spinoriale. L'uso degli spinori, infatti, non è entrato subito a far parte del vocabolario dei fisici, che in alcuni casi hanno mostrato delle resistenze [Goe04].

[216]Fisher e Flint fanno riferimento al fatto che Whittaker e altri autori introducevano, per trattare il campo elettromagnetico, due tensori, $F^{\mu\nu}$ e il suo duale, *non antisimmetrici.*

all'equazione di Dirac[217], Fisher e Flint non riproducono questa parte del calcolo, ma enfatizzano la maggior naturalezza del loro approccio ([FF30]; pag. 651). Ancora una volta, dunque, gli autori sottolineano come, dal loro punto di vista, sia indispensabile usare un approccio penta-dimensionale, soprattutto per inglobare i fenomeni quantistici, perché tale approccio mette in evidenza che 'i fenomeni quantistici sono associati alla metrica dello spazio' ([FF30]; pag. 653).

2.5 1928-1930: Contributi minori.

In questo paragrafo riuniamo alcuni contributi che abbiamo classificato come *minori*, non tanto per l'importanza, quanto perché in questi lavori lo spazio dedicato ai commenti che riguardano l'armonizzazione tra la RG e la MQ è *minore* rispetto ai contributi discussi fino a ora.

Il primo lavoro da segnalare, è quello di Heisenberg e Pauli [HP29]. I due autori cominciano a mettere le basi per lo studio *sistematico* della teoria quantistica dei campi, utilizzando le tecniche proprie della *seconda quantizzazione*, citando per esempio il lavoro di Jordan e Klein da noi brevemente commentato nel paragrafo 2.1.4, e si occupano di varie applicazioni come per esempio la quantizzazione del campo elettromagnetico. Questo lavoro è importante, come sottolinea anche Stachel ([Cao99]; pag. 168), per due motivi. Il primo è che i due autori citano il commento fatto da Einstein nel suo primo lavoro sulle onde gravitazionali (si riveda il paragrafo 1.1) e il commento fatto da Klein sul suo ultimo articolo (si riveda il paragrafo 2.1.4), per sottolineare la 'necessità dell'esistenza del quanto del campo gravitazionale'[218] ([HP29]; pag. 3): a nostro avviso questa è la prima volta in cui viene menzionata *esplicitamente* la quantizzazione di questo campo e si parla del *quanto* a esso associato[219]. Il secondo motivo è che *contemporaneamente* Heisenberg e Pauli prevedono che con le tecniche da loro sviluppate 'la quantizzazione del campo gravitazionale potrebbe essere fattibile senza nuove difficoltà' ([HP29]; pag. 3). Stachel vede un atteggiamento 'poco cauto' nei due autori ([Cao99]; pag. 168). A nostro avviso i due autori non sono affatto poco cauti, poiché usano due locuzioni che in tedesco esprimono proprio cautela (*durchfhürbar sein dürfte*): ci sembra piuttosto la manifestazione di un

[217]L'approfondimento tecnico richiederebbe un'analisi più dettagliata del lavoro di Whittaker, i cui scopi non erano quelli di armonizzare la MQ con la RG. Rimandiamo tale approfondimento a eventuali lavori futuri.
[218]Letteralmente: *Quantelung der Wellenfelder*.
[219]Sappiamo da [Cao99] che il termine *gravitone* verrà coniato nel decennio successivo.

entusiasmo più che lecito, vista l'innovazione introdotta dalle tecniche sviluppate dai due autori[220].

Un secondo contributo è quello di F. Gonseth e G. Juvet. I due autori riprendono una serie di *brevi* comunicazioni apparse precedentemente su *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* e le riuniscono in unico articolo [GJ28], dove presentano la loro formulazione di una teoria unitaria penta-dimensionale, a loro avviso alternativa a quella di Klein, riflettendo sul ruolo dell'equazione di Schrödinger[221].

In Italia, Antonio Carrelli, un fisico sperimentale ma con un'estesa preparazione teorica[222], scrive una breve nota per l'*Accademia Nazionale dei Lincei* [Car28] in cui propone di collegare la quinta coordinata spaziale dell'Universo penta-dimensionale di Klein con lo spin dell'elettrone. Carrelli scrive che 'La teoria della relatività a cinque dimensioni nella forma datale ultimamente da Klein non comprende ancora in sè la meccanica quantistica' ([Car28]; pag. 567) e il suo obiettivo è quello di cercare di gettare un po' di luce sulla questione. Il fisico italiano osserva che 'recentemente Heisenberg [...] ha ricavato che fra le due quantità Δp e Δq che rappresentano gli errori che si possono commettere nella determinazione sperimentale di p e q, e cioè di due coordinate coniugate, passa la seguente relazione $\Delta p \Delta q \sim h$' ([Car28]; pag. 567). A questo punto Carrelli ipotizza che tale relazione si possa estendere anche alla quinta dimensione x^5 e alla sua coordinata coniugata che, ricordiamo, nel modello di Klein era proporzionale alla carica elettrica: $p_5 \sim \frac{e}{c}$. Dalla relazione $x^5 p_5 \sim h$ Carrelli ricava $x^5 \sim h\frac{e}{c}$ e si convince che poiché la coordinata è proporzionale alla costante di Planck si possa azzardare un collegamento con lo spin della particella stessa ([Car28]; pag. 567).

In Russia Lev D. Landau, Dmitri Iwanenko e George Gamow firmano assieme un lavoro [GG28] in cui prendono in considerazione l'effetto di una "interazione" tra le costanti fondamentali c, G e h, in relazione alle unità di misura in fisica. Da quanto ci risulta il lavoro originale, in russo, non è stato tradotto. Per qualche maggiore particolare si veda [GF11]; pag. 91.

Sempre in Russia Fock e Iwanenko [FI29a] [FI29b], cercando di sviluppare la *geometrizzazione dell'equazione di Dirac* proposta già da Hugo Martin Tetrode [Tet28], introducono

[220] Le tecniche della quantizzazione dei campi permetteranno infatti a Rosenfeld, di lì a poco, di tentare il calcolo dell'interazione tra campo gravitazionale ed elettromagnetico nell'approssimazione di campo gravitazionale debole. Approfondiremo la questione nel prossimo capitolo.

[221] I lavori apparsi sul *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* nel 1927 sono citati in [GJ28]. I due interventi che coinvolgono l'equazione di Schrödinger sono [GJ27b] e [GJ27a]. Gonseth e Juvet provano a identificare la funzione d'onda con la componente g_{55} della metrica penta-dimensionale; per un breve commento al loro lavoro si veda [Goe04].

[222] Per una biografia dettagliata si veda [Rai11].

un elemento di linea che coinvolge le matrici gamma e si dichiarano convinti della bontà dell'approccio come punto di partenza per armonizzare 'la gravitazione, la radiazione e i fenomeni quantistici' ([FI29a]; pag. 838). Gli autori condensano il loro punto di vista sulla rivista *Nature* [FI29a], dove annunciano la pubblicazione di un lavoro più esteso. Questo secondo contributo di Fock e Iwanenko, pubblicato su *Zeitschrift für Physik*, è un lavoro che è già stato inserito nella storia dei tentativi di unificazione [Goe04]. Per noi risulta comunque interessante il loro approccio, perché gli autori sono convinti di discutere una sorta di *geometria quantistica*. Fock e Iwanenko definiscono un punto P dello spazio-tempo utilizzando *cinque* numeri, $P = (x, y, z, t, \zeta)$, dove il quinto numero assume solamente i valori discreti $1, 2, 3, 4$ e rappresenta il numero della componente della funzione d'onda di Dirac[223]. I due autori affermano esplicitamente che l'ideale che li guida è il percorso operato da Einstein nella formulazione della RG come teoria *geometrica* per la gravitazione, e sottolineano che 'la teoria dei quanti non ha ancora trovato posto in questo quadro geometrico' ([FI29b]; pag. 798). Motivati da questa ricerca, Fock e Iwanenko interpretano le matrici introdotte da Dirac come una sorta di base per uno spazio geometrico su cui decomporre un generico vettore[224]. Secondo gli autori, quando le componenti di tale vettore vengono interpretate come *operatori quantistici*[225] per la rappresentazione di tale grandezza, le componenti della base dello spazio, ovvero le matrici gamma, definiscono una sorta di geometria quantistica che permetterebbe di inquadrare la teoria di Dirac in una visione geometrizzata della fisica. Per mostrare questo, i due fisici cominciano esponendo come emerga l'idea di geometria quantistica in uno spazio piatto. Fock e Iwanenko, per legare le matrici gamma con lo spazio-tempo, definiscono un elemento di linea $ds = \gamma_\mu dx^\mu$. Se in uno spazio piatto si divide ds per $d\lambda$, dove al solito λ rappresenta il tempo proprio geometrizzato, si ottiene $\frac{ds}{d\lambda} = \gamma_\mu v^\mu$. A questo punto interpretano le componenti v^μ come operatori quantistici e parlano quindi di geometria quantistica ([FI29b]; pagg. 799-800). In quest'ottica interpretano il nuovo elemento di linea $ds = \gamma_\mu dx^\mu$ come una sorta di "operatore geometrico". I due autori si occupano anche di estendere i primi risultati alla RG[226]. Per operare questa generalizzazione introducono

[223]Per una trattazione più dettagliata si veda ([Goe04]; pag. 105).

[224]Se consideriamo un generico vettore astratto u, questo può essere rappresentato dalle sue componenti rispetto alla base di un certo spazio. Se indichiamo con $e_\mu = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base di uno spazio quadridimensionale dove è stato definita un'operazione di prodotto tra vettori (prodotto scalare), il vettore viene decomposto nel seguente modo: $u = u^\mu e_\mu$, e il quadrivettore u^μ rappresenta le componenti del vettore lungo tale base.

[225]Dette γ_μ le matrici gamma, la decomposizione di un vettore u lungo tale la base diventa $u = u^\mu \gamma_\mu$, analogamente a quanto detto nella nota ([224]): per Fock e Iwanenko u^μ deve essere interpretato come un *operatore quantistico* ([FI29b]; pag. 799).

[226]'I nostri ragionamenti si possono generalizzare alla Relatività Generale' ([FI29b]; pag. 800)

le *vierbein* o *tetradi*[227] (e_a^μ), una sorta di vettori con un indice piatto, a, e un indice curvo, μ, che servono a rappresentare localmente gli spinori in uno spazio-tempo curvo. Fock e Iwanenko, non hanno ancora chiaro il significato di questi vettori, per loro le vierbein sono come un *ponte* tra la gravitazione e la meccanica quantistica: a nostro avviso si può asserire che è proprio per questo motivo che introducono le tetradi, cioè per gettare un ponte tra RG e meccanica quantistica, nonostante conoscano l'approccio alternativo di Tetrode, il quale cercava di introdurre le matrici gamma nello spazio curvo senza l'ausilio delle *vierbein* [EK88] [Tet28].

A nostro avviso con la stessa intenzione di Fock e Iwanenko, Igor Tamm pubblica sui *Comptes Rendus* un breve lavoro [Tam29] in cui, oltre a usare le tetradi per creare un ponte tra Meccanica Ondulatoria e RG, cerca esplicitamente anche una generalizzazione dell'equazione di Dirac stessa[228]. L'ipotesi di partenza di Tamm è che l'equazione di Dirac '*conservi, anche all'interno di un campo qualunque, la stessa medesima semplice forma che aveva in assenza di un campo di forze*' ([Tam29]; pag. 1598). Il punto di arrivo è una generalizzazione dell'equazione di Dirac al cui interno compare la derivata covariante, che rappresenta l'immersione dell'equazione in uno spazio-tempo curvo. L'autore è conscio che la sua è una speculazione teorica e ne propone la verifica suggerendo il calcolo della struttura iperfine dell'atomo di idrogeno, calcolo che non sappiamo se lui abbia portato a termine oppure no. Comunque, fiducioso del proprio risultato, Tamm chiude col seguente commento il proprio lavoro: 'Riassumendo, abbiamo ottenuto, partendo da un'ipotesi molto semplice, un'equazione ondulatoria razionale. D'altra parte, con la nuova teoria del Sig. Einstein, né l'equazione della geodetica più corta, né quella più diritta, coincidono con l'equazione del moto di una particella carica. Sembra così che la nuova teoria abbia i tratti caratteristici della Meccanica Ondulatoria e non della meccanica corpuscolare'[229] ([Tam29]; pag. 1600).

Un altro lavoro del periodo è quello di Reinhold Fürth [Für29] che tenta di mettere assieme alcune idee di Eddington e le relazioni di indeterminazione per discutere la *struttura*

[227]In [EK88] si afferma che proprio in questo lavoro di Fock e Iwanenko le tetradi vengono introdotte per la prima volta per trattare l'equazione di Dirac in uno spazio-tempo curvo. A noi risulta invece che il primo lavoro dove questo accade è quello di Eugene Wigner uscito nello stesso anno sulla rivista *Zeitschrift für Physik* in un volume precedente [Wig60].

[228]Anche il lavoro di Tamm, così come quello di Klein, quello di Fisher e Flint, viene spesso incluso nel programma di ricerca delle teorie unificate. Il confine con la teoria della gravità quantistica, come già spiegato, è molto labile. Abbiamo deciso di riportare questo lavoro, perché non compare esplicitamente in [Goe04], dove si trattano altri lavori di Tamm dello stesso periodo.

[229]La *nuova teoria* a cui Tamm fa riferimento è, secondo G. Dalla Noce di cui parleremo nel prossimo capitolo, quella del parallelismo a distanza di Einstein. A nostro avviso Tamm introduce solamente l'uso delle tetradi.

delle particelle elementari. Non entreremo nei dettagli tecnici del lavoro, riportando solo il risultato che l'autore ritiene più significativo[230]. Grazie ad alcune ipotesi ad hoc, Fürth scrive il rapporto tra la massa dell'elettrone e del protone in funzione delle costanti universali note e di alcuni coefficienti numerici. A questo punto l'autore discute la massa del neutrone. Nel fare questo chiama in causa proprio la RG e la soluzione di Schwarzschild. In particolare l'autore considera il *raggio gravitazionale* di una generica particella, ovvero il raggio di Schwarzschild $r_g = \frac{2m_0 G}{c^2}$ dove m_0 è la massa della particella, e supponendo che il rapporto y tra il raggio gravitazionale e il raggio effettivo della particella sia lo stesso sia per il neutrone che per l'elettrone, $\frac{r_e}{(r_g)_e} \sim \frac{r_n}{(r_g)_n}$, si calcola questo fantomatico rapporto, ottenendo un valore che si collega appunto con i lavori di Eddington e che mette assieme tutte le costanti universali note: $y = \frac{hc}{2m_p^2 G}$ dove m_p è la massa del protone[231]. Il lavoro è quindi quantomeno curioso proprio perché chiama in causa sia la RG che alcune caratteristiche della MQ.

Wiener e Vallarta, impegnati anche loro in questo periodo nel tentativo di unificare gravità ed elettromagnetismo [Goe04], sentono la necessità di richiamare l'attenzione, con delle *brevi* comunicazioni a *Nature* [WV29] [Wie29] [Val29], sull'urgenza dell'armonizzazione fra l'equazione di Dirac e la gravità[232]: 'Un bisogno molto più urgente della teoria della relatività generale è la sua armonizzazione con la teoria quantistica, in particolare con la teoria di Dirac dell'elettrone con spin' ([WV29]; pag. 317). In quest'ottica, gli autori riprendono la visione espressa da Fock e Iwanenko riguardo al ruolo giocato dalle *vierbein*, come mostrato dal commento seguente, pur non citandoli espressamente. 'In altre parole, le quantità e_a^μ di Einstein[233] sembrano avere un piede nel mondo macroscopico, descritto formalmente dai potenziali gravitazionali di Einstein e caratterizzato dall'indice μ e l'altro piede nel mondo Mikowskiano microscopico caratterizzato dall'indice a' ([WV29]; pag. 317). Di tutto il lavoro di Einstein di questo periodo, gli autori sottolineano come siano proprio le *vierbein* il prodotto più significativo: 'Questo ci sembra l'aspetto più importante del recente lavoro di Einstein, e sicuramente lo strumento più promettente per l'unificazione di due teorie così distanti come quella dei quanti e quella della gravitazione' ([WV29]; pag. 317).

Un ulteriore contributo viene da Veblen e Hoffmann. Questo lavoro, tra i vari tentativi

[230] Non ci risulta che siano emersi ulteriori sviluppi dall'approccio di Fürth. Rimandiamo quindi ulteriori approfondimenti a lavori futuri.

[231] Anche questo lavoro viene talvolta annoverato tra i tanti lavori di "numerologia" che tentano di ottenere tutti i parametri della fisica a partire da poche costanti note.

[232] Wiener e Vallarta, in questo periodo, prendono in considerazione la ricerca promossa da Einstein sul cosiddetto "parallelismo a distanza" [Ein28a] [Ein28b]. Per ulteriori dettagli si veda [Goe04].

[233] Come già detto, Wiener e Vallarta stanno seguendo gli sviluppi del lavoro di Einstein.

di unificazione, presenta un assetto particolare che, a nostro avviso, è importante più che per i contributi tecnici presenti, per le cose che *non* sono presenti [VH30]. I due autori formulano una versione della RG utilizzando la geometria *proiettiva* e riescono così a ottenere una teoria proiettiva che riproduce l'universo penta-dimensionale di Klein, ma in quattro dimensioni[234]. In particolare anche Veblen e Hoffmann si occupano dell'equazione di K-G e della sua formulazione in uno spazio-tempo curvo ma, e questo è il fatto a nostro avviso importante, tale equazione non viene identificata come l'equazione d'onda dell'elettrone[235]. Abbiamo notato questo fatto anche analizzando uno dei lavori di Flint all'inizio del paragrafo 2.4.2.

In altra direzione si muove Gleb Wataghin che nel 1929 cerca un *quadro unitario* che contenga i campi elettromagnetico, gravitazionale e materiale di Dirac. L'autore immagina che l'unitarietà derivi dalla formulazione di un *unico* principio variazionale, come fece Klein, e suppone che scrivendo una *Lagrangiana unitaria* che contenga tutti i campi conosciuti si ottengano dei vantaggi per l'armonizzazione della MQ con la RG. I ragionamenti di Wataghin vengono riportati in due brevi comunicazioni, l'una scritta per gli *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze* [Wat29a] e l'altra scritta per gli *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei* [Wat29c]. Nello stesso anno Wataghin fa un intervento sullo stesso tema alla *XXIII Adunanza della Società Italiana di Fisica* [Wat29b]. Curiosamente, chi scrive la recensione dell'intervento di Wataghin all'Adunanza della Società Italiana di Fisica riporta, presentando la Lagrangiana unitaria L, che: 'Si pone $L = L^{(s)} + L^{(g)} + L^{(q)}$, ove i tre addendi corrispondono ai tre gruppi di equazioni che si vuole ottenere. La forma dei primi due termini, corrispondenti rispettivamente alle equazioni di Maxwell e a quelle gravitazionali, può essere senz'altro copiata da quella ben nota di Hilbert, Klein e Weyl adoperata nella relatività generale. Il termine *quantistico* $L^{(q)}$ richiede invece considerazioni speciali' ([Wat29b]; pag. 1). Il corsivo è nostro: il comportamento quantistico della radiazione era un dato di fatto e qui, con il termine "quantistico", sembra che chi riporta il pensiero di Wataghin faccia riferimento alla sola Lagrangiana di Dirac, come se il campo gravitazionale non debba essere quantizzato. Il pensiero di Wataghin, in realtà, è ben diverso. Infatti, in [Wat29c], ragionando sul fatto che nelle equazioni del moto per il campo gravitazionale sia presente il tensore energia impulso del campo di Dirac e del campo elettromagnetico, Wataghin fa le seguenti osservazioni. 'Sebbene la riduzione [...] del complesso delle equazioni differenziali, usate nella teoria dei quanti e nella relatività, a un principio variazionale non porti con sè

[234]Si veda [Goe04] per un'analisi storica del lavoro.

[235]Il lavoro è più matematico che fisico e gli autori si limitano a citare l'equazione come 'l'equazione studiata da Klein, Gordon, Fock e altri' ([VH30]; pag. 821)

nulla di sostanzialmente nuovo, tale deduzione mi è sembrata opportuna perché serve a illuminare in una maniera particolarmente illuminante le tre seguenti tesi:

I^o I termini elettromagnetici della teoria maxwelliana devono essere considerati come derivanti dalla distribuzione del quadrivettore corrente S, che caratterizza una distribuzione *media* degli elettroni e dei protoni, o meglio caratterizza la distribuzione delle relative probabilità, unita alla assegnazione del numero totale di elettroni coinvolti nel fenomeno che si considera.

2^o I campi gravitazionali vengono determinati anche da certe distribuzioni di elettroni e quanti di luce [...] I valori delle $g_{\mu\nu}$ vengono a dipendere [...] dalle funzioni di Dirac e dalle onde elettromagnetiche, e acquistano un significato puramente statistico.

3^o Le leggi alle quali ubbidiscono le funzioni di Dirac ψ e i potenziali elettromagnetici A_μ, risultano dipendenti dai potenziali gravitazionali $g_{\mu\nu}$. Il ciclo si chiude perché questi potenziali $g_{\mu\nu}$, influendo sulle ψ e sugli A_μ determinano a loro volta il comportamento statistico dei corpuscoli. Si giunge così alla conclusione: i tre gruppi di equazioni non possono essere trattati separatamente, se non a condizione di trascurare l'influenza reciproca [...] Per i fenomeni atomici viene generalmente trascurata l'influenza dei campi gravitazionali.

È stato giustamente rilevato da Weyl e Fock, quale importanza potrà avere l'applicazione della relatività generale a questi fenomeni. Un risultato sembra già acquisito: i potenziali gravitazionali $g_{\mu\nu}$ hanno alla pari di $F_{\mu\nu}$ e di ψ un significato puramente statistico' ([Wat29c]; pagg. 428-429) Wataghin dunque è profondamente convinto che anche il campo gravitazionale abbia un significato *quantistico*. Nella seconda di queste osservazioni, l'autore praticamente anticipa l'idea che seguirà Rosenfeld l'anno seguente per trovare appunto una forma quantistica del tensore metrico.

Nel 1930, Heisenberg, frustrato dagli infiniti che appaiono nell'elettrodinamica quantistica, tenta senza successo l'introduzione di un modello [Hei30] in cui lo spazio è quantizzato[236]. Un tentativo analogo, anche se molto meno articolato, viene tentato nello stesso anno da Viktor Ambarzumian e Iwanenko [AI30]: leggendo il lavoro la discretizzazione dello spazio tridimensionale appare comunque, a nostro avviso, più come un artificio matematico che come una proprietà oggettiva dello spazio reale.

Una questione strettamente collegata con la questione della discretizzazione delle dimensioni spaziali è l'esistenza di una lunghezza minima. Wataghin, proprio in quest'anno [Wat30], comincia una serie di riflessioni su questo tema a partire dall'assunzione delle relazioni di indeterminazione di Heisenberg e sulla compatibilità tra il concetto di lunghezza minima e le trasformazioni di Lorentz. Questo e altri lavori di Wataghin vengono

[236]Per una ricostruzione del modello di Heisenberg si veda [CK95].

analizzati in un recente lavoro di Amit Hagar[237] [Hag14] il quale cerca di mettere in luce un possibile legame tra le prime idee di Wataghin e i moderni tentativi di discussione sull'esistenza di una lunghezza minima, come per esempio le teorie di campo non locali. Per tutti i particolari si rimanda a [Hag14] e alla bibliografia in esso contenuta.

Tra tutti i contributi del periodo, quelli di William Band del 1930 si pongono completamente fuori dal coro, tentando *dichiaratamente* un approccio non geometrico. Nel primo lavoro [Ban30], l'autore si pone come obiettivo quello di creare una teoria che riesca a conciliare la RG con il principio di indeterminazione di Heisenberg e che con certe approssimazioni si riduca alla RG. L'approccio di Band risulta però quantomai curioso. Infatti l'autore definisce dei campi, compreso quello che rappresenta il campo gravitazionale, che dovrebbero avere la caratteristica di essere *indeterminati* nel senso di Heisenberg, ma che allo stesso tempo soddisfano a equazioni differenziali *deterministiche*[238]. In questo modo, a suo avviso, crea una teoria che 'vale solo quando l'indeterminazione nella posizione e nel momento non è significativa'[239] ([Ban30]; pag. 1405). Conseguenza di questo fatto è che Band è convinto di aver *parzialmente rimosso* in questo modo la tensione fra la RG e la MQ: 'La [nostra] teoria è un apparato puramente descrittivo, e la sua utilità viene fortemente limitata dal principio di indeterminazione. Questo fatto permette alla [nostra] teoria di evitare l'inconsistenza tra la teoria di campo [classica] e la teoria atomica, un'inconsistenza che sembra solamente il risultato di una nostra ignoranza' ([Ban30]; pag. 1406). Sottolineiamo *parzialmente rimosso*, perché l'autore sostiene di aver ottenuto un apparato teorico che 'riproduce il risultato classico che un elettrone che accelera deve irradiare, ma contiene anche l'ammissione che tale risultato è senza senso quando l'accelerazione è grande e avviene all'interno del campo dei nuclei atomici. Questo fatto sembra essere un progresso rispetto alla teoria classica, almeno per come questa viene oggi formulata' ([Ban30]; pag. 1406). Nel secondo lavoro [Ban31], l'autore discute l'inconsistenza logica della RG, alla luce del principio di indeterminazione. Premettiamo che Band fa riferimento, per la gravitazione, alla formulazione della 'teoria generalizzata'[240] presentata nel volume di Eddington *The Mathematical Theory of Relativity* ([Edd23]; pag. 213), dove i differenziali dx^μ vengono presentati come i protagonisti principali della geometria dello spazio-tempo. La convinzione di Band dell'inconsistenza logica tra i postulati della RG e il principio di indeterminazione è legata alla convinzione dell'autore che il princi-

[237] Il nostro precedente commento sui tre lavori di Wataghin del 1929 non viene preso in considerazione da Hagar, il quale non riporta lavori precedenti al 1930.

[238] I particolari tecnici della formulazione di Band ci risultano "oscuri".

[239] Cerca infatti di convincere il lettore che nelle "zone geometriche" dove vale il principio di indeterminazione, la teoria risulta non utilizzabile.

[240] Si tratta di un'ulteriore generalizzazione della geometria integrabile di Weyl.

pio di indeterminazione asserisca la non-esistenza di tali differenziali, che Band chiama 'differenziali assoluti'. L'idea, di conseguenza, è quella di postulare l'esistenza di *regioni elementari quadridimensionali*, che potrebbero sembrare una sorta di "quanti" dello spazio-tempo, ma che in realtà non lo sono, perché comunque queste regioni elementari si possono intersecare, e un determinato evento nello spazio-tempo può essere descritto da più di una regione elementare. L'idea di spazio-tempo che ha in mente Band fa riferimento all'approccio sia filosofico [Whi29] che fisico [Whi22] di Whitehead[241]. Dell'approccio filosofico di Whitehead, Band sposa l'idea che vede le proprietà dello spazio-tempo *emergere* dalle caratteristiche astratte degli *eventi* stessi. In questo modo Band asserisce di non considerare più le particelle come enti fondamentali, sottolineando la diversità del suo approccio. L'autore è cosciente del fatto che in questo secondo articolo riesce a trattare solo pochi casi elementari, ma sottolinea che il proprio punto di vista offre comunque una prospettiva nuova: 'In conclusione, non possiamo che dichiarare di aver trattato solo casi elementari; questo ci sembra sufficiente sia per mostrare come sia possibile dedurre le basi della nuova teoria dei quanti, riconoscendo la debolezza logica della Relatività [Generale], attraverso ipotesi aggiuntive più naturali che eliminino proprio questa debolezza, sia per ottenere le basi di una teoria unificata dei campi e infine suggerire un'interpretazione fisica del mondo che armonizzi i due grandi campi della ricerca in fisica teorica di questi ultimi anni, la relatività e la fisica atomica' ([Ban31]; pag. 1170). Un'altra curiosità è che il lavoro propone dei punti di contatto solo con la *teoria dei quanti* e non con la MQ. A nostro avviso quindi, l'approccio risulta anche anacronistico, visti gli sviluppi presentati nei precedenti paragrafi, e ci sembra solamente, come ammesso anche dall'autore, una teoria nel suo "stato embrionale". Non siamo riusciti a trovare ulteriori sviluppi di questo approccio negli anni seguenti al 1930.

2.6 1930: La fine di un periodo

Abbiamo visto che con il 1930 l'equazione relativistica dell'elettrone viene definitivamente identificata con l'equazione di Dirac. Abbiamo anche detto che con il 1929 i metodi della seconda quantizzazione sono stati affinati e applicati all'elettrodinamica. Come conseguenza, a nostro avviso, si può dire che si sia fatta strada la convinzione che non è più sufficiente *introdurre* un'equazione d'onda in uno spazio-tempo curvo per armonizzare MQ e RG. Benché anche negli anni successivi si cercherà di conciliare i principi della RG e

[241]La teoria della gravitazione di Whitehead ha una storia lunga e travagliata ed è stata più volte accantonata e ripresa, per poi essere definitivamente abbandonata. Per una discussione recente si veda [GW08]. Per quanto riguarda l'opera filosofica, si faccia riferimento a [Irv14].

della MQ in diversi modi, usando anche approcci ancora *simili* a quelli descritti in questo capitolo, con il 1930 si comincia a pensare *esplicitamente* alla quantizzazione del *campo* gravitazionale. Rosenfeld, infatti, pubblica due contributi sull'argomento, affrontandolo da due distinti punti di vista che corrisponderanno a due dei più prolifici approcci al problema della quantizzazione della teoria di Einstein[242]. Con il 1930 anche la questione dell'unificazione prenderà una strada diversa dalla quantizzazione del campo gravitazionale. Questa strada sarà ripresa sporadicamente negli anni Settanta del Novecento, per poi diventare definitivamente la strada maestra con l'avvento della Teoria delle Stringhe negli anni Ottanta.

Ci sembra quindi possibile affermare che il 1930 è proprio l'anno che sancisce il passaggio da una fase di ricerca più "confusa", dominata dai tentativi di introdurre un'equazione d'onda nello spazio-tempo curvo, a una fase più consapevole, dove, come vedremo, il problema della quantizzazione del campo gravitazionale sarà sempre più presente. Per tutti questi motivi, a nostro avviso, con il 1930 finisce il periodo da noi denominato *preistoria*. La nostra definizione, ovviamente, è indicativa, ma riteniamo sia più fondata di quella di altri autori che, con meno consapevolezza storica, suggeriscono per la preistoria un periodo molto più lungo[243].

2.7 Cronologia

1926 (seconda parte) *Klein* pubblica due lavori in cui pone le basi per il proprio Universo penta-dimensionale. Nel primo recupera alcune idee di Kaluza, ma in più introduce la Meccanica Ondulatoria, guidato dall'analogia con la luce. Nel secondo propone il primo esempio di quantizzazione geometrica reintroducendo l'ipotesi di cilindricità.

1927 Durante la quinta *Conferenza Solvay* De Donder cerca di mettere in rilevo i risultati ottenuti da lui e da Rosenfeld sull'armonizzazione tra RG, elettromagnetismo e Meccanica ondulatoria.

De Broglie pubblica un lavoro sull'Universo penta-dimensionale di Klein con l'intento di migliorarne l'approccio.

Jordan e Klein pubblicano un lavoro che pone le prime basi della seconda quantizzazione.

[242] Tratteremo questi contributi estesamente nel prossimo capitolo

[243] Per esempio in [Rov00] la preistoria si estende fino alla fine degli anni cinquanta.

Klein pubblica vari lavori in cui cerca di portare avanti da solo il progetto iniziato l'anno precedente; risponde a un lavoro di de Broglie mostrando che i due approcci sono equivalenti, cambia prospettiva e abbandona l'analogia con la luce. Nell'ultimo lavoro di quest'anno scrive l'azione di un campo scalare in uno spazio-tempo curvo, lo accoppia in maniera minimale alla gravità penta-dimensionale e cerca di scrivere una modifica del principio di conservazione dell'energia. In questo lavoro decreterà anche l'inadeguatezza del proprio approccio;

Lévi introduce il concetto di cronone.

London tenta di identificare la scala di gauge della teoria della gravitazione di Weyl con la funzione d'onda stessa. Nel fare questo discute il concetto di misura a livello atomico associato alle proprietà dello spazio-tempo del microcosmo.

Mandel cerca di porre le basi per un'assiomatizzazione di una eventuale teoria unitaria, ma suppone che solo i campi di materia e quello elettromagnetico obbediscano alle leggi della MQ, ma non il campo gravitazionale.

Rosenfeld utilizza un approccio penta-dimensionale simile a quello di Klein per studiare il campo gravitazionale generato da una "particella quantistica" e mostra come la MQ riesca riprodurre la metrica di Schwarzschild nell'approssimazione di campo debole;

Wiener e Struik propongono un approccio in cui la gravità emerge da un'equazione d'onda e la cui normalizzazione produce un legame tra l'equazione d'onda dell'elettrone e le equazioni di Einstein.

Fisher e *Flint* cominciano la loro collaborazione che si espliciterà in una serie di tentativi nelle più svariate direzioni di ricerca.

1928 *Carrelli* propone di identificare il momento coniugato alla quinta dimensione di Klein con lo spin.

Dirac pubblica la corretta generalizzazione relativistica dell'equazione d'onda dell'elettrone.

Flint introduce il concetto di quanto temporale utilizzando la metrica di Weyl; in seconda battuta decide invece di seguire una strada alternativa proposta da Einstein.

Gonseth e *Juvet* riprendono una serie di lavori precedenti e li riuniscono in unico lavoro, dove presentano la formulazione di una teoria unitaria cinque dimensionale alternativa a quella di Klein, riflettendo sul ruolo dell'equazione di Schrödinger.

Landau, *Gamow* e *Iwanenko* discutono la relazione tra le costanti fondamentali c, G, h e le unità di misura lunghezza, massa e tempo.

1929 *Fisher* e *Flint* tentano nuovi tentativi di unificazione.

Fock e *Iwanenko*, usano il formalismo delle tetradi (*vierbein*) per trattare l'equazione di Dirac in uno spazio-tempo curvo. I due autori introducono un elemento di linea che coinvolge le matrici gamma di Dirac e cercano di promuovere alcuni quadrivettori al ruolo di operatori per creare una sorta di geometria quantistica.

Fürth, discutendo la struttura delle particelle elementari, chiama in causa la RG e le relazioni di indeterminazione.

Heisenberg e *Pauli* introducono le moderne tecniche di quantizzazione dei campi e ne sviluppano alcune applicazioni come per esempio la quantizzazione del campo elettromagnetico. Sperano che le stesse tecniche siano utili per la trattazione del quanto del campo gravitazionale.

Tamm fa un tentativo simile a quello di Fock e Iwanenko, cercando anche di generalizzare l'equazione di Dirac.

Vallarta e *Wiener* richiamano l'attenzione sul problema dell'armonizzazione tra RG e MQ. *Wataghin*, discute un possibile approccio variazionale unitario e fa osservare che in tale approccio la metrica dipenderà dagli spinori di Dirac esprimendo la convinzione che la metrica abbia una natura di carattere quantistico.

1930 (prima parte) *Ambartsumian* e *Iwanenko* tentano di introdurre, in maniera simile ad Heisenberg, uno spazio quantizzato.

Band propone un modello di teoria in cui convivano il principio di indeterminazione, attraverso l'introduzione del concetto di campo indeterminato, e il carattere deterministico della fisica classica. Discute l'inconsistenza logica della RG dal suo punto di vista.

Fisher e *Flint* tentano una variante penta-dimensionale del proprio programma di unificazione.

Heisenberg, frustrato dagli infiniti che appaiono nell'elettrodinamica quantistica, tenta l'introduzione di un modello in cui lo spazio è quantizzato.

Veblen e *Hoffmann* scrivono il primo lavoro sulla versione proiettiva della RG e trattano l'introduzione dell'equazione di Klein-Gordon: questa equazione non è più trattata come l'equazione relativistica dell'elettrone.

Wataghin comincia una serie di riflessioni sul ruolo di una lunghezza minima in elettrodinamica quantistica e che discuterà poi nell'ambito della teoria della gravitazione.

Bibliografia

[AI30] Viktor Ambarzumian and Dmitri Iwanenko (1930); Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 64, pages 563–567.

[Ban30] William Band (1930); A new Relativity Theory of the United Physical Field. *Physical Review*, 36, page 1405.

[Ban31] William Band (1931); Wave-Particle as transmitted Possibilities: quantum Postulates deduced from Logical Relativity. *Physical Review*, 31, page 1164.

[Bec29] Gottfried Beck (1929); Die zeitliche Quantelung der Bewegung. *Zeitschrift für Physik*, 53, pages 675–682.

[Boh28] Niels Bohr (1928); Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik. *Die Natürwissenschaften*, 16, pages 245–257.

[Bor07] Armando F. Borghesani, *Introduzione alla struttura della materia* (via Marzolo, 28. Padova: Edizioni Libreria Progetto, 2007), seconda edizione edition.

[BV09] Guido Bacciagaluppi and Antony Valentini, *Quantum Theory at the Crossroads. Reconsidering the 1927 Solvay Conference* (Cambridge: Cambridge University Press, 2009).

[Cao99] Tian Yu Cao (Editor), chapter V Quantum field theory and space-time. "Introduction" by John Stachel, pages 166–175 (Cambridge University Press, 1999).

[Car28] Antonio Carrelli (1928); Sulla relatività a 5 dimensioni. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti, Classi di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 6, pages 566–567. Serie 7.

[CGCJ70] Sidney Coleman Curtis G. Callan and Roman Jackiw (1970); A new Improved Energy-Momentum Tensor. *Annals of Physics*, 59, pages 42–73.

[CK95] Bruno Carazza and Helge Kragh (1995); Heisenberg's lattice world: The 1930 theory sketch. *American Journal of Physics*, 63, page 595.

[Cot00] Émile Cotton (1900); Sur les invariants différentiels de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 17, page 211.

[CT68] Nikolay. A. Chernikov and Ernest. A. Tagirov (1968); Quantum theory of scalar field in de sitter space-time. *Annales de l'Institute Henri Poincaré. section A*, IX, pages 109–141.

[CWMW73] Kip S. Thorne Charles W. Misner and John A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, 1973).

[dB27] Louis de Broglie (1927); L'univers a cinq dimensions et la mécanique ondulatoire. *Le Journal de Physique et le Radium*, Tome VIII, page 65. Série VI.

[DC92] Fernando De Felice and C. J. S. Clarke, *Relativity on Curved Manifolds*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge: Cambridge University Press, 1992). Editors: P. V. Landshoff, D. R. Nelson, D. W. Sciama, S. Weinberg.

[De 27] Theophile De Donder, *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge, MA: MIT, 1927).

[Dir28a] Paul A. M. Dirac (1928); The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 117, page 610.

[Dir28b] Paul. A. M. Dirac (1928); The Quantum Theory of the Electron. Part II. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 118, page 351.

[Dir36] Paul A. M. Dirac (1936); Wave Equations in Conformal Space. *Annals of Mathematics*, 37, page 429.

[Edd23] Arthur S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, 1923), 1st edition edition. Open Library: http://www.archive.org/details/mathematicaltheo00eddiuoft.

[Ein28a] Albert Einstein (1928); Riemanngeometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fern-Parallelismus. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften; Physikalisch-mathematische Klasse*, 17, pages 217–221.

[Ein28b] Albert Einstein (1928); Riemanngeometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fern-Parallelismus. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften; Physikalisch-mathematische Klasse*, 17, pages 224–227.

[EK88] J. Eisenstaedt and A. J. Kox (Editors), *Studies in the History of General Relativity*, volume 4 of *Einstein Studies*, chapter "Dirac Equations in Curved Space-Time" by S. Kichenassamy (Boston/Basel/Berlin: Birkäuser, 1988).

[Eks91] G. Ekspong (Editor), *The Oskar Klein Memorial Lectures*, volume 1, chapter "From my Life of Physics" by Oskar Klein (Stokholm: Stockholm University, 1991).

[Eps27a] Paul S. Epstein (a1927); Two Remarks on Schrödinger's Quantum Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 13, pages 94–96.

[Eps27b] Paul S. Epstein (b1927); The Magnetic Dipole in Undulatory Mechanics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 13, pages 232–237.

[FF27] Henry T. Flint and J. W. Fisher (1927); A Contribution to Modern Ideas on the Quantum Theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 115, pages 208–214.

[FF28] Henry T. Flint and J. W. Fisher (a1928); The Fundamental Equation of Wave Mechanics and the Metrics of Space. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 117, pages 625–629.

[FF30] Henry T. Flint and J. W. Fisher (1930); The Equations of the Quantum Theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 126, pages 644–653.

[FI29a] Vladimir Fock and Dmitrij Iwanenko (a1929); Quantum Geometry. *Nature*, 123, page 838.

[FI29b] Vladimir Fock and Dmitrij Iwanenko (b1929); Über eine mögliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie. *Zeitschrift für Physik*, 54, page 798.

[Fis29] J. W. Fisher (1929); The Wave Equation in Five Dimensions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 123, pages 489–493.

[Fli28a] Henry T. Flint (b1928); Relativity and the Quantum Theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 117, pages 630–637.

[Fli28b] Henry T. Flint (d1928); The New Metric of Einstein and the Wave Equation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 121, pages 676–681.

[Fli29] Henry T. Flint (1929); The First and Second Order Equations of the Quantum Theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 124, pages 143–150.

[Foc26a] Vladimir Fock (a1926); Über die invariante Form der Wellen und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. *Zeitschrift für Physik*, 39, page 226.

[Foc26b] Vladimir Fock (b1926); Zur Schrödingerschen Wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 38, pages 242–250.

[FR28] Henry T. Flint and O. W. Richardson (c1928); On a Minimum Proper Time and Its Applications (1) to the Number of the Chemical Elements (2) to Some Uncertainty Relations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 117, pages 637–649.

[Für29] Reinhold Fürth (1929); Über einen Zusammenhang zwischen quantenmechanischer Unschärfe und Struktur der Elementarteilchen und eine hierauf begründete Berechnung der Massen von Proton und Elektron. *Zeitschrift für Physik*, 57, pages 429–446.

[GF11] Gennady E. Gorelik and Victor Y. Frenkel, *Matvei Petrovich Bronstein.* Modern Birkhäuser Classics (Birkäuser, 2011).

[GG28] Lev. D. Landau George Gamow, Dmitri Iwanenko (1928); Mirovye postoyannye i pre del 'nyi perekhod. *Zhurnal Russkogo Fiziko-Khimicheskogo Obchshestva*, 60, pages 13–17.

[GJ27a] F. Gonseth and G. Juvet (1927); Les équations de l'èlectromagnétisme et l'équation de M. Schrödinger dans l'univers à cinq dimensions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, T 185, page 535.

[GJ27b] F. Gonseth and G. Juvet (1927); Sur l'équation de M. Schrödinger. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, T 185, page 448.

[GJ28] F. Gonseth and G. Juvet (1928); Sur la relativité à cinq dimensions et sur une interprètation de l'équation de Schrödinger. *Helvetica Physica Acta*, 1, page 421.

[Goe04] Hubert F.M. Goenner (2004). On the History of Unified Field Theories. Living Review in Relativity 7 (cited on March 2 2014) http://www.livingreviews.org/lrr-2004-2.

[GU25] Samuel A. Goudsmit and George E. Uhlenbeck (1925); Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung beziiglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons. *Naturwissenschaften*, 13, page 953.

[GW08] Gary Gibbons and Clifford M. Will (2008); On the Multiple Deaths of Whitehead's Theory of Gravity. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 39, pages 41–61.

[Hag14] Amit Hagar (2014); Squaring the circle: Gleb Wataghin and the prehistory of quantum gravity . *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 46, pages 217 – 227. Part B.

[Haw75] Stephen W. Hawking (1975); Particle Creation by Black Holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43, pages 199–220.

[Haw76] Stephen W. Hawking (1976); Breakdown of predictability in gravitational collapse. *Pysical Review D*, page 2460.

[Hei27] Werner Heisenberg (1927); Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43, page 172.

[Hei30] Werner Heisenberg (1930); Die Selbstenergie des Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 65, pages 4–13.

[HP29] Werner Heisenberg and Wolfgang Pauli (1929); Zur Quantenelektrodynamik der Wellenfelder. *Zeitschrift für Physisk*, 56, pages 1–61.

[Ili] Bozhidar Z. Iliev. The "*Lorenz* gauge" is nammed in honor of Ludvig Valentin Lorenz. arXiv: 0803.0047v1 [physics.hist-ph].

[Irv14] Andrew David Irvine, "Alfred North Whitehead", booktitle = The Stanford Encyclopedia of Philosophy (2014), fall 2014 edition.

[JK27] Pascual Jordan and Oskar Klein (1927); Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie. *Zeitschrift für Physik*, 45, page 751.

[JO01] J D. Jackson and L B. Okun (2001); Historical roots of gauge invariance. *Reviews of Modern Physics*, 73, pages 663–680.

[Kal21] Theodore Kaluza (1921); Zum Unitätsproblem in der Physik. *Sitzungsberichte der Koniglich Akademieder Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1, pages 966–972.

[Kal84] "On the Unification Problem in Physics" by Theodore Kaluza. In: *An Introduction to Kaluza-Klein Theories - Workshop on Kaluza-Klein Theories*, (Editor) H. C. Lee, page 1 (Chalk River, Ontario, Canada: WORLD SCIENTIFIC, 1984). Traduzione a cura di Taizo Muta.

[KC94] Helge Kragh and Bruno Carazza (1994); From Time Atoms to Spacetime Quantization: the Idea of Discrete Time ca 1925–1936. *Studies in History and Philosophy of Science*, 25, pages 437–462.

[KH63] Thomas S. Kuhn and John L. Heilbron (a1963). Interview with Dr. Leon Rosenfeld by Thomas S. Kuhn and John L. Heilbron At Carlsberg. July 1, 1963. Niels Bohr Library & Archives, American Institute of Physics, College Park, MD USA. Session I.

Key: Kuhn1

Annotation: http://www.aip.org/history/ohilist/4847_1.html

[Kle26a] Oskar Klein (a1926); Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37, page 895.

[Kle26b] Oskar Klein (b1926); The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, 118, page 516.

[Kle27a] Oskar Klein (a1927); Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzip. *Zeitschrift für Physik*, 41.

[Kle27b] Oskar Klein (b1927); Sur l'article de M. L. de Broglie: *L'univers a cinq dimensions et la mécanique ondulatoire. Le Journal de Physique et le Radium*, Tome VIII, pages 242–243. Série VI.

[Kle27c] Oskar Klein (c1927); Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 46, page 188.

[Kle84] "Quantum Theory and five-dimensional Relativity" by Oskar Klein. In: *An Introduction to Kaluza-Klein Theories - Workshop on Kaluza-Klein Theories*, (Editor) H. C. Lee, page 10 (Chalk River, Ontario, Canada: WORLD SCIENTIFIC, 1984). Traduzione a cura di Taizo Muta.

[Kra84] Helge Kragh (1984); Equation with the many fathers. The Klein–Gordon equation in 1926. *American Journal of Physics*, 52, pages 1024–1033.

[LL04] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifšits, *Teoria dei campi*, volume Fisica teorica 2 (Edizioni Mir, 2004). Editori Riuniti: III edizione, I ristampa. Traduzione di Aleksandr Machov.

[Lon27] Fritz London (1927); Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl. *Zeitschrift für Physik*, 42, pages 375–389.

[Lé27] Robert Lévi (1927); Théorie de l'action universelle et discontinue. *Journal de Physique et le Radium*, 8, page 182.

[Man27] Heinrich Mandel (1927); Zur Herleitung der Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 45, pages 285–306.

[MS84] Franz Mandl and Graham Shaw, *Quantum Field Theory* (Chichester; New York; Brisbane; Toronto; Singapore: John Wiley and Sons, 1984).

[Nor14] Gunnar Nordström (1914); Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu Vereinigen. *Physlische Zeitschrift*, 15, page 504.

[O'R96] Lochlainn O'Raifeartaigh (1996); "Weyl-Gauging and Curved-Space Approach to Scale and Conformal Invariance". Talk presented at the Meeting *70 Years of Quantum Mechanics* held at the Indian Statistical Institute.

[O'R97] Lochlainn O'Raifeartaigh, *The dawning of gauge theory* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1997).

[OS00] Lochlain O'Raifeartaigh and Norbert Straumann (2000); Gauge theory: Historical origins and some modern developments. *Reviews of Modern Physics*, 72, pages 1–23.

[OW97] James M. Overduin and Paul S. Wesson (1997); Kaluza-Klein Gravity. *Physics Reports*, 283, pages 303–380.

[Pa99] Saul Perlmutter and al. (1999); Measurements of ω and λ from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517, page 565.

[Pai88] Abraham Pais, *Inward Bound. Of Matter and Forces in Physical World* (New York: Oxford University Press, USA, 1988), second edition.

[Pai91] Abraham Pais, *"Sottile è il Signore..." La scienza e la vita di Albert Einstein* (Torino: Collana: Gli Archi, 1991). Bollati Boringhieri.

[Pau27] Wolfgang Pauli (1927); Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 43, pages 601–623.

[Pau82] Wolfgang Pauli, *Teoria della Relatività* (Torino, 1982), Traduzione italiana di Paolo Gulmanelli edition. Boringhieri: Prima edizione 1958.

[Pok28] G. I. Pokrowski (1928); Zur Frage nach der Struktur der Zeit. *Zeitschrift für Physik*, 51, pages 737–739.

[Rai11] Roberto Raimondi (2011); L'opera scientifica di Antonio Carrelli. *Atti Accademia Pontaniana, Napoli*, LX, pages 107–156.

[Ric27] Charles F. Richter (1927); The Hydrogen Atom with a Spinning Electron in Wave Mechanics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 13, pages 476–479.

[Ros27a] Léon Rosenfeld (a1927); L'Univers a cinq dimensions et la Mécanique ondulatoire. *Bulletin de l'Académie royale de Belgique [Classe des Sciences]*, 13. Serie 5.

[Ros27b] Léon Rosenfeld (b1927); L'Univers a cinq dimensions et la Mécanique ondulatoire. (Deuxième communication). *Bulletin de l'Académie royale de Belgique [Classe des Sciences]*, 13. Serie 5.

[Ros27c] Léon Rosenfeld (c1927); L'Univers a cinq dimensions et la Mécanique ondulatoire. (Troisième communication). *Bulletin de l'Académie royale de Belgique [Classe des Sciences]*, 13. Serie 5.

[Ros27d] Léon Rosenfeld (d1927); L'Univers a cinq dimensions et la Mécanique ondulatoire. (Quatrième communication). *Bulletin de l'Académie royale de Belgique [Classe des Sciences]*, 13. Serie 5.

[Rov00] Carlo Rovelli (2000); Notes for a brief history of quantum gravity. pages 742–768. E-print: gr-qc/0006061.

[Ryc05] Thomas Ryckman, *The Reign of Relativity: Phylosophy in Physics 1915-1925* (198 Madison Avenue, New York, New York: Oxford University Press, 2005).

[Sch26a] Erwin Schrödinger (a1926); Quantisierung als Eigenwertproblem. (Erste Mitteilung.). *Annalen der Physik*, 79, pages 361–376.

[Sch26b] Erwin Schrödinger (b1926); Quantisierung als Eigenwertproblem. (Zweite Mitteilung.). *Annalen der Physik*, 79, page 489–527.

[Sch26c] Erwin Schrödinger (c1926); Quantisierung als Eigenwertproblem. (Dritte Mitteilung.). *Annalen der Physik*, 79, pages 734–756.

[Sch26d] Erwin Schrödinger (d1926); Quantisierung als Eigenwertproblem. (Vierte Mitteilung.). *Annalen der Physik*, 81, pages 109–139.

[Sch40] L. I. Schiff (1940); Field Theories for Charged Particles of Arbitrary Spin. *Pysical Review*, 57, pages 903–905.

[Sch14] Weyl geometry in late 20th century physics. In: *"Beyond Einstein" by Erhard Scholz*, (Editor) Dan Rowe, Einstein Studies (Boston; Basel: Birkhäuser, 2014). Based upon the conference, Johannes Gutenberg University, Mainz Germany, 22 – 26 September 2008.

[SD92] A. J. Schwarz and N. A. Doughty (1992); Kaluza-Klein unification and the Fierz-Pauli weak-field limit. *American Journal of Physics*, 60, pages 150–157.

[SH36] Jan A. Schouten and Johannes Haantjes (1936); Über die konforminvariante Gestalt der relativistischen Bewegungsgleichungen. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen*, 39, pages 1059–1065.

[Tam29] Igor Tamm (1929); La théorie nouvelle de M. Einstein et la théorie des quanta. *Comptes Rendus de séances de l'Academie des sciences*, 188, pages 1598–1600.

[Tet28] Hugo M. Tetrode (1928); Allgemein-relativistische Quantentheorie des Elektrons. *Zeitschrift für Physisk*, 336, page 50.

[TFW62] Fritz Rohrlich Thomas Fulton and Louis Witten (1962); Conformal Invariance in Physics. *Reviews of Modern Physics*, 34, pages 442–457.

[Tho26] Llewellyn H. Thomas (1926); The Motion of the Spinning Electron. *Nature*, page 514.

[Val29] Manuel S. Vallarta (1929); Quantum Theory and Special Relativity. *Nature*, 124, page 336.

[VH30] Oswald Veblen and Banesh Hoffmann (1930); Projective Relativity. *Pysical Review*, 36, page 810.

[Wat29a] Gleb Wataghin (a1929); Sull'applicazione della relatività alla meccanica ondulatoria. *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 2, pages 1–6. XVIII Riunione.

[Wat29b] Gleb Wataghin (b1929); Relatività e meccanica ondulatoria. *XVIII Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, XXIII Adunanza della Società Italiana di Fisica*, 2, pages 1–3. XVIII Riunione.

[Wat29c] Gleb Wataghin (c1929); Sopra un'applicazione della relatività alla meccanica quantistica. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti, Classi di Scienze Fisiche, Mathematiche e Naturali.*, 10, pages 423–429. XVIII Riunione.

[Wat30] Gleb Wataghin (1930); Sur les relations d'indetermination dans la theorie des quanta. *Comptes Rendus de séances de l'Académie des Sciences*, 191, pages 163–765.

[Whi22] Alfred N. Whitehead, *The principle of relativity, with applications to physical science* (Cambridge UK: Cambridge University Press, 1922).

[Whi28] James M. Whittaker (1928); On the Principle of Least Action in Wave Mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 121, page 543.

[Whi29] Alfred N. Whitehead, *Process and Reality. An Essay in Cosmology. Gifford Lectures Delivered in the University of Edinburgh During the Session 1927–1928* (New York, Cambridge UK: Macmillan, Cambridge University Press, 1929).

[Wie29] Norbert Wiener (1929); Dirac Equations and Einstein's Theory. *Nature*, 123, page 944.

[Wig60] Eugene P. Wigner (1960); The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13, pages 1–14.

[Wil23] William Wilson (1923); The Quantum Theory and Electromagnetic Phenomena. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 102, page 478.

[WS27a] Norbert Wiener and Dirk J. Struik (1927); A Relativistic Theory of Quanta. *Journal of Mathematics and Physics*, 7, page 1.

[WS27b] Norbert Wiener and Dirk J. Struik (1927); Quantum Theory and Gravitational Relativity. *Nature*, 119, page 853.

[WS27c] Norbert Wiener and Dirk J. Struik (1927); Sur la théorie relativiste des quanta. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 185, pages 42–44.

[WS27d] Norbert Wiener and Dirk J. Struik (1927); Sur la théorie relativiste des quanta. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 185, pages 184–185.

[WS28] Norbert Wiener and Dirk J. Struik (1928); The Fifth Dimension in Relativistic Quantum Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A.*, 14, pages 262–268.

[WV29] Norbert Wiener and Manuel S. Vallarta (1929); Unified Theory of Electricity and Gravitation. *Nature*, 123, page 12.

[WW64] Cécile M. De Witt and Bryce Seligman De Witt (Editors), *Relativity, Groups and Topology: Lectures Delivered at Les Houches During the 1963 Session of the Summer School of Theoritical Physics*, chapter "Conformal Treatment of Infinity" by Roger Penrose, page 565 (London: Gordon and Breach, 1964).

Capitolo 3

Dall'approccio di Rosenfeld alla nascita del concetto di gravitone

La figura di Rosenfeld apre la strada, con il 1930, ai moderni approcci alla quantizzazione del campo gravitazionale, stabilendo che il quanto gravitazionale è un bosone. Il periodo analizzato in questo capitolo parte dai lavori del fisico belga e arriva fino al biennio 1935-1936, in cui viene coniato e comincia a diffondersi il temine *gravitone* per indicare il quanto del campo gravitazionale. In questo periodo gli autori principali che si occupano dell'armonizzazione tra mondo microscopico e macroscopico sono solo quelli che tentano di applicare i concetti della nascente teoria quantistica dei campi al problema della quantizzazione del campo gravitazionale. Sin da subito emergeranno problemi teorici analoghi a quelli dell'elettrodinamica, come l'imposizione a livello quantistico della scelta della gauge e l'insorgere degli infiniti dovuti all'interazione gravitazionale.

La questione dei limiti imposti dal principio di indeterminazione di Heisenberg alla misurabilità dello spazio-tempo emerge in questi anni in Russia: Bronstein, applicando i metodi della moderna teoria quantistica dei campi mette in luce alcune delle peculiarità che dovrà avere una futura teoria della Gravità Quantistica.

Questi anni vedono ancora la discussione di vecchi approcci, visti nei capitoli precedenti, e la comparsa di nuove proposte, che però utilizzano ancora la Meccanica Ondulatoria, come per esempio quella in ambito cosmologico di Jehle. Discuteremo anche alcuni approcci non convenzionali, che testimoniano quanto il problema fosse sentito da molti autori. Spenderemo infine alcune parole per analizzare la situazione della fisica in Italia, dove il matematico Finzi costruisce un apparato teorico che vorrebbe conciliare la teoria di Einstein con la meccanica delle Matrici di Heisenberg.

3.1 1930: il quanto gravitazionale di Léon Rosenfeld

Léon Rosenfeld è sicuramente il primo a parlare di *quanto gravitazionale*[1]. Il fisico belga infatti, tra la fine degli anni venti e i primi anni trenta, si trovava immerso nell'ambiente dove era nata l'idea oggi nota come *seconda quantizzazione*. La seconda quantizzazione corrisponde all'idea che per conciliare la MQ con la Relatività Ristretta sia necessario quantizzare l'entità classica che chiamiamo *campo*, dando luogo così all'interpretazione delle particelle come quanti del campo. Con la fine degli anni venti, come visto nel precedente capitolo, si era consolidata l'idea che fosse necessario provare a quantizzare ogni tipo di campo: il campo di radiazione, il campo dell'elettrone[2] introdotto da Dirac, il campo scalare[3] e quindi anche il campo gravitazionale.

La questione della quantizzazione di un campo si scontrò subito con una serie di problemi. Uno dei problemi deriva dalla necessità di formulare una teoria *relativistica* e *gauge invariante*. Un altro problema era la comparsa di valori *infiniti* per quantità fisiche che dovevano avere valori finiti. In generale il primo campo per cui vennero affrontati questi problemi è il caso del campo elettromagnetico, ma ben presto si capì che tali problemi erano comuni anche ad altri campi. Per aggirare il primo dei problemi sopra menzionati, alla fine degli anni venti erano stati tentati *tre* diversi approcci alla quantizzazione del campo elettromagnetico: due proposte erano state avanzate da Heisenberg e Pauli [HP29] [HP30], mentre un terzo metodo era stato proposto da Enrico Fermi [Fer29]. Le difficoltà emerse per il campo elettromagnetico si ripropongono anche per il campo gravitazionale ed è sicuramente merito di Rosenfeld l'averle messe in luce per primo. A queste si aggiungeranno anche altre complicazioni, come per esempio il fatto che la Lagrangiana di Einstein-Hilbert non è quadratica nei campi, oppure il fatto, di cui parleremo in seguito, che non è ben chiaro quali siano i gradi di libertà da quantizzare.

3.1.1 L'esempio del campo elettromagnetico

Per comprendere meglio le problematiche affrontate da Rosenfeld dobbiamo fare una breve digressione per passare in rassegna quali problemi emergano nella quantizzazione del campo elettromagnetico, per poi confrontarli, esattamente come è accaduto storicamente, con quelli che si incontrano cercando di quantizzare con tecniche analoghe il campo gra-

[1] Questa affermazione è autorevolmente confermata anche da Gennady E. Gorelik ([EK92]; pag. 370).

[2] Tale campo viene oggi comunemente chiamato campo spinoriale.

[3] Come accennato nel capitolo precedente, anche se fisicamente non corrispondeva più ad alcuna particella conosciuta, il campo scalare, sia reale che complesso, veniva comunque preso in considerazione dal punto di vista teorico. Ne è un esempio il lavoro di Hideki Yukawa [Yuk55] che utilizzerà proprio il campo scalare di Klein-Gordon per cercare di spiegare l'interazione forte.

vitazionale. In questo paragrafo, quindi, non toccheremo tutte le problematiche derivanti dalla quantizzazione dei campi, né tanto meno faremo un compendio della quantizzazione dei campi, per cui rimandiamo ai manuali di uso comune. Cercheremo piuttosto di mettere l'accento su quei problemi che emersero *contestualmente* alla nascita della seconda quantizzazione.

Consideriamo quindi la lagrangiana[4] del campo elettromagnetico:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right) \tag{3.1}$$

dove stiamo indicando le grandezze vettoriali tridimensionali con il grassetto, per non appesantire la notazione. In funzione dei potenziali, i campi sono definiti nel seguente modo:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi \qquad\qquad \mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}. \tag{3.2}$$

Nella teoria dell'elettromagnetismo classico la definizione dei potenziali non è univoca. Esiste infatti un'arbitrarietà, chiamata *invarianza di gauge*, che permette di eliminare una delle quattro componenti di A^μ come non fisica[5]. Le condizioni che permettono di *fissare la gauge* che ci interessano sono due[6]. La prima, detta *gauge di Weyl*, consiste nel fissare uguale a zero il potenziale elettrostatico, $\varphi = 0$, mentre la seconda, detta *gauge di Lorenz*[7], e a differenza della precedente è una condizione invariante per trasformazioni di Lorentz: $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Nel tentativo di quantizzare il campo elettromagnetico si incontrano subito due difficoltà. La prima è proprio legata alle condizioni di gauge. Infatti, nel caso si voglia quantizzare il campo con un formalismo Lorentz-invariante[8], bisogna capire come *tradurre* la gauge di Lorenz dal punto di vista della meccanica quantistica. La gauge di Lorenz scritta sopra infatti perde di significato se si sostituiscono i potenziali classici con i rispettivi operatori. Questo problema venne affrontato per la prima volta da Fermi in [Fer29],

[4]D'ora in poi, con il termine Lagrangiana, sottintenderemo sempre *densità* di Lagrangiana.

[5]La descrizione relativistica richiede l'introduzione di gradi di libertà *non fisici*. Nel caso dell'elettromagnetismo uno viene eliminato proprio dalle condizioni che fissano la gauge, mentre uno viene eliminato dalle equazioni di Maxwell, lasciando così i due ben noti gradi di libertà del campo elettromagnetico.

[6]Le condizioni che stiamo per presentare eliminano solo in parte la ridondanza introdotta dal formalismo quadridimensionale. Per un approfondimento della questione si veda [LL04a].

[7]Si ricordi che, come indicato nella nota ([157]) del Capitolo 2, non si tratta di un errore di stampa, perché la paternità della gauge è attribuibile al fisico danese Ludvig Valentin Lorenz.

[8]Come detto poco sopra la seconda quantizzazione concilia la Relatività Ristretta con la MQ.

il quale propose di imporre la seguente condizione[9]:

$$(\partial_\mu A^\mu)\,|\psi >= 0 \ , \tag{3.3}$$

dove, come per Fermi, ψ rappresenta la funzione d'onda dello stato fisico al tempo $t = 0$. In termini moderni diremmo che la condizione di gauge definisce lo spazio di Fock degli stati quantistici. Il metodo di quantizzazione che preserva l'invarianza di Lorentz viene chiamato *quantizzazione covariante*, perché si usa dire che le espressioni sono covarianti a vista. Una volta promossi i campi al ruolo di operatori, un secondo problema emerge nel tentativo di scrivere le relazioni di anticommutazione tra i campi e le rispettive variabili coniugate. Infatti, se si cerca di calcolare la variabile coniugata p_φ del campo elettrostatico, definita come per l'usuale meccanica hamiltoniana del punto tramite la relazione $p_\varphi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$, a partire dalla Lagrangiana (3.1), si ottiene $p_\varphi = 0$, perché nelle definizioni dei campi (3.2) la variabile $\dot{\varphi}$ non compare. Le Lagrangiane per cui si presenta questa situazione vengono dette *singolari*, e si tratta del caso particolare di una situazione più generale, quella in cui non è possibile invertire la relazione che definisce il momento coniugato di una variabile, operazione necessaria per poter scrivere la Hamiltoniana del sistema. Se non si vuole utilizzare necessariamente un formalismo Lorentz-invariante si può utilizzare la gauge di Weyl per aggirare il problema. Questo metodo è proprio uno dei due suggeriti da Heisenberg e Pauli in [HP30]. D'altra parte, il metodo di quantizzazione che utilizza il formalismo hamiltoniano, ovvero il formalismo canonico, è un metodo che privilegia una delle direzioni dello spazio-tempo e quindi rompe la Lorentz invarianza manifesta[10] (a prescindere dalla gauge): questo tipo di quantizzazione viene dunque chiamata *quantizzazione canonica*. Un modo equivalente per fissare la gauge è quello di aggiungere dei termini alla Lagrangiana (3.1). Sia Fermi [Fer29] che Heisenberg e Pauli [HP29] avevano tentato questa strada, seppur in maniera differente[11]. Rosenfeld era ovviamente a conoscenza di tutti questi approcci e li cita in maniera esplicita nei propri lavori. Rosenfeld azzarderà anche un ulteriore metodo per trattare il formalismo canonico delle Lagrangiane singolari, metodo che, come già osservato da Donald Salisbury, precede di almeno vent'anni la trattazione di Dirac della dinamica hamiltoniana dei

[9] La condizione proposta da Fermi comporta dei problemi, che verranno risolti da Suraj N. Gupta [Gup50] [Gup51] e Konrad Bleuler [Ble50]. Quest'ultimo cita proprio il lavoro di Fermi come precursore del metodo oggi noto come *metodo di Gupta-Bleuler*. La condizione di Gupta-Bleuler è differente dell'equazione (3.3), perché richiede che la condizione di Fermi valga solo per le frequenze positive degli operatori di annichilazione: $(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}\,|\psi >= 0$. Si veda per esempio ([IZ80]; pag. 130).

[10] Abbiamo visto che Vallarta e De Donder avevano tentato, in altro contesto, di aggirare questo problema intrinseco nel formalismo canonico hamiltoniano. Torneremo sulla questione nel seguito.

[11] I particolari non risultano al momento rilevanti e si rimanda quindi a [Pai88].

sistemi vincolati [Sal09]. Infatti sia le condizioni di gauge, sia la presenza di momenti coniugati nulli, sono il sintomo della presenza di *vincoli* di cui bisogna tenere conto sia nella costruzione della Hamiltoniana, sia nel processo di quantizzazione[12].

La notazione usata da Rosenfeld nel primo dei suoi due lavori è esplicitamente riferita a quella di un lavoro di Lev D. Landau e Rudolf Peierls[13] [LP30], notazione che è quasi identica a quella dei volumi di Landau e Lifšits, da cui traggono spunto le seguenti note [LL04b].

Per definire la rappresentazione quantistica dei potenziali elettromagnetici, è conveniente partire dall'analoga descrizione classica, considerando il campo in una regione grande ma finita di volume[14] $V = L^3$, per passare in un secondo momento al limite $L \to +\infty$. In questo modo il campo viene scomposto in onde piane e il potenziale vettore, per esempio, viene rappresentato nel seguente modo:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sum_k \mathbf{a}_k e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{a}_k^* e^{-i\mathbf{kr}} \tag{3.4}$$

dove i coefficienti $\mathbf{a}_k$ dipendono dal tempo secondo la legge $\mathbf{a}_k \sim e^{-i\omega t}$ con $\omega = |\mathbf{k}|$. Grazie alla (3.4) si possono scrivere degli sviluppi analoghi per i campi elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$. Definendo le variabili canoniche nel seguente modo

$$\mathbf{Q}_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*) \qquad\qquad \mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k, \tag{3.5}$$

e inserendole nella Hamiltoniana[15] del campo elettromagnetico[16],

$$\bar{\mathcal{H}} = \int \mathcal{H} d^3x = \frac{1}{8\pi} \int \left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right) d^3x\,, \tag{3.6}$$

la (3.6) diventa:

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_k \left(\mathbf{P}_k^2 + \omega^2 \mathbf{Q}_k^2\right) \,. \tag{3.7}$$

Ciascun vettore $\mathbf{P}_k$ e $\mathbf{Q}_k$ è perpendicolare al vettore d'onda, cioè ha *due* componenti indipendenti. La direzione di questi vettori determina la direzione di polarizzazione dell'onda corrispondente. Se indichiamo con P_{ks} e Q_{ks} $(s = 1, 2)$ le due componenti dei vettori $\mathbf{P}_k$

[12]Riprenderemo la questione nel prossimo capitolo, affrontando i lavori di Dirac e di altri autori.

[13]Il lavoro viene citato in [Ros30a].

[14]In questa breve introduzione porremo, come in Landau, $V = 1$, mentre nel prossimo paragrafo il termine di volume comparirà esplicitamente.

[15]Useremo il termine Hamiltoniana per l'integrale spaziale della *densità* di Hamiltoniana e come d'uso all'epoca le indicheremo con la stessa lettera, distinguendo la Hamiltoniana con una barra.

[16]Per il campo elettromagnetico stiamo fissando la gauge ponendo $\varphi = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. In questo modo la Hamiltoniana è ben definita.

e $\mathbf{Q}_k$ nel piano perpendicolare al vettore d'onda, la (3.7) diventa:

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\sum_{ks}\left(P_{ks}^2 + \omega^2 Q_{ks}^2\right) . \tag{3.8}$$

Nel processo di quantizzazione le variabili canoniche (3.5) vengono promosse al ruolo di operatori. Risulta conveniente introdurre gli *operatori di creazione* $c_{ks}^\dagger$ e gli *operatori di distruzione* c_{ks} tramite le seguenti definizioni:

$$c_{ks} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega Q_{ks} + iP_{ks}\right), \qquad c_{ks}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega Q_{ks} - iP_{ks}\right), \tag{3.9}$$

i quali, a differenza della loro controparte classica[17], non commutano, $\left[c_{ks}\, ,\, c_{ks}^\dagger\right] = 1$, perché gli operatori posizione e impulso tra loro non commutano[18]. Con l'utilizzo di questi operatori la (3.8) diventa:

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\sum_{ks}\hbar\omega\left(c_{ks}c_{ks}^\dagger + c_{ks}^\dagger c_{ks}\right) , \tag{3.10}$$

e di conseguenza anche i potenziali elettromagnetici (3.4) diventano funzione degli operatori di creazione e distruzione:

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = \sum_{ks} c_{ks}\mathbf{A}_{ks} + c_{ks}^\dagger \mathbf{A}_{ks}^*, \tag{3.11}$$

dove[19] $\mathbf{A}_{ks} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}\mathbf{e}^{(s)}e^{ikr}$ e $\mathbf{A}_{ks}^*$ è il suo complesso coniugato. Grazie alle regole di commutazione, la Hamiltoniana può essere riscritta in funzione dell'*operatore numero* $N_{ks} = c_{ks}^\dagger c_{ks}$ nel seguente modo:

$$\bar{\mathcal{H}} = \sum_{ks}\hbar\omega\left(N_{ks} + \frac{1}{2}\right) . \tag{3.12}$$

Gli autovalori di N_{ks}, che verranno indicati nello stesso modo per comodità, sono dei numeri interi che rappresentano il numero dei fotoni presenti nello stato corrispondente. Il termine $\frac{1}{2}$ in (3.12), dovuto alle regole di commutazione, produce un numero *infinito* di fotoni per lo stato di vuoto ($N_{k\alpha} = 0$) e viene per questo detto *divergente*. Si tratta di uno degli infiniti nominati nel paragrafo (3.1): l'energia di punto zero. Alla fine degli anni venti era già chiaro che questo termine divergente non aveva un reale significato fisico, perché si tratta di un termine *additivo costante* che quindi non influisce sulle differenze

[17] Moltiplicando per il fattore $\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}$ le corrispondenti grandezze classiche c_{ks} e c_{ks}^* si ottengono i coefficienti a_{ks} e a_{ks}^* dello sviluppo (3.4).

[18] Ricordiamo che, schematicamente, si ha $[Q\, ,\, P] = i\hbar$

[19] Indichiamo con $\mathbf{e}^{(s)}$ i versori che indicano le direzioni della polarizzazione.

di energia, le uniche quantità osservabili[20]. Di lì a poco, però spunteranno degli altri termini divergenti, più pericolosi. Con il lavoro di Julius Robert Oppenheimer [Opp30] per la prima volta viene messa in luce la presenza di due tipi di infiniti: l'infinito derivante dall'energia di punto zero, che come spiegato non influenza il calcolo delle energie di transizione, e quello di carattere *elettrodinamico*, derivante dall'interazione tra il campo spinoriale ed elettromagnetico, che risulta molto più preoccupante, perché al contrario *influenza* il calcolo delle ampiezze di transizione, rendendole infinite. Le nuove divergenze trovate da Oppenheimer, quelle del secondo tipo, si hanno a causa della presenza di frequenze di grandezza arbitraria nell'integrazione. Per questo motivo vengono dette *divergenze ultraviolette*. All'inizio degli anni trenta il calcolo degli autovalori della Hamiltoniana viene chiamato *auto-energia* e comprende sia il calcolo degli autovalori della parte cinetica che quelli della cosiddetta Hamiltoniana di interazione. Oggi nella teoria dei campi quantistici con il termine auto-energia si intende invece un termine ben preciso dello sviluppo perturbativo.

Dopo questa breve digressione sulla procedura di quantizzazione del campo elettromagnetico torniamo dunque a parlare di come Rosenfeld abbia cercato di trattare il campo gravitazionale.

3.1.2 L'energia gravitazionale della luce: l'approccio covariante

Il primo lavoro di Rosenfeld che consideriamo [Ros30a] si intitola *Sull'energia gravitazionale della luce*[21] e prende spunto, come ci fa sapere l'autore stesso, da un'osservazione di Heisenberg, senza darci però alcuna referenza in merito[22]. 'L'auto-energia dell'elettrone ha dato i primi problemi, come risaputo [...] Heisenberg ha sollevato la questione se questi infiniti siano indipendenti o meno dall'influsso della materia, ovvero dall'energia gravitazionale della luce. La risposta non si può ottenere senza fare ulteriori congetture, attraverso il confronto con il caso dell'elettrone, ma in una situazione dove l'effetto gravitazionale non sia trascurabile' ([Ros30a]; pag. 499). L'autore quindi non ha come obiettivo *principale* la quantizzazione del campo gravitazionale, ma il comportamento quantistico di tale campo viene esplicitamente utilizzato. A nostra conoscenza, in questo lavoro, compare per la prima volta il termine *quanto gravitazionale* a partire dal riassunto

[20] L'ordinamento normale verrà introdotto solo molto più tardi da Gian Carlo Wick [Wic50].

[21] L'anno successivo esce anche un lavoro di Richard C. Tolman, Paul Ehrenfest e Norman Podolsky [RCT31], che si occupa del campo gravitazionale generato dalla luce. I tre autori citano il lavoro di Rosenfeld, ma sottolineano che il loro articolo affronta solo le questioni *classiche* del problema.

[22] Presumiamo quindi che fosse un'osservazione fatta durante un confronto orale tra i due.

stesso[23]. Nel riassunto Rosenfeld mette in luce anche il fatto che il suo risultato *peggiori* la situazione già grave per l'emergente teoria quantistica dei campi, rappresentata dalla presenza degli infiniti: 'Verrà calcolato il comportamento quanto-meccanico di un campo gravitazionale generato da un campo elettromagnetico e verrà mostrato che l'energia gravitazionale così prodotta risulta essere una quantità infinita, cosa che si traduce in una nuova difficoltà per la teoria quantistica dei campi ondulatori di Heisenberg e Pauli' ([Ros30a]; pag. 589)

L'approccio di Rosenfeld è simile a quello della moderna teoria dei campi. Questo fatto non ci stupisce, perché nel precedente capitolo abbiamo visto che già nel 1927 Rosenfeld aveva cominciato a utilizzare un approccio moderno. In questo lavoro l'autore mette in interazione il campo elettromagnetico con quello gravitazionale considerando due differenti situazioni fisiche: nella prima, che occupa gran parte del lavoro, Rosenfeld utilizza la sola descrizione quantistica del campo elettromagnetico e indaga l'andamento dell'autoenergia del campo gravitazionale generato dal fotone; nella seconda, invece, utilizza una descrizione quantistica del campo gravitazionale stesso per porre le basi dello studio dell'interazione quantistica tra fotone e quanto gravitazionale. Rosenfeld utilizza ancora la procedura per studiare le equazioni del moto del campo gravitazionale nell'approssimazione di campo debole. Questa volta però la applica alla teoria di Einstein in quattro dimensioni. Ricordiamo che in questo approccio la metrica $g_{\mu\nu}$ viene pensata come una perturbazione, che chiameremo ancora $h_{\mu\nu}$ come nel precedente capitolo, della metrica piatta di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Come nel 1927 le variabili che verranno quantizzate saranno i potenziali associati alla perturbazione. A differenza del 1927 però, in questo lavoro Rosenfeld cercherà di studiare sia gli effetti propri dei due campi, sia gli effetti della loro interazione, esattamente come si farebbe oggi nella teoria quantistica del campi, grazie al formalismo degli operatori di creazione e di distruzione: per questo motivo questo lavoro è il *capostipite* dell'approccio oggi noto come *quantizzazione covariante*.

Nella parte iniziale del lavoro Rosenfeld tratta ovviamente i campi dal punto di vista classico. A differenza del 1927, il fisico belga presenta l'approssimazione di campo debole in maniera più dettagliata, soffermandosi su alcuni punti importanti che non aveva discusso tre anni prima. Inoltre Rosenfeld scrive la metrica nel seguente modo:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} \,, \tag{3.13}$$

introducendo questa volta il parametro $\varepsilon = \sqrt{\frac{8\pi G}{c^4}}$. Dopo aver sostituito la (3.13) nelle equazioni di Einstein considera solo gli effetti del *primo ordine*[24]: rispetto al lavoro del

[23] Letteralmente *Gravitationsquant*. Il termine gravitone verrà coniato nel 1934 [Cao99].

[24] Letteralmente: 'Erste Näherung' ([Ros30a]; pag. 499)

1927 tali contributi sono rappresentati ora dai termini che danno un contributo al più lineare in ε, costante che assume il ruolo di "costante di accoppiamento" con il campo gravitazionale. A questo punto introduce esplicitamente la quantità $\bar{h}_{\nu\rho} = h_{\nu\rho} - \frac{1}{2}h\eta_{\nu\rho}$, dove la *traccia* h di $h_{\nu\rho}$ viene calcolata usando la metrica di Minkowski, $h = h_{\nu\rho}\eta^{\nu\rho}$: ricordiamo che in questo approccio gli indici vengono alzati, abbassati e contratti dalla metrica piatta. Come accennato nel precedente capitolo, le variabili $h_{\nu\rho}$ *devono soddisfare* la relazione $\partial^{\nu}\bar{h}_{\nu\rho} = 0$. Osserviamo che si tratta dell'analogo della gauge di Lorenz per il campo elettromagnetico, e che oggi viene detta *gauge armonica* o *gauge di De Donder* ([Kie07]; pag. 25). A breve vedremo che a differenza del 1927 l'autore tornerà a occuparsi di questa relazione una volta passato alla trattazione quantistica. Imponendo la gauge armonica Rosenfeld ottiene dunque le equazioni di Einstein linearizzate. Se si segue questa procedura si possono scrivere tali equazioni linearizzate in due modi differenti, ma ovviamente equivalenti:

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -2\varepsilon T_{\mu\nu}\,, \tag{3.14}$$

oppure[25]

$$\Box h_{\mu\nu} = -2\varepsilon\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\alpha}{}^{\alpha}\eta_{\mu\nu}\right)\,. \tag{3.15}$$

Rosenfeld scrive la prima delle due espressioni e la semplifica ulteriormente, perché si sta limitando al caso *speciale* in cui il tensore energia-impulso è quello del campo elettromagnetico. Infatti, poiché in questo caso il tensore energia-impulso ha traccia nulla[26], le equazioni (3.14) si possono scrivere anche nel seguente modo[27]:

$$\Box h_{\mu\nu} = -2\varepsilon T^{em}_{\mu\nu}\,. \tag{3.16}$$

Questo è il punto di partenza per Rosenfeld che, risolvendo esplicitamente la (3.16), *potrà ricavare la perturbazione $h_{\mu\nu}$ alla metrica piatta in funzione del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$*. Se dunque si utilizza, invece della descrizione classica, la descrizione *quantistica* del paragrafo precedente, ovvero la relazione (3.11), si può scrivere dunque una metrica che è funzione degli operatori di creazione e distruzione del campo elettromagnetico, $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}\left(c_{k\alpha}\,, c^{\dagger}_{k\alpha}\right)$, ottenendo così *un operatore quantistico che rappresenta il campo*

[25]La presenza di ε nel membro di destra dell'equazione, invece di ε^2 come ci si aspetterebbe, non è un errore. Nei moderni testi di relatività la metrica viene sviluppata *senza* ε, ovvero, come visto nel precedente capitolo, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. In questo modo, anche nelle equazioni linearizzate compare nel membro di destra ε^2. Inoltre compare un segno che nelle equazioni non linearizzate non compare.

[26]Ricordiamo che $T^{em}_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$

[27]Rosenfeld usa il fatto che prendendo la traccia dell'equazione (3.14) si ottiene $\Box h = 0$. La stessa conclusione si ottiene più facilmente da (3.15) imponendo la condizione di traccia nulla. Quanto detto, inoltre, vale ovviamente anche nel caso del campo gravitazionale nel vuoto, ovvero quando $T_{\mu\nu} = 0$, perché se il tensore energia-impulso è nullo, lo sarà anche la sua traccia.

gravitazionale generato dal campo elettromagnetico. La quantizzazione del campo gravitazionale, in questo caso, non è dunque diretta. Prima di proseguire conviene fare subito alcune considerazioni di carattere generale.

La prima osservazione riguarda, ancora una volta, il confronto con il lavoro del 1927. Dovrebbe emergere chiaramente, da quanto abbiamo detto, che la *filosofia* che sta alla base dei due articoli è essenzialmente la stessa. In entrambi infatti Rosenfeld utilizza l'approssimazione di campo debole per ottenere un'espressione *esplicita* delle perturbazioni di natura *quantistica* alla metrica piatta. Come detto nell'introduzione al nostro lavoro, la differenza essenziale tra i due approcci è rappresentata dal cambiamento *concettuale* dell'idea di quantizzazione, perché come rimarcato più volte, nel 1927 Rosenfeld era convinto che per introdurre gli effetti quantistici fosse sufficiente scrivere un'equazione d'onda, mentre a distanza di tre anni è convinto che sia necessario quantizzare il campo utilizzando il nuovo formalismo degli operatori di creazione e distruzione.

La seconda osservazione riguarda il fatto che in questo tipo di approccio è intrinseco un problema concettuale: la metrica piatta assume un ruolo fondamentale, ruolo che invece non ha in RG, e la quantizzazione che ne deriva sembra non esserne indipendente. Questo problema non verrà discusso da Rosenfeld, ma è oggi comune ad altri approcci alla GQ, come per esempio la Teoria delle Stringhe, ed è noto col nome di *dipendenza dal background*[28], perché la metrica *quantistica* viene pensata come una deviazione da una metrica *classica* di background, che in questo caso è la metrica piatta.

La terza osservazione riguarda il carattere *non-lineare* dell'azione di Einstein-Hilbert che, in questo approccio, viene ovviamente perso, perché lo scopo dell'autore è esplicitamente quello di considerare solo gli effetti al primo ordine[29].

La quarta osservazione, riguarda la Lagrangiana scritta da Rosenfeld. Subito dopo aver scritto le (3.16), l'autore introduce la seguente espressione:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\left(\partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho}\partial^\mu \bar{h}^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu \bar{h}\partial^\mu \bar{h}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\bar{h}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em}\,, \tag{3.17}$$

senza dirci esplicitamente con che procedura la ricavi. È evidente che le equazioni del moto della (3.17), ottenute variando le $\bar{h}_{\mu\nu}$, sono le equazioni (3.16). Proviamo a fare delle supposizioni sulla base di quanto l'autore ha scritto precedentemente. Scriviamo l'usuale azione del campo gravitazionale e del campo elettromagnetico:

$$\mathcal{S} = \int \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\varepsilon^2}R\right)\sqrt{-g}d^4x \tag{3.18}$$

[28]Utilizziamo la parola inglese perché non siamo riusciti a trovare una traduzione italiana che sia soddisfacente.

[29]Il primo a considerare gli effetti degli ordini successivi sarà Suraj Gupta negli anni cinquanta.

dove gli indici sono contratti utilizzando la metrica $g_{\mu\nu}$. Se si inserisce lo sviluppo della metrica usato da Rosenfeld e si considerano solo i termini fino al prim'ordine, si ottiene, a meno di derivate totali:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{lin} &= \mathcal{S}_{em} + \mathcal{S}_G + \mathcal{S}_{int} && (3.19)\\
&= \int \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) d^4x && (3.20)\\
&+ \int -\frac{1}{8}\left[\partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho}\partial^\mu \bar{h}^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu \bar{h}\partial^\mu \bar{h} - 2\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}\partial_\rho \bar{h}^{\rho\nu}\right] d^4x && (3.21)\\
&+ \int \left(\frac{\varepsilon}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em}\right) d^4x\,, && (3.22)
\end{aligned}$$

dove i tre pezzi dell'azione totale che compaiono nella (3.19) sono rispettivamente (3.20), (3.21) e (3.22). Il primo termine della (3.17) coincide con (3.20), dove gli indici sono contratti usando la metrica piatta. Per quanto riguarda il secondo termine della (3.17), poiché Rosenfeld ha già scelto la gauge all'inizio del lavoro, evidentemente l'autore ha imposto anche nell'azione la scelta della gauge. Quello che non è chiaro è *come* l'abbia fatto. Potrebbe aver semplicemente imposto la relazione $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, in questo modo la (3.21) si riduce al secondo termine della (3.17). Un'altra possibilità è che abbia *aggiunto* il termine che oggi chiamiamo "gauge fixing", perché poche righe dopo Rosenfeld dichiara di aver quantizzato il campo gravitazionale col metodo di Fermi. Ne riparleremo anche noi tra poche righe. Veniamo al terzo termine[30]. Poiché la traccia del tensore energia impulso nel caso elettromagnetico è nulla, anche nell'azione (3.22) si può sostituire $h_{\mu\nu}$ con $\bar{h}_{\mu\nu}$, analogamente a quanto fatto da Rosenfeld nel caso delle equazioni del moto poco sopra[31]. L'azione che ci presenta Rosenfeld vale dunque solo se il campo gravitazionale è in interazione con il campo elettromagnetico.

L'ultima osservazione riguarda *i metodi di quantizzazione* scelti da Rosenfeld. L'autore, infatti, sceglie di usarne due distinti: per il campo elettromagnetico impiega il metodo di Heisenberg e Pauli con la gauge di Weyl[32], ovvero pone $A^0 = 0$, di cui non ci occuperemo, mentre per il campo gravitazionale, come accennato poco sopra, discute brevemente l'applicazione del metodo di Fermi. Cominciamo con quello che Rosenfeld non dice riguardo all'azione del campo gravitazionale. Pais suggerisce che il "metodo di Fermi" prevedesse anche l'inserimento nella Lagrangiana di un termine aggiuntivo che servisse proprio per

[30]Tale termine si ottiene sia dallo sviluppo delle metriche che contraggono i tensori $F^{\mu\nu}$ in (3.18) che dallo sviluppo del determinante della metrica.

[31]Infatti $h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em} = \bar{h}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em} - \frac{1}{2}\bar{h}T_{em} = \bar{h}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em}$, perché la traccia del tensore energia impulso del campo elettromagnetico T_{em} è nulla.

[32]Rosenfeld non la chiama così.

fissare la gauge, esattamente come si fa oggi[33] ([Pai88]; pag. 354). Rosenfeld non ci dice se lo aggiunge oppure no: l'effetto di tale termine è identico a quello che si ottiene imponendo $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, perché cancella esattamente il terzo termine della (3.21), ma le due procedure non sono equivalenti. Come vedremo più avanti il termine di gauge fixing verrà aggiunto da un altro fisico pochi anni più tardi. Veniamo ora alle considerazioni esplicitate da Rosenfeld, sempre in relazione al metodo di Fermi. L'autore specifica: 'Per il quanto di $\bar{h}_{\nu\rho}$ considereremo il metodo di Fermi attraverso la condizione (6). Ovvero, ci diamo questa condizione come l'analogo della condizione scelta da Fermi per estrarre una condizione a tempo $t = costante$'[34] ([Ros30a]; pag. 591). Abbiamo detto, nei primi paragrafi, che Fermi vede nella gauge di Lorenz per il campo elettromagnetico una condizione da imporre, al tempo $t = 0$, per definire i valori iniziali dello stato, condizione che dovrà poi essere soddisfatta anche per i tempi successivi: per il campo gravitazionale Rosenfeld evidentemente preferisce parlare, a nostro avviso, di valori scelti su una superficie a tempo costante. A questo punto l'autore fa subito le seguenti puntualizzazioni sulla condizione $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$: 'Bisogna osservare che tale relazione non si può interpretare come relazione tra q-numeri. È facile vedere che grazie alla condizione di conservazione $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ la condizione supplementare è compatibile con le equazioni di Einstein' ([Ros30a]; pag. 591). Rosenfeld è quindi conscio del fatto che anche per il caso del campo gravitazionale la gauge di De Donder non ha senso dal punto di vista operatoriale e va applicata a uno stato, benché non lo scriva esplicitamente. La compatibilità tra tale gauge e le equazioni di Einstein espressa dall'autore, in realtà, vale solo al prim'ordine: entrambe le questioni verranno riprese e discusse in maniera più ampia solo da Suraj N. Gupta ventidue anni dopo.

Consideriamo ora più in dettaglio il primo risultato raggiunto da Rosenfeld. Dopo aver scritto la Lagrangiana linearizzata (3.17), l'autore riporta la corrispondente *densità* di Hamiltoniana, senza mostrare il calcolo esplicitamente. A nostro avviso, analogamente a quanto farà nel lavoro successivo, definisce i momenti coniugati per il campo gravitazionale $\pi_{\mu\nu} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{h}}_{\mu\nu}}$ e per il campo elettromagnetico $p_\mu = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu}$, e fa una trasformata di Legendre,

[33]Nei tre lavori citati da Pais, Fermi effettivamente discute la questione dell'imposizione della gauge sulla funzione d'onda, ma non scrive alcuna Lagrangiana. Fermi descrive le variabili lagrangiane e i rispettivi momenti coniugati, ma scrive solo delle Hamiltoniane. Queste Hamiltoniane contengono però tutte le variabili coniugate, a differenza di quanto accade se non si fissa la gauge, come visto nei precedenti paragrafi. Da questo fatto sappiamo che Fermi deve aver aggiunto alla Lagrangiana il termine che oggi chiamiamo di gauge fixing.

[34]La "condizione (6)" corrisponde alla gauge di De Donder nel lavoro originale di Rosenfeld.

ottenendo così la densità di Hamiltoniana totale:

$$\mathcal{H}_{tot} = \pi_{\mu\nu}\dot{\bar{h}}^{\mu\nu} + p_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} = \mathcal{H}_{em} + \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_{int}. \tag{3.23}$$

L'autore ci presenta la densità di Hamiltoniana del campo gravitazionale e quella di interazione. Quella del campo gravitazionale è la seguente:

$$\mathcal{H}_G = -\frac{1}{4}\left(\dot{\bar{h}}_{\mu\nu}\dot{\bar{h}}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\dot{\bar{h}}^2\right) + \frac{1}{8}\left(\partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho}\partial^\mu \bar{h}^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu \bar{h}\partial^\mu \bar{h}\right), \tag{3.24}$$

dove il punto rappresenta la derivata temporale. Notiamo che tale Hamiltoniana è una funzione quadratica delle variabili $\bar{h}_{\mu\nu}$. La *densità* di Hamiltoniana di interazione è invece:

$$\mathcal{H}_{int} = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\bar{h}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em} - 2\bar{h}_{0\mu}T^{0\mu}_{em} - 2\bar{h}_{\mu\nu}F^{0\mu}F^{0\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{00}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + \bar{h}F_{0\mu}F^{0\mu}\right), \tag{3.25}$$

dove compaiono esplicitamente degli indici temporali, perché Rosenfeld dichiara di fissare la gauge ponendo $A^0 = 0$ analogamente a quanto operato da Heisenberg e Pauli ([Ros30a]; nota (*) pag. 591).

A questo punto Rosenfeld utilizza, come già accennato, la descrizione in termini degli operatori di creazione e distruzione del campo elettromagnetico. L'autore considera la *Hamiltoniana* totale, ovvero l'integrale spaziale della (3.23). Ricordiamo che anche noi, nel seguito, useremo la notazione dell'epoca, distinguendo tra densità di Hamiltoniane e Hamiltoniane indicando queste ultime con una barra. Anche la forma operatoriale, così come quella classica, risulta la somma di tre termini:

$$\bar{\mathcal{H}}_{tot} = \bar{\mathcal{H}}_{em} + \bar{\mathcal{H}}_G + \bar{\mathcal{H}}_{int}. \tag{3.26}$$

Il primo termine è la Hamiltoniana del campo elettromagnetico, che riportiamo per comodità,

$$\bar{\mathcal{H}}_{em} = \sum_{\alpha=1,2}\left(N_s + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_s\,, \tag{3.27}$$

dove, rispetto all'equazione (3.12), stiamo sottintendendo la somma sui vettori d'onda[35] per non appesantire la notazione. Il secondo termine è la Hamiltoniana del campo gravitazionale che si ottiene dalla (3.24), mentre il terzo termine contiene l'interazione tra i due campi elettromagnetico e gravitazionale, che deriva dalla (3.25)[36]. Per il campo gravitazionale e per la Hamiltoniana di interazione Rosenfeld *inserisce l'espressione della metrica trovata risolvendo l'equazione* (3.14), ovvero la metrica $h_{\mu\nu}\left(c_{ks}\,, c^\dagger_{ks}\right)$, per ottenere una

[35]Detto k^μ il vettore d'onda del fotone, ricordiamo che si ha $\omega = k = |\mathbf{k}|$

[36]Osserviamo che nel testo originale la prima e l'ultima Hamiltoniana vengono indicate rispettivamente con $\bar{\mathcal{H}}_L$ e con $\bar{\mathcal{M}}$. Anche nelle traduzioni manterremo la *nostra* notazione.

espressione finale che risulta proporzionale a $\varepsilon^2 \sim G$. Infatti, dalla (3.14) capiamo che l'espressione della perturbazione alla metrica piatta generata dal fotone è proporzionale a ε e quindi, quando inseriamo questa espressione in (3.17), otteniamo un'espressione proporzionale a ε^2, perché come già osservato $\bar{\mathcal{H}}_G$ è una funzione *quadratica* del campo $\bar{h}_{\mu\nu}$, mentre nel termine di interazione la metrica viene ancora moltiplicata per ε. Una approssimazione del prim'ordine in ε nella perturbazione alla metrica piatta produce dunque un'energia proporzionale al quadrato di ε.[37]

L'espressione finale che Rosenfeld ottiene per $\bar{\mathcal{H}}_G+\bar{\mathcal{H}}_{int}$ deriva solamente dal primo dei due termini. L'autore, infatti, nota che 'il termine dell'energia di interazione $\bar{\mathcal{H}}_{int}$ è nullo'[38] ([Ros30a]; pag. 595), e che quindi il contributo all'energia del campo gravitazionale deriva dai soli autovalori della Hamiltoniana $\bar{\mathcal{H}}_G$:

$$\bar{\mathcal{H}}_G = \frac{c^2h^2\varepsilon^2}{64\pi^2L^3}\sum_{rs}(cos\Theta_{rs}+1)+\frac{c^2h^2\varepsilon^2}{16\pi^2}\sum_{r}\frac{1}{L^3} \tag{3.28}$$

$$+ \frac{c^2h^2\varepsilon^2}{64\pi^2L^3}\sum_{rs}\frac{k_r^2+k_s^2}{k_rk_s}(2N_r+1)(2N_s+1)\ , \tag{3.29}$$

dove, come Rosenfeld, stiamo indicando con k_r e k_s i moduli dei vettori d'onda dei fotoni, gli indici r e s indicano le polarizzazioni come nel precedente paragrafo, N_r ed N_s sono gli autovalori degli operatori numero[39] che rappresentano il numero di fotoni con momento k_r e k_s, mentre $cos\Theta_{rs} = \frac{\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{k}_s}{k_rk_s}$. Rosenfeld ottiene di nuovo un'espressione della metrica dello spazio-tempo che contiene la costante di Planck[40]. A differenza del precedente capitolo, ora non riportiamo tale metrica, perché per renderla perspicua sarebbe necessaria una lunga digressione sulla notazione dell'autore. Questa è sicuramente *la prima volta* che la metrica e la Hamiltoniana del campo gravitazionale vengono scritte in maniera *operatoriale*. Anche quest'ultima, (3.28) (3.29), contiene la costante di Planck, e merita dunque un confronto con l'analogo classico. Rosenfeld presenta la Hamiltoniana nello stesso modo, ovvero su due righe, per precisare le seguenti osservazioni. 'Se avessimo avuto un pacchetto [d'onda] classico, si sarebbe dovuto sostituire $2N+1$ con $2N$ [...]'[41] ([Ros30a]; pag. 595) '[...] e si sarebbe dovuta cancellare la prima riga; in questo modo

[37]Questa precisazione è necessaria, perché in alcuni lavori dell'epoca si parla di approssimazione del primo ordine mentre in altri si legge di approssimazione del secondo ordine, ma si fa riferimento sempre allo stesso risultato. La confusione nasce forse proprio dal fatto che un'approssimazione al prim'ordine in ε della metrica produce un'energia proporzionale a ε^2.

[38]Non discuteremo il calcolo nel dettaglio. Ricordiamo che per l'autore la barra indica che si tratta di una Hamiltoniana e non di una densità di Hamiltoniana.

[39]Si riveda l'equazione (3.27).

[40]Questa volta $\hbar$ è contenuta nella definizione del campo elettromagnetico quantistico, si veda (3.11).

[41]L'autore sta facendo riferimento alla seconda riga (3.29).

avremmo avuto un risultato *finito* per l'energia'[42] ([Ros30a]; pag. 595). Infatti la riga (3.28) corrisponde all'usuale energia di punto zero del campo gravitazionale generato da un fotone[43]. L'autore continua: 'Quantisticamente, invece, ci sono dei pezzi che divergono per lunghezze d'onda arbitrariamente piccole e questo risultato persiste *anche se si inverte l'ordine degli operatori di creazione e distruzione per eliminare il problema dell'energia di punto zero*'[44] ([Ros30a]; pag. 596). Rosenfeld si rende dunque conto del fatto che, oltre a ottenere la solita divergenza dell'energia di punto zero, nel suo risultato si annidano degli infiniti che non hanno nulla a che fare con questa divergenza, e che quindi sono un risultato nuovo, ovvero la riga (3.29). L'autore non ha alcuno strumento per cercare di *regolarizzare* il risultato come si fa nella moderna teoria quantistica dei campi[45], perché tali strumenti verranno introdotti molto più tardi, quindi non gli resta che cercare di classificare qualitativamente le divergenze trovate. In riferimento alla (3.29) Rosenfeld scrive: 'Le quantità infinite sono di due tipi differenti: una è indipendente dal numero dei quanti di luce e una *anch'essa infinita* è proporzionale al numeri quantici della luce' ([Ros30a]; pag. 596). Infatti, sviluppando il prodotto $(2N_r + 1)(2N_s + 1)$ si ottiene una parte proporzionale agli operatori numero, ovvero al numero di fotoni dello stato considerato, e un termine indipendente da essi. L'autore analizza il passaggio al continuo, ovvero il limite $L \to +\infty$, dell'equazione (3.28)(3.29) e scopre che tali divergenze, legate a energie sempre più alte nello spazio degli impulsi[46], sono collegate con distanze sempre più piccole nello spazio delle configurazioni[47]. Tali divergenze sono quindi collegate con la descrizione *puntiforme* del fotone e Rosenfeld sottolinea come sia *palese* l'analogia con il caso dell'elettrone. Quello che non è esplicito nel lavoro di Rosenfeld è che tali infiniti derivano proprio dall'interazione tra campo gravitazionale ed elettromagnetico. Nel calcolo dell'autore, infatti, nonostante i termini divergenti derivino tutti dalla parte *cinetica* della Hamiltoniana, ovvero da $\mathcal{H}_G$, risultano indipendenti dall'ordine degli operatori di creazione e distruzione, e quindi devono essere indipendenti dall'energia di punto zero. L'esatta natura di questi nuovi infiniti verrà chiarita a breve da un collega di Rosenfeld.

---

[42] Il corsivo è nostro.

[43] Da non confondere con l'energia di punto zero della Hamiltoniana (3.27).

[44] Il corsivo è nostro. Come già detto, l'idea dell'ordinamento normale verrà introdotta ufficialmente più tardi, ma da questa osservazione di Rosenfeld, a nostro avviso, si può intuire che l'idea era già *ufficiosamente* diffusa.

[45] Ovvero una tecnica che permetta di "rendere finito" tale risultato per confrontarlo con i dati sperimentali.

[46] Per questo motivo oggi vengono chiamate divergenze *ultraviolette*.

[47] Si noti che nel limite $L \to +\infty$ il coefficiente davanti alle sommatorie in (3.28) e (3.29) tende a zero. Rosenfeld mostra che nonostante questo le divergenze permangono: è per questo motivo che verranno introdotti i *metodi di regolarizzazione* prima nominati nella teoria dei campi.

A questo punto Rosenfeld si occupa esplicitamente dei processi di *interazione* dal punto di vista quantistico tra un campo gravitazionale qualsiasi e un campo elettromagnetico qualsiasi. Il numero effettivo dei gradi di libertà di un'onda gravitazionale era noto: 'Grazie ad Einstein sappiamo che esistono due tipi di onde gravitazionali nel vuoto' ([Ros30a]; pag. 596) e usando la scelta della gauge si possono dunque annullare tutte le componenti della perturbazione alla metrica piatta tranne, per esempio[48], $h_{22} = -h_{33}$ e h_{23}. Tenendo conto di queste polarizzazioni Rosenfeld scrive uno sviluppo di Fourier analogo a (3.11), introduce gli autovalori dell'operatore che conta il numero di quanti gravitazionali[49] per ognuna delle due polarizzazioni, e li chiama $M_{k_r,1}$ e $M_{k_r,2}$. In questo modo gli autovalori della Hamiltoniana del campo gravitazionale assumono l'usuale forma degli autovalori dell'oscillatore armonico[50]:

$$\mathcal{H}_G = \sum_{k_r} \left\{ \left(M_{k_r,1} + \frac{1}{2} \right) + \left(M_{k_r,2} + \frac{1}{2} \right) \right\} h\nu_r \ . \tag{3.30}$$

Per discutere le interazioni tra campo gravitazionale ed elettromagnetico Rosenfeld considera la *densità* di Hamiltoniana di interazione. L'espressione classica si può ricavare da (3.22), perché $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$:

$$\mathcal{H}_{int} = -\frac{\varepsilon}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_{em} = -\frac{\varepsilon}{2} h_{\mu\nu} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \left(F_{\alpha\sigma} F_{\beta}{}^{\sigma} - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \ , \tag{3.31}$$

e possiamo notare, come fa Rosenfeld, che l'interazione è lineare in $h_{\mu\nu}$ e quadratica in $F^{\mu\nu}$. Da questo fatto l'autore deduce che 'in prima approssimazione[...] i processi coinvolgono un quanto gravitazionale e due quanti di luce [...] Indicando con t l'indice per i quanti gravitazionali, con r ed s quelli per i quanti di luce, dall'equazione (3.31) si ottiene un ampiezza di probabilità

$$\varepsilon^2 c^2 h \frac{k_r k_s}{k_t} \frac{1}{L^3} w_{rst} f(N_r\, , N_s\, , M_t\,) \ , \tag{3.32}$$

dove $f(N_r\, , N_s\, , M_t\,)$ sarà un prodotto dei fattori $N_r\, , N_s\, , M_t\, ;$ [...] mentre il fattore w_{rst} dipende dalle polarizzazioni [...]' ([Ros30a]; pag. 597-598).

Rosenfeld non entra nel merito del calcolo e si limita a *classificare* quei processi che noi oggi raffiguriamo tramite un unico grafico di Feynman in teoria quantistica dei campi. 'I processi di interazione si possono dunque così riassumere:

1. La distruzione di un quanto gravitazionale e la creazione di due quanti di luce [...];

[48] Anche la traccia e le componenti con un indice temporale sono nulle.
[49] Anche in questo caso, come nel riassunto, Rosenfeld usa la parola *Gravitationsquant*.
[50] Rosenfeld riporta solamente i risultati.

2. La distruzione di un quanto di luce e la creazione di un quanto gravitazionale e di un quanto di luce [...];

3. La distruzione di due quanti di luce e la creazione di un quanto gravitazionale [...];

4. La distruzione di un quanto di luce e di un quanto gravitazionale e la creazione di un quanto di luce [...]'

([Ros30a]; pag. 598).

Con questi commenti si conclude dunque il primo lavoro che si occupa della quantizzazione del campo gravitazionale. Rosenfeld è sicuramente cosciente del fatto che l'approccio da lui usato per questo lavoro trascura le caratteristiche di non linearità della Lagrangiana di Einstein-Hilbert. Nel lavoro seguente, infatti, tenta l'approccio che noi oggi chiamiamo *canonico*, scontrandosi però con la difficoltà, esemplificata nel paragrafo 3.1.1, della definizione dei momenti coniugati.

3.1.3 L'approccio canonico di Rosenfeld

Nel secondo lavoro dello stesso anno [Ros30b], Rosenfeld si occupa della quantizzazione *canonica* dei campi in generale, discutendo il ruolo delle relazioni di commutazione canoniche e la sostituzione delle variabili di campo classiche con operatori hermitiani. Il punto di partenza dell'autore è un'azione che contiene il campo elettromagnetico, il campo spinoriale e il campo gravitazionale. Rosenfeld affronta per la prima volta varie problematiche, legate alla presenza di momenti coniugati nulli e alla conseguente comparsa di *identità* che hanno il ruolo di vincoli. Poiché questo lavoro è stato già accuratamente tradotto e analizzato da Donald Salisbury [Sal09], ci limiteremo a riportare brevemente quanto fatto da Rosenfeld riguardo 'all'esempio particolarmente istruttivo della teoria della gravitazione' ([Sal09]; pag. 2)

Rosenfeld scrive l'azione del campo gravitazionale attraverso l'uso delle tetradi, usate per la prima volta proprio da Fock e Iwanenko [FI29] [EK88], che assumono il ruolo di variabili dinamiche al posto dei potenziali gravitazionali[51]. L'autore *non* scrive esplicitamente i momenti coniugati, né l'espressione della Hamiltoniana per il caso del campo gravitazionale, ma ragiona ugualmente sulle regole di commutazione canonica da imporre alle tetradi[52]. Rosenfeld nota per la prima volta che le regole di commutazione devono

[51]Poiché Rosenfeld vuole trattare *assieme* gravitazione e campo di Dirac, l'uso delle tetradi è obbligato per studiare la dinamica dei campi spinoriali su varietà curve, come è appunto lo spazio-tempo in RG.

[52]Nella parte del lavoro in cui Rosenfeld cerca di analizzare il ruolo dei vincoli nella dinamica hamiltoniana l'autore commette, a detta di Salisbury un errore che si riflette nell'assenza, nel caso esplicito del

essere imposte utilizzando i *commutatori quantistici* come accade nel caso del campo elettromagnetico e a differenza di quanto accade per il campo di Dirac per il quale si usano gli *anticommutatori*. Da questo fatto Rosenfeld deduce dunque che nella teoria dei campi sviluppata da Heisenberg e Pauli il campo gravitazionale deve corrispondere a un campo con spin intero, che obbedisce quindi alla statistica di Bose-Einstein.

3.2 1931-1933: i primi sviluppi

Come detto più volte, i lavori di Rosenfeld sono un punto di partenza e segnano l'inizio di un nuovo periodo. Cominciamo dunque a vedere quali sviluppi hanno stimolato.

3.2.1 Solomon e l'energia gravitazionale della luce

Abbiamo detto che in [Ros30a] Rosenfeld nota sia la presenza di divergenze dovute all'energia di punto zero, sia la presenza di nuovi tipi di divergenze. Nel 1931 Rosenfeld si trova a Parigi per tenere un corso all'Istituto Henry Poincaré, nel quale sottolinea che, dal suo punto di vista, le divergenze dovute all'energia di punto zero sono dovute solamente a un problema del formalismo. A questo corso assiste Jacques Solomon, già suo amico[53], il quale propone a Rosenfeld di affrontare la ricerca di una formalizzazione scevra da questo problema. Basandosi su un lavoro di Landau e Peierls [LP30], i due riescono effettivamente a trovare un modo, che pubblicano, per descrivere quantisticamente il campo elettromagnetico, *senza* che nella Hamiltoniana libera compaia l'energia di punto zero[54]. Solomon cerca poi di sviluppare le conseguenze di tale formalismo da solo applicandole al campo gravitazionale generato dal fotone [Sol31a]. In questo lavoro Solomon riprende il risultato principale del formalismo sviluppato con Rosenfeld, ovvero una Hamiltoniana per il campo elettromagnetico che ha la seguente forma[55]:

$$\mathcal{H}_{em} = \sum_k (N_{1k} + N_{2k})\, \hbar\omega_k, \tag{3.33}$$

campo gravitazionale, proprio di alcuni vincoli sulle tetradi. Per i dettagli tecnici si rimanda alle note [18] e [56] di [Sal09].

[53] Il legame tra i due e i dettagli di questo incontro sono riportati in [CS79].

[54] Si tratta di un metodo non convenzionale e completamente differente dall'introduzione dell'ordinamento normale. Solomon infatti introduce per il campo elettromagnetico un tensore dalle componenti *complesse*. La disamina dei particolari tecnici su cui si basa il metodo di Solomon va oltre gli scopi del nostro lavoro.

[55] Nella (3.33) abbiamo esplicitato le due polarizzazioni come fatto da Solomon.

dove si può notare la *mancanza* del termine divergente dovuto all'energia di punto zero[56]. Con questo differente approccio anche il tensore energia impulso assume una forma differente che, seguendo il percorso tracciato da Rosenfeld nel lavoro del 1930, Solomon inserisce nelle equazioni di Einstein linearizzate (3.14) per ottenere una differente espressione della perturbazione alla metrica piatta[57] nella forma $h_{\mu\nu}\left(c_{k\alpha}\,,c^{\dagger}_{k\alpha}\right)$. Usando questa nuova espressione Solomon ottiene delle espressioni differenti per le Hamiltoniane cinetica e di interazione del campo gravitazionale. In particolare, a differenza di quanto accade nel lavoro di Rosenfeld, il contributo della parte cinetica non risulta identicamente nullo. Combinando assieme i suoi due risultati, ovvero le espressioni per $\mathcal{H}_G$ e $\mathcal{H}_{int}$, l'autore ottiene un risultato che confronta con quello di Rosenfeld. Riportiamo di seguito le due espressioni, quella ottenuta da Rosenfeld[58]:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_G+\mathcal{H}_{int} &= \frac{c^2h^2\varepsilon^2}{64\pi^2L^3}\sum_{rs\alpha\beta}(cos\Theta_{rs}+1)+\frac{c^2h^2\varepsilon^2}{16\pi^2}\sum_{r\alpha}\frac{1}{L^3} &(3.34)\\ &+ \frac{c^2h^2\varepsilon^2}{64\pi^2L^3}\sum_{rs\alpha\beta}\frac{k^2_{r\alpha}+k^2_{s\beta}}{k_{r\alpha}k_{s\beta}}(2N_{r\alpha}+1)(2N_{s\beta}+1) &(3.35)\end{aligned}$$

e quella ottenuta da Solomon:

$$\mathcal{H}_G+\mathcal{H}_{int}=\frac{c^2h^2\varepsilon^2}{16\pi^2L^3}\sum_{rs\alpha\beta}\frac{k^2_{r\alpha}+k^2_{s\beta}}{k_{r\alpha}k_{s\beta}}N_{r\alpha}(N_{s\beta}+1)\,. \tag{3.36}$$

Il commento dell'autore sul confronto tra le due espressioni è il seguente. 'Attraverso un confronto con il nostro risultato [...] notiamo che nel nostro approccio i membri della prima riga spariscono; evidentemente si mescolano con l'energia di punto zero' ([Sol31a]; pag. 169). Solomon riesce quindi a distinguere *esplicitamente* tra la divergenza dovuta all'energia di punto zero, rappresentata dai termini che *mancano* nella (3.36) rispetto alla (3.34), e le *nuove divergenze*, che si trovano dentro la (3.36). Solomon infatti confronta (3.35) con (3.36): '[...] si devono confrontare anche il prodotto

$$(2N_{r\alpha}+1)(2N_{s\beta}+1)=4N_{r\alpha}N_{s\beta}+2N_{r\alpha}+2N_{s\beta}+1 \tag{3.37}$$

con

$$4N_{r\alpha}N_{s\beta}+4N_{r\alpha}\;. \tag{3.38}$$

[56]Si confrontino (3.33) e (3.12).

[57]Per non appesantire la notazione indichiamo ancora con le stesse lettere gli operatori di creazione e distruzione $c_{k\alpha}$ e $c^{\dagger}_{k\alpha}$, che però sono *differenti* dagli operatori di Rosenfeld.

[58]Come Solomon, diversamente dall'equazione (3.28), stiamo indicando esplicitamente la somma sui momenti con gli indici latini r ed s, mentre la somma sulle polarizzazioni con gli indici greci α e β.

Ancora il membro indipendente dal numero dei quanti di luce sparisce' ([Sol31a]; pag. 169). L'autore sottolinea ancora che nel confronto tra il termine (3.38) ottenuto dallo stesso non compare il termine dovuto all'energia di punto zero rappresentato dal termine costante di (3.37) che deriva dal risultato di Rosenfeld. Gli altri due termini danno invece lo stesso contributo[59]. Solo uno dei due termini della (3.38) produce la divergenza: 'Naturalmente, come nel lavoro di Rosenfeld, l'energia di interazione di un quanto di luce con il suo campo gravitazionale vale:

$$\frac{c^2h^2\varepsilon^2}{16\pi^2L^3}\sum_{r\alpha}\frac{k_{r\alpha}^2+k_{s\beta}^2}{k_{r\alpha}k_{s\beta}},$$

e risulta quindi infinita' ([Sol31a]; pag. 169), infatti nella sommatoria sopravvivono solamente due dei quattro indici.

Il risultato di Solomon, quindi, mette comunque in evidenza la presenza di una quantità che diverge, ma riesce a individuare esplicitamente che l'origine della divergenza è nel termine di *interazione*, perché nel proprio approccio l'energia di punto zero viene eliminata a priori e quindi spariscono anche tutti i termini divergenti derivanti dall'energia di punto zero. Solomon conclude il lavoro col seguente commento: 'Abbiamo quindi mostrato, che la difficoltà principale del metodo di quantizzazione dei campi non risiede nell'energia di punto zero della radiazione. Tale energia infatti è solamente un termine di tipo additivo e non gioca alcun ruolo nell'interazione con altre onde (materiali o gravitazionali). Il problema principale della teoria quantistica non risiede nemmeno nell'eliminazione di tali termini infiniti di tipo additivo, bensì in una corretta formulazione dell'energia di interazione' ([Sol31a]; pag. 170). L'autore, dunque, riesce a chiarire che l'origine dei nuovi infiniti trovati da Rosenfeld risiede nel termine di interazione tra campo gravitazionale ed elettromagnetico, quella che oggi chiameremmo dunque *auto-energia gravitazionale del fotone*. Solomon tornerà ancora sulla questione degli infiniti, utilizzando ancora il proprio approccio per quanto riguarda il campo elettromagnetico, e ribadirà ancora quanto ottenuto nell'articolo appena analizzato. Infatti, in un lavoro seguente [Sol31b], dopo aver mostrato che anche per l'elettrone si ottengono delle divergenze che nascono dall'interazione tra il campo di Dirac e il campo elettromagnetico, fa la seguente osservazione: 'Il calcolo ottenuto conferma [...] che la difficoltà della teoria è ben più profonda di quanto potrebbe sembrare in apparenza, ed è la teoria dell'interazione che viene messa in discussione. Si arriva a una conclusione analoga nello studio dell'interazione tra le onde elettrostatiche e le onde gravitazionali' ([Sol31b]; pag.335).

[59]Rinominando gli indici il contributo di $2N_{r\alpha}+2N_{s\beta}$ è lo stesso di $4N_{r\alpha}$.

3.2.2 Approcci indiretti

Oltre agli approcci diretti, ovvero quelli che tentano la quantizzazione del *campo* gravitazionale, continuano anche gli approcci che potremmo definire indiretti, ovvero quelli che cercano di armonizzare RG e MQ senza affrontare la questione della quantizzazione del campo.

Un approccio indiretto è quello delle teorie di unificazione: come già accennato, la speranza degli autori che continuano per questa strada è che l'armonizzazione tra RG e MQ passi attraverso un nuovo modo di includere tutti i campi in un unico, nuovo quadro unitario. Nel 1931, Hoffmann, dopo aver tentato con Veblen la via dell'unificazione attraverso una versione quadridimensionale della teoria di Klein usando la geometria proiettiva, tenta di introdurre l'equazione di Dirac. In una lettera di due pagine all'editore della rivista *Physical Review* [Hof31] Hoffmann annuncia di esserci riuscito. Nella lettera descrive brevemente come è riuscito a scrivere un'equazione che contiene, a detta dell'autore, l'equazione di Dirac come caso particolare *quando si trascura la gravità*[60]. La lettera si conclude con la speranza che 'il sistema completo [di equazioni] costituirà una migliore unificazione della teoria della relatività degli aspetti gravitazionali, elettromagnetici e quantistici'. ([Hof31]; pag.89). In realtà, da quanto ci risulta, Hoffmann non ritornerà più su questo aspetto e anzi, come vedremo nel prossimo paragrafo, non menzionerà più l'ipotesi avanzata in questa comunicazione.

Nel capitolo precedente abbiamo visto che alcuni autori tentano di percorrere una strada differente, avanzando l'ipotesi di un quanto elementare temporale che esprima il legame tra la natura quantistica della materia e la natura dello spazio-tempo. Questa idea viene rilanciata anche in quest'anno in una lettera all'editore di *Nature* scritta da F. O. Wollaston e K. W. Miller [WM31]. I due autori vedrebbero un collegamento tra l'idea del quanto temporale, il problema della freccia del tempo e una sua possibile origine statistica, cercando di riallacciarsi alle idee di Eddington. La lettera è molto breve e poco dettagliata: il suggerimento sembra più una mera speculazione. Nello stesso volume di *Nature* [Pok31], un'altra lettera all'editore scritta da Pokrowski sottolinea come il quanto temporale indicato da Wollaston e Miller sia lo stesso che era stato suggerito da Lévi, Prokowski stesso e altri autori, come accennato anche da noi nel precedente capitolo.

Sempre nell'ambito dell'idea della "granulosità" dello spazio-tempo troviamo il tentativo di Arthur Ruark [Rua31], il quale prova ad affrontare, anche se in maniera molto superficiale, l'ipotesi di uno spazio-tempo discreto. L'autore immagina che lo spazio-tempo

[60] Ancora una volta non riportiamo il risultato di Hoffmann, perché per rendere perspicua la notazione dell'autore si renderebbe necessaria una lunga digressione.

possa essere una sorta di *reticolo*: 'D'altra parte, potremmo supporre che la varietà spazio-tempo sia semplicemente un aggregato discreto di punti evento, analoga a una rete due o tre-dimensionale, come il reticolo di un cristallo' ([Rua31]; pag. 324). Ruark dunque sembra avanzare un'ipotesi analoga a quella avanzata da Heisenberg l'anno precedente, in cui lo spazio è discreto, mentre il tempo è ancora un parametro continuo. L'autore suggerisce quindi l'uso delle equazioni alle differenze finite in luogo delle usuali equazioni differenziali. Ruark continua: 'Il problema di definire una geodetica in questo reticolo non è facile, come ha evidenziato Silberstein nel suo "Teoria della Relatività". Questi suggerisce che la "distanza più breve" tra due punti a e b in un tale reticolo [...] debba essere definita come il più piccolo numero di passi che porta da a a b' ([Rua31]; pag. 324). Ruark mette in evidenza come una simile definizione di geodetica soffra del fatto che sarebbe una definizione *ambigua*, perché in un reticolo più cammini con lo stesso numero di passi hanno eguale lunghezza[61]. L'autore non approfondisce ulteriormente la questione, ma il seguente commento di Ruark ci fa capire come le sue speculazioni fossero legate alla questione della misurabilità dello spazio: 'In vista dell'esistenza di un limite all'accuratezza con cui una coordinata può essere misurata, ci dovremmo aspettare che il concetto di minima distanza abbia un significato non ben definito nel dominio atomico' ([Rua31]; pag. 324).

Un altro approccio *indiretto* per cercare di descrivere la forza gravitazionale è quello suggerito da Eddington a cui abbiamo accennato nel primo paragrafo del Capitolo 1. Ricordiamo che discutendo il ruolo della lunghezza di Planck Eddington sottolineava l'importanza di conoscere la *causa ultima* della gravitazione, e auspicava che fosse la formulazione di una teoria microscopica della materia a far emergere la natura ultima della gravitazione[62]. Nel 1931 il fisico francese Alfred Kastler discute proprio una possibile origine microscopica della forza gravitazionale [Kas31]. Kastler non cita Eddington *direttamente*, ma inizia il lavoro citando Jean Bequerel: 'È importante notare che la deformazione dello Spazio-Tempo non può essere considerata la *causa* della gravitazione. [...] La causa prima resta un profondo mistero' ([Beq22]; pag. 142). Ma il trattato riunisce delle lezioni tenute da Bequerel tra il 1921 e il 1922, in cui Becquerel discute le idee di Eddington stesso. Anche Kastler è affascinato dall'idea che le particelle elementari siano continuamente in movimento e dal fatto che le forze di origine dinamica dette forze inerziali, come le chiama l'autore, potrebbero offrire una spiegazione dell'origine della gravitazione. Per giustificare questo fatto Kastler fa appello al principio di equivalenza,

[61]La questione delle geodetiche verrà riaffrontata nel calcolo inventato dal fisico italiano Tullio Regge negli anni sessanta.

[62]Ricordiamo che a tal proposito Eddington citava il tentativo di Reynolds.

secondo il quale non è possibile distinguere tra la forza gravitazionale e le forze inerziali. L'autore immagina quindi che possa esistere un modello che spieghi la gravità a partire dalle forze d'inerzia dei costituenti microscopici, costituenti che per Kastler seguono le leggi della fisica quantistica. Il fisico francese non fornisce i particolari tecnici di questo modello, che si basa solamente su alcune intuizioni, demandando ad altri la formulazione matematica. Vediamo alcuni dei brevi commenti fatti dall'autore. Kastler, a nostro avviso, ritiene il modello plausibile, perché asserisce che il 'dinamismo interno della materia ha carattere universale' ([Kas31]; pag. 63), facendo evidentemente riferimento all'universalità della forza di gravità, e sottolinea che l'universalità del dinamismo interno della materia è stato dimostrato sperimentalmente. Con il termine *dinamismo interno della materia* Kastler fa riferimento a due "moti" particolari: la "rotazione intrinseca" delle particelle elementari, ovvero lo spin[63] e la frequenza di "vibrazione" ν, legata all'energia dalla legge di Planck[64]. Il fisico francese sarà sempre molto attivo nell'ambito della fisica *sperimentale*[65] e come detto, non fornisce i particolari *teorici* di questo modello. Kastler sottolinea ovviamente come la propria idea, per essere sostenuta, dovrà essere corredata da un nuovo formalismo matematico. Il fisico francese aggiunge che da tale formulazione, se il suo modello di rappresentazione microscopica della forza gravitazionale dovesse essere corretto, dovrebbe permettere di derivare una relazione *numerica* tra la costante di gravitazione universale e la costante di Planck, visto che quest'ultima è legata sia allo spin delle particelle elementari che alla frequenza di vibrazione ν, cioè e a quel "dinamismo" interno della materia di cui ha precedentemente parlato.

Concludiamo questo paragrafo occupandoci degli approcci indiretti che nascono dalle riflessioni in ambito cosmologico. In questi anni comincia a emergere la necessità di discutere il ruolo della MQ nella storia dell'Universo. Infatti, come riporta Odon Godart ([God92]; pag 444), alla fine del 1931 Georges Lemaître esprime l'opinione che la MQ giochi un ruolo *fondamentale* nella descrizione dei primi istanti dell'Universo, suggerendo che sia necessario considerare sia gli effetti della RG che quelli della MQ. In questa considerazione è racchiuso il significato del promettente titolo della comunicazione a *Nature* che compare l'anno seguente [Lem32]: 'Origine del Mondo dal punto di vista della Teoria

[63]Ricordiamo che Friedrich Hund aveva avanzato l'ipotesi teorica che il protone avesse lo stesso spin dell'elettrone [Hun27] nell'ambito dell'analisi delle linee spettrali dell'idrogeno, ambito in cui Kastler stava lavorando in quel periodo, e ricordiamo anche che la verifica sperimentale di tale ipotesi era giunta da soli due anni, nel 1929, a opera di Paul Harteck and Karl Friedrich Bonhoeffer, i quali erano riusciti a sintetizzare per la prima volta il para-idrogeno [Pre34].

[64]Kastler scrive, in maniera naïf, la seguente uguaglianza: $E = mc^2 = h\nu$, mettendo così in relazione la massa con la costante di Planck.

[65]Nel 1966 Kastler verrà insignito del Premio Nobel.

Quantistica'. Godart afferma che in [Lem32] l'autore introduce la prima idea di Big Bang, come concentrazione di tutta la materia in un "atomo primitivo". L'idea dell'atomo primitivo prenderà corpo con gli anni, ma non farà mai riferimento alla MQ, come suggerito invece in questa comunicazione. In questi anni l'idea di un Universo in espansione andava ancora consolidandosi e non tutti gli autori avevano ancora abbandonato l'idea, introdotta da Einstein, dell'esistenza di una costante cosmologica. Nel 1931 esce per esempio un lavoro di Eddington [Edd31], il quale, a partire dalla formulazione dell'equazione di Dirac in uno spazio-tempo curvo ipotizza una possibile relazione tra la massa dell'elettrone e la costante cosmologica. Eddington ottiene un risultato teorico che è in accordo con il valore sperimentale misurato al tempo tramite la recessione delle nebulose a spirali[66].

A questo punto ci spostiamo in Italia per analizzare due differenti prospettive. La prima è quella di un lavoro di rassegna che ci permetterà di raccontare come erano stati recepiti all'inizio degli anni Trenta i tentativi di armonizzazione tra MQ e RG da noi analizzati nei capitoli precedenti. La seconda prospettiva invece sarà quella fornita dai contributi originali di due autori italiani, che affronteremo nel paragrafo 3.2.4.

3.2.3 Dalla Noce e la visione dall'Italia

Anche l'Italia viene raggiunta dall'eco dei lavori di Rosenfeld e di tutti i problemi della fisica teorica di cui abbiamo parlato nel capitolo precedente. Tra il 12 e il 18 Settembre del 1931 si tiene la XX riunione della *Società Italiana per il Progresso delle Scienze* a Milano: 'Alla Sezione di Fisica, presieduta degnamente e infaticabilmente dal prof. E. Persico, è stato sempre numeroso e attivo il gruppo dei nostri Soci, sì da costituire la quasi totalità dei presenti' [Var31] Di lì a poco, dall'11 al 18 ottobre, si terrà anche il primo *Congresso di Fisica Nucleare*, a Roma, a cui interverrà anche Rosenfeld per parlare proprio delle nuove difficoltà della nuova teoria quantistica dei campi. Di tutto questo abbiamo memoria grazie a un lavoro di rassegna che riporta l'intervento alla riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze a opera di G. Dalla Noce [Dal32]. Cominciamo dunque a occuparci di questo lavoro di rassegna per tornare poi ancora a parlare di Rosenfeld.

Per noi il lavoro di rassegna di Dalla Noce è interessante innanzitutto perché l'autore ci presenta la ricerca di un possibile punto di incontro fra gravità e teoria quantistica come un *esplicito programma di ricerca* già all'inizio del 1930. L'autore infatti sottolinea come la ricerca di una teoria *unitaria* passi attraverso la creazione di una cornice che racchiuda

[66] Per un'analisi dettagliata di questo lavoro si veda l'articolo di Ian T. Durham [Dur03], mentre per un'analisi più ampia del ruolo di Eddington si veda per esempio la dissertazione di dottorato di Durham [Dur05].

in maniera coerente le tre teorie note all'epoca, gravitazionali, elettriche e materiali[67], e parlando dei possibili approcci alla risoluzione del problema afferma: 'Per giungere a quest'unità la via più naturale è quella di procedere a tappe, cioè unire dapprima in una sola teoria la gravitazione e l'elettricità e poi cercare il legame di questa teoria *unificata* colla teoria della materia o quantica; oppure unire l'elettricità e la materia nella cosiddetta *elettrodinamica quantica* e poi cercare i legami di questa col campo gravitazionale' ([Dal32]; pag. III). Dalla Noce inserisce i lavori di Rosenfeld sulla quantizzazione dei campi, compreso quello gravitazionale, proprio nel secondo filone di ricerca. Nel proprio lavoro di rassegna, Rovelli è convinto che un ruolo simile venga giocato da un lavoro di Charles Misner alla fine degli anni cinquanta[68] [Mis57]: 'il lavoro si apre con una discussione sulle possibili direzioni per quantizzare la gravità, covariante, canonica e somma sulle storie [...]' ([Rov00]; pag. 8). Rovelli poi sottolinea che 'alla fine degli anni cinquanta tutte le idee base e i programmi di ricerca sono chiari' ([Rov00]; pag. 8) e conclude in questo modo il paragrafo dedicato a quella che lui definisce come la preistoria della GQ. A nostro avviso, invece, *già dall'inizio degli anni trenta* la questione della quantizzazione della gravità viene vissuta come uno specifico programma di ricerca: la differenza tra i due periodi sta solo nel fatto che non si era ancora compreso che nel caso della gravità molti degli strumenti teorici che avrebbero funzionato per gli altri campi non avrebbero prodotto gli stessi effetti per la RG.

L'articolo di Dalla Noce è però importante anche perché ripercorre molti dei tentativi citati da noi nei precedenti capitoli, ovvero Weyl, London, Flint, Tamm, Fock, Klein, Wataghin, Carrelli, evidenziando, come abbiamo fatto anche noi, che in tutti questi approcci viene sottolineata l'importanza dell'obiettivo di conciliare la forza gravitazionale con la Meccanica Ondulatoria. Accanto a questi vi sono altri autori, sia della fine degli anni venti che degli anni dal 1930 al 1932, che non tratteremo[69]. Un tentativo riportato dall'autore e a cui accenneremo velocemente è quello di W. Alexandrow. Riportiamo i rilievi fatti da Dalla Noce sul lavoro di Alexandrow senza fare riferimento ai lavori originali che sono in tedesco[70], perché quello che ci interessa maggiormente è come venga recepito questo lavoro in Italia. Per Dalla Noce quello di Alexandrow è 'un altro studio completo

[67]Il lavoro esce nel 1932, ma viene spedito nell'ottobre del 1931: il positrone sarà scoperto solo nell'agosto del 1932 [And33].

[68]In questo lavoro si introdurrà inoltre un terzo filone di ricerca nato dall'idea dell'integrale sui cammini di Feynman. Misner citerà esplicitamente Rosenfeld [Ros30a] come uno dei padri dell'approccio covariante.

[69]Ci riferiamo ai tentativi di Mandel, Yakov Frenkel, Cornel Lanczos, Raschko Zaykoff che sono già riportati da [Goe04] e al lavoro del matematico italiano Paolo Straneo, anch'esso menzionato in [Goe04] e che è incentrato *solamente* sull'unificazione classica di gravità ed elettromagnetismo.

[70]I lavori dell'autore vengono citati tutti in [Dal32].

sul problema generale materia-elettricità-gravitazione' ([Dal32]; pag. XIII). Dalla Noce sottolinea come l'approccio di Alexandrow sia scritto usando un formalismo poco convenzionale, seguendo l'approccio di Frenkel, in cui l'equazione di Dirac non viene scritta utilizzando un formalismo covariante. La nuova formalizzazione permette di mettere in evidenza, sebbene con l'aggiunta di nuove ipotesi rispetto all'approccio di Frenkel, una nuova analogia tra le equazioni di Dirac, dove compare la lunghezza Compton dell'elettrone ($\frac{h}{mc}$), e una versione delle equazioni dell'elettromagnetismo, dove dovrebbe comparire, secondo Alexandrow, il raggio R dell'Universo. Dalla Noce fa notare come le nuove ipotesi introdotte da Alexandrow non siano ancora sperimentalmente provate, ma espone comunque alcuni particolari dell'approccio. Nella parte finale del paragrafo Dalla Noce riporta: '[...] non resta che introdurre i potenziali gravitazionali per avere le equazioni materiali nel campo gravitazionale' ([Dal32]; pag. XV). Questo commento ci fa capire che anche nel lavoro di Alexandrow la gravità non viene quantizzata e possiamo quindi affermare che l'approccio di Alexandrow è semi-classico. Tutti i contributi presentati da Dalla Noce fino all'ultimo paragrafo non affrontano questo problema. L'unico che ha provato a trattare quantitativamente il campo gravitazionale come un ente *quantistico*, come riporta lo stesso autore, è proprio Rosenfeld: '[...] la fusione dell'elettrodinamica quantica [...] colla gravitazione è stata seguita finora soltanto da Rosenfeld in Zurigo' ([Dal32]; pag. XIX). Dalla Noce riporta dell'approccio hamiltoniano in cui si gettano le basi per la quantizzazione canonica delle variabili di campo *generiche* Q_α e delle loro coniugate e conclude: "Rappresentando le Q_α i potenziali Φ, i podi e i ψ, la funzione lagrangiana abbraccia allora i campi elettromagnetico, materiale e gravitazionale'[71] ([Dal32]; pag. XIX) Il lavoro di rassegna di Dalla Noce è stato scritto verso la fine del 1931 e l'autore viene a conoscenza, in fase di correzione, anche di un terzo lavoro di Rosenfeld, nel quale il fisico belga 'sviluppa ampiamente e mirabilmente il proprio metodo di quantizzazione dei campi fisici' ([Dal32]; pag. XIX; nota (^{5})) ovvero [Ros32]. Dalla Noce parla di questo lavoro, aggiungendo il seguente commento: 'Il punto di vista generale dei gruppi scelto dall'A. [autore], gli permette una trattazione sintetica quantica e geometrica dei tre fenomeni fisici fondamentali, ma non ancora una chiara illustrazione delle loro interazioni e particolarità' ([Dal32]; pag. XIX)

Nel paragrafo finale dal titolo 'Termine della Rassegna' Dalla Noce riassume quanto visto e sottolinea come 'non ancora si sono superate le difficoltà delle singole teorie prese a sole o quelle delle parziali sintesi' ([Dal32]; pag. XIX): l'autore fa riferimento al fatto che sia l'approccio dell'unificazione sia quello della nascente teoria quantistica dei campi

[71] Come si evince anche dal testo, i potenziali Φ sono quelli del campo elettromagnetico, la funzione ψ è quella del campo spinoriale, mentre i *podi* sono le tetradi.

non sono ancora riuscite a fornire un quadro che inglobi *tutte* le forze allora note. È a questo punto che apprendiamo dell'importanza del congresso tenutosi a Roma nell'ottobre del 1931. In questo congresso infatti sono state discusse: 'la difficoltà del trattare in modo corretto la variabile tempo nell'unione della relatività ristretta colla meccanica quantica e, nello stesso schema, la diversità delle masse del protone e dell'elettrone, i valori negativi dell'energia, l'energia infinita dell'elettrone' ([Dal32]; pag. XX), ovvero tutti i problemi di primo piano della fisica teorica del periodo. Riguardo all'ultimo punto citato da Dalla Noce, ovvero il problema dell'energia infinita dell'elettrone, chi si occupa di relazionare su tema, al congresso di Roma, è proprio Rosenfeld. Il fisico belga infatti, nel suo intervento [Vol32], riporta lo stato dei progressi sul problema degli infiniti nella teoria quantistica dei campi, sottolineando la differenza tra i vecchi infiniti, quelli dell'energia di punto zero, e i nuovi infiniti, quelli che rendono infinite le ampiezze di transizione. Dopo aver sottolineato che il metodo messo a punto da lui e da Solomon mette in luce la natura puramente formale dell'energia di punto zero, pone l'accento sul fatto che la difficoltà più grande è rappresentata dai nuovi infiniti, che nel caso dell'elettrodinamica, sono dovuti all'interazione tra campo di Dirac ed elettromagnetico, e hanno origine nella natura puntiforme dell'elettrone. A questo punto richiama anche il caso analizzato da lui e da Solomon, l'auto-energia gravitazionale del fotone, per ribadire che anche in questo caso la difficoltà deriva dal termine di interazione, questa volta tra campo elettromagnetico e gravitazionale, e che anche in questo caso la natura della divergenza è collegata con la natura puntiforme del fotone ([Vol32]; pag. 133).

Come riportato da Dalla Noce, di lì a poco uscirà anche il terzo lavoro di Rosenfeld [Ros32], dove quest'ultimo tenta ancora di affrontare in maniera sistematica il problema della quantizzazione dei campi nella sua generalità. Soffermiamoci dunque brevemente su questo ulteriore contributo di Rosenfeld. In questo lavoro il fisico belga riporta anche alcune osservazioni sulla questione dell'introduzione di una lunghezza minima a opera di altri autori, per evitare le divergenze che nascono per esempio dalla natura puntiforme dell'elettrone. Parlando dei lavori di Heisenberg [Hei30] e di Ambarzumian e Iwanenko [AI30], a differenza di quanto abbiamo suggerito noi, Rosenfeld interpreta l'introduzione di una lunghezza minima come un carattere di realtà dello spazio-tempo, e la critica nel seguente modo: 'Dividiamo lo spazio in celle cubiche (per esempio) di lato r_0 e supponiamo che le posizioni ammissibili per un elettrone siano soltanto i nodi. Le equazioni differenziali verranno allora rimpiazzate da equazioni alle differenze e l'energia propria dell'elettrone risulterà finita. Questo modello ha l'inevitabile difetto di non essere relativisticamente invariante' ([Ros32]; pag 78), mettendo quindi in evidenza il fatto che il concetto di lunghezza minima introdotto come fanno gli autori rompe l'invarianza di Lorentz. A questo punto, di nuovo cita il proprio articolo del 1930 e il conseguente lavoro di Solomon per sottolineare che 'una difficoltà analoga si presenta ancora, indipendentemente da tutti i campi materiali, se si calcola [...] l'energia del campo gravitazionale generato da un fotone: anche qui si trovano termini infiniti dovuti a una singolarità di tipo puntiforme' ([Ros32]; pag 78) È chiaro ormai che qualunque tipo di progresso passa dunque dalla formulazione di un nuovo approccio per trattare l'interazione nella teoria quantistica dei campi in generale. Come sappiamo oggi, il primo banco di prova sarà l'elettrodinamica dove verrà applicata con successo.

Gli autori che si occupano di argomenti di fisica teorica in Italia all'inizio degli anni Trenta sono pochi. Se restringiamo il cerchio a quelli che riflettono sul rapporto tra RG e MQ otteniamo un numero esiguo. Uno dei nomi degni di nota che abbiamo già incontrato alla fine del secondo capitolo è quello di Gleb Wataghin. La famiglia del fisico, di origine ucraina, era emigrata in Italia e Wataghin, tra la fine degli anni Venti e l'inizio degli anni Trenta, è libero docente presso l'Università di Torino. Wataghin, nel 1932, comincia a porsi il problema *preliminare* della compatibilità delle relazioni di Heisenberg con la Relatività Ristretta[72] [Wat32]. Per questo motivo non ci soffermeremo su questi contributi dell'autore. Torneremo a parlare brevemente di Wataghin verso la fine di questo capitolo e più ampiamente nel prossimo. Per quanto riguarda l'introduzione delle relazioni di indeterminazione nell'ambito della Relatività Ristretta diciamo che si capirà a breve che le usuali relazione di indeterminazione sono ben definite solo quando si considerano campi non interagenti. Nell'attuale teoria quantistica dei campi sopravvivono delle relazioni di indeterminazione, ma tra i campi.

Poiché abbiamo considerato la questione della compatibilità tra le relazioni di Heisenberg e la struttura dello spazio-tempo restiamo in questo frangente un altro lavoro di rassegna. Con l'inizio del 1932 Hoffmann scrive un lavoro di rassegna sulla RG per la rivista *Review of Modern Physics*. Come detto nel precedente paragrafo, anche per un relativista come Hoffmann la questione della quantizzazione del campo gravitazionale è una questione non trascurabile. Nonostante l'anno precedente l'autore avesse proposto una possibile strada per armonizzare la RG con i principi quantistici, nell'introduzione al lavoro di rassegna l'autore sottolinea la decisione di non trattare gli aspetti quantistici nel lavoro di rassegna: 'La teoria della relatività generale è [...] una teoria classica e un'estensione appropriata che abbracci le idee della teoria quantistica non è ancora nota. Rimane comunque la migliore teoria dei fenomeni gravitazionali e risolve le maggiori

[72] Di questa compatibilità si erano già occupati anche Schrödinger e i fisici russi Landau e Peierls negli anni precedenti, mentre Nathan Rosen e Vallarta [RV32] pubblicano un contributo indipendente nello stesso anno. Per alcuni approfondimenti si rimanda a [HU14].

difficoltà incontrate dalla teoria newtoniana' ([Hof32]; pag. 174). La mancanza della trattazione degli aspetti quantistici, come l'autore stesso sottolinea, non è però dovuta alla non volontà di discutere alcuni aspetti, ma è dettata dalla necessità di non discutere le *relazioni di indeterminazione* per la RG. Infatti l'aggettivo *classica*, per Hoffmann, fa riferimento al fatto che 'la teoria della relatività generale è basata sull'assunzione che le misure possano essere fatte con un qualsiasi grado di accuratezza e gli effetti di una misura sul sistema osservato possono essere trascurati' ([Hof32]; pag. 174). Evidentemente Hoffmann non era più convinto, al contrario di quanto suggerito l'anno precedente, che fosse necessario introdurre l'equazione d'onda di Dirac per armonizzare le due teorie. L'annotazione dell'autore ci fa capire come la sua attenzione fosse rivolta piuttosto alla necessità di discutere la compatibilità delle relazioni di Heisenberg con la RG.

Restiamo ora in Italia e passiamo ad analizzare i contributi originali di due autori che si distinguono nettamente rispetto a tutti i lavori esposti sino a ora.

3.2.4 La prima volta della geometria non commutativa

I tentativi di unificazione tra MQ e RG che abbiamo analizzato nel precedente capitolo si basavano praticamente tutti sull'idea che fosse sufficiente introdurre un'equazione d'onda nello spazio-tempo curvo. Tale idea prendeva spunto dalla formulazione della MQ nota come Meccanica Ondulatoria. Ricordiamo però che le formulazioni della MQ all'epoca erano due, entrambe equivalenti, ma con linguaggi assolutamente differenti: la Meccanica Ondulatoria e la Meccanica delle Matrici. Mentre la prima formulazione tentava di mantenere l'idea del continuo attraverso la descrizione ondulatoria, l'altra formulazione proponeva l'utilizzo di grandezze *non-commutanti* per la trattazione dei fenomeni atomici. Tra il 1930 e il 1931 compare, a nostro avviso, il primo tentativo di unificazione tra MQ e RG che prende spunto dalla Meccanica delle Matrici, a opera di due italiani: Bruno Finzi e Zeno Pycha. Pur essendo un contributo isolato, infatti a quanto ci risulta i loro lavori non verranno mai citati[73], l'approccio iniziato da Finzi e continuato indipendentemente da Pycha è il primo che cerca di introdurre esplicitamente la geometria non-commutativa. Pur non avendo portato a ulteriori sviluppi, vale la pena parlarne perché si tratta di un

[73]La Meccanica delle Matrici sarà fonte di ispirazione per tutti gli approcci basati sull'utilizzo del concetto di non commutatività per conciliare MQ e RG. Il tentativo seguente che partirà esplicitamente da uno spazio-tempo non commutativo, per esempio, sarà quello di Hartland S. Snyder [Sny47a] [Sny47b], che tratteremo in un lavoro futuro, e che però non cita i lavori di Finzi. Come vedremo nel prossimo capitolo anche Max Born prenderà in considerazione, pur non partendo dalla Meccanica delle Matrici, l'idea di uno spazio-tempo con coordinate non commutative.

approccio articolato dagli autori in più di un lavoro. Per comprendere meglio il tentativo dei due italiani conviene fare prima una breve digressione sulla Meccanica delle Matrici.

La Meccanica delle Matrici

L'approccio noto come Meccanica delle Matrici partiva da un'intuizione di Heisenberg [Hei25] che venne formalizzata poi da Heisenberg, Born e Jordan [BJ25], [BHJ26]. La Meccanica delle Matrici si fonda sul presupposto che l'analisi fisica di un fenomeno quantistico debba partire esclusivamente da quantità osservabili e associa a ogni osservabile una matrice[74], ma le matrici in generale obbediscono a un'algebra non commutativa, in contrasto con le quantità dell'algebra ordinaria dei numeri. Seguendo il principio di corrispondenza, si assume che le equazioni della dinamica contenenti matrici, siano formalmente identiche alle corrispondenti della meccanica classica. Vediamo brevemente alcuni dettagli tecnici[75].

Il modello di Kramers del 1924 per la diffusione della luce era basato sull'idea che 'la reazione di un atomo alla radiazione incidente possa essere formalmente comparata con l'azione di un insieme di oscillatori armonici virtuali dentro l'atomo [...]' ([Kra24]; pag. 673). A partire dall'idea che 'qualcosa oscillasse' ([van67]; pag.29), il lavoro di Kramers forniva delle regole che permettevano di calcolare le probabilità nei processi di emissione e assorbimento della luce. Heisenberg sosteneva le medesime posizioni di Kramers e sulla questione i due pubblicheranno un articolo [KH25]. Alla base dell'approccio di Kramers vi era il principio di corrispondenza e l'idea di costruire una teoria che si emancipi dall'idea classica dei moti orbitali. Per Heisenberg quello di Kramers era un primo passo verso la costruzione di una descrizione quanto-meccanica in cui comparissero solo *quantità osservabili*[76], come lo stesso autore dichiara nel 1925. Il "positivismo" proprio di questo *manifesto* di Heisenberg riemergerà a più riprese nella storia della teoria dei campi quantistici, per esempio in occasione dell'introduzione della matrice S e della ripresa delle relazioni di dispersione negli anni Cinquanta del Novecento, sebbene l'attuale teoria dei campi sia ben lungi da questo ideale.

Il punto di partenza per Heisenberg, nel 1925, era quindi la necessità di *reinterpretare*[77] la descrizione *classica* dell'oscillatore armonico e anarmonico, per definirne una

[74] Si tratta di matrici *infinito-dimensionali* che oggi chiamiamo *operatori*.

[75] Per un approfondimento maggiore si veda, per esempio [Iac10].

[76] Accanto alle ampiezze anche le frequenze di emissione erano legate da delle regole di somma di carattere quantistico formulate da Ritz. Il principio di combinazione di Ritz è il seguente [Bor07]. Detta $\nu(n,k)$ la frequenza di emissione per il salto quantico tra due livelli di energia E_n ed E_m vale la seguente regola: $\nu(n,k)+\nu(k,m)=\nu(n,m)$.

[77] La parola tedesca spesso citata nei lavori di storia della fisica quantistica è *Umdeutung*.

quantistica. Per Heisenberg è possibile conservare le equazioni classiche dell'oscillatore, ma è necessario cambiare l'interpretazione *cinematica* della variabile posizione. La variabile *classica* $x(t)$, soluzione dell'equazione $\ddot{x}(t) + f(x) = 0$, se è periodica può essere rappresentata tramite uno sviluppo in serie di Fourier. Heisenberg la scrive nel seguente modo ([Hei25]; pag. 882):

$$x(n,t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} U_\alpha(n) e^{i\alpha\omega_n t} \,, \tag{3.39}$$

introducendo il numero quantico principale n. Dal punto di vista *quantistico* però, come sottolinea subito lo stesso Heisenberg, non è più possibile scrivere una relazione che leghi le ampiezze $U_\alpha(n)$ e la rappresentazione quantistica della variabile $x(t)$ come la (3.39). Heisenberg decide quindi di definire come rappresentante *quantistico* della variabile posizione l'insieme delle seguenti quantità ([BJ25]; pag. 866):

$$x_{nm}(t) = x_{nm} e^{i\omega_{nm} t} \qquad , \qquad \omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} \,, \tag{3.40}$$

dove le ω_{nm} sono le frequenze di transizione tra due stati di energia E_n ed E_m, e compaiono dei termini x_{nm} labellati da due indici[78]. In questo modo, come si resero conto Born e Jordan, a una variabile classica veniva associata formalmente una variabile quantistica che è una matrice infinito dimensionale. Queste matrici danno luogo a un'algebra non commutativa, e Born e Jordan dimostrano che le vecchie regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld[79] assumono la seguente forma[80] ([BJ25]; pag. 870):

$$\sum_r p_{rm} x_{nr} - x_{rn} p_{mr} = \frac{\hbar}{i} \delta_{mn} \,, \tag{3.41}$$

dove x_{nm} e p_{nm} sono i rappresentanti quantistici[81] di due qualsiasi variabili classiche coniugate x e p, come in (3.39).

In questo approccio emerge dunque in maniera naturale il carattere *non commutante* delle variabili coniugate che descrivono il mondo microscopico[82]. Una conseguenza di questo fatto, ampiamente trattata da Heisenberg Born e Jordan, è la necessità di generalizzare i concetti propri dell'analisi matematica all'algebra delle matrici. Si pensi, a titolo

[78] Si impone la condizione di realtà $x^*_{nm}(t) = x_{nm}(t)$.

[79] Born e Jordan le chiamano condizioni di quantizzazione di Thomas e Kuhn, ma sono le condizioni (1.1).

[80] Abbiamo riportato la forma presente nel lavoro originale perché sarà più conveniente per un futuro confronto. La versione operatoriale moderna con gli operatori posizione X e impulso P è $[X\,,\,P] = i\hbar 1$.

[81] Per le variabili $p_{nm}(t)$ vale una definizione simile alla (3.40). In (3.41) inoltre abbiamo sottinteso la dipendenza temporale.

[82] È proprio nel 1925 che compare per la prima volta la relazione tra due variabili coniugate q e p $qp - pq = i\hbar 1$, contemporaneamente nel lavoro di Born e Jordan ([BJ25]; pag. 876), e nel lavoro di Dirac ([Dir25]; pag. 647).

di esempio, alla necessità di definire il concetto di derivata di una matrice rispetto a un parametro t, necessario per definire le variabili quantistiche $\dot{x}_{nm}(t)$, nel caso più generale possibile. Un'altra conseguenza è che le stesse variabili posizione, nel caso più generale, potrebbero non commutare tra di loro. Si tratta di una questione delicata che per esempio Dirac discute brevemente nel seguente modo. Il fisico inglese considera esplicitamente due variabili quantistiche x e y, e definisce il 'prodotto quantistico' $(xy)_{nm}$ nel seguente modo: $(xy)_{nm} = \sum_k x_{nk} y_{km}$. Dirac scrive esplicitamente: 'In generale $(xy)_{nm} \neq (yx)_{nm}$ e la moltiplicazione quantistica non è commutativa [...]' ([Dir25]; pag. 644). In questo senso è plausibile discutere la necessità di considerare varietà non commutative e questo sarà proprio il punto di partenza del matematico italiano Finzi, che tenta di conciliare il concetto di spazio-tempo della RG con quello suggerito dalla Meccanica delle Matrici. Prima di proseguire però va detto che in MQ valgono le seguenti relazioni tra le variabili posizione $[x, y] = 0\,;\ [x, z] = 0\,;\ [y, z] = 0$, come nella meccanica classica. Tali relazioni sono conseguenza del fatto che Dirac osserva, proprio nel 1925, che vi è un'analogia formale tra le parentesi di Poisson tra due variabili coniugate, $\{q\,, p\} = 1$, e la regola di moltiplicazione di Heisenberg, e utilizza questo fatto come punto di partenza: 'Facciamo l'assunzione fondamentale che la differenza tra i prodotti di Heisenberg e due quantità quantistiche sia uguale al prodotto tra $i\hbar$ e l'espressione delle parentesi di Poisson. In simboli $xy - yx = i\hbar\,\{x\,, y\}$ ' ([Dir25]; pag. 648). Grazie a questa assunzione due variabili posizione tra loro commutano come nella meccanica classica. Come vedremo a breve, nei lavori degli italiani l'analogia formale con le parentesi di Poisson non viene mai menzionata.

L'approccio di Finzi

Bruno Finzi, alla fine degli anni Venti del Novecento, era assistente del matematico Umberto Cisotti presso il Politecnico di Milano e diventerà titolare della cattedra di di Meccanica Razionale all'Università di Milano nel 1931. I lavori del matematico si posizionano temporalmente proprio in questi anni. Come per i tentativi esposti nel capitolo precedente non si parlerà esplicitamente di effetti quantistici della gravitazione, ma il riferimento a una natura quantistica dello spazio-tempo sottintende ovviamente la questione. L'approccio *moderno* che utilizza la geometria non commutativa nascerà più di trent'anni dopo: in maniera indiretta con la teoria delle stringhe, dove si ritrova il carattere non commutativo delle coordinate dello spazio-tempo che emergono dalla teoria stessa, e in maniera diretta con i lavori di Alain Connes, che partiranno però da un approccio più algebrico, ispirato dai lavori di John von Neumann pubblicati proprio nei primi anni trenta[83]. Tali approcci moderni, dunque, si basano su risultati che Finzi non aveva modo di conoscere. Il matematico italiano interpreta alla lettera il significato delle matrici di Heisenberg immaginandole come le etichette che indicizzano i punti della varietà spazio-tempo. Per generalizzare l'approccio di Heisenberg l'autore suppone dunque che le singole coordinate dello spazio-tempo debbano essere essere sostituite con oggetti matematici ancora più generali, chiamati dall'autore *sistemi multipli*, e che oggi noi chiameremmo semplicemente *tensori*. Sottolineiamo subito che Finzi tratterà la questione della non-commutatività delle coordinate spazio-temporali in maniera non del tutto convincente, e sarà in quest'ambito che Pycha tenterà di dare un'interpretazione più fisica del modello proposto da Finzi.

Nonostante sia mosso dall'obiettivo di risolvere un problema di tipo fisico, nei primi due lavori che pubblica Finzi si prodiga innanzitutto per elaborare l'apparato teorico formale che sta alla base del proprio approccio con uno stile deduttivo tipico di un matematico. Nel primo lavoro[84] infatti [Fin30] dichiara: 'Sono stato indotto a considerare nella loro generalità sistemi multipli e le operazioni relative, e a considerare altresì sistemi funzioni di altri sistemi, estendendo a tali funzioni il calcolo differenziale ordinario e il calcolo differenziale assoluto, *dal desiderio di istituire, seguendo lo schema della relatività generale di Einstein, la teoria della relatività dei fenomeni di irradiamento atomico.*'[85] ([Fin30]; pag. 631). Ma poi conclude la brevissima introduzione specificando: 'Mi riprometto di sviluppare l'argomento in una prossima Nota, alla quale la presente e la successiva serviranno da preambolo analitico' ([Fin30]; pag. 631). Partiamo dunque dall'analizzare i particolari tecnici dei due lavori introduttivi, [Fin30] e [Fin31a], che prendono spunto dai lavori originali di Heisenberg, Born e Jordan [BJ25] e [BHJ26].

Finzi introduce i sistemi multipli di ordine h, che corrispondono ai tensori con h indici[86], e che noi indicheremo brevemente con il simbolo $\vec{x}_h = x_{i_1,\dots,i_h}$. Gli indici non sono di tipo spazio-temporale, ma, come per la Meccanica delle Matrici, possono assumere i valori che vanno da 1 a ∞, perché rappresentano le "transizioni" tra i possibili "stati" di un sistema. Come sottolineato da Finzi, le matrici di Heisenberg corrispondono al caso $h = 2$. Mentre le operazioni di somma, sottrazione e moltiplicazione per una costante sono definite nel modo usuale, per il prodotto tra tensori l'autore definisce un prodotto particolare. Dati due tensori $\vec{x}_h$, con h indici, e $\vec{y}_k$, con k indici, e posto $r < h$ ed $r < k$,

[83]Non approfondiremo i lavori di von Neumann, perché, a quanto ci risulta, non ha mai affrontato il rapporto tra la non commutabilità dello spazio-tempo e la teoria della gravitazione.

[84]Questo primo lavoro del 1930 non è stato trattato prima, perché risulta più coerente presentare tutto il lavoro di Finzi in questo paragrafo.

[85]Il corsivo è nostro.

[86]D'ora in poi useremo solo il termine moderno *tensori*.

il *prodotto di ordine* r tra i due tensori corrisponde alla *saturazione degli ultimi* r *indici di* $\vec{x}_h$ con i primi r indici di $\vec{y}_k$:

$$\vec{x}_{h+k-2r} = \vec{x}_h \cdot \vec{x}_k = \sum_{l_1,\dots,l_r} x_{i_1,\dots,i_{h-r},l_1,\dots,l_r}\, y_{l_1,\dots,l_r,j_1,\dots,j_{k-r}}. \tag{3.42}$$

Come sottolinea Finzi, posto $h = k = 2$ e preso $r = 1$ la definizione appena data corrisponde all'usuale prodotto tra matrici. A questo punto l'autore definisce le potenze e l'elemento neutro del prodotto $\vec{\delta}_{2r}$: tale elemento neutro ha come elementi non nulli solo gli elementi della diagonale principale ed esiste solo se il numero degli indici è pari. Finzi, per i suoi scopi, si concentrerà sui tensori con $2r$ indici e sul prodotto di ordine r. In questo modo, infatti, ci assicura che è possibile definire il quoziente tra due tensori, destro e sinistro, e in particolare il *reciproco* $\vec{x}_{2r}^{-1}$ di un tensore, cosa abbastanza inusuale per noi oggi. Infine Finzi definisce le funzioni di tensori attraverso uno sviluppo in serie di potenze, perché, come dice l'autore stesso: 'sono queste particolari funzioni che [...] si debbono considerare nella meccanica di Heisenberg' ([Fin30]; pag. 635), facendo riferimento al fatto che Heisenberg, Born e Jordan si erano occupati solamente di funzioni polinomiali. Finzi definisce tutto l'apparato matematico che gli permette di arrivare a definire la derivata di un tensore e i differenziali $d\vec{x}$ di un tensore[87], che sono a loro volta dei tensori[88].

Prima di proseguire spendiamo due parole sulla questione della derivata di un tensore, che crea dei problemi a Finzi. Come detto, l'autore cerca di armonizzare la RG con una generalizzazione della Meccanica delle Matrici ed è interessato quindi a trovare un modo per definire l'usuale elemento di linea, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, utilizzando però il nuovo formalismo dei tensori. Finzi però vuole ottenerne una generalizzazione che conservi la proprietà di simmetria della metrica. Il problema è dunque questo: se in generale due tensori tra loro non commutano, anche i differenziali, che nell'approccio di Finzi sono dei tensori, non commuteranno e si perderebbe dunque una proprietà fondamentale del tensore metrico, ovvero la sua simmetria. Questo è il punto meno convincente del metodo proposto

[87] D'ora in avanti ometteremo il pedice che rappresentava il numero degli indici, perché come detto, Finzi considera solo il caso in cui *tutti* i tensori hanno $2r$ indici e il prodotto è fatto saturandone r.

[88] In questo fatto c'è sicuramente un punto di contatto tra la geometria non-commutativa introdotta da Finzi e quella introdotta da Connes: in entrambe le formulazioni i differenziali sono rappresentati da degli operatori. Per il primo però tali operatori sono rappresentati da tensori definiti su uno spazio reale, mentre per il secondo saranno operatori su uno spazio di Hilbert. I due approcci infatti, pur avendo intenzioni simili, hanno punti di partenza differenti, dovuti al fatto che Finzi non poteva conoscere alcuni risultati noti a Connes. Accenniamo solamente al fatto che la costruzione di Connes prende spunto da un teorema di Gelfand, Naimark e Segal che collega gli spazi di Hilbert con gli spazi di funzioni, teorema che verrà dimostrato dieci anni più tardi dell'approccio di Finzi.

dal matematico. Infatti nel secondo lavoro [Fin31a], il matematico cerca di "aggirare" la questione. Grazie a una serie di condizioni e all'utilizzo del 'calcolo differenziale unico' ([Fin31a]; pag. 10) Finzi dichiara che è possibile far convivere sia il fatto che le coordinate siano *non-commutanti*, sia il fatto che i differenziali siano *commutanti*. Con questa premessa ogni punto dello spazio-tempo è rappresentato da una quaterna di tensori di ordine $2r$, $\vec{x}^{\mu} = (\vec{x}^0, \vec{x}^1, \vec{x}^2, \vec{x}^3)$ e l'elemento di linea viene generalizzato nel seguente modo:

$$d\vec{s}^{\,2} = \vec{g}_{\mu\nu}\,(\vec{x})\,d\vec{x}^{\mu}d\vec{x}^{\nu}, \tag{3.43}$$

dove la funzione di tensori $\vec{g}_{\mu\nu}\,(\vec{x})$ rappresenta la generalizzazione del tensore metrico cercata da Finzi e soddisfa ancora una volta alla relazione $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Finzi recupera dunque tutto l'apparato matematico della RG, pur sostituendo alle singole coordinate dei tensori non commutanti.

Con il terzo lavoro, [Fin31b], Finzi si dedica alla descrizione delle implicazioni fisiche dell'introduzione di uno spazio-tempo, che l'autore chiama 'cronotopo', con queste nuove caratteristiche. Per prima cosa l'autore afferma esplicitamente che gli indici dei tensori rappresentano le possibili transizioni tra stati quantici, come nel caso della Meccanica delle Matrici. Poi precisa che dei quattro tensori che definiscono un punto nello spazio-tempo quello che definisce il tempo avrà una forma speciale e sarà rappresentato da una matrice che ha elementi non nulli solo sulla diagonale, tutti uguali al prodotto ct, dove c è la velocità della luce e t l'usuale coordinata temporale[89] ([Fin31b]; pag. 119). Nel resto del lavoro tutte le formule introdotte da Finzi sembrano delle generalizzazioni puramente formali di quelle già note, come accade per esempio per l'elemento di linea (3.43). L'aspetto più interessante di questo lavoro è il seguente. Finzi vuole mostrare che il proprio modello produce, ogni volta utilizzando particolari approssimazioni, la meccanica quantistica e quella classica, relativistica e non. Questo punto di vista *unitario*, probabilmente comune a tutti quelli che si occupavano delle questione dell'unificazione, non ci risulta sia mai stato presentato in maniera così esplicita. Si ritrova qualche anno dopo nei primi lavori di Matvei P. Bronstein usciti nel 1933, dove Bronstein parla del *magico cubo* $c\,G\,h$ e del cui lavoro parleremo in un paragrafo successivo[90]. In particolare Finzi sottolinea che a partire dal proprio modello può riottenere la '*meccanica quantistica*', considerando il limite in cui c è molto grande ([Fin31b]; pag. 122). Per fare questo però deve anche imporre che le coordinate commutino tra loro, ma che non commutino con le rispettive variabili coniugate. Infatti le usuali relazioni della meccanica di Heisenberg, nel formalismo

[89] Questo è decisamente un altro punto che rende poco chiara la trattazione del matematico. Con questa scelta il tempo commuterà con tutte le altre coordinate.

[90] Il pensiero di Bronstein riguardo al cubo $c\,G\,h$ è stato analizzato in dettaglio da Gorelik ([EK92]; pag. 371).

di Finzi sono le seguenti ($i, j = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}\vec{x}^i \cdot \vec{x}^j &= \vec{x}^j \cdot \vec{x}^i \\ \vec{p}^i \cdot \vec{p}^j &= \vec{p}^j \cdot \vec{p}^i \\ \vec{p}^i \cdot \vec{x}^j &- \vec{x}^j \cdot \vec{p}^i = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij}\vec{\delta},\end{aligned} \tag{3.44}$$

dove $\vec{\delta}$ è l'elemento neutro del prodotto. Finzi è soddisfatto del fatto che nel proprio approccio le condizioni di Heisenberg appaiano come un *caso particolare*[91] e non indaga ulteriormente: 'Si è così istituita la teoria generale della relatività nei fenomeni dell'irradiamento atomico, teoria che comprende come casi di approssimazione la meccanica di Heisenberg [...], la meccanica classica [...] e la ordinaria meccanica einsteiniana dell'irradiamento atomico' ([Fin31b]; pag. 124). Da quanto ci risulta, non approfondirà *mai* le conseguenze generali della scelta di coordinate non-commutabili.

Alcuni lavori di Zeno Pycha

Pycha, originario della città di Bolzano, si laurea al Politecnico di Milano in Matematica Applicata nell'anno in cui Finzi comincia a insegnare all'Università di Milano. Il fisico bolzanino lavora per un breve periodo come ricercatore poi diventa docente di una scuola secondaria della città di Udine. Pycha si occupa di approfondire quello che Finzi aveva tralasciato, ovvero il significato fisico generale dell'introduzione di coordinate non-commutative nella descrizione del campo gravitazionale, e cerca contemporaneamente di sviluppare le stesse tecniche introdotte da Finzi per lo spazio-tempo della teoria di Weyl, quello in cui compare anche il "campo elettromagnetico"[92], di cui si era già occupato[93]. Anche il fisico bolzanino incontrerà notevoli difficoltà nel giustificare fisicamente l'introduzione di coordinate non-commutanti che appariranno, anche nel lavoro di Pycha, solo come un artificio matematico.

Nell'introduzione al primo lavoro [Pyc32a] Pycha spiega le motivazioni del proprio approccio. 'La Fisica classica ritiene che tutti i fenomeni [...] si possano ricondurre a

[91]Infatti, se si considerano tensori di ordine 2, come già detto il prodotto (3.42) è quello di ordine 1, cioè l'usuale prodotto tra matrici, i tensori di Finzi si riducono alle matrici di Heisenberg-Born-Jordan e la terza delle (3.44) diventa la (3.41), scritta appunto da Born e Jordan.

[92]Ricordiamo che nella teoria di Weyl si introduce un quadrivettore A^μ, che Weyl suggeriva di identificare con l'insieme dei potenziali elettromagnetici. Tale interpretazione aveva già suscitato motivate perplessità da parte Einstein e condivise anche dallo stesso Weyl. Non sappiamo se Pycha ne fosse a conoscenza, presumiamo di no visto come il fisico bolzanino ne sostiene convintamente l'identificazione col campo elettromagnetico. Per ricordare al lettore tale problematicità utilizzeremo le virgolette.

[93]La tesi di laurea di Pycha aveva il seguente titolo: "Sul campo metrico di Weyl nel microcosmo". Abbiamo deciso di rimandare a lavori futuri l'ulteriore approfondimento di questo lavoro di Pycha.

fenomeni meccanici [...] Ma negli ultimi decenni problemi concreti [...] allontanarono la fisica dalla accennata concezione meccanica dell'universo [...] per opera dell'Einstein [...] alla « concezione meccanica dell'universo » subentrò la sua « **concezione geometrica** »' ([Pyc32a]; pag. 166). L'autore, come altri prima di lui, era convinto che il principio base dell'unificazione dovesse essere un principio di carattere geometrico. È in tale ottica che va letto l'utilizzo della teoria di Weyl da parte del fisico bolzanino, teoria che per l'autore risulta una 'interpretazione dell'universo [...] completa' ([Pyc32a]; pag. 167), proprio perché Pycha sposa l'interpretazione di Weyl del campo vettoriale A^μ come potenziale per il campo elettromagnetico. Sull'onda di questa idea continua: 'Vi è però da osservare che i fenomeni fisici elementari avvengono essenzialmente nel mondo atomico, ed è noto che tra la fisica del macrocosmo e quella del microcosmo [...] sussistono notevoli discrepanze [...] Viene quindi naturale il tentativo di cercare un'interpretazione geometrica anche per l' « aspetto quantistico » del microcosmo' ([Pyc32a]; pag. 167). Infine l'autore chiosa: 'Farò vedere come l' « aspetto quantistico » del microcosmo può spiegarsi geometricamente, attribuendo al cronotopo una certa struttura *fibrosa* (« Spazio reticolare finziano »)'[94] ([Pyc32a]; pag. 167). Dopo aver riassunto brevemente la RG e la teoria di Weyl, l'autore si occupa della 'geometria del microcosmo' e cerca di occuparsi del significato fisico di uno spazio-tempo con coordinate non-commutative: 'La concezione geometrica dell'universo della fisica weyliana appare completa dal punto di vista macrocosmico; non mi risulta invece che sia stata tentata un'interpretazione geometrica dell' «aspetto quantistico » della fisica microcosmica. Diremo ora di uno spazio metrico in cui tutti i fenomeni fisici elementari attualmente conosciuti, *aventi carattere quantistico* trovano un'interpretazione geometrica [...] cerchiamo di estendere la fisica weyliana al microcosmo' ([Pyc32a]; pag. 173). Questo commento mette in evidenza il fatto che Pycha non conosceva, per esempio, di Wiener e Struik da noi analizzati, e che utilizzano proprio la geometria di Weyl nel microcosmo. Pycha riparte introducendo al posto di ogni singola coordinata dello spazio-tempo un tensore e richiama il fatto che in generale il prodotto di due tensori non è commutativo. Pycha utilizza lo stesso formalismo, le stesse notazioni e la stessa definizione per il prodotto tra tensori introdotti da Finzi: i tensori hanno dunque rango $2r$ e il prodotto è quello di ordine r. Il fisico bolzanino sottolinea che: 'se [...] nel nostro cronotopo consideriamo due generici punti infinitamente vicini, $P\,(\vec{x}^i)$ e $P'\,(\vec{x}^i + d\vec{x}^i)$,

[94]Il corsivo è nostro. La parola *fibrosa* potrebbe ricordare la moderna parola matematica *fibrato*, ma non vi è alcuna analogia tra i due concetti.

sussisteranno in generale le disuguaglianze:

$$\begin{aligned} d\vec{x}^i \cdot d\vec{x}^j &\neq d\vec{x}^j \cdot d\vec{x}^i \\ \vec{x}^i \cdot d\vec{x}^j &\neq d\vec{x}^j \cdot \vec{x}^i \qquad i,j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Da ciò si apprende che l'ordine dei singoli fattori nelle due forme fondamentali caratterizzanti la metrica con un dato riferimento ha un'importanza essenziale' ([Pyc32a]; pag. 174). Pycha ritorna quindi sul problema di Finzi, ovvero come conciliare la non commutatività delle coordinate con la necessità di definire un tensore metrico simmetrico. Il fisico bolzanino nota che per poter imporre le condizioni di Heisenberg (3.44) è necessario postulare l'esistenza di "coordinate" commutabili, oltre a quelle non-commutanti. Pycha quindi ammette l'esistenza di entrambe le possibilità per ogni punto dello spazio-tempo e indaga sulla struttura dello stesso.

I punti infinitamente vicini, per esempio $P_1\,(\vec{x}^i)$ e $P_2\,(\vec{x}^i + d\vec{x}^i)$, le cui coordinate però *commutano* assumono un ruolo speciale e meritano un nome. Pycha li chiama 'immediatamente vicini' ([Pyc32a]; pag. 176). L'autore vede questi punti come un sottoinsieme della varietà di partenza ed è interessato alla descrizione delle proprietà indotte dalla proprietà di essere *immediatamente vicini*. 'Immaginiamoci ora *ordinato* l'insieme dei punti del nostro cronotopo, in maniera tale che due punti infinitamente vicini [...] abbiano le coordinate commutabili tra loro, siano cioè [...] « immediatamente vicini ». Potremo allora considerare le *linee*, su cui due punti successivi hanno sempre coordinate commutabili [...] L'insieme delle linee così considerate costituisce, per così dire, un « *reticolo* » [...]: queste linee escono da ogni punto « in tutte le direzioni uniche »'[95] ([Pyc32a]. pag. 180). Per l'autore quello appena descritto è proprio lo spazio-tempo quantistico. È uno spazio-tempo in cui ci sono sia punti le cui coordinate commutano, sia punti le cui coordinate non commutano. Questi ultimi, sottolinea l'autore, sono i punti *non infinitamente vicini*, per i quali *non è necessario* richiedere la commutabilità. A nostro avviso, questa precisazione di Pycha fa emergere il carattere *locale* della geometria di Weyl. Per il fisico bolzanino, dunque, lo spazio-tempo quantistico è quindi una sorta di "spazio quoziente" in cui le "classi d'equivalenza" sono rappresentate da queste linee, composte ognuna da punti le cui coordinate commutano, mentre le coordinate di un punto di una qualsiasi linea non commuterà con le coordinate di un punto appartenente a un'altra linea: 'Nulla ci vieta di *risguardare* il reticolo [...] esposto come l'espressione del « campo metrico quantistico » [...] l' « *aspetto quantistico* » *del microcosmo può considerarsi come una proprietà geometrica insita alla « struttura reticolare » del cronotopo* (^{2})'[96] ([Pyc32a]; pag.

[95]La parola *direzioni uniche* fa riferimento alla costruzione di un differenziale "speciale" chiamato *unico* da Finzi.

[96]Il corsivo è nostro: *risguardare* è sinonimo di *considerare*.

181). Nella nota alla fine della frase e nelle righe successive, Pycha introduce il termine *struttura fibrosa*, motivandolo come un riferimento alle linee di un tessuto. Il paragrafo si chiude con un'osservazione: 'Resta ancora da vedere se questo spazio reticolare sia, o non sia connesso, cioè se sia possibile passare, « senza uscire dai fili del reticolo », da un punto P a un punto P' qualsiasi, avente coordinate non commutabili con quelle di P' ([Pyc32a]; pag. 181) Il tempo, rappresentato da un tensore diagonale anche per Pycha, è sicuramente connesso, ma per quanto riguarda lo spazio, l'autore si riserva di ritornare sulla questione in un lavoro seguente.

In [Pyc32b] infatti Pycha riprende la questione affermando: '[...] ho voluto concepire il cronotopo come l'insieme di tutte le linee costituite dai punti immediatamente vicini. Con ciò imponevo alla varietà dello spazio-tempo nel microcosmo una certa qual struttura fibrosa [...] ho voluto interpretare la sua struttura fibrosa come l'espressione geometrica del carattere quantistico dei fenomeni fisici elementari, appartenenti al microcosmo' ([Pyc32b]; pag. 822). Da questa affermazione sembra emergere come tutte le coordinate debbano commutare tra loro e ancora non è chiaro il ruolo di quelle non-commutative. Pycha aggiunge la seguente osservazione, che non era emersa nel primo lavoro. 'È però da osservarsi che [...] punti immediatamente vicini si conservano tali attraverso un cambiamento di riferimento, ciò che dà precisamente l'invarianza alla struttura del reticolo, immedesimato con lo spazio finziano. Di conseguenza non può scegliersi, come nel cronotopo *macrocosmico*, qualsiasi punto come origine, $O \equiv (0, 0, 0, 0)$, delle coordinate, ma saranno suscettibili di tale scelta manifestamente soltanto i punti di coordinate *isotrope*; [...] [che] si conservano tali attraverso un cambiamento di riferimento'[97] ([Pyc32b]; pag. 822). L'osservazione è interessante perché sembra finalmente chiarire che c'è una differenza, per Pycha, tra lo spazio-tempo del macrocosmo e quello del microcosmo. Riguardo tale differenza l'autore continua: 'Questo fatto non deve però interpretarsi come un rigettare il notorio principio dell'indipendenza del sistema di riferimento. Basta infatti riflettere che riferimento e spazio sono da considerarsi in intima colleganza tra loro, in quanto che ambedue sono inscindibilmente legati ai fenomeni naturali, senza i quali tanto l'uno, quanto l'altro perdono ogni significato' ([Pyc32b]; pag. 822). L'autore quindi ammette che scegliere solo punti isotropi come origine dei sistemi di riferimento sembra equivalente all'introduzione di un sistema di riferimento privilegiato, ma si affretta a specificare che così non è: ogni linea, o fibra, contiene solamente punti isotropi e questo significa, se interpretiamo correttamente il pensiero dell'autore, che l'invarianza per cambiamenti di riferimento è assicurata *per ogni fibra*.

Per Pycha a questo punto è urgente capire se lo spazio finziano sia connesso oppu-

[97] Il corsivo è nostro: le coordinate isotrope per l'autore sono quelle che commutano.

re no. Pycha comincia osservando che 'È manifesto che due punti infinitamente vicini non sono sempre anche immediatamente vicini' ([Pyc32b]; pag. 822) e questo commento rinforza il fatto che nello "spazio quantistico" di Pycha ci sono sia punti con coordinate commutanti che non commutanti. 'Si potrebbe allora domandare, se, dati due punti infinitamente vicini, ma non immediatamente vicini, P e Q, esista sempre almeno un punto, R, immediatamente vicino ai due considerati, il quale permetta di passare da P a Q, [...] senza uscire dallo spazio finziano' ([Pyc32b]; pag. 822). Se tale punto R esistesse lo spazio sarebbe *connesso*. La conclusione dell'autore è che tale spazio *non è connesso* e la ragione ultima è che lo "spazio quantistico" di Pycha contiene anche coppie di punti le cui coordinate non commutano[98] ([Pyc32b]; pag. 824). Il fisico bolzanino considera anche altre sfumature dello spazio finziano che noi tralasceremo. Nell'ultima parte del lavoro Pycha ritorna sulla questione del sistema di riferimento e sulla differenza tra spazio-tempo macroscopico e microscopico con il seguente commento: '[...] abbiamo osservato che nello spazio finziano solo i punti isotropi sono suscettibili di essere scelti a origine di un sistema di riferimento. Questo fatto si presta a un'interessante interpretazione. Segue infatti da esso che le leggi dei fenomeni di irradiamento atomico risultano invarianti solo per un osservatore che si muova lungo delle « *linee isotrope* » dello spazio finziano. Ma possiamo notare anche che noi, gli osservatori di questi fenomeni, ci troviamo *a fortiori* nel macrocosmo, ragion per cui i moti ai quali possiamo andare soggetti, devono evidentemente considerarsi descritti lungo le linee isotrope - e ciò in dipendenza del fatto che non sottoponiamo alla quantizzazione anche il moto *macrocosmico* dell'osservatore del microcosmo [...]' ([Pyc32b]; pag. 826).

La separazione introdotta dal fisico bolzanino tra punti isotropi e non isotropi, ovvero tra coordinate commutanti e non-commutanti, produce una sorta di separazione tra mondo macroscopico e microscopico, che resta però più formale che effettiva. Pycha osserva infine che 'mentre nel macrocosmo il movimento della terna di riferimento si può sempre identificare col movimento di un corpo rigido, e, in particolare [...] con il movimento di un punto materiale, nel microcosmo ciò non è sempre possibile [...]' Per Pycha questo fatto è importante perché 'può interpretarsi dicendo che, trasportando la relatività nel microcosmo, le leggi dei fenomeni fisici elementari sono invarianti per gli osservatori macrocosmici - che percorrono linee isotrope dello spazio finziano - senza però che sia lecito rappresentare questi osservatori con mobili microcosmici' ([Pyc32b]; pag. 827). Questo commento racchiude la differenza che passa tra microcosmo e macrocosmo per l'autore, chiude il secondo lavoro di Pycha e chiude, per quanto ne sappiamo, la prima incursione della geometria non commutativa nella storia della Gravità Quantistica.

[98]Riteniamo che i dettagli tecnici non siano necessari in questo caso.

3.2.5 Una curiosità matematica

Nel 1932 il matematico Edward Kasner pubblica un'idea che, ai nostri giorni, sarebbe considerata bizzarra e che, a quanto ci risulta, non ha avuto ulteriori sviluppi. È interessante notare però, a nostro avviso, come l'eco della necessità di riconciliare la RG con la fisica quantistica riesca a migrare anche fuori della comunità dei fisici[99]. Uno degli argomenti di ricerca del matematico americano, ben prima del 1932, riguarda la geometria di curve speciali, dette *analitiche*, descritte per esempio da polinomi i cui coefficienti non sono numeri reali ma numeri complessi[100]. Studiando queste curve, Kasner si rende conto che una quantità che lui chiama *rac*, ovvero il rapporto tra la lunghezza di un arco di tali curve e la corda che collega gli estremi dell'arco, non tende necessariamente a uno, quando uno degli estremi si avvicina all'altro, come invece accade per le usuali curve sul piano euclideo[101]. Ai valori assunti da tale limite, Kasner riesce a dare un significato *fisico* vista l'analogia di quanto accade tra queste curve descritte nella geometria euclidea e le curve usuali nelle geometrie non euclidee, dove non è inusuale che la geodetica sia una curva. In particolare, senza entrare nei dettagli tecnici del modello di Kasner, il valore a cui tale tende tale limite dipende dal valore della *velocità* della particella che percorre la curva. Già nel 1921 Kasner suggeriva quindi di applicare il proprio risultato alla meccanica relativistica in generale, in una nota a *Nature*. Undici anni dopo [Kas32] Kasner suggerisce che questa peculiarità delle curve analitiche suggerisca addirittura un legame tra la relatività, ristretta o generale che sia, e la fisica quantistica. L'idea nasce dalla seguente osservazione fatta dall'autore stesso. Il limite a cui tende il rapporto *rac* è esattamente uguale a uno per le particelle che viaggiano alla velocità della luce, ovvero i fotoni, mentre se una particella, che viaggiasse a velocità della luce, cominciasse a frenare per arrivare a una velocità minore di quella della luce attraverso un'accelerazione negativa[102], allora per questa particella il rapporto *rac* tenderebbe a un numero, minore di uno, che può variare all'interno dell'insieme discreto di valori rappresentato dalla seguente successione: $R = \frac{2}{n+1}\sqrt{n} \quad n \in \mathbb{N}$ ([Kas32]; pag. 273). A causa di questo fatto, secondo l'autore, si genera quindi una sorta di *discontinuità* tra il valore uno e tale valore minore di uno: 'La *discontinuità* che si presenta quindi nell'insieme dei valori assunti dal rapporto rac durante il moto rettilineo, suggerisce almeno un'analogia con il carattere discontinuo della radiazione (teoria quantistica). Entrambe hanno luogo quando la velocità è quella della

[99] Finzi era un "fisico-matematico", perché titolare della cattedra di Meccanica Razionale.

[100] Per una spiegazione dettagliata si veda, per esempio, il libro di Paul J. Nahin [Nah10].

[101] Questo significa che, per tali curve, anche se siamo nel piano euclideo la *minore* "distanza" tra due punti *non* è rappresentata da una linea retta.

[102] Questa è la bizzarria di cui parlavamo all'inizio. Oggi sappiamo che se una particella viaggia alla velocità della luce non può "rallentare", come invece viene suggerito da Kasner.

luce. Se R denota l'insieme dei valori assunti dal valore rac, possiamo scrivere

$$\frac{R^2}{4} = \frac{m-1}{m^2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}$$

dove $m = n - 1$ è un numero intero maggiore di uno. Forse questa formula potrà essere messa in relazione, in futuro, con le linee delle serie spettrali' ([Kas32]; pagg. 273-274). È sicuramente da notare il fatto che tale sequenza mostri una qualche analogia, anche se molto vaga a nostro avviso, con la regola che descrive le serie delle righe spettrali delle frequenze ν dell'idrogeno atomico:

$$\nu_{nm} = R_H \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right] \tag{3.46}$$

dove R_H è la costante di Rydberg, ma come detto poco sopra, non abbiamo trovato ulteriori approfondimenti in questa direzione quindi a nostro avviso, senza voler di sminuire il lavoro di Kasner, l'analogia resta solamente una curiosità di carattere matematico.

Prima di concludere questo paragrafo commentiamo brevemente l'apparizione di un lavoro di Flint[103] [Fli31], basata sull'approccio penta-dimensionale discusso nel nostro precedente capitolo. Come abbiamo visto Flint ha provato molte varianti per cercare di ottenere l'*unificazione* di gravità, elettromagnetismo e Meccanica Ondulatoria. In questo lavoro l'ingrediente nuovo è costituito dal tentativo di integrare le idee di Weyl con la quinta dimensione. Flint si era già occupato del fatto che nella teoria di Weyl la lunghezza l di un vettore parallelamente trasportato non resta costante. Infatti aveva adattato la versione di Weyl alle proprie esigenze[104] già nel 1928, introducendo il momento generalizzato $\Pi_\mu \sim p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu$ per una particella puntiforme di massa m di cui la teoria ne descrive la dinamica. L'autore considera dunque l'analogo della legge di trasformazione delle lunghezza (2.92) in cinque dimensioni e si rende conto che grazie alle convenzioni introdotte all'inizio di questo nuovo lavoro, la lunghezza L di un vettore *penta-dimensionale* si conserva: '[...] il cambiamento di lunghezza lungo una geodetica nulla nel continuum penta-dimensionale è zero' ([Fli31]; pag. 173) Dunque la variazione della lunghezza di un vettore *quadridimensionale* l risulta proporzionale, per Flint, alla componente lungo la quinta dimensione del momento coniugato p_5. Ma per l'autore, come detto nel precedente capitolo, questo momento coniugato risulta proporzionale alla massa m della particella stessa[105], quindi Flint ritiene di aver trovato un collegamento fra la *geometria weyliana*, la

[103] Questo e i successivi lavori dell'autore saranno le ultime incursioni di Flint nell'ambito del programma di unificazione. Li affrontiamo, nonostante non contengano risultati nuovi, perché non sono trattati in [Goe04].

[104] Si confrontino la versione originale di Weyl (2.61) con quella di Flint (2.92).

[105] Proporzionale alla massa della particella e di segno opposto tra protone ed elettrone.

quinta dimensione e la massa di una particella elementare. L'autore tenta di inserire nel proprio schema sia l'elettrone che il protone e siccome ha oramai stabilito che i cambiamenti di scala sono collegati con i cambiamenti di massa, ritiene che protone ed elettrone siano connessi da questo tipo di trasformazione[106]. Una curiosa conseguenza di questo fatto è che per Flint elettrone e protone possono annichilarsi per dare un fotone[107]. Per quanto ci possa sembrare bizzarro Flint è giustificabile: ricordiamo che il primo tentativo di identificazione del protone come antiparticella dell'elettrone fu a opera di Dirac nel 1930, il quale, l'anno precedente al lavoro di Flint, aveva proposto di identificare le lacune della propria teoria con i protoni. La scoperta del positrone avverrà invece solo l'anno successivo al lavoro di Flint, ovvero nel 1932.

3.2.6 Un bizzarro principio unitario

Prima di occuparci del contributo che dà il nome a questo paragrafo, continuiamo a seguire brevemente gli sviluppi del lavoro di Flint [Fli33], il quale riprende l'approccio pentadimensionale di due anni prima. In questo lavoro, ci saremmo aspettati una rettifica, rispetto alle affermazioni fatte alla fine del precedente paragrafo, perché viene pubblicato l'anno successivo alla scoperta del *positrone*. Invece l'autore fa riferimento solamente a 'protoni, elettroni e fotoni' ([Fli33]; pag. 363), e ribadisce che 'l'asimmetria tra le masse del protone e dell'elettrone è stata motivata utilizzando le proprietà metriche del *continuum*'[108] ([Fli33]; pag. 365). A questo commento si lega comunque un commento che riteniamo interessante, perché mette in luce come l'obiettivo di Flint sia sempre comunque quello della sintesi tra RG e MQ: 'L'unità introdotta sembra giustificare la speranza che emerga alla fine un legame tra le costanti fondamentali della fisica, cioè una relazione tra la *costante gravitazionale* ed e, h, m_0 e c'[109] ([Fli33]; pag. 365). Nell'introduzione al proprio lavoro, Flint ritorna sulla questione della *periodicità* della quinta dimensione[110] e recupera un'idea di cinque anni prima [Fli28], secondo cui la quinta dimensione assume valori *discontinui*[111], e che 'la discontinuità di x^5 è collegata con la discontinuità

[106] È sottinteso ovviamente che la teoria offre un modo per distinguere tra carica positiva e negativa.

[107] Come detto nella nota ([105]) per elettrone e protone le componenti lungo la quinta direzione hanno segno opposto. Con una loro combinazione lineare si otterrebbe dunque, secondo Flint, una quinta componente nulla, propria del fotone, nella sua teoria.

[108] Il corsivo è nostro: a nostro avviso, con la parola continuum, l'autore intende lo *spazio-tempo* e il riferimento è alla metrica di Weyl.

[109] Il corsivo è nostro. Il significato dei simboli è quello usuale: m_0 è la massa dell'elettrone.

[110] Ricordiamo che anche Klein aveva discusso la questione della periodicità in [Kle26], come spiegato nel precedente capitolo.

[111] Forse colpito dall'analogia, seppur vaga, con l'idea di spazio-tempo di Fock e Iwanenko commentata da noi nel precedente capitolo, Flint cita il lavoro dei due fisici russi.

lungo le geodetiche nulle e suggerisce un principio del minimo tempo e un principio di indeterminazione'[112] ([Fli33]; pag. 364). Nel seguito, Flint espone l'idea centrale del lavoro, ovvero cercare di modificare la geometria riemanniana per ottenere una geometria che inglobi la Meccanica Ondulatoria. Flint semplicemente si concentra sull'introduzione di una modifica del concetto di derivata covariante, modifica che assomiglia all'aggiunta della connessione di spin, già introdotta anche da altri autori, con l'intento di descrivere l'equazione di Dirac su uno spazio-tempo curvo. Flint opera come detto in cinque dimensioni, insistendo più volte sul fatto che 'i fenomeni quantistici sono l'espressione fisica della geometria o della metrica [...] La teoria quantistica indica che la natura adotta un caso speciale della teoria del parallelismo di Einstein' ([Fli33]; pag. 372-3) Quindi la protagonista principale è l'equazione di Dirac nella sua forma *generalizzata* scritta da Schrödinger in [Sch32], con cui Flint stesso si confronta. Anche in questo caso, a nostro avviso, i particolari tecnici non sono particolarmente rilevanti, perché Flint non ottiene risultati nuovi. Nell'ultimo paragrafo del lavoro, l'autore osserva che anche nel proprio approccio emerge un collegamento tra il raggio di curvatura R dell'Universo e l'equazione di Dirac che 'appare in maniera estremamente naturale nel lavoro di Schrödinger' ([Fli33]; pag. 374). Flint chiama in causa un lavoro di M. Fahmy dello stesso anno, [Fah33], dove quest'ultimo autore mostra come una relazione usata da Flint sia connessa con il lavoro di Eddington del 1931, al quale abbiamo già fatto cenno nel presente capitolo, e nel quale Eddington collega proprio il raggio di curvatura dell'Universo con la massa dell'elettrone[113].

Passiamo ora ad altri tentativi che sono stati pubblicati nello stesso anno. Fürth scrive un lavoro [Für33] in cui riprende l'idea che aveva proposto alla fine degli anni venti e che abbiamo commentato molto brevemente nel capitolo precedente. L'autore insiste nel chiamare in causa il raggio gravitazionale o di Schwarzschild di una particella elementare e, a partire dall'espressione del rapporto tra il raggio effettivo del neutrone e il raggio gravitazionale, scrive la massa del neutrone in funzione di tutte le costanti universali: $m_n = \frac{1}{16^{16}}\sqrt{\frac{hc}{\pi G}}$. La costante 16^{16} riflette l'influenza delle idee di Eddington nell'approccio di Fürth, mentre $\sqrt{\frac{hc}{\pi G}}$ è praticamente la massa di Planck, cosa che però l'autore non sottolinea. Come già detto nel capitolo precedente non approfondiremo ulteriormente la questione, anche perché a nostro avviso l'autore non discute ulteriormente il rapporto tra RG e MQ. Nello stesso anno anche Beck ripropone l'idea del cronone[114].

[112] Si riveda il paragrafo (2.4.1).

[113] I lavori di Fahmy sono legati a quelli di Flint e stimolati proprio da quest'ultimo, ma trattano in generale del rapporto tra "equazioni quantistiche" ed equazioni di Maxwell, utilizzando l'approccio di Flint. Non approfondiremo quindi i lavori di Fahmy, rimandandoli a eventuali lavori futuri.

[114] Come già detto precedentemente, le implicazioni portate dall'introduzione di un quanto temporale sono ben analizzate in [KC94].

Spostiamoci in un'area geografica completamente differente: in India. Presso l'Università di Calcutta, Jyotirmaya Ghosh [Gho33a] riprende il vecchio approccio di Jeffery, discusso da noi nel primo capitolo, che nel 1921 proponeva un modello planetario dell'atomo coinvolgendo la RG. L'autore cerca di mettere in luce il proprio lavoro scrivendo anche una breve comunicazione all'editore di *Nature* [Gho33b]. Ghosh considera come punto di partenza una delle tante modifiche proposte da Einstein[115] alla RG per calcolare la soluzione delle equazioni del campo gravitazionale *modificate*, accoppiate alle equazioni di Maxwell[116]. L'autore, analogamente a quello che faceva Jeffery, vorrebbe interpretare la soluzione così trovata come "il campo gravitazionale di un elettrone"[117]. La forma dell'elemento di linea che ottiene è simile a quella di Reissner-Nordström[118], ma compare un termine aggiuntivo, proporzionale al quadrato della distanza radiale r, che dal punto di vista dell'autore risultava di difficile interpretazione. Ghosh tenta una risposta spiegando che dal suo punto di vista 'l'interpretazione più probabile è che lo spazio-tempo vuoto non sia Galileiano ma di de Sitter' ([Gho33b]; pag. 170). Oggi questo fatto non ci risulta più oscuro, perché sappiamo che quella scritta da Ghosh è proprio una soluzione delle usuali equazioni di Einstein a cui viene aggiunto il termine corrispondente alla *costante cosmologica* Λ[119]. Nel lavoro in cui è presente il calcolo dettagliato [Gho33a] Ghosh non aggiunge ulteriori commenti. Tornerà a considerare questo approccio due anni dopo, nel 1935.

Chiudiamo infine parlando del tentativo a cui fa riferimento il titolo del paragrafo. Si tratta di un approccio completamente estraneo alle vie battute all'epoca, e per certi versi singolare, che si ritrova nell'articolo di A. Press [Pre33] dal titolo: *Un principio unitario che lega relatività, gravitazione e l'esistenza di quanti discreti*. Il lavoro dell'autore parte da un presupposto in antitesi con il pensiero generale dell'epoca: rifiutare per quanto

[115] Pur essendo del 1933, Ghosh fa riferimento a un lavoro di Einstein del 1926, si veda per esempio la referenza in [Gho33b], un approccio che anche per lo stesso Einstein era già superato [Pai91]. Il motivo non ci è chiaro: forse c'era poca comunicazione riguardo agli sviluppi che avvenivano nel vecchio continente, forse Ghosh era convinto che la modifica si applicasse solo al mondo microscopico, o forse ancora Ghosh era affezionato a questo tipo di approccio. Quest'ultima nostra affermazione prende spunto dal fatto che il fisico indiano aveva avuto una corrispondenza con lo stesso Einstein nel periodo in cui uscì il lavoro del 1926 e gli spedì, nel 1935, questo e altri lavori.

[116] Ghosh considera il tensore di Einstein modificato $\tilde{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}$ che soddisfa alle identità di Bianchi $\nabla^\mu \tilde{G}_{\mu\nu} = 0$ se lo scalare di curvatura è *costante.*

[117] *Il campo gravitazionale di un elettrone* è proprio il titolo del lavoro di Ghosh.

[118] Per Ghosh è la soluzione di Jeffery-Nordström.

[119] Come detto nella nota ([116]), nell'ipotesi che lo scalare di curvatura sia costante, prendendo la traccia delle equazioni di Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T^{em}_{\mu\nu}$ si ottiene la relazione $R = 4\Lambda$ che sostituita nelle equazioni di Einstein dà proprio $\tilde{G}_{\mu\nu} = \kappa T^{em}_{\mu\nu}$, perché il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico ha traccia nulla. Per un approccio moderno al problema risolto da Ghosh si veda [KZ14].

riguarda la gravitazione la teoria di Einstein[120] e continuare a considerare la teoria newtoniana[121]. Press cerca di descrivere le orbite elettroniche con un modello di atomo à la Bohr, senza introdurre a priori l'ipotesi della quantizzazione delle orbite, al solito posizionando l'origine del sistema di riferimento nel nucleo. L'ingrediente nuovo è la presenza di una forza Q *perpendicolare* alla forza gravitazionale e proporzionale alla variazione della coordinata radiale al variare del tempo. Press discute una serie di conseguenze della propria ipotesi e attraverso alcuni passaggi matematici, pretende[122] di dimostrare come dal proprio modello *emerga* l'ipotesi di quantizzazione. Il titolo del lavoro fa riferimento proprio a questa particolarità. Infatti, dopo aver dedotto con un lungo ragionamento che una determinata grandezza debba assumere valori *discreti*, collegabili secondo l'autore ai valori discreti associati ai raggi delle orbite atomiche, commenta il risultato ottenuto nel seguente modo: 'Questa è una conclusione estremamente importante, per il fatto che produce un legame diretto della presente meccanica [...] basata sui concetti newtoniani di spazio e tempo, con le leggi della teoria quantistica [...]' ([Pre33]; pag. 1150) Dal punto di vista dell'autore è l'introduzione di questa nuova forza Q che produce in qualche modo un modello dell'atomo compatibile con le ipotesi quantistiche e compatibile, secondo le discussioni presenti nel lavoro, con la relatività ristretta. Non abbiamo indagato se altri autori dopo Press abbiano preso ancora in considerazione questo punto di vista.

3.3 1934: Un antenato della cosmologia quantistica

Dopo le prime speculazioni viste in 3.2.2, la riflessione in ambito cosmologico produce un modello matematicamente più raffinato. Nel 1934 Herbert Jehle cerca di descrivere un campo gravitazionale di natura quantistica, prendendo come banco di prova sperimentale l'Universo stesso. L'autore espone il proprio approccio in due lavori, [Jeh34] e [Jeh35], distanti tra loro un paio di anni[123]. Abbiamo deciso di commentare un po' più in dettaglio il primo dei due lavori e di riportare solo alcuni brevi commenti sul secondo, che approfondiremo in lavori futuri. L'approccio di Jehle è sicuramente degno di nota, a nostro avviso, perché l'obiettivo di integrare la teoria della gravitazione di Einstein nella

[120] Press è convinto di ottenere attraverso il proprio approccio un modello migliore di quello einsteiniano grazie al confronto con alcuni dati sperimentali dell'epoca ([Pre33]; pag. 1151). Su questo fatto non commenteremo.

[121] Il lavoro di Press viene pubblicato su *Philosophical Magazine*, una rivista che all'epoca era ritenuta secondaria rispetto ad altre, come per esempio *Nature*, considerate più prestigiose. Forse è per questo motivo che ospita anche tentativi come questo, che abbiamo deciso di definire bizzarri.

[122] A nostro avviso le deduzioni di Press sono poco chiare e nutriamo alcuni dubbi sulla loro correttezza.

[123] All'articolo di Jehle del 1935 fa seguito una pagina di errata corrige [Jeh36].

descrizione quantistica è *esplicito*. Già il titolo di [Jeh34], infatti, è molto promettente: 'Sulla meccanica quantistica relativistica generale', dove l'aggettivo *generale* è lo stesso che si usa in tedesco per indicare la Relatività Generale (allgemein). Il breve riassunto con cui si apre l'articolo è il seguente: 'Nel seguito cercheremo di indagare una tecnica, che da una parte porta alle particelle elettriche elementari, mentre dall'altra chiarisce il problema cosmologico in maniera quantistica' ([Jeh34]; pag. 370). L'approccio di Jehle ha dunque l'obiettivo di fondere la RG e la Meccanica Ondulatoria per cercare di indagare l'origine dell'Universo. Il lavoro di Jehle comincia con le seguenti osservazioni. 'In Meccanica Ondulatoria esistono due differenti punti di vista. Uno dei due è quello di considerare masse puntiformi che si muovono in un campo esterno e si ottengono così le equazioni di base della Meccanica Ondulatoria'[124] ([Jeh34]; pag. 370). Poi continua: 'se si postula infatti l'esistenza delle particelle si può 1. da una parte descriverne l'andamento in un campo esterno con le equazioni d'onda, e dall'altra parte 2. usando una funzione d'onda è possibile descrivere l'effetto della particella sul campo stesso. Quello che è insoddisfacente è che resta da svelare il cosiddetto "enigma quantistico", ovvero la natura di queste particelle discrete' ([Jeh34]; pag. 370). Allora l'autore sostiene che è conveniente partire dal 'secondo punto di vista', ovvero quello in cui il punto di partenza non sono le particelle ma il campo: 'invece dell'andamento di masse puntiformi possiamo considerare il campo stesso quantizzato, come avviene per il campo di Maxwell attraverso le equazioni di Eulero ottenute da un principio variazionale. Ma in questo metodo non compaiono le particelle' ([Jeh34]; pag. 370). Oggi sappiamo molto bene come emerge il concetto di particella nella teoria quantistica dei campi, ma nel 1933 l'interpretazione moderna era ancora agli albori. Jehle si spinge oltre: 'Esiste anche un altro grande problema: come si pone questo stesso problema nell'ambito della Relatività Generale?' ([Jeh34]; pag. 370) L'autore ci fa capire che dal suo punto di vista il problema è simile anche in RG, facendo riferimento al fatto che esistono gli stessi due punti di vista appena descritti, e che emergono problematiche simili. Jehle non ha una soluzione definitiva, ma si ripropone di risolvere il problema dell'armonizzazione tra Meccanica Ondulatoria e RG proponendo un metodo, che lo stesso Jehle definisce come *ancora euristico* e che, come specifica lo stesso autore, 'necessiterà di una base più solida' ([Jeh34]; pag. 371).

Per comprendere meglio il metodo proposto da Jehle ripercorriamo brevemente alcuni passaggi del primo lavoro. L'articolo inizia esponendo l'analogia formale tra l'approccio lagrangiano e la Meccanica Ondulatoria, analogia su cui si basa l'idea euristica dell'autore. Jehle infatti vuole considerare particelle puntiformi che si muovono in campo esterno anch'esso dinamico, ovvero la gravità, rappresentandole come avviene in Meccanica On-

[124] Le traduzioni non sono letterali.

dulatoria tramite tale analogia, per cercare poi di indagare 'come il campo esterno si trasformi lui stesso' ([Jeh34]; pag. 370). Il punto di partenza dell'autore è la seguente relazione per una particella puntiforme:

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2 c^2 \qquad \text{dove} \qquad p^\mu = mc \frac{dx^\mu}{d\lambda} \,. \tag{3.47}$$

Usualmente la generalizzazione relativistica dell'analogia formale fra l'approccio lagrangiano e la Meccanica Ondulatoria in approssimazione geometrica si ottiene introducendo una funzione di Jacobi $\mathcal{S}$, che rappresenta l'iconale della funzione d'onda, legata al momento della particella dalla relazione $p_\mu = \partial_\mu \mathcal{S}$. Jehle preferisce invece considerare una differente funzione di Jacobi $\mathcal{W}$, che è legata alla precedente dalla relazione[125] $\mathcal{W} = \frac{\mathcal{S}}{mc}$. Seguiamo la notazione di Jehle. In luogo della (3.47) l'autore scrive quindi ([Jeh34]; pag. 372):

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x^\nu} = -1 \qquad \text{con} \qquad \frac{dx^\mu}{ds} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x^\nu} \,, \tag{3.48}$$

che è l'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella di massa m. L'analogia formale tra la meccanica del punto e la Meccanica Ondulatoria in approssimazione geometrica, come visto anche nei precedenti capitoli per esempio discutendo l'approccio di Klein, si ottiene usualmente utilizzando una particolare forma per la funzione d'onda, ovvero $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}}$, che nella notazione di Jehle diventa:

$$\psi = e^{\frac{i}{\sigma}\mathcal{W}} \,. \tag{3.49}$$

L'autore introduce la costante σ specificando che 'ha le dimensioni di una lunghezza' ([Jeh34]; pag. 374). In questo primo lavoro Jehle non fa alcun commento sulla costante σ che è la lunghezza Compton λ_C della particella in esame, ovvero $\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}$, perché, come vedremo, per Jehle la sostituzione (3.49) ha carattere generale e la lunghezza σ dovrà essere specificata *a seconda del problema fisico preso in esame*. Nel lavoro successivo [Jeh35] infatti specificherà che *se si considera un elettrone in un campo gravitazionale*, 'senza tener conto della questione del quanto gravitazionale' ([Jeh35]; pag. 693), allora si può identificare tale lunghezza con la *lunghezza Compton dell'elettrone* $\sigma = \lambda_C$. Con questa scelta, infatti, una volta invertita la definizione (3.49), se la si inserisce in (3.48) si ottiene:

$$\frac{dx^\mu}{ds} = g^{\mu\nu} \frac{\sigma}{i} \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \,. \tag{3.50}$$

A sua volta l'equazione (3.50) inserita nella (3.47) restituisce quella che per Jehle è *l'equazione d'onda*[126] della Meccanica Ondulatoria:

$$\sigma^2 g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \psi^2 = 0 \qquad \text{dove} \qquad \sigma = \frac{\hbar}{mc} \,. \tag{3.51}$$

[125] Si noti che in unità naturali la funzione di Jacobi usata da Jehle ha le dimensioni di una lunghezza.

[126] L'autore ottiene, con un procedimento analogo, anche una seconda equazione che contiene sia ψ che la sua complessa coniugata $\bar{\psi}$.

Come visto nel precedente capitolo discutendo il lavoro di Klein, tale equazione corrisponde all'approssimazione geometrica dell'equazione di Klein-Gordon[127]. Se si considera una differente situazione fisica, come specificherà solo nel lavoro successivo [Jeh35], per esempio *il caso più generale che coinvolge sia la Meccanica Ondulatoria sia la RG*, per Jehle è necessario identificare tale lunghezza con il *raggio gravitazionale*, ovvero il raggio di Schwarzschild, della massa in questione[128], ovvero $\sigma = \frac{2mG}{c^2}$ ([Jeh35]; pag. 694-696-697) e quindi non coincide più con la lunghezza Compton. La costante di Planck quindi sparisce dalle equazioni d'onda di Jehle.

A questo punto Jehle utilizza le equazioni di Einstein, specificando una particolare forma del tensore energia-impulso. Come ci ha fatto sapere nel brevissimo riassunto del lavoro, l'autore è interessato al problema cosmologico. Questo ci fa supporre che Jehle rappresenti l'Universo come un *fluido* fatto di *polvere*[129], in cui evidentemente le galassie o le stelle sono le "particelle" soggette alle leggi della GQ, e tale rappresentazione si riflette appunto nella forma del tensore energia impulso[130]:

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \ , \tag{3.52}$$

dove ρ è la densità di massa della "particella". In questo primo lavoro Jehle non spiega esplicitamente il significato del termine "particella", così come non specifica che sta usando il tensore energia-impulso della polvere. Sospettiamo che per l'autore queste puntualizzazioni fossero inutili, perché a gennaio dello stesso anno, ovvero dieci mesi prima della pubblicazione del lavoro di Jehle, usciva un lavoro di rassegna di Howard P. Robertson sulla rivista *Review of Modern Physics* che, come riporta George Ellis, 'segna il riconoscimento della cosmologia relativistica come una teoria fisica legittima' ([Ell12]; pag. 2100). Nel secondo lavoro l'autore è invece più esplicito e afferma appunto che le "particelle" di cui parla rappresentano una stella o un insieme di stelle ([Jeh35]; pag. 697) e quindi la densità ρ farà riferimento al sistema preso in considerazione. Tale rappresentazione dell'Universo, o di parte di esso, è identica a quella che utilizziamo oggi. Con questa informazione Jehle scrive le equazioni di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \tag{3.53}$$

[127]Si riveda per esempio il paragrafo 2.1.1. Probabilmente il carattere euristico dichiarato dall'autore è legato anche al fatto che Jehle considera l'equazione di K-G in luogo di quella di Dirac.

[128]L'autore non scrive l'espressione esplicita, che però può essere dedotta considerando l'esempio numerico offerto da Jehle nel secondo lavoro, dove indica che un grammo corrisponde a una lunghezza dell'ordine di 10^{-28} centimetri.

[129]Fisicamente tale fluido ha pressione nulla.

[130]Tale tensore era già stato usato da Einstein nei lavoro del 1917 sulla costante cosmologica.

e usando il fatto che prendendo la traccia dell'equazione (3.53) si ha che $R = \frac{8\pi G}{c^4}\rho$, e sostituendo (3.50) in (3.53), l'autore ottiene la seguente equazione:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\psi^2 + \sigma^2 R\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \text{con} \qquad \sigma = \frac{2mG}{c^2}\,. \tag{3.54}$$

Per Jehle (3.54) è una sorta di *versione quantistica delle equazioni di Einstein* e per l'autore riunisce entrambi i fenomeni[131]. Jehle commenta nel seguente modo l'equazione appena ottenuta: 'In questo modo abbiamo chiuso il cerchio dall'equazione d'onda all'equazione di campo senza distinguere tra il campo "esterno" e "interno" di una particella' ([Jeh34]; pag. 374) L'autore scrive inoltre che secondo lui non è più necessario considerare il sistema come governato da un'equazione d'onda separata da un'equazione di campo, perché queste equazioni sono collegate: prendendo la traccia dell'equazione (3.54) si ottiene infatti la (3.51) che, come specifica lo stesso Jehle, va intesa come un'equazione agli autovalori. In particolare possiamo osservare che nel lavoro successivo Jehle esprimerà il suo pensiero in maniera ancora più esplicita, scrivendo che secondo il suo punto di vista 'a partire dall'intensità del pacchetto d'onda si può calcolare la curvatura della metrica' ([Jeh35]; pag. 697), giustificando l'affermazione che le equazioni (3.54) restituiscono una metrica la cui natura è di carattere quantistico[132]. Nelle ultime righe del primo lavoro l'autore ringrazia Born, Dirac, Eddington, Schrödinger e Weiss per i commenti positivi e negativi ([Jeh34]; pag. 374). Evidentemente tutti questi scienziati erano a conoscenza del suo lavoro. Nelle ultime righe del secondo lavoro, invece, Jehle nota come nonostante il modello elaborato dall'autore abbia un carattere quantistico, nell'equazione (3.54) *non compare* la costante di Planck.

3.4 1934-1936: il gravitone

Come accennato precedentemente, il 1934 è l'anno in cui viene "coniato" il termine *gravitone*. Il contesto non è quello della ricerca di un'armonizzazione tra RG e MQ: D. I. Blokhintsev e F. M. Gal'perin [BG34], discutendo la possibilità di identificare il neutrino come il quanto gravitazionale, chiamano quest'ultimo *gravitone*. Il passo in questione è parzialmente tradotto da Gorelik e Viktor Frenkel [GF11] nel moderno volume che tratta la vita e la produzione scientifica di un altro fisico russo, di cui ci occuperemo brevemente nel prossimo paragrafo: Matvei Bronstein[133]. I paragrafi seguenti, invece, saranno dedica-

[131] Così come accadeva per l'eq. (3.51), Jehle ricava anche una seconda equazione simile a (3.54) dove oltre alla funzione d'onda ψ compare anche la sua complessa coniugata.

[132] Lasciamo l'ulteriore approfondiremo del secondo lavoro di Jehle a eventuali lavori futuri.

[133] Siamo costretti a seguire il lavoro di Gorelik e Frenkel, perché i lavori di Bronstein a tutt'oggi non sono stati tradotti in lingua inglese.

ti ad approcci indiretti, e che quindi, a differenza di Bronstein, non si occuperanno della quantizzazione della forza gravitazionale.

3.4.1 Matvei Bronstein

Già nel 1930, in un lavoro che era dedicato a quella che oggi chiamiamo divulgazione scientifica, Bronstein annunciava che si sarebbe presto occupato del legame tra MQ e gravitazione ([GF11]; pag. 88). Successivamente, nel 1931, aveva espresso la convinzione che fosse impossibile ottenere le leggi quantistiche da una teoria unitaria, come invece sostenevano Einstein e altri, e che che fosse necessario un vero e proprio matrimonio, piuttosto che un qualche rapporto di subordinazione ([GF11]; pag. 88). Spinto dalla necessità di una visione unitaria in cui non ci fosse differenza tra fisica del microcosmo e del macrocosmo, i primi interessi di Bronstein furono per l'ambito che oggi chiameremmo cosmologico, ma che allora apparteneva all'astronomia. Con il 1933, Bronstein comincia a "pubblicizzare" la propria visione unitaria ([GF11]; pag. 89), ben rappresentata dal cubo $cG\hbar$ ([GF11]; pag. 91): ai vertici di un cubo Bronstein posiziona le possibili "teorie" che si ottengono introducendo, o meno, gli effetti associati a una delle tre costanti fondamentali. La MQ per esempio corrisponde al vertice in cui si trova solo la costante di Planck, mentre la RG corrisponde al vertice in cui si trovano sia c che G. Il vertice dove si trovano tutte e tre le costanti fondamentali corrisponderebbe, per Bronstein[134] alla GQ, e secondo l'autore il migliore campo di applicazione di questa "teoria" sarebbe proprio la cosmologia ([GF11]; pag. 89): un commento decisamente profetico[135]. Come riportano Gorelik e Frenkel, discutendo la fisica delle stelle con massa maggiore di una volta e mezza la massa solare[136], Bronstein scrive esplicitamente che 'la teoria relativistica dei quanti che offre un legame tra la teoria ondulatoria e la Relatività Ristretta deve essere ulteriormente estesa per essere in accordo con la Relatività Generale' ([GF11]; pag. 95). I due autori sostengono che furono proprio queste convinzioni che lo portarono a lavorare per la tesi di dottorato proprio alla quantizzazione delle onde gravitazionali.

[134]Come sottolineano Gorelik e Frenkel la versione "tridimensionale" compare ufficialmente in un lavoro di Zelmanov [Zel67], ma è la più efficace e l'abbiamo usata per questo motivo. L'idea del legame tra le *tre* costanti e le rispettive teorie è già presente nel lavoro di Bronstein e, come affermano Gorelik e Frenkel, lo era anche in un intervento di Pauli del 1934, apparso solo due anni dopo ([GF11]; pag. 91). Come abbiamo visto, la stessa idea era stata espressa anche in Italia da Finzi e ancora prima Landau, Iwanenko e Gamow avevano preso in considerazione la possibile "interazione" delle tre costanti.

[135]La cosmologia è infatti, a oggi, l'ambito più promettente per testare le teorie alternative alla RG e le varie teorie che si propongono come possibili versioni della GQ.

[136]Si tratta del limite oltre il quale una stella che muore può diventare un buco nero.

Bronstein difende la propria tesi di dottorato nel 1935. L'argomento avrebbe dovuto essere quello dei semiconduttori. L'importanza del lavoro di Bronstein è oramai riconosciuta, anche se i suoi contemporanei non hanno avuto modo di apprezzarla[137]. Uno dei risultati più importanti che emergono dal lavoro di Bronstein è che l'uso dell'analogia tra campo gravitazionale ed elettromagnetico avesse dei limiti estremamente severi, fatto che lo convinse dell'impossibilità di creare una teoria quantistica della gravitazione che seguisse pedissequamente i passi percorsi per l'elettrodinamica. ([GF11]; pag. 86) Durante la procedura di difesa della tesi di Bronstein, Fock e Tamm commentano negativamente il lavoro di Rosenfeld, sostenendo che non portava a risultati fisicamente concreti. In effetti, dal nostro punto di vista, come precedentemente commentato, fu il lavoro di Solomon a mettere in luce l'esatta origine degli infiniti, ovvero l'interazione tra campo gravitazionale ed elettromagnetico, congetturando che tali infiniti fossero legati a problemi del formalismo stesso.

L'anno successivo il fisico russo pubblica una parte del proprio lavoro [Bro36]. Vediamo alcuni passaggi del primo lavoro di Bronstein che Gorelik non commenta[138] [DS12]. Nella prima parte del lavoro l'autore si concentra sul campo gravitazionale libero e i suoi calcoli sono decisamente più dettagliati di quelli "accennati" da Rosenfeld. Anche Bronstein fa riferimento esplicito al *metodo di Fermi* per quantizzare il campo gravitazionale, ma il fisico russo ci fa capire che aggiunge il termine di gauge fixing alla Lagrangiana del campo gravitazionale ([Bro12]; pag. 269)[139]. A questo punto l'autore può calcolarsi la Hamiltoniana ottenendo un'espressione che sembra molto differente da quella di Rosenfeld, perché Bronstein opera la separazione fra le componenti spaziali e temporali. Bronstein non deve affrontare i problemi dovuti all'annullarsi di momenti coniugati, perché l'introduzione del termine di gauge fixing "aggira" questo problema. A differenza di Rosenfeld, Bronstein introduce uno sviluppo di Fourier per tutti i dieci potenziali $h_{\mu\nu}\,(\mu \leq \nu)$, e sostituisce questi sviluppi nella Hamiltoniana. Quello che ne deriva è un'espressione in funzione di

[137]La morte del fisico russo fu tragica e prematura a opera del regime dittatoriale sovietico.

[138]Il lavoro originale è in russo quindi ci affideremo alla traduzione in inglese [Bro12], a cui anche Stanley Deser fa una breve introduzione, perché il lavoro di Bronstein è stato recentemente ripubblicato per la Springer.

[139]I traduttori mantengono la vecchia notazione di Bronstein, in cui i simboli di Christoffel $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ sono indicati con la notazione $[\mu\nu, \varrho]$. Bronstein osserva che il gauge di De Donder è equivalente a porre $\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \Gamma^{\varrho}_{\mu\mu} = 0$. La Lagrangiana utilizzata da Bronstein, prima equazione del paragrafo 2 della traduzione inglese, scritta in termini moderni è $\mathcal{L} = \left(\Gamma^{\varrho}_{\mu\mu}\Gamma^{\gamma}_{\varrho\gamma} - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\right) + \frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\mu\mu}\Gamma^{\nu}_{\rho\rho}$. I primi due termini formano una Lagrangiana che, a meno di quadri-divergenze, è equivalente allo scalare di curvatura, mentre il terzo termine è quello di gauge fixing. Ricordiamo che la Lagrangiana di Einstein-Hilbert è lo scalare di curvatura cambiato di segno, ma questo fatto non dà problemi a Bronstein, perché non considera alcuna interazione con altri campi.

operatori di creazione e di distruzione. Bronstein introduce un ordine ben preciso per gli operatori: grazie a quest'ordine il calcolo degli autovalori della Hamiltoniana quantistica produrrà il risultato di Rosenfeld senza il termine di energia di punto zero[140] ([Bro12]; pag. 274). Bronstein discute anche quale sia il numero delle polarizzazioni indipendenti. L'autore conosce la risposta per il caso classico e nota che nel caso quantistico, ovvero quando i potenziali gravitazionali e i rispettivi momenti coniugati *non commutano*, si ottiene lo stesso risultato, pur essendo differente la procedura di calcolo. Il calcolo degli autovalori della Hamiltoniana quantistica, infatti, dimostra che anche le onde gravitazionali *quantizzate* hanno due polarizzazioni indipendenti e che quindi sono anch'esse *onde trasversali*[141] ([Bro12]; pag. 271). Il fisico russo nota però anche un'altra cosa importante: '[...] la situazione è abbastanza differente se consideriamo non il trasferimento di energia ma, per esempio, l'interazione tra due masse: vedremo a breve che nell'interazione dominano solo le onde $h_{\mu\nu}$ che sono *longitudinali*'[142] ([Bro12]; pag. 271). Un difetto della trattazione di Bronstein, rispetto a quella di Rosenfeld è il seguente: il fisico russo traduce in forma *operatoriale* la gauge di De Donder, anziché imporre, come suggeriva Fermi, una condizione sulle funzioni d'onda ([Bro12]; pag. 272).

Come riportano Gorelik e Frenkel, una sezione del lavoro di Bronstein indaga la questione della misurabilità dello spazio-tempo nel caso della GQ, questione che non affronteremo in dettaglio, perché è già esposta da Gorelik e Frenkel ([Bro12]; pag. 102) Sinteticamente Bronstein indaga i limiti imposti dal principio di indeterminazione nella misura del campo gravitazionale quantistico, rappresentato dai simboli di Christoffel, concentrandosi su un caso specifico, quello di Γ^1_{00}. L'autore comprende che per minimizzare l'errore di tale misura è necessario, nel caso di oggetti-test massivi, considerare masse molto grandi. Da questo risultato scaturisce l'osservazione che riguarda la differenza tra la teoria quantistica della gravitazione nell'approssimazione in cui gli effetti della curvatura dello spazio-tempo sono trascurabili, quella sviluppata dall'autore stesso, e una eventuale teoria della GQ, come la chiameremmo oggi, in cui 'le deviazioni dalla geometria euclidea possono essere arbitrariamente grandi' ([Bro12]; pag. 276) Come sottolineato anche da Gorelik e Frenkel, l'autore deduce che[143]: '[...] all'interno del dominio della Relatività Generale [...] la situazione è molto differente. Infatti il raggio gravitazionale di un corpo test usato per la misura ($\frac{G\rho V}{c^2}$) non può essere più grande delle sue dimensioni lineari ($V^{\frac{1}{3}}$); questo significa che il limite superiore è ($\rho \leq c^2/GV^{2/3}$). Di conseguenza, in questo dominio le possibilità di misura sono ancora più limitate rispetto a quanto imposto

[140] Questo fatto è stato sottolineato da Deser [DS12].

[141] Rosenfeld, a nostro avviso, aveva trasportato con fiducia il risultato classico.

[142] Il corsivo è nostro.

[143] Bronstein aveva precedentemente precisato di considerare un corpo test di volume V e densità ρ.

dalle relazioni di commutazione della meccanica quantistica [...]' ([Bro12]; pag. 276-277). L'autore sta considerando il *raggio gravitazionale di Schwarzschild* di un corpo e ottiene un limite *superiore* per la massa m della particella test, ovvero $m \leq c^2 V^{1/3}/G$. Infine Bronstein chiosa: 'Senza una revisione delle nozioni classiche sembra difficile estendere la teoria quantistica della gravità anche in questo dominio' ([Bro12]; pag. 276-277). Prima di proseguire notiamo che questa osservazione di Bronstein pone l'accento sui limiti dell'analogia tra campo elettromagnetico e gravitazionale, analogia che verrà invece usata spesso per analizzare le caratteristiche quantistiche del secondo.

L'ultima parte del lavoro è dedicata a due calcoli particolari: l'emissione di un quanto gravitazionale da parte di un corpo, e la derivazione della legge di Newton a partire dalla teoria quantistica elaborata da Bronstein. Nel primo caso l'autore ottiene un'espressione che si riduce alla formula di quadrupolo scritta da Einstein ([Bro12]; pag. 280); nel secondo caso Bronstein ottiene la legge di Newton a partire dall'equazione di Schrödinger[144] in cui la Hamiltoniana contiene il potenziale che rappresenta *l'energia di interazione tra due masse*. Bronstein puntualizza: 'Dirac ha mostrato come l'interazione tra varie cariche possa essere sempre interpretata tramite l'azione di un agente intermediario, ovvero il campo quantizzato. Qui mostriamo che questo vale anche nel caso dei fenomeni gravitazionali' ([Bro12]; pag.281). Come affermano Gorelik e Frenkel, il fisico russo non usa la parola *gravitone*, ma l'importanza di questo commento è notevole, perché mostra che, come Rosenfeld, anche Bronstein vede anche l'interazione gravitazionale come uno scambio di *gravitoni*. Vediamo una "curiosità" di questo calcolo messa in luce dall'autore stesso. Bronstein annuncia che la procedura è *analoga* a quella usata da Dirac, Fock e Podolsky per ottenere la legge di Coulomb dall'elettrodinamica. Il termine di interazione quantistico, inoltre, è completamente analogo a quello dell'elettrodinamica, nel senso che basta sostituire la carica elettrica e con la massa m. Allora, sottolinea Bronstein, com'è possibile ottenere, come effettivamente accade, il segno corretto della forza di Newton, dovuto al fatto che la forza gravitazionale è sempre attrattiva? La differenza, ci fa notare Bronstein, è dovuta al fatto che il commutatore tra gli operatori di creazione $h^{\dagger}_{\mu\nu}(\vec{k})$ e distruzione $h_{\mu\nu}(\vec{k})$ per il campo gravitazionale differisce per un segno rispetto a quello per il campo elettromagnetico. Questa differenza di segno genera il segno *corretto* della forza di Newton. Oggi sappiamo che questo fatto è legato alla differenza di spin tra il fotone e il gravitone. Ma lo spin del gravitone verrà identificato solo qualche anno più tardi, approfondendo la teoria quantistica dei campi.

Nella Russia del periodo la visione di Bronstein non veniva condivisa da tutti. Gorelik

[144]Ricordiamo che l'equazione di Dirac, per velocità piccole rispetto a quelle della luce, si riduce all'equazione di Schrödinger.

e Frenkel riportano che Yakov Frenkel, d'ora in avanti Y. Frenkel per distinguerlo dal coautore di Gorelik, in un articolo scritto per la raccolta Schilpp del 1949 dedicata ad Einstein, ma mai sottomesso ad alcuna rivista, esprime un atteggiamento ambiguo. Y. Frenkel, infatti, pur essendo convinto che le onde gravitazionali dovrebbero essere quantizzate[145], è scettico per vari motivi. Il primo è da ricercarsi nel fatto che in RG energia e momento non formano un tensore, bensì uno pseudo-tensore[146]. Secondo Gorelik e Frenkel questo è il motivo a cui Y. Frenkel imputava il *fallimento* nel trovare una sintesi tra RG e MQ. Inoltre, aggiungono Gorelik e Frenkel, Y. Frenkel era convinto che il campo gravitazionale avesse solamente un significato *macroscopico*, piuttosto che *microscopico* ([GF11]; pag. 86).

3.4.2 Un tentativo di unificazione dal Portogallo

Come detto più volte, il primo ambito in cui si discute in maniera indiretta dell'armonizzazione tra MQ e RG è quello dell'unificazione di tutte le forze note. Una recente conferenza tenutasi a Lisbona[147] ha contribuito ad approfondire la figura di un matematico portoghese, Aureliano Lopes de Mira Fernandez, amico di Tullio Levi-Civita e di Cartan, che ha dato dei contributi nei primi anni trenta del novecento nell'ambito delle teorie unitarie. Come richiamato in [Lem10], tra i vari lavori del matematico portoghese uno in particolare tenta una sintesi tra la gravitazione e la Meccanica Ondulatoria. Questo lavoro viene segnalato anche in uno studio storico dedicato alle ricerche in matematica nel Portogallo, definendolo 'un tentativo che ha interesse storico unico' ([GdCL88]; pag. 9). Le ricerche storiche in tal senso comprendono la figura di Mira Fernandez, si veda per esempio [Fit10], ma nessuno dei lavori a noi noti offre un commento al lavoro originale del matematico portoghese[148]. I lavori precedenti di Mira Fernandez, dove il matematico non tratta la Meccanica Ondulatoria, si basano su un approccio unitario tra gravità ed elettromagnetismo che si inserisce sul solco segnato dal matematico italiano Straneo. I

[145] Gorelik e Frenkel riportano che secondo Y. Frenkel probabilmente fu Einstein il primo a parlare di questo nel 1925 ([GF11]; pag. 85)

[146] La differenza tra i due oggetti matematici è sostanziale e dipende dalla legge di trasformazione rispetto ai cambiamenti di coordinate. Una *legge fisica* deve essere formulata utilizzando solo tensori, perché solo così sarà invariante in forma per cambiamenti arbitrari delle coordinate.

[147] "Mira Fernandes and his age - An historical Conference in honor of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958)", Instituto Superior Técnico, Technical University of Lisbon, June 2009.

[148] Il bollettino che riunisce i contributi orali dei partecipanti alla conferenza di Lisbona affronta tematiche che sono proprie più della storia della matematica (si veda l'indice all'indirizzo: http://www.spm.pt/catalogo/item/121).

contributi di Mira Fernandez e il loro inserimento nel filone di ricerca delle teorie unitarie sono stati approfonditi proprio alla conferenza sopra citata, in particolare in [Ber10].

Il contributo dell'autore [dM34] abbraccia sia la gravitazione che la Meccanica Ondulatoria, e prende spunto da un precedente lavoro di Levi-Civita del 1933, pubblicato su *Berichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*[149]. Per offrire un collegamento comprensibile con tale lavoro, il matematico portoghese riporta alcuni risultati del matematico italiano. Anche Mira Fernandez non discute gli effetti quantistici del campo gravitazionale. Il matematico portoghese si impegna invece esplicitamente nel cercare di capire la *compatibilità* tra un'equazione d'onda, proposta da Levi Civita come generalizzazione dell'equazione di Dirac, e la teoria unitaria considerata dallo stesso Mira Fernandez. La teoria unitaria trattata dal matematico portoghese prende spunto da una connessione *generalizzata*, che riunisce sia il campo gravitazionale che quello elettromagnetico, i cui simboli di Christoffel usati da Mira Fernandez assomigliano molto a quelli della connessione di Weyl vista nei capitoli precedenti. Consideriamo dunque l'equazione d'onda proposta da Levi Civita, ma senza commentarne le eventuali applicazioni ([dM34]; eq. (5), pag. 316):

$$-\frac{1}{\hbar^2}\left(g^{\rho\sigma}\nabla'_\rho\nabla'_\sigma - m^2c^2\right)\psi_\mu + \frac{e}{2c\hbar}g_{\mu\rho}\varepsilon^{\rho\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}\psi_\nu = 0 \tag{3.55}$$

dove $\nabla'_\mu = \frac{h}{i}\nabla_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$, mentre la derivata covariante ∇_μ è definita a partire dai coefficienti della connessione riemanniana e tutti gli altri simboli hanno il significato usuale. Si noti che Levi Civita, cosa inusuale per noi oggi, tratta le quattro componenti dello spinore di Dirac come se fossero le componenti di un quadrivettore, e che l'equazione differenziale è del secondo ordine, cosa che la fa assomigliare più a una equazione tipo Klein Gordon[150]. Questa equazione e altre affermazioni di Levi Civita, contenute nel lavoro citato da Mira Fernandez e riprese dallo stesso matematico portoghese in questo lavoro, sono state criticate da Pauli, ma noi non entreremo nel merito della questione. Alcune indicazioni sono contenute nei lavori di rassegna di Goenner[151]. Mira Fernandez mostra che la derivata ∇'_μ dell'equazione (3.55) si ottiene proprio a partire dalla connessione generalizzata utilizzata da lui e da Straneo[152]. Poiché inoltre la definizione del tensore $F_{\mu\nu}$ non cambia utilizzan-

[149] Del contenuto del lavoro di Levi Civita e del suo collegamento con altri lavori del periodo si occupa brevemente Goenner in [Goe04].

[150] L'oggetto ψ_μ, visto con occhi moderni, potrebbe assomigliare al campo di Rarita Schwinger, ma così non è perché in quest'ultimo sono sottintesi gli indici spinoriali. Levi Civita interpreta gli indici spinoriali come indici spazio-temporali, con l'intento di trovare una diversa formulazione dell'equazione di Dirac.

[151] Si veda per esempio ([Goe04], pag.109).

[152] L'approccio assomiglia molto a quanto fatto da Wiener e Struik, i quali però avevano utilizzato una sola funzione d'onda.

do la nuova connessione[153], Mira Fernandez deduce che '*le equazioni relativiste* [...] *della Meccanica Ondulatoria sono compatibili con la concezione unitaria dello spazio a cui soddisfa la connessione lineare* [...]' ([dM34]; pag. 318). È chiaro che Mira Fernandez sposa la visione di Levi Civita anche per quanto riguarda la funzione d'onda, perché indica la probabilità a essa associata nel seguente modo:

$$g^{\mu\nu}\psi_\mu\psi_\nu^*$$

ovvero sommando gli indici della funzione d'onda e della sua complessa coniugata utilizzando la metrica[154]. Il lavoro di Mira Fernandez si configura come un approccio puramente matematico, infatti gli unici commenti di carattere *fisico* supportano in tutto e per tutto la visione di Levi Civita, visione che, come detto, venne fortemente osteggiata da Pauli.

3.4.3 Influenze della RG sull'atomo di idrogeno

Abbiamo visto nel precedente capitolo che le riflessioni sull'unificazione e l'uso di un principio variazionale unitario hanno aperto la strada allo studio della teoria quantistica dei campi su spazi-tempo curvi. Questi primi tentativi sono l'evidente *evoluzione* dei modelli planetari dell'atomo che coinvolgevano la RG visti nel primo Capitolo.

Negli anni dal 1933 al 1935 il fisico polacco Leopold Infeld instaura una collaborazione con Born, che produrrà la creazione di una teoria non lineare dell'elettrodinamica classica, alternativa a quella di Maxwell. Infeld, dopo la morte della moglie Halina, decide di accettare una borsa di studio, sostenuto dalla fondazione Rockfeller, che lo porta a Cambridge dove pubblicherà molti articoli su quella che è nota oggi come teoria di Born-Infeld[155]. In questo stesso periodo il fisico polacco si occupa anche della descrizione dell'equazione di Dirac su spazi-tempo curvi. Infeld si era già occupato dell'introduzione degli spinori nell'ambito della RG nelle precedenti collaborazioni con Bartel Leendert van der Waerden a Lipsia [IvdW32].

Nel 1934 l'autore pubblica sulla rivista *Acta Physica Polonica* un lavoro in cui scrive un'azione che coinvolge l'azione di Einstein-Hilbert, il campo elettromagnetico e il campo di Dirac per studiare poi il caso particolare dell'atomo di idrogeno[156]. L'autore si chiede esplicitamente: 'Il campo gravitazionale altera la soluzione delle equazioni di Dirac nel semplice caso dell'atomo di idrogeno?' ([Inf34]; pag. 10). Il lavoro è interessante perché si

[153] La definizione non varia perché il campo elettromagnetico è *abeliano*: $\nabla'_\mu A_\nu - \nabla'_\nu A_\mu = \frac{h}{i}\nabla_\mu A_\nu - \frac{e}{c}A_\mu A_\nu - \left(\frac{h}{i}\nabla_\nu A_\mu - \frac{e}{c}A_\nu A_\mu\right) = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$.

[154] Notiamo che in questo modo, però, la probabilità non risulta definita positiva.

[155] Si consulti la biografia di Infeld, ad esempio su MacTutor History of Mathematics: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Infeld.html.

[156] Il modello di Infeld è dunque evoluzione dichiarata dei modelli planetari dell'atomo di idrogeno.

tratta di un ulteriore tassello da aggiungere alla storia della teoria quantistica dei campi su spazi-tempo curvi. Infatti i campi di Dirac e quello elettromagnetico vengono intesi come quantizzati, mentre la gravità rimane classica. Non viene fatto alcun proclama esplicito riguardo alla necessità o meno di quantizzare la teoria di Einstein, ma il fatto che Infeld si chieda quale sia l'influenza della presenza del campo gravitazionale fa entrare a buon diritto nella nostra ricerca il lavoro del fisico polacco. In questo caso possiamo parlare *letteralmente* di interazione tra campo gravitazionale e spinoriale. Scriviamo l'equazione di Dirac per l'elettrone schematicamente[157] nel seguente modo: $i\not{D}\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi$ dove m è la massa dell'elettrone, ψ lo spinore di Dirac e l'operatore di Dirac $\not{D}$ contiene sia la connessione di spin che la connessione riemanniana. Infeld applica una seconda volta l'operatore di Dirac all'equazione per l'elettrone, per ottenere un'equazione differenziale del second'ordine, che, anche noi come l'autore, chiameremo ancora 'equazione di Dirac' ([Inf34]; pag. 10). In questa nuova equazione compare dunque il quadrato dell'operatore di Dirac che, in uno spazio-tempo con metrica non banale, soddisfa schematicamente alla seguente relazione[158]: $\not{D}^2 = \Box + \alpha R$, dove α è una costante numerica ed R è lo scalare di curvatura. A questo punto Infeld utilizza la traccia delle equazioni di Einstein, per scrivere lo scalare di curvatura R in funzione della traccia T del tensore energia-impulso. Per trattare il caso dell'atomo di idrogeno, l'autore specifica: 'Lo scalare T deve essere identificato (come sempre accade in relatività generale) con la densità di materia' ([Inf34]; pag. 10). Detta ρ tale densità di materia Infeld trascura in prima approssimazione il campo gravitazionale dell'elettrone e identifica ρ con la densità di massa del protone[159]. Infatti, prima di procedere all'analisi delle soluzioni dell'equazione di Dirac, indicando con $\delta''(r)$ la derivata seconda della funzione delta di Dirac in coordinate radiali, e detta m_p la massa del protone, il fisico polacco la mette in relazione con la densità nel seguente modo[160]: $\rho = m_p\delta''(r)$. A questo punto Infeld analizza la forma schematica delle soluzioni della nuova equazione di Dirac e le confronta con le soluzioni per l'atomo di idrogeno in uno spazio-tempo piatto. L'autore osserva che le soluzioni dell'equazione di Dirac in presenza di una metrica banale non possono più risolvere il problema generale. La parte radiale delle soluzioni su uno spazio-tempo piatto contiene un esponenziale il

[157]Infeld usa un linguaggio moderno: parla di *spin-manifold* e utilizza gli spinori di Weyl per scrivere la Lagrangiana di Dirac. Descriveremo il procedimento di Infeld senza pretesa di rigore matematico, senza addentrarci troppo nei particolari tecnici, perché si renderebbe necessaria una lunga digressione su questioni che sono per noi marginali.

[158]Tale relazione è nota oggi col nome di *formula di Weitzenböck*, dal nome del matematico Roland Weitzenböck.

[159]Si ricordi che Infeld ha in mente un modello per l'atomo di idrogeno.

[160]Infeld utilizza l'usuale definizione di densità e le proprietà della funzione delta.

cui argomento è proporzionale a $\hbar\sqrt{m^2c^2 - \frac{E^2}{c^2}}$, ovvero schematicamente[161] ([Dir58]; pag. 270): $\psi(r) \sim exp\left(-r\hbar\sqrt{m^2c^2 - \frac{E^2}{c^2}}\right) f(r)$. Mettendo insieme tutti questi elementi Infeld deduce che l'effetto dell'introduzione del campo gravitazionale del protone sulla funzione d'onda è quello di cambiare l'argomento dell'esponenziale che diventa ([Inf34]; pag. 13).:

$$\psi \sim exp\left(-r\hbar\sqrt{m^2c^2 - \frac{E^2}{c^2}}\right) f(r) \quad \rightarrow \quad \psi' \sim exp\left(-r\hbar\sqrt{m^2c^2 - \frac{E^2}{c^2} + m_p\delta''\kappa}\right) f(r) \tag{3.56}$$

dove al solito[162] $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Infeld osserva quindi che portando la variabile r sotto la radice, e utilizzando le proprietà della funzione delta di Dirac, la modifica è proporzionale alla funzione $\delta(r)$, quindi la soluzione delle nuove equazioni di Dirac sarà identica al caso con metrica banale per valori di $r > 0$. L'unica modifica si ha per $r = 0$, ovvero il punto in cui è posto il nucleo dell'atomo di idrogeno, e da quanto riporta Infeld tale variazione non influisce sulle condizioni al contorno per ψ' quando $r \to 0$. Per questi motivi l'autore specifica che 'il campo gravitazionale non altera apprezzabilmente la soluzione dell'equazione di Dirac [...] e quindi prendere in considerazione il campo gravitazionale non produce conseguenze dal punto di vista fisico' ([Inf34]; pag. 10).

3.4.4 Il ritorno di Flint

Il biennio 1934-35 vede l'uscita di tre lavori, di Flint, collegati tra loro proprio a partire dai titoli che riportano una numerazione successiva: 'Una base relativistica per la teoria quantistica' [Fli34a], 'Una base relativistica per la teoria quantistica II' [Fli34b] e 'Una base relativistica per la teoria quantistica III' [Fli35]. Questi tre lavori, a loro volta, fanno riferimento ai due lavori che abbiamo commentato precedentemente [Fli31] [Fli33] e riprendono nuovamente l'approccio penta-dimensionale dello spazio-tempo[163]. I lavori di Flint sono molto tecnici. L'autore utilizza la connessione di spin per trattare la derivata di uno spinore, ma cerca anche di introdurne una sorta di generalizzazione non simmetrica. La costruzione dell'autore è in larga parte simile a quella che utilizzerà Wataghin, tre anni più tardi. Nel prossimo Capitolo approfondiremo proprio l'approccio di Wataghin il quale avrà come scopo una quantizzazione diretta del campo gravitazionale. Rimandiamo invece l'approfondimento tecnico dell'opera di Flint ed esponiamo solo alcuni brevi commenti fatti dall'autore.

[161] La forma esplicita delle funzioni $f(r)$ non è rilevante per i nostri scopi.

[162] La presenza di tale costante è dovuta all'uso della traccia delle equazioni di Einstein.

[163] Nell'ambito dei tentativi di unificazione classici l'interesse per l'approccio penta-dimensionale ritorna ciclicamente.

Ancora una volta Flint è convinto che la notazione introdotta da lui e da Fisher 'aumenta la speranza di una possibile unione tra le teorie gravitazionale, elettromagnetica e quantistica' ([Fli34a]; pag. 413). Il trait d'union è rappresentato sempre dalla possibilità di identificare le traiettorie di particelle cariche in un campo gravitazionale ed elettromagnetico, ovvero geodetiche penta-dimensionali nulle nell'approccio di Flint, con le 'equazioni quantistiche' ([Fli34a]; pag. 414). L'autore riprende l'equazione d'onda ottenuta in [Fli33] per mostrare che con un'opportuna scelta della metrica si riduce all'equazione d'onda di Klein[164], quest'ultima però contiene "una sola" funzione d'onda. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine, e nella seconda parte del lavoro Flint cerca di collegarla con l'equazione di Dirac, che ricordiamo essere un'equazione differenziale del primo ordine, senza però riuscire nel suo tentativo.

Il secondo lavoro [Fli34b] riparte dunque dove si era fermato il precedente articolo. Flint scrive l'analogo dell'equazione di Dirac in cinque dimensioni, equazione che può essere rappresentata tramite un operatore differenziale del primo ordine $\mathcal{D}^{(5)}$,l'analogo dell'operatore di Dirac quadridimensionale, applicato alla funzione d'onda ψ . Per riottenere un'equazione del second'ordine, anche Flint, come Infeld, applica due volte l'operatore $\mathcal{D}^{(5)}$ alla funzione d'onda, ma ottiene un'equazione che, rispetto a quella scritta nel precedente lavoro, contiene dei termini aggiuntivi che l'autore stesso ritiene 'di difficile interpretazione dal punto di vista fisico'[165] ([Fli34b]; pag. 653). Alla fine del lavoro Flint ritratta finalmente le proprie convinzioni sull'annichilazione di due particelle[166]: 'La scoperta del positrone ci permette di rimuovere l'asimmetria metrica e il suggerimento è che un elettrone e un positrone si uniscano per formare [...] un fotone' ([Fli34b]; pag. 656). L'unico dubbio che affligge Flint è l'esistenza dei valori negativi dell'energia, propri della prima interpretazione "a lacune" della teoria di Dirac, che per Flint dovrebbero corrispondere a 'masse a riposo negative' ([Fli34b]; pag. 656), ovviamente di difficile interpretazione.

Il terzo lavoro [Fli35] contiene una lunga digressione sulle basi della teoria pentadimensionale. In questa prima parte Flint discute quali effetti avrebbe sul proprio approccio l'ipotesi che la massa dell'elettrone sia di origine elettromagnetica ([Fli35]; pag. 426). Poi l'autore torna a occuparsi del rapporto tra la 'teoria quantistica e la metrica' ([Fli34b]; pag. 428) e cerca di nuovo di reintrodurre i concetti propri dell'approccio weyliano. Come già accennato si tratta di un articolo lungo e dettagliato, ma molto tecnico, che non affronteremo, perché il risultato, visto alla luce dei moderni sviluppi, è ancora

[164]Flint fa riferimento al lavoro di Klein riconoscendolo come l'approccio di Klein-Kaluza.

[165]Al contrario di Infeld Flint non utilizza la formula di Weitzenböck, ma esegue il calcolo esplicitamente. Ritrova comunque lo scalare di curvatura, ma i termini aggiuntivi di cui parla l'autore sono conseguenza del fatto che, come detto, Flint non ipotizza una connessione di spin simmetrica.

[166]Si riveda l'inizio del paragrafo 3.2.6.

un tentativo di introdurre la MQ attraverso un'equazione d'onda. In questa sede citeremo solamente le conclusioni finali di Flint. 'La teoria che abbiamo sviluppato porta a una modifica della formula di Einstein per la curvatura. Formalmente coincide con quella di Eddington, ma è stato introdotto un nuovo vettore [...] collegato allo scalare $\psi^*\psi$, e in questo spazio-tempo il quadrato della lunghezza di un vettore risulta integrabile' ([Fli34b]; pag. 439). Il commento fa riferimento, come detto sopra all'inclusione dei concetti di Weyl. L'autore suggerisce una possibile connessione tra i propri risultati e il vecchio approccio di Rosenfeld e De Donder del 1927, con le dovute differenze. Flint conclude con un commento ottimistico: 'Sembra che abbiamo raggiunto il nostro scopo e che siamo riusciti a mostrare come una teoria metrica combinata con idee geometriche dia un'unica teoria che abbraccia gravitazione, elettromagnetismo e teoria quantistica' ([Fli34b]; pag. 441). Purtroppo, come sappiamo oggi, non si tratta di una teoria unitaria nel senso sperato da Flint.

3.4.5 Contributi minori

Come successo nei capitoli precedenti, riuniamo in questo paragrafo alcuni contributi che hanno differenti direzioni di lavoro, oppure che sono meno articolati, e che però, per i motivi di volta in volta esposti, vale la pena menzionare. Ovviamente parliamo di contributi minori, senza con questo volerli sminuire.

Il primo articolo che menzioniamo è quello di Ghosh [Gho36]. Forse per l'ultima volta si affaccia sulla scena della storia della GQ un modello planetario dell'atomo. Il fisico indiano infatti riprende ancora il proprio approccio di ispirazione classica, ma non aggiunge nulla di nuovo riguardo all'eventuale "campo gravitazionale dell'elettrone".

In una diversa direzione di lavoro ritroviamo ancora Flint, che cerca di approfondire quella che chiama 'geometria ondulatoria' ([Fli36]; pag. 434), facendo riferimento come al solito alla geometria di quelle matrici che oggi conosciamo come matrici di Dirac[167]. Anche in questo lavoro Flint vede la possibilità di unificare la teoria della gravitazione con la MQ ([Fli36]; pag. 440), ma gli ingredienti sono i soliti: la quantizzazione di x^5, il tempo minimo e la geometria weyliana. L'ultimo lavoro di Flint a cui facciamo accenno, benché

[167]Flint attribuisce la dicitura *geometria ondulatoria* a Y. Mimura [Mim35]. Mimura ha contribuito con più di un lavoro a sviluppare l'idea della geometria ondulatoria: per una lista di lavori si veda l'indirizzo http://www.zentralblatt-math.org/jahrbuch sotto la voce Mimura. Non siamo riusciti a reperire né questo lavoro, né un altro, scritto in collaborazione con T. Iwatsuki, dal titolo decisamente più accattivante: *Teoria della gravitazione basata sulla geometria ondulatoria* [MI35]. Sappiamo da [YN07] che l'idea della geometria ondulatoria verrà ripresa anche negli anni settanta per trovare una connessione con le teorie di campo non locali.

sia del 1937, sembra proporre qualcosa di differente grazie a un titolo promettente: *Misure ultime dello spazio e del tempo* [Fli37]. L'autore discute le implicazioni del principio del minimo tempo che Flint propone come *postulato*, e la sua connessione con lo spazio-tempo e il principio di indeterminazione. Ma Flint non considera affatto gli effetti del campo gravitazionale, come aveva fatto invece Bronstein, concentrandosi solamente sul campo elettromagnetico e ottenendo dei risultati che, come dichiara lo stesso autore, 'non è facile collegare con i risultati di Landau e Peierls' ([Fli37]; pag. 52). Non approfondiremo ulteriormente né questo né altri articoli di Flint, perché, a nostro avviso, non si discostano ulteriormente dalle posizioni assunte in questi ultimi lavori.

Un contributo importante all'approccio canonico è quello di Pierre Weiss [Wei36]. L'autore si occupa della quantizzazione dei sistemi lagrangiani tentando di *generalizzare* l'approccio canonico usuale. Più precisamente Weiss considera il caso in cui le variabili lagrangiane dipendano da più parametri, non solamente dal tempo come avviene nell'usuale meccanica del punto. L'autore ha in mente, come applicazione fisica, la teoria dei campi. Infatti dati r campi ϕ_r, questi dipendono dalle coordinate x^μ, che il fisico francese vuole trattare tutte allo stesso modo, senza privilegiarne una rispetto alle altre. Per fare questo Weiss definisce, per ogni campo, un momento coniugato per ogni derivata del campo nel seguente modo: $\pi_r^\mu = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_r}$ L'obiettivo di dell'autore è dunque quello di introdurre delle regole di quantizzazione per le variabili canoniche che non rompano l'invarianza di Lorentz, come auspicavano anche Vallarta e De Donder nel primo Capitolo. Non entreremo ulteriormente nei dettagli del lavoro, perché dopo una panoramica generale Weiss si concentra sull'applicazione del proprio metodo all'elettrodinamica su uno spazio-tempo curvo[168]. Riprenderemo il percorso di Weiss nel prossimo Capitolo.

Nel 1936 viene pubblicato anche il libro di Eddington *Relativity Theory of Protons and Electrons*, dove l'autore cerca di elaborare un modello della materia microscopica che spieghi anche la gravitazione. Il lavoro di Eddington è stato già analizzato da molti autori, quindi noi non lo prenderemo in considerazione.

L'ultimo contributo che consideriamo è quello di Wataghin, perché riguarda un primo passo verso la formulazione di un modello che per l'autore fornisce una descrizione quantistica dell'interazione gravitazionale, e che Wataghin svilupperà negli anni seguenti. Nel 1936 come osservato in [Hag14], Wataghin tenta di utilizzare l'analogia tra il campo elettromagnetico gravitazionale per suggerire un effetto dovuto alla quantizzazione di quest'ultimo [Wat36a]. In [Hag14], sottolineando la cripticità della nota di Wataghin,

[168]Notiamo che compaiono alcune relazioni che oggi interpreteremmo come "vincoli" del metodo definito da Dirac più tardi ([Wei36]; 218). Notiamo anche che lo stesso Weiss ringrazia Dirac per l'interessamento e le discussioni avute ([Wei36]; pag.220).

si accenna al fatto che l'autore della nota 'menziona i neutrini come possibili mediatori della forza gravitazionale' ([Hag14]; pag. 6): più precisamente Wataghin propone di 'sostituire [...] l'azione di un quanto gravitazionale con quella di una coppia di neutrini'[169] ([Wat36a]; pag. 341) La cosa potrebbe suonare alquanto inusuale, visto che anche allora si sapeva che i neutrini sono dei fermioni. In effetti, poco prima, l'autore ha sottolineato di rifarsi alla 'teoria di Jordan', grazie alla quale si può ottenere la statistica di Bose da due fermioni[170], i due neutrini menzionati dall'autore, appunto. Le caratteristiche di natura "quantistica" che Wataghin ha in mente sono due. La prima è la seguente: 'Il mare dei neutrini con energia negativa costituirebbe una nuova forma di etere, che determina le geodetiche dell'Universo e permette di distinguere localmente i sistemi inerziali da quelli accelerati. Questo punto di vista è in accordo con l'idea espressa da W. Pauli sull'esistenza di una relazione tra la radice quadrata della costante della gravitazione e la nuova costante [...] introdotta da Fermi nella teoria dei raggi β' ([Wat36a]; pag. 341). L'autore non entra in ulteriori dettagli, ma prosegue con la seconda caratteristica. Nella stessa rivista, ma in un altro lavoro [Wat36b], Wataghin ha osservato come all'elettrone possa essere associato una sorta di "movimento di oscillazione", la cui ampiezza sarebbe rappresentata dalla lunghezza Compton $\frac{h}{mc}$. In [Wat36a] l'autore interpreta questa "oscillazione" come il sintomo di una indeterminazione nella posizione e quindi di una indeterminazione nella definizione dei potenziali gravitazionali, che rappresentano la metrica nella teoria di Einstein, proporzionale proprio alla lunghezza Compton dell'elettrone[171]. Seguiremo gli sviluppi del pensiero di Wataghin nel prossimo capitolo.

3.5 Cronologia

1930 (seconda parte) *Bronstein* esprime la volontà di occuparsi del legame tra MQ e RG.

Rosenfeld pubblica due contributi che segnano l'inizio del tentativo di quantizzare la RG nel senso moderno che diamo al termine. Nel primo contributo Rosenfeld tratta il campo gravitazionale nella sua approssimazione di campo debole e considera in particolare il campo gravitazionale generato da un fotone. L'autore calcola quella che oggi chiameremmo aut-energia, scoprendo che

[169] La questione del legame tra neutrini e gravitoni era già stata discussa, secondo quanto ci dice Stachel, anche da Bohr, Pauli, Fermi e altri ([Cao99]; pag. 169, si veda la nota 11 a piè di pagina e le referenze indicate).

[170] L'idea di Jordan proveniva dall'intuizione di de Broglie, il quale immaginava *il fotone* come una sorta di stato legato tra neutrino e anti-neutrino [Per00].

[171] Questo è il punto indicato come criptico in [Hag14].

è infinita. Nel secondo contributo propone la quantizzazione del campo gravitazionale utilizzando il formalismo hamiltoniano e sottolinea come il quanto gravitazionale abbia un valore intero dello spin.

1931 *Bronstein* dichiara che è necessario un "matrimonio" tra MQ e RG.

Eddington ipotizza che la massa dell'elettrone sia collegata al valore della costante cosmologica.

Flint continua a riproporre il proprio modello penta-dimensionale, e prova a collegare le caratteristiche della metrica di Weyl con la differenza di massa tra protone ed elettrone.

Hoffmann spera che l'introduzione dell'equazione di Dirac nella versione proiettiva della teoria di Klein porti a nuovi risultati sull'armonizzazione tra RG e MQ.

Kastler, convinto di una possibile origine microscopica della forza di gravità, propone l'esistenza di una relazione tra la costante di Newton G e $\hbar$.

Lamaître suggerisce che nei primi istanti dell'Universo giochino un ruolo fondamentale sia la RG che la MQ.

Miller e *Wollaston* rilanciano indipendentemente e in maniera vaga l'idea del quanto temporale.

Pokrowski riprende l'idea del cronone di Beck.

Rosenfeld interviene al primo congresso di fisica nucleare riportando i risultati ottenuti da lui e da Solomon sottolineando che gli infiniti dell'auto-energia gravitazionale del fotone derivano dall'interazione tra gravità e campo elettromagnetico. Gli atti del convegno verranno pubblicati l'anno successivo.

Ruark tenta di discutere l'idea di uno spazio-tempo discreto.

Solomon assieme a Rosenfeld introduce un formalismo per il campo elettromagnetico quantistico, in cui non compare l'energia di punto zero e ripete il calcolo del primo lavoro di Rosenfeld, chiarendo che gli infiniti nascono dall'interazione tra campo elettromagnetico e campo gravitazionale.

1932 *Alexandrow* tenta una sorta di approccio semi-classico.

Dalla Noce scrive un lavoro di rassegna che descrive come la ricerca di teorie unitarie si divida in differenti progetti di ricerca, tra cui appunto la ricerca dell'armonizzazione della RG con i principi quantistici. Dalla Noce mette in luce molti dei lavori discussi anche da noi degli anni precedenti.

Eddington ipotizza una relazione tra massa dell'elettrone e costante cosmologica.

Finzi tenta di generalizzare la teoria delle matrici di Heisenberg per costruire un modello unitario che inglobi anche la gravità, con l'ausilio della geometria non commutativa.

Flint tenta di conciliare il proprio modello penta-dimensionale con la geometria di Weyl per conciliare RG e MQ.

Hoffmann, nell'introduzione di un lavoro di rassegna sulla RG, insiste sulla necessità di discutere la compatibilità delle relazioni di Heisenberg con la teoria di Einstein, per armonizzare quest'ultima con MQ.

Kasner specula sulla possibilità che alcune "discontinuità" emerse nei suoi studi sulle equazioni di curve a coefficienti complessi possano offrire un ponte tra RG e MQ.

Lemaître discute l'origine dell'Universo e cerca di collegarlo alla teoria quantistica.

Pycha cerca di approfondire l'approccio di Finzi dello stesso anno con lo scopo di conciliare RG e MQ.

Rosen e *Vallarta* discutono la compatibilità delle relazioni indeterminazione con la relatività ristretta.

Rosenfeld pubblica un lavoro in cui si occupa del problema generale della quantizzazione dei campi e tocca velocemente il caso del campo gravitazionale.

Wataghin discute la compatibilità delle relazioni indeterminazione con la meccanica relativistica, senza fare però riferimento alla gravità.

1933 *Beck* continua a coltivare la propria idea, ovvero il cronone.

Bronstein introduce il "cubo" delle costanti c, G e $\hbar$.

Flint insiste col proprio approccio metrico penta-dimensionale.

Fürth riprende il proprio modello del 1929 e introduce una formula per la massa del neutrone in cui compare la massa di Planck.

Ghosh usa un vecchio approccio à la Jeffery, utilizzando una modifica delle equazioni di Einstein per descrivere il campo gravitazionale di un elettrone.

Press tenta di introdurre un principio unitario che colleghi la gravità newtoniana, la relatività ristretta e la fisica quantistica.

1934 *Blokhintsev* e *Gal'perin* coniano il termine gravitone.

Flint prova a indagare l'idea di geometria ondulatoria.

Jehle tenta di utilizzare la Meccanica Ondulatoria e la RG per costruire un modello cosmologico.

Mira Fernandez cerca di capire la compatibilità tra l'equazione d'onda proposta da Levi Civita e la Meccanica Ondulatoria.

1935 *Bronstein* difende la propria tesi di dottorato sulla quantizzazione delle onde gravitazionali.

Flint tenta un ragionamento sulla misurabilità dello spazio-tempo.

Jehle tenta di andare oltre l'approssimazione di ottica geometrica del lavoro precedente.

Mimura tenta di sviluppare il concetto di geometria ondulatoria.

1936 *Bronstein* pubblica una parte importante della propria tesi di dottorato sulla quantizzazione della RG.

Eddington pubblica *Relativity Theory of Protons and Electrons*, dove espone le proprie idee.

Gosh continua il lavoro sul campo gravitazionale dell'elettrone, cominciato tre anni prima.

Flint tenta di approfondire la geometria ondulatoria di Mimura e la connessione tra le relazioni di indeterminazione e lo spazio-tempo.

viene pubblicato un intervento fatto da *Pauli* sulla relazione tra causalità e spazio-tempo nella fisica quantistica due anni prima.

Wataghin tenta la strada dell'analogia tra campo elettromagnetico e gravitazionale per discutere della quantizzazione di quest'ultimo, senza essere a conoscenza del lavoro di Bronstein.

Weiss tenta di generalizzare il metodo di quantizzazione canonica a spazi-tempo curvi.

Bibliografia

[AI30] Viktor Ambarzumian and Dmitri Iwanenko (1930); Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 64, pages 563–567.

[And33] Carl D. Anderson (1933); The Positive Electron. *Pysical Review*, 43, pages 491–494.

[Beq22] Jean Bequerel, *Le Principe de Relativité et la Théorie de la Gravitation. Leçon professées en 1921 et 1922 à l'Ecole polytechnique et au Muséum d'histoire naturelle* (Paris: Gauthier-Villars et C$^{\text{ie}}$, 1922).

[Ber10] Orfeu Bertolami, "The Spirit of Unification: The Wei of Physics". In: *Boletim, Sociedade Portuguesa de Matemática (Número especial - Aureliano Mira Fernandez)* (Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010). L. Saraiva and J. T. Pinto Eds. (http://arXiv.org/abs/arXiv:1005.2918).

[BG34] D. I. Blokhintsev and F. M. Gal'perin (1934); Gipoteza neitrino i zakon sokhraneniya energii II. *Pod znamenem marxisma*, 6, pages 147–157.

[BHJ26] Max Born, Werner Heisenberg and Pascual Jordan (1926); Zur Quantenmechanik. II. *Zeitschrift für Physik*, 35, pages 557–615.

[BJ25] Max Born and Pascual Jordan (1925); Zur Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 34, pages 858–888.

[Ble50] Konrad Bleuler (1950); Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen. *Helvetica Physica Acta*, 23, page 567.

[Bor07] Armando F. Borghesani, *Introduzione alla struttura della materia* (via Marzolo, 28. Padova: Edizioni Libreria Progetto, 2007), seconda edizione edition.

[Bro36] Matvei P. Bronstein (a1936); Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder. *Pod znamenem marxisma*, 9, pages 140–157.

[Bro12] Matvei P. Bronstein (2012); Republication of: Quantum theory of weak gravitational fields. *General Relativity and Gravitation*, 44, pages 268–283. Translated from German by M.A. Kurkov, edited by S. Deser.

[Cao99] Tian Yu Cao (Editor), chapter V Quantum field theory and space-time. "Introduction" by John Stachel, pages 166–175 (Cambridge University Press, 1999).

[CS79] Robert S. Cohen and John J. Stachel, *Selected papers of Léon Rosenfeld*, volume 21 of *Boston Studies in the Philosophy of Science* (Springer, 1979).

[Dal32] G. Dalla Noce (1932); Sulle teorie gravitazionali elettriche materiali. *Il Nuovo Cimento*, 9, pages I–XX.

[Dir25] Paul A. M. Dirac (1925); The Fundamental Equations of Quantum Mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London A*.

[Dir58] Paul A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, 1958).

[dM34] Aureliano L. de Mira Fernandez (1934); La teoria unitaria dello spazio fisico e le equazioni relative alla Meccanica Atomica. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 19, pages 314–319.

[DS12] Stanley Deser and A. Starobinsky (2012); Editorial note to: Matvei P. Bronstein, Quantum theory of weak gravitational fields. *General Relativity and Gravitation*, 44, pages 263–265.

[Dur03] Ian T. Durham (2003); Eddington and uncertainty. *Physics in Perspective*, 5, page 398. ArXiv:physics/0204057.

[Dur05] Ian T Durham (2005); *Sir Arthur Eddington and the Foundations of Modern Physics*. Ph.D. thesis, School of Mathematics, University of St. Andrews. ArXiv:quant-ph/0603146.

[Edd31] Arthur Eddington (1931); On the Value of the Cosmical Constant. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 133, pages 605–615.

[EK88] J. Eisenstaedt and A. J. Kox (Editors), *Studies in the History of General Relativity*, volume 4 of *Einstein Studies*, chapter "Dirac Equations in Curved Space-Time" by S. Kichenassamy (Boston/Basel/Berlin: Birkäuser, 1988).

[EK92] J. Eisenstaedt and A. J. Kox (Editors), *"The first steps of quantum gravity and the Planck values" by Gennady E. Gorelick*, pages 364–376 (Boston: Birkhaeuser: Cambridge University Press, 1992).

[Ell12] George Ellis (2012); Editorial note to: H. P. Robertson, Relativistic cosmology. *General Relativity and Gravitation*, 44, pages 2099–2114.

[Fah33] M. Fahmy (1933); A further point of analogy between the equations of the quantum theory and Maxwell's equations. *Proceedings of the Physical Society*, 45, page 67.

[Fer29] Enrico Fermi (1929); Sopra l'elettrodinamica quantistica. *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, 12, pages 431–435.

[FI29] Vladimir Fock and Dmitrij Iwanenko (b1929); Über eine mögliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie. *Zeitschrift für Physik*, 54, page 798.

[Fin30] Bruno Finzi (1930); Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione isotropa. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, XII, pages 631–639.

[Fin31a] Bruno Finzi (1931); Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione unica. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, XIII, pages 8–12.

[Fin31b] Bruno Finzi (1931); La Relatività Generale nei fenomeni di irradiamento atomico. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, XIII, pages 119–124.

[Fit10] Augusto J. Fitas, "Mira Fernandes e a investigação científica em Portugal no período entre as duas guerras mundiais". In: *Boletim, Sociedade Portuguesa de Matemática (Número especial - Aureliano Mira Fernandez)*, pages 21–41 (Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010). L. Saraiva and J. T. Pinto Eds.

[Fli28] Henry T. Flint (b1928); Relativity and the Quantum Theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 117, pages 630–637.

[Fli31] Henry T. Flint (1931); A Metrical Theory and Its Relation to the Charge and Masses of the Electron and Proton. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 131, pages 170–177.

[Fli33] Henry T. Flint (1933); A New Presentation and Interpretation of the Quantum Equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 141, pages 363–375.

[Fli34a] Henry T. Flint (1934); A Relativistic Basis of the Quantum Theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 144, pages 413–424.

[Fli34b] Henry T. Flint (1934); A Relativistic Basis of the Quantum Theory. II. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 145, pages 645–656.

[Fli35] Henry T. Flint (1935); A Relativistic Basis of the Quantum Theory. III. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 150, pages 421–441.

[Fli36] Henry T. Flint (1936); On the development of the quantum equation and a possible limit to its application. *Proceedings of the Physical Society. Series A*, 48, pages 433–443.

[Fli37] Henry T. Flint (1937); Ultimate Measurements of Space and Time. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 159, pages 45–56.

[Für33] Reinhold Fürth (1933); Einige Bemerkungen zum Problem der Neutronen und positiven Elektronen. *Zeitschrift für Physik*, 85, pages 294–299.

[GdCL88] David Lopes Gagean and Manuel da Costa Leite, *Studies in the History of General Relativity*, volume 4 of *Einstein Studies*, chapter "General Relativity and Portugal: A Few Pointers Towards Peripheral Reception Studies" (Boston; Basel; Berlin: Birkäuser, 1988).

[GF11] Gennady E. Gorelik and Victor Y. Frenkel, *Matvei Petrovich Bronstein*. Modern Birkhäuser Classics (Birkäuser, 2011).

[Gho33a] Jyotirmaya Ghosh (1933); Das Gravitationsfeld des Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 85, pages 511–513.

[Gho33b] Jyotirmaya Ghosh (1933); Gravitational Field of an Electron. *Nature*, 132, page 170.

[Gho36] Jyotirmaya Ghosh (1936); Die Fundamentalgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 99, pages 583–584.

[God92] Odon Godart, *"Contribution of Lamaître to General Relativity (1922-1934)"*, page 444 (Boston: Birkhaeuser: Cambridge University Press, 1992). Editors: J. Eisenstaedt and A. J. Kox.

[Goe04] Hubert F.M. Goenner (2004). On the History of Unified Field Theories. Living Review in Relativity 7 (cited on March 2 2014) http://www.livingreviews.org/lrr-2004-2.

[Gup50] Suraj N. Gupta (1950); Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 63, page 681.

[Gup51] Suraj N. Gupta (1951); On the Supplementary Condition in Quantum Electrodynamics. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 64, page 850.

[Hag14] Amit Hagar (2014); Squaring the circle: Gleb Wataghin and the prehistory of quantum gravity . *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 46, pages 217 – 227. Part B.

[Hei25] Werner Heisenberg (1925); Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehunge. *Zeitschrift für Physik*, 33, pages 879–893.

[Hei30] Werner Heisenberg (1930); Die Selbstenergie des Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 65, pages 4–13.

[Hof31] Banesh Hoffmann (1931); Projective Relativity and the Quantum Field. *Physical Review*, 88, pages 173–204.

[Hof32] Banesh Hoffmann (1932); On General Relativity. *Review of Modern Physics*, 4, pages 173–204.

[HP29] Werner Heisenberg and Wolfgang Pauli (1929); Zur Quantendynamik der Wellenfelder. *Zeitschrift für Physik*, 56, pages 1–61.

[HP30] Werner Heisenberg and Wolfgang Pauli (1930); Zur Quantentheorie der Wellenfelder. II. *Zeitschrift für Physik*, 59, pages 168–190.

[HU14] Jan Hilgevoord and Jos Uffink, "The Uncertainty Principle". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, (Editor) Edward N. Zalta (2014), spring 2014 edition.

[Hun27] Friedrich Hund (1927); Zur Deutung der Molekelspektren. II. *Zeitschrift für Physik*, 42, pages 93–120.

[Iac10] Giuseppe Iacobellis (2010); La Meccanica delle Matrici di Heisenberg. Tesi di Laurea.

[Inf34] Leopold Infeld (1934); Dirac's equation in the general relativity theory. *Acta Physica Polonica*, 13, pages 1–14.

[IvdW32] Leopold Infeld and Leendert van der Waerden (1932); Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 7/10, page 380–401. Corrections in: vol. 11/13; pag. 474.

[IZ80] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill International Book Company, 1980).

[Jeh34] Herbert Jehle (1934); Zur allgemeinen relativistischen Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 87, pages 370–374.

[Jeh35] Herbert Jehle (1935); Zur allgemein-relativistischen Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 94, pages 692–706.

[Jeh36] Herbert Jehle (1936); Berichtungen und Bemerkung zur Arbeit: Zur allgemeinen-relativistischen Quantenmechanik. II. Kosmologische Quantenerscheinungen. *Zeitschrift für Physik*, 100, pages 717–717.

[Kas31] Alfred Kastler (1931); Le dynamisme interne des corpuscules et l'origine de la gravitation. *Journal de Physique et le Radium*, 2, pages 61–64.

[Kas32] Edward Kasner (1932); Complex Geometry and Relativity: Theory of the -rac Curvature. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 18, pages 267–274.

[KC94] Helge Kragh and Bruno Carazza (1994); From Time Atoms to Spacetime Quantization: the Idea of Discrete Time ca 1925–1936. *Studies in History and Philosophy of Science*, 25, pages 437–462.

[KH25] Hendrik A. Kramers and Werner Heisenberg (1925); Über die Streuung von Strahlung durch Atome. *Zeitschrift für Physik*, 31, pages 681–708.

[Kie07] Claus Kiefer, *Quantum Gravity.* International Series of Monographs on Physics (OUP Oxford, 2007).

[Kle26] Oskar Klein (b1926); The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, 118, page 516.

[Kra24] Hendrik A. Kramers (1924); *Nature*, 113, pages 673–674.

[KZ14] R. A. Konoplya and A. Zhidenko (2014); Instability of D-dimensional extremally charged Reissner-Nordström(-de Sitter) black holes: Extrapolation to arbitrary D. *Pysical Review D*, 89.

[Lem32] Georges Lemaître (1932); The beginning of the World from the Point of View of the Quantum Theory. *Nature*, 127, page 706.

[Lem10] Jos P. S. Lemos, “unitary theories in the work of Mira Fernandes (beyond general relativity and differential geometry)”. In: *Boletim, Sociedade Portuguesa de Matemática (Número especial - Aureliano Mira Fernandez)*, page 147 (Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010). L. Saraiva and J. T. Pinto Eds; (http://arXiv.org/abs/arXiv:1012.5093v2).

[LL04a] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifšits, *Teoria dei campi*, volume Fisica teorica 2 (Edizioni Mir, 2004). Editori Riuniti: III edizione, I ristampa. Traduzione di Aleksandr Machov.

[LL04b] Lev D. Landau and Evgenij M. Lifšits, *Teoria quantistica relativistica*, volume Fisica teorica 4 (Edizioni Mir, 2004). Editori Riuniti: IV edizione. Traduzione di Valento Pedrocchi.

[LP30] Lev D. Landau and Rudolf Peierls (1930); Quantenelektrodynamik im Konfigurationsraum. *Zeitschrift für Physik*, 62, pages 188–200.

[MI35] Yositaka Mimura and Taku Iwatsuki (1935); Theory of gravitation based on wave geometry. *Journal of Science Hiroshima University A*, 5, pages 205–215.

[Mim35] Y. Mimura (1935); Relativistic quantum mechanics and wave geometry. *Journal of Science Hiroshima University A*, 5, pages 99–106.

[Mis57] Charles W. Misner (1957); Feynman Quantization of General Relativity. *Reviews of Modern Physics*, 29, pages 497–509.

[Nah10] Paul J. Nahin, *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton Science Library (Princeton University Press, 2010).

[Opp30] Julius R. Oppenheimer (1930); Note on the Theory of the Interaction of Field and Matter. *Pysical Review*, 35, pages 461–477.

[Pai88] Abraham Pais, *Inward Bound. Of Matter and Forces in Physical World* (New York: Oxford University Press, USA, 1988), second edition.

[Pai91] Abraham Pais, *“Sottile è il Signore...” La scienza e la vita di Albert Einstein* (Torino: Collana: Gli Archi, 1991). Bollati Boringhieri.

[Per00] Walton A. Perkins, Interpreted history of neutrino theory of light and its future. In: *Loretz group, CPT and neutrinos. Proceedings, International Workshop, Zacatecas, Mexico, June 23-26, 1999*, pages 115–126 (2000).

[Pok31] G. I. Pokrowski (1931); The Nature of Time. *Nature*, 667, page 163.

[Pre33] A. Press (1933); Xcii. a unitary principle linking relativity, gravitation, and the discreteness of quanta. *Philosophical Magazine Series 7*, 15, pages 1143–1153.

[Pre34] Cambridge University Press (Editor), *Orthohydrogen, Parahydrogen and Heavy Hydrogen* (The Cambridge series of Physical Chemistry, 1934).

[Pyc32a] Zeno Pycha (1932); Geometria del Cronotopo Quantistico. *Atti dell'Accademia Pontifica delle Scienze. Nuovi Lincei*, 85, pages 165–183.

[Pyc32b] Zeno Pycha (1932); Sulla relatività nel microcosmo. *Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei*, 15, pages 820–827.

[RCT31] Paul Ehrenfest e Norman Podolsky Richard C. Tolman (1931); On the gravitational field produced by light. *Physical Review*, 37, page 602.

[Ros30a] Leon Rosenfeld (a1930); Bemerkung über die Invarianz der kanonischen Vertauschungsrelationen. *Zeitschrift für Physik*, 63, pages 574–575.

[Ros30b] Leon Rosenfeld (b1930); Zur Quantelung der Wellenfelder. *Annalen der Physik*, 5, page 1113.

[Ros32] Leon Rosenfeld (1932); La théorie quantique des champs. *Annales de l'Institut Henry Poincaré*, 2, pages 25–91.

[Rov00] Carlo Rovelli (2000); Notes for a brief history of quantum gravity. pages 742–768. E-print: gr-qc/0006061.

[Rua31] Arthur Ruark (1931); The Roles of Discrete and Continuous Theories in Physics. *Physical Review*, 37, pages 315–326.

[RV32] Nathan Rosen and Manuel S. Vallarta (1932); Relativity and the Uncertainty Principle. *Physical Review*, 40, page 569.

[Sal09] Donald Salisbury (2009); Translation and Commentary of Léon Rosenfeld's "Zur Quantelung der Wellenfelder", *Annalen der Physik* **387**, 113 (1930). Preprint 381, Max Planck Institute for the History of Science, Berlin.

[Sch32] Erwin Schrödinger (1932); Diracsches Elektron im Schwerefeld I. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften; Physikalisch-mathematische Klasse*, pages 105–128.

[Sny47a] Hartland Snyder (a1947); Quantized Space-Time. *Physical Review*, 71, pages 38–41.

[Sny47b] Hartland Snyder (b1947); The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time. *Physical Review*, 72, pages 68–71.

[Sol31a] Jacques Solomon (a1931); Nullpunktsenergie der Strahlung und Quantentheorie der Gravitation. *Zeitschrift für Physik*, 71, pages 162–170.

[Sol31b] Jacques Solomon (b1931); Sur quelques difficultés de la théorie des quanta. *Journal de Physique et le Radium*, 2, pages 321 – 340.

[van67] B. L. van der Waerden (Editor), *Sources of Quantum Mechanics*, volume V of *Classics of Science* (New York: Dover Publications, 1967).

[Var31] Autori Vari (1931); La Fisica Alla XX Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze. *Il Nuovo Cimento*, 8, pages CLXXXI–CCII.

[Vol32] Fondazione Alessandro Volta (Editor), *Convegno di Fisica Nucleare. Ottobre 1931.* Atti dei Convegni (Roma: Reale Accademia d'Italia, 1932). (Abbiamo volutamente omessa dal titolo l'indicazione dell'anno "IX", riferita all'anno dell'epoca *fascista*.).

[Wat32] Gleb Wataghin (1932); Sulle trasformazioni di Lorentz nella meccanica quantistica. *Società Italiana di Fisica. XXIV Adunanza Generale*, page XCIV.

[Wat36a] Gleb Wataghin (a1936); Sulle forze d'inerzia secondo la teoria quantistica della gravitazione. *La Ricerca Scientifica*, 2, pages 341–342. Anno VII, Serie 2, v.2, n.5-6.

[Wat36b] Gleb Wataghin (b1936); Sul movimento oscillatorio dell'elettrone secondo la teoria di Dirac. *La Ricerca Scientifica*, 2, pages 333–334. Anno VII, Serie 2, v.2, n.5-6.

[Wei36] Pierre Weiss (1936); On the Quantization of a Theory Arising from a Variational Principle for Multiple Integrals with Application to Born's Electrodynamics. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 156, pages 192–220.

[Wic50] Gian Carlo Wick (1950); The Evaluation of the Collision Matrix. *Physical Review*, 80, pages 268–272.

[WM31] F. O. Wollaston and K. W. Miller (1931); The Nature of Time. *Nature*, 127, page 163.

[YN07] Takahiro. Yajima and Hiroyuki Nagahama (2007); Physical Fields, Soliton Systems and Kawaguchi Space. *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi Matematică*, 53, pages 343–355.

[Yuk55] Hideki Yukawa (1955); On the Interaction of Elementary Particles. I. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 1, pages 1–10.

[Zel67] A. L. Zel'manov (1967); Kosmologiya. *Razvitie astronomii*, 5.

Capitolo 4

Il quanto gravitazionale e lo spin

In quest'ultimo capitolo esploriamo il periodo che va dal 1937 fino al 1945, anno della fine della Seconda Guerra Mondiale.

Nel primo biennio emergono alcuni tentativi di eliminazione dei problemi legati all'insorgenza degli infiniti evidenziati da Rosenfeld e Solomon, tra cui spiccano il contributo di March, che tenta di applicare l'idea dell'esistenza di una lunghezza minima, i brevi ma numerosi lavori di Wataghin, che cerca di dare corpo all'idea che il quanto gravitazionale sia equivalente allo scambio di due neutrini, quelli di Born, che tenta un'armonizzazione tra la teoria di Einstein e i le Meccanica Quantistica utilizzando il proprio principio di reciprocità e quelli di Solomon, uno dei pochi a conoscere i lavori di Bronstein, che interviene sulla questione dell'applicabilità della legge di Newton alle particelle elementari.

L'evento più importante è sicuramente l'identificazione fortuita dello spin del gravitone, a opera di Fierz e Pauli nel 1939. La scoperta avviene infatti a partire dallo studio del problema generale della descrizione di campi quantistici con spin arbitrario e i due autori identificano quello con spin 2 con il campo gravitazionale.

Accanto ai soliti tentativi episodici, inoltre, è proprio lo studio della quantizzazione di campi di spin arbitrario che apre la strada al primo esempio di piccolo gruppo di ricerca che si occupa della quantizzazione della gravità, proprio durante gli anni della guerra. Le figure di Marie-Antoniette Tonnelat e Gérard Petiau ruotano attorno a quella di de Broglie, che con il metodo di fusione propone una tecnica alternativa a quella di Fierz e Pauli per lo studio dei campi con spin arbitrario. Dalla teoria di de Broglie, Tonnelat e Petiau per il campo di spin 2 emerge però un gravitone massivo: gli autori mettono in evidenza il collegamento tra la massa del quanto gravitazionale e la costante cosmologica, che emerge esattamente come accade oggi nelle teorie note col nome di *Massive Gravity.*

4.1 1937-1938: verso la teoria quantistica dei campi

Nonostante fosse chiaro che la quantizzazione del campo gravitazionale implicasse di fatto la comparsa di un nuovo "mediatore", non erano ancora stati identificati i numeri quantici di tale "particella". Infatti nonostante ci fossero stati vari tentativi per scrivere le equazioni di campi quantistici con spin arbitrario maggiore di uno, i risultati non erano stati ancora soddisfacenti[1]. Oltre a questo non si possedeva ancora una chiave di lettura per gli infiniti che compaiono nella quantizzazione dell'interazione tra campi differenti.

Il fisico austriaco Arthur March pubblica, in questo periodo, una serie di lavori in cui cerca di eliminare il problema degli infiniti postulando l'esistenza di una lunghezza d'onda minima[2] γ. La produzione del fisico austriaco è stata analizzata in dettaglio da Helge Kragh [Kra95]. Lo storico olandese sottolinea come già verso l'inizio degli anni trenta March fosse convinto che l'esistenza degli infiniti fosse l'indizio della necessità di trovare un nuovo fondamento *filosofico* per la teoria dei campi. Oltre a questo March era convinto che anche la geometria riemanniana necessitasse di una qualche modifica per conciliarla col principio di indeterminazione. Kragh riporta ancora che, verso la metà degli anni trenta, March si era convito che la conseguenza principale del principio di indeterminazione fosse un'impossibilità *intrinseca* di dare significato a lunghezze d'onda minori di una determinata lunghezza d'onda. E poiché il primo obiettivo di March era quello di eliminare l'auto-energia dell'elettrone, il fisico austriaco aveva identificato in un precedente lavoro tale lunghezza d'onda con il 'raggio classico dell'elettrone', $\gamma = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$, dove m_e è la massa dell'elettrone e gli altri simboli hanno il significato usuale. Per March introdurre tale lunghezza fondamentale era equivalente a postulare che attorno a ogni punto dello spazio-tempo "quantistico" esistesse una sorta di sfera di "indecisione" avente raggio γ, che è equivalente a immaginare la metrica come una sorta di 'metrica statistica'[3], come la chiamerà l'autore stesso[4]. L'ipotesi dell'esistenza di una lunghezza minima comporta come conseguenza l'esistenza di un'energia massima raggiungibile e la conseguente eliminazione delle divergenze ultraviolette emerse sin dai primi sviluppi della teoria quantistica dei campi, perché gli integrali non divergono più[5]. Kragh menziona

[1] Uno dei tentativi degni di nota è quello che era stato pubblicato da Ettore Majorana [Maj32]. L'importanza del lavoro del fisico italiano è oggi riconosciuta, ma all'epoca il lavoro non ebbe la dovuta risonanza. Per i particolari tecnici e per un'analisi del contesto storico specifico rimandiamo a [Fra66].

[2] Usiamo lo stesso simbolo usato da March.

[3] Si veda per esempio [Mar38a] [Mar38b].

[4] Al giorno d'oggi non viene più presa in considerazione l'introduzione di una lunghezza minima di questo tipo, perché, come detto anche nei precedenti capitoli, violerebbe, per esempio, l'invarianza per trasformazioni di Lorentz.

[5] In inglese si parla di *cut-off*.

anche come March applichi in un lavoro pubblicato su *Zeitschrift für Physik*, [Mar37c], il concetto della lunghezza minima anche ai risultati raggiunti da Rosenfeld e Solomon per l'energia gravitazionale della luce[6], ottenendo ovviamente un contributo finito. Come già fatto spendiamo alcune parole per analizzare quello che Kragh tralascia[7] nella sua analisi di questo lavoro.

Nell'introduzione al lavoro il fisico austriaco sottolinea come l'esistenza della lunghezza d'onda minima γ gli permetta di trascurare tutte le lunghezze d'onda λ inferiori a γ, perché pur essendo permesse dalla teoria per l'autore non interagiscono con la particella. Poi March fa una considerazione importante. L'introduzione di γ porta, come si accinge a mostrare, all'eliminazione degli infiniti non solo per l'auto-energia dell'elettrone, ma anche per l'auto-energia derivante dall'interazione gravitazionale di un fotone calcolata da Rosenfeld e Solomon. E poiché in tale fenomeno la materia non gioca alcun ruolo[8] e poiché il fenomeno coinvolge la forza gravitazionale, che ha carattere *universale*, il fisico austriaco dichiara che '[...] γ non è solamente una costante caratteristica per l'elettrone, è invece una grandezza che deve dipendere dalla geometria del Mondo e che si riflette in una struttura metrica del continuo spazio-temporale' ([Mar37c]; pag. 292). Per March dunque la grandezza γ, in virtù della sua capacità di risolvere il problema dell'infinito della gravità, assume la qualità di *universalità* propria della forza gravitazionale. Per questo motivo, in questo lavoro, March non identifica più γ con il raggio classico dell'elettrone. Nonostante questo non fornisce un'espressione alternativa. Da questo punto di vista lo stesso ruolo viene giocato oggi dalla lunghezza di Planck l_P delle moderne teorie delle Stringhe, che è definita solamente utilizzando costanti universali[9] e ha quindi quel carattere di universalità richiesto da March. Dopo aver dunque giustificato l'introduzione di γ ricordando l'eliminazione degli infiniti nel caso dell'auto-energia dell'elettrone, March ripercorre i passi di Rosenfeld, fino a scrivere le equazioni di Einstein linearizzate (3.16). A questo punto il lavoro dell'autore si differenzia da quello di Rosenfeld. Innanzitutto March utilizza il fatto che la traccia del tensore energia-impulso del campo elettromagnetico è nulla, ottenendo, in luogo delle (3.16), le seguenti equazioni:

$$\Box h_{\mu\nu} = -2\varepsilon T^{em}_{\mu\nu} \, , \tag{4.1}$$

[6]Solomon viene nominato proprio perché, come sottolineato anche da noi, la paternità della scoperta che l'infinito deriva dall'interazione tra il campo gravitazionale e quello elettromagnetico viene attribuita alla collaborazione tra i due ([Mar37c]; pag. 291).

[7]Ovviamente non stiamo criticando Kragh: la mancanza si spiega semplicemente con il fatto che lo storico olandese offre una panoramica generale su tutto il lavoro di March in questo periodo.

[8]Letteralmente March scrive: '[...] che non ha nulla a che vedere con l'elettrone, ma coinvolge solamente la radiazione libera dalla materia' ([Mar37c]; pag. 292).

[9]Ricordiamo che $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$.

dove $\varepsilon = \frac{8\pi G}{c^4}$ come nel precedente capitolo. March scrive quindi una lagrangiana differente:

$$\mathcal{L}_{March} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho} + \frac{\varepsilon}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em}, \tag{4.2}$$

che produce le equazioni (4.1) come equazioni del moto. Notiamo anche un'altra differenza tra la Lagrangiana di March e quella di Rosenfeld. Quella di March infatti è funzione delle variabili $h_{\mu\nu}$, mentre quella di Rosenfeld era funzione delle variabili $\bar{h}_{\mu\nu}$ e produceva le equazioni di Einstein che si ottengono *senza* l'utilizzo della condizione di traccia nulla[10]. March ricalcola la Hamiltoniana $\bar{\mathcal{H}}_G$ e impone le condizioni di quantizzazione *canoniche* alle sue variabili coniugate[11] $h_{\mu\nu}$ e $p_{\mu\nu} = \frac{1}{ic}\frac{\partial L}{\partial(\partial_0 h^{\mu\nu})}$. L'autore riporta brevemente la procedura di calcolo di Rosenfeld per poi concentrarsi nel passaggio dal discreto al continuo, ottenuto passando al limite[12] $L \to \infty$ dell'equazione (3.28) del capitolo precedente, come fatto anche da Rosenfeld. Questa volta, però, grazie al "taglio" delle alte energie, il limite converge, e il risultato ottenuto da March per $\bar{\mathcal{H}}_G$ gli permette di quantificare il contributo all'energia dei quanti di luce attraverso lo scambio di gravitoni. Con i parametri usati dall'autore il contributo è dell'ordine dell'uno per cento dell'energia $\mathcal{E} = \hbar\nu$ di un fotone libero. Il taglio operato da March avviene a frequenze dell'ordine di $10^{15}s^{-1}$, ovvero a energie per cui oggi sappiamo che gli effetti gravitazionali sono in effetti trascurabili. Come sottolinea Kragh, March sarà l'unico a seguire questo tipo di approccio per l'eliminazione degli infiniti nella teoria dei campi.

Nel capitolo precedente abbiamo visto come la fisica dei quanti cominci a essere chiamata in causa anche in ambito cosmologico, dove deve necessariamente interagire con la RG. Nel 1937 le idee di Eddington trovano un difensore d'eccezione, Schrödinger, il quale decide di relazionare proprio sul lavoro del fisico [Sch38] a una conferenza tenutasi a Bologna alla fine di ottobre. Dell'atteggiamento di Schrödinger si sono già occupati altri autori (si veda per esempio [Kra11]; pag. 22 e segg. e le referenze in esso contenute).

[10]Ricordiamo che $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$. Per mettere in evidenza la differenza tra le due Lagrangiane scriviamo quella di Rosenfeld (3.17) sostituendo le variabili $\bar{h}_{\mu\nu}$ con le variabili $h_{\mu\nu}$ ottenendo:

$$\mathcal{L}_{Rosenfeld} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\left(\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h\right) + \frac{\varepsilon}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em}, \tag{4.3}$$

perché per le tracce vale la semplice relazione $\bar{h} = -h$. Si può notare la presenza di un termine aggiuntivo rispetto alla Lagrangiana (4.2). Nonostante questa differenza, in questo caso, anche la Lagrangiana (4.3) dà le equazioni del moto (4.1), perché la traccia del tensore energia-impulso del campo elettromagnetico ha traccia nulla.

[11]L'autore definisce il tempo nel seguente modo: $t = icx^0$.

[12]Ricordiamo che il processo di quantizzazione del campo elettromagnetico nella teoria quantistica dei campi comincia con una discretizzazione dello spazio, che viene suddiviso in celle cubiche di lato L per lavorare con delle sommatorie. In un secondo momento si ritorna al continuo passando al limite $L \to +\infty$.

Analogamente, nello stesso anno Samuel Sambursky pubblica un lavoro su *Physical Review* [Sam37] in cui, partendo proprio da questioni cosmologiche, arriva a discutere una relazione tra la costante gravitazionale di Newton G e il quanto d'azione $\hbar$. Le riflessioni di Sambursky sono ispirate da una conferenza tenuta a Oxford nello stesso anno da Edwin P. Hubble, che, ai giorni nostri, viene a volte indicato come il principale promotore del modello di Universo in espansione. Al contrario la conferenza di Oxford è chiaramente uno degli episodi che contribuisce a ricordarci che Hubble, in realtà, ha sempre nutrito dei dubbi riguardo a tale modello. Come riportato[13] su *Nature* [P.36], Hubble presenta infatti una relazione in cui aggiorna il conteggio del numero di nebulose extragalattiche, suggerendo come i dati sperimentali da lui analizzati non siano più compatibili con un modello di Universo in espansione[14], rilanciando invece un modello di Universo *statico*. Il modello statico a cui fa riferimento Hubble per spiegare il fenomeno dello spostamento verso il rosso delle lunghezze d'onda assume che sia la stessa lunghezza d'onda della luce a variare nel tempo. Sambursky ne propone un'ulteriore variante, assumendo che sia il quanto d'azione a variare nel tempo[15] ([Sam37]; pag. 335). Le motivazioni di Sambursky vanno cercate, come spiega lo stesso autore, nell'idea che la costante di Planck giochi il ruolo di *lunghezza di riferimento*[16]. La derivata temporale della costante di Planck, $\dot{\hbar}$, che nel modello di Universo di Sambursky è diversa da zero[17], ha le dimensioni di un'energia e l'autore la collega al raggio R di un Universo statico[18] ([Sam37]; pag. 337). Per spiegare il fenomeno dello spostamento verso il rosso, Sambursky immagina l'espansione come un fenomeno *apparente*, dovuto al fatto che le lunghezze di riferimento su scala atomica *decrescono col tempo* ([Sam37]; pag. 335). Alla fine del lavoro l'autore osserva che la variazione del quanto d'azione introduce un'ovvia asimmetria temporale: Sambursky suggerisce quindi di collegare la variabilità di $\hbar$ con la possibilità di distinguere tra passato

[13]Dell'autore nell'articolo vengono indicate solamente le iniziali di nome e cognome: dovrebbe trattarsi di Harry Hemley Plaskett.

[14]L'autore della nota su Nature, che riporta le parole di Hubble, ricorda che il conteggio del numero di nebulose è un elemento chiave per decidere se l'Universo è in espansione oppure no.

[15]Nel modello di Sambursky, oltre al quanto d'azione, anche il valore della carica elettrica dovrebbe essere variabile.

[16]Per l'autore il raggio dell'atomo di idrogeno e la lunghezza Compton dell'elettrone giocano il ruolo di lunghezze atomiche di riferimento ed entrambe coinvolgono la costante di Planck. L'autore fa riferimento esplicito ([Sam37]; pag. 336) alle idee esposte da Boris Podolsky nel 1934 e a un libro di Lancelot L. Whyte del 1930. Questi riferimenti non sono mai stati citati prima da noi perché in nessuno di questi è presente un qualche collegamento con la gravità. Solo Sambursky si preoccupa di chiamare in causa la costante di Newton.

[17]Sarebbe quindi inopportuno chiamarla "costante", ma noi continueremo a riferirci a $\hbar$ anche con questa locuzione.

[18]Il raggio dipende dal rapporto $\frac{\dot{\hbar}}{\hbar}$ che nel modello di Sambursky è a sua volta una costante.

e futuro ([Sam37]; pag. 338). La relazione a nostro avviso più interessante, contenuta nel lavoro di Sambursky, è però quella che lega la costante di Planck $\dot{\hbar}$ con la costante di Newton G. L'autore ce la presenta ricavandola utilizzando solamente l'analisi dimensionale ([Sam37]; pag. 337), senza discuterne però ulteriori sviluppi. La derivazione più puntuale della relazione, infatti, si trova in un lavoro successivo a cui, come annuncia l'autore stesso, sta già lavorando mentre viene pubblicato questo primo articolo.

Il secondo lavoro di Sambursky [SS38] è scritto in collaborazione con il matematico Menahem Schiffer, che si trovava come Sambursky alla Hebrew University[19]. Per tradurre l'idea di un mondo in cui alcune misure si rimpiccioliscono mentre l'Universo resta statico, i due autori si avvalgono della geometria di Weyl, ovvero una coppia[20] $(g_{\mu\nu}\,; A_\mu)$. L'elemento di linea è statico, mentre il potenziale A_μ viene scelto in maniera tale da definire proprio una legge per la variazione della lunghezza l di un vettore, al variare solamente del tempo: $dl/l = A_0 dx^0$. L'idea degli autori è che variando il fattore di scala[21] Ω si possa dimostrare che il 'mondo statico' sia equivalente a un Universo in espansione dove però le lunghezze dei vettori sono costanti. Per dimostrare questa equivalenza da un punto di vista formale Sambursky e Schiffer coinvolgono anche 'l'equazione di Dirac per un elettrone nel campo di un protone' ([SS38]; pag. 259), ovvero l'atomo di idrogeno. A differenza dell'usuale equazione di Dirac, la costante di Planck e la carica elettrica vengono considerate funzioni del tempo. In questo procedimento, grazie anche ad alcune opportune assunzioni, gli autori riescono a esprimere il raggio di curvatura R dell'Universo attraverso la costante di Planck e la sua derivata temporale: $R = -\hbar c/\dot{\hbar}$ ([SS38]; pag. 261). Sambursky e Schiffer sono convinti di 'aver determinato la metrica dell'Universo in riferimento al sistema di coordinate atomico' ([SS38]; pag. 262) Una volta stabilita l'equivalenza tra i due tipi di Universo, gli autori analizzano la forma dell'equazione di Dirac nei due "mondi": grazie a questo confronto riescono a dedurre una relazione che lega la costante di Newton G con la costante di Planck ([SS38]; pag. 262). Il risultato è un valore per la costante gravitazionale che diminuisce nel tempo assieme al valore della costante di Planck. I due autori commentano il risultato ottenuto nel seguente modo: 'Questa diminuzione nel tempo della "costante" gravitazionale coinvolge una serie di conclusioni astronomiche che possono essere comparate con i risultati delle osservazioni e le teorie degli astrofisici' ([SS38]; pag. 263). A questo punto il lavoro si chiude con alcune osservazioni sulla

[19] Alcune derivazioni risultano oscure. Riportiamo quindi solamente le linee generali dei ragionamenti fatti dai due autori.

[20] Stiamo usando le stesse notazioni introdotte nel secondo capitolo, cfr. 2.3.1.

[21] Ricordiamo che, come visto nel secondo capitolo, nella teoria di Weyl i valori assoluti delle grandezze $g_{\mu\nu}$ sono fissabili a meno di un valore di scala Ω. La metrica è quindi invariante per le trasformazioni del tipo $g'_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}$.

diminuzione, al trascorrere del tempo, della massa delle stelle, ponendo le basi per un futuro lavoro, focalizzato su questa questione.

Il lavoro di Sambursky non è il primo e non sarà l'ultimo a occuparsi della variazione nel tempo del valore di alcune costanti fondamentali della fisica. Infatti verrà citato, per esempio da Jordan e da Hans Ertel. Il primo riprende l'idea di una costante G funzione del tempo[22] [Jor38], mentre il secondo, Hans Ertel, riprende più esplicitamente il modello di Sambursky e Schiffer. Nel 1938 il fisico tedesco pubblica alcune brevi comunicazioni sulla rivista *Naturwissenschaften*. In un primo intervento [Ert38a] Ertel presenta una stima della costante gravitazionale a partire da altre costanti, come per esempio la carica dell'elettrone, la massa dell'elettrone e il numero di protoni dell'Universo. In un secondo intervento [Ert38b], come detto, Ertel riprende il modello di Universo statico di Sambursky e Schiffer per mostrare come da tale modello possa scaturire un'espressione della costante cosmologica in accordo con le "previsioni" di Eddington. Queste prime fasi del lavoro di Ertel sono già state inquadrate da alcuni autori proprio nell'ambito della storia della *Cosmologia Quantistica* [ST96]. Nello stesso anno e sulla stessa rivista March scrive un lavoro nel cui titolo promette di discutere la struttura *atomica* dello spazio [Mar38b]. Non ci soffermeremo su questo contributo secondario[23], riservandoci di approfondire i contributi dell'autore in lavori futuri.

Nello stesso anno dei lavori appena citati, Weiss pubblica altri due contributi sulla quantizzazione delle teorie hamiltoniane che vivono su spazi-tempo curvi [Wei38a] [Wei38b]. Weiss non prende in considerazione l'azione del campo gravitazionale, quindi non ci occuperemo nel dettaglio di questi lavori. Anche questo contributo di Weiss però, come quello di due anni prima visto nel precedente capitolo, ha un ruolo importante, metterne in luce tutti i dettagli richiederebbe una lunga parentesi sui sistemi lagrangiani vincolati. Vediamo dunque solo brevemente di cosa si occupa l'autore. Weiss continua la strada intrapresa e cerca di generalizzare ulteriormente la procedura di quantizzazione canonica su spazi-tempo curvi, discutendo questa volta la scelta di un'arbitraria ipersuperficie di tipo tempo. La formulazione di Weiss ricorda molto da vicino il metodo oggi noto con il nome di formulazione ADM, dall'acronimo dei fisici hanno pubblicato tale lavoro agli inizi degli anni sessanta: Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles Misner. Il lavoro di Weiss è dunque interessante perché anticipa alcuni particolari di una formulazione che permette di formulare un approccio hamiltoniano della RG e permette di applicare

[22] Non considereremo il lavoro di Jordan perché, da quanto ci risulta, non discute esplicitamente di effetti quantistici della gravità.

[23] Come spesso accadeva in questo periodo i lavori che apparivano sulla rivista *Natürwissenschaften* erano di carattere "divulgativo" e riprendevano altri lavori più tecnici.

direttamente la quantizzazione canonica senza operare la linearizzazione della metrica. I contributi del fisico francese verranno ripresi anche da T.S. Chang, subito dopo la guerra, segnando un altro passo verso la formulazione ADM della RG. Come notato anche da Rickles, il lavoro di Weiss si inserisce nel percorso, analizzato solamente in parte da Salisbury, che porterà alla quantizzazione canonica della RG ([Ric12]; pag. 27, nota 50 a piè di pagina).

In tutt'altra direzione si muove il matematico David van Dantzig [vD38], che nello stesso anno specula sulla possibilità che la gravità sia una sorta di limite termodinamico di una qualche teoria di interazione tra le particelle[24] ([Cao99]; pag. 173).

Haas [Haa38a] [Haa38b] [Haa38c], che abbiamo già incontrato nel primo capitolo, riprende alcune idee di Eddington che riguardano i numeri puri ottenibili come combinazioni di varie costanti fisiche[25]. Gli interventi di Haas, pur non riguardando direttamente la GQ, riflettono su tutte le possibili costanti della fisica, dalla massa dell'elettrone all'eventuale raggio dell'Universo, immaginando al solito che in una futura teoria unitaria questi numeri acquistino un qualche significato particolare.

Nel panorama italiano, tra il 1938 e il 1939, vengono pubblicati i lavori di Piero Caldirola. L'italiano, laureatosi da poco all'Università di Pavia, si era trasferito all'Università La Sapienza di Roma per conoscere Enrico Fermi. In questo periodo scrive una serie di note sul collegamento tra la Meccanica Ondulatoria e la meccanica relativistica del punto in uno spazio-tempo curvo [Cal38a] [Cal38b] [Cal39a] [Cal39b]. Gli strumenti usati da Caldirola non sono molto diversi da quelli introdotti da altri prima di lui. Nel primo lavoro Caldirola cerca '[...] un collegamento tra le equazioni di Gordon e le ordinarie equazioni della meccanica relativistica'[26] ([Cal38a]; pag. 467). A partire dall'equazione di KG, utilizzando l'approssimazione di ottica geometrica, l'autore ne mostra il collegamento con le equazioni relativistiche del moto di una particella. Nei lavori successivi Caldirola tenta un approccio simile partendo però dalle equazioni del campo gravitazionale. L'autore utilizza la stessa modifica alle equazioni di Einstein considerata da Ghosh nel 1933 ([Cal38b]; pag. 595), ovvero $\tilde{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} = T^{em}_{\mu\nu}$, e introduce una *arbitraria* decomposizione del tensore di Ricci: $R_{\mu\rho} = g_{\rho\nu}F_{\mu\sigma}F^{\sigma\nu} + k\partial_\mu\varphi\partial_\rho\varphi$ dove $F_{\mu\sigma}$ indica come al solito l'intensità del campo elettromagnetico, mentre φ è un campo scalare e k una costante non nulla. Tale campo scalare dovrebbe essere identificato, secondo l'autore, con il campo di materia ([Cal38b]; pag. 596). Con questa decomposizione le identità di Bianchi $\nabla^\mu\tilde{G}_{\mu\nu} = 0$ in assenza di campo elettromagnetico si riducono all'equazione di Klein-Gordon per un campo

[24]Non siamo riusciti ad avere accesso al lavoro originale.

[25]Una di queste, per esempio, è il rapporto tra la massa del protone e dell'elettrone.

[26]L'autore fa riferimento all'equazione di Klein-Gordon.

a massa nulla $\Box\varphi = 0$. Caldirola è comunque interessato più all'aspetto dell'unificazione che a quello della quantistico, infatti l'autore non si sofferma molto su quello che chiama 'aspetto corpuscolare', ovvero sulla questione della quantizzazione. Caldirola dà per scontato che l'aspetto corpuscolare venga ben descritto dalla quantizzazione usuale del campo scalare e si occupa di altre questioni. Successivamente l'autore propone altre modifiche dello stesso approccio che però non prenderemo in considerazione[27] [Cal39a] [Cal39b].

4.1.1 Uno sguardo ai lavori di Wataghin

Come accennato nel precedente capitolo, all'inizio degli anni Trenta Gleb Wataghin era una figura di spicco della fisica teorica italiana. Dal 1934 il fisico viene però mandato in Brasile per contribuire alla fondazione dell'Università di San Paolo, dove istruisce le menti dei fisici locali. In questo periodo Wataghin continua a riflettere esplicitamente sul problema della costruzione di una teoria quantistica della gravitazione[28]. Il fisico continua a pubblicare in italiano sia su riviste italiane come *La Ricerca Scientifica* o gli *Atti dell'Accademia dei Lincei*, sia su riviste locali come il giornale di matematica della nascente Università di San Paolo. Nel 1937, ricollegandosi ai propri lavori visti nel precedente capitolo, Wataghin continua a osservare che il principio di indeterminazione rende sfuocato il concetto di metrica. L'autore considera il moto di un corpuscolo soggetto alle leggi della MQ e ragiona sulle misure fatte da diversi sistemi di riferimento, raggiungendo la conclusione che '[...] se la velocità di questo corpuscolo è ignota, resta indeterminato tutto un intorno pseudo-euclideo[...] Infatti solo la conoscenza della velocità del corpuscolo permette di distinguere nel suo intorno distanze spaziali e intervalli di tempo locale' ([Wat37a]; pag. 3). Wataghin sembra convinto, come sottolinea anche Kragh [Kra95], che debba esistere una sorta di lunghezza minima Λ che limita le possibili misure dei sistemi di riferimento[29].

Nel lavoro successivo[30], [Wat37b], l'autore cerca di porre le basi per una *teoria unitaria* delle interazioni quantistiche che inglobi anche la gravità. Wataghin, dopo aver scritto

[27] Non entriamo nei dettagli tecnici, perché l'approccio dell'autore è alquanto inusuale e perché in questo lavoro tutti i campi vengono trattati ancora come campi *classici*. Il lavoro può essere interessante per l'analisi storica dei tentativi di unificazione generici.

[28] Ampliamo, come già fatto, i commenti sintetici riportati in [Hag14], grazie anche ai lavori originali di Wataghin raccolti in rete [CJS00].

[29] Tale approccio ricorda quello di March dello stesso periodo. Il simbolo scelto per la lunghezza minima è quello usato da Wataghin. Per un approfondimento si rimanda a [Kra95].

[30] Abbiamo tentato di seguire l'esatto ordine cronologico dei lavori di Wataghin, confrontando le citazioni fatte dallo stesso Wataghin. Il sito che raccoglie i lavori on-line di Wataghin [CJS00] sembra avvalorare la nostra ricostruzione.

l'equazione di Dirac in uno spazio-tempo curvo osserva che le matrici gamma, $\gamma^{\mu}(x)$, 'determinano[...] la metrica' ([Wat37b]; pag. 1), facendo riferimento al fatto che le matrici gamma soddisfano la seguente relazione:

$$\{\gamma^{\mu}\,,\gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}\,. \tag{4.4}$$

dove le parentesi graffe indicano l'anticommutatore. Le matrici gamma con un indice curvo μ sono intese come nel linguaggio moderno come il prodotto tra le matrici gamma costanti γ^a, definite in un intorno piatto dello spazio tangente, contratte con una *vierbein* e_a^{μ}: $\gamma^{\mu}(x) = e_a^{\mu}(x)\,\gamma^a$. Gli indici latini vengono alzati e abbassati dalla metrica piatta η_{ab} e il legame tra la metrica piatta e quella curva è dato dalla relazione: $g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{a}\eta_{ab}e_{\nu}^{b}$. Lo scopo della nota di Wataghin è quella di convincere il lettore del fatto che l'effetto del campo gravitazionale può essere rappresentato proprio da queste matrici. Per comprendere la convinzione di Wataghin dobbiamo fare prima una breve digressione.

La legge del trasporto parallelo di uno spinore di Dirac ψ_{α} può essere scritta nel seguente modo:

$$\delta\psi_{\alpha} = (\Gamma_{\mu})_{\alpha\beta}\,\psi_{\beta}dx^{\mu}, \tag{4.5}$$

dove abbiamo *momentaneamente* esplicitato gli indici spinoriali α e β. Le matrici 4x4 $(\Gamma_{\mu})_{\alpha\beta}$ vengono oggi chiamate *coefficienti di Fock-Iwanenko* e sono collegati alla connessione di spin[31] $\omega_{ab\mu}$. Ricominciando a sottintendere gli indici spinoriali, la relazione che lega i coefficienti di Fock-Iwanenko con la connessione di spin è la seguente

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{4}\omega_{ab\mu}\gamma^a\gamma^b, \tag{4.6}$$

e se se applichiamo la relazione $\left\{\gamma^a\,,\gamma^b\right\} = 2\eta^{ab}$ si può mostrare facilmente che

$$(\omega^a)_{b\mu}\,\gamma^b = \Gamma_{\mu}\gamma^a - \gamma^a\Gamma_{\mu}. \tag{4.7}$$

Per un approfondimento moderno alla questione si veda per esempio [Pop07].

Torniamo a Wataghin. L'autore richiama la seguente relazione:

$$D_{\mu}\gamma^{\nu} = \partial_{\mu}\gamma^{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}\gamma^{\sigma} + \Gamma_{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\Gamma_{\mu} = 0 \tag{4.8}$$

dove abbiamo definito una nuova derivata covariante D_{μ} che contiene sia gli usuali simboli di Christoffel $\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}$ che la connessione di spin, come si vede grazie alla relazione (4.7). La (4.8) rappresenta quella che oggi chiameremmo *postulato delle vierbein* e che si impone nelle moderne teorie di supergravità: essa esprime la compatibilità delle *vierbein* con la

[31] La connessione di spin si rende necessaria perché la derivata delle *vierbein* non trasforma come un vettore per trasformazioni di Lorentz.

metrica[32]. Per costruire la propria teoria unitario, in [Wat37b], Wataghin propone una dimostrazione del fatto che dalle identità (4.4) e dalle equazioni (4.8) seguono *le equazioni di Einstein nel vuoto* nella forma $R_{\mu\nu} = 0$. L'anno successivo però, [Wat38f], l'autore stesso giudicherà la dimostrazione presente in questo articolo come errata, e cercherà di fornirne una seconda alternativa. Anche questa dimostrazione risulta comunque errata, ma di questo fatto, da quello che ci risulta, Wataghin non si renderà mai conto[33].

Come conseguenza della propria convinzione, già dal 1937 Wataghin dà alle relazioni (4.8) il nome di *equazioni gravitazionali del primo ordine*, commentandole nel seguente modo: 'Questo risultato fa vedere che è possibile fondare la teoria della gravitazione su equazioni del tipo (4.8) che sono del primo ordine nelle γ^μ, e sulla seguente forma dell'elemento lineare:

$$ds = \gamma_\mu dx^\mu \,, \tag{4.11}$$

dove ds è una matrice del 4^o ordine[...] '[34] ([Wat37b]; pag. 2). Wataghin cerca quindi di scrivere una teoria di campo in cui compaia un termine con la seguente forma $\bar{\psi}\gamma^\mu\Gamma_\mu\psi$, il quale dovrebbe rappresentare l'interazione tra due elettroni, ovvero i campi ψ e $\bar{\psi}$, mediata dal campo gravitazionale, rappresentato dalle matrici γ^μ, in virtù della precedente

[32]Il postulato delle *vierbein* afferma che la derivata covariante definita in (4.8) delle *vierbein*, in assenza di torsione, è nulla, ovvero: $D_\mu e^\nu_a = 0$. Per convincersi dell'equivalenza tra (4.8) e il postulato delle *vierbein* si ricordi che le matrici γ^a definite nello spazio piatto sono costanti.

[33]Facciamo una breve digressione sull'errore di Wataghin. In [Wat38f] l'autore cercherà di semplificare la legge del trasporto parallelo per gli spinori imponendo in maniera del tutto arbitraria che i coefficienti di Fock-Iwanenko abbiano la seguente forma (riesplicitiamo gli indici spinoriali α e β):

$$(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} = iA_\mu \cdot \delta_{\alpha\beta}, \tag{4.9}$$

dove le quantità A_μ dovrebbero essere i potenziali elettromagnetici, spinto probabilmente dalla volontà di scrivere una teoria *unitaria*. In questo modo le condizioni (4.8) possono essere sostituite con le seguenti:

$$\nabla_\mu\gamma_\nu = \partial_\mu\gamma_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\gamma_\sigma = 0, \tag{4.10}$$

dove la derivata è tornata a essere l'usuale derivata covariante, perché ora le Γ_μ e le matrici gamma commutano. Grazie a questa ipotesi ad hoc il commutatore delle derivate covarianti è di nuovo proporzionale al tensore di Riemann e grazie all'uso delle relazioni (4.4) l'autore otterrà ancora, dal suo punto di vista, le equazioni di Einstein nel vuoto. Wataghin non si rende conto che dalla relazione che si ottiene anticommutando le derivate covarianti, ovvero $[\nabla_\mu \,, \nabla_\nu]\,\gamma_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma\gamma_\sigma = 0$, segue che *l'intero* tensore di Riemann è nullo, ovvero $R_{\mu\nu\rho\delta} = 0$, relazione che si ottiene dalla precedente moltiplicandola per γ_δ e prendendone la traccia. Questo significa che dalle equazioni (4.10) non si otterrebbero le equazioni di Einstein nel vuoto, ma delle equazioni più restrittive, perché se il tensore di Riemann è nullo allora lo spazio-tempo è piatto.

[34]Ovviamente abbiamo adattato al nostro testo la citazione dell'equazione (4.8) rispetto al lavoro originale.

dimostrazione. Wataghin infatti sottolinea: '[...] assoggettando alla seconda quantizzazione le γ^μ, introduciamo la nozione dei corpuscoli gravitazionali con proprietà analoghe a quella dello spin degli elettroni' ([Wat37b]; pag. 2). Ricordiamo che in precedenza Wataghin aveva proposto l'idea di identificare il quanto gravitazionale con una sorta di bosone formato da due fermioni, i neutrini. Hagar osserva che la citazione appena riportata e i commenti seguenti sembrano spingere Wataghin a identificare il gravitone con il neutrino stesso, nonostante quest'ultimo fosse un fermione ([Hag14]; pag.6). A nostro avviso, però non è questa l'idea dell'autore. Infatti, continuando la lettura, Wataghin scrive: 'Ciò mostra che l'emissione e l'assorbimento *dei neutrini* descritti dalle γ^μ quantizzate possono servire per salvaguardare la legge della conservazione dell'impulso'[35] ([Wat37b]; pag. 2). Il corsivo è nostro: l'autore usa ancora il plurale e immagina quindi che lo scambio di *più* neutrini possa mimare lo scambio di un gravitone. L'altra affermazione ambigua dell'autore a cui fa probabilmente riferimento Hagar è la seguente 'Vi sono delle ragioni che inducono a identificare questi corpuscoli [i gravitoni] coi neutrini di Pauli Fermi'[36] ([Wat37b]; pag. 2). A nostro avviso, l'analogia si ferma al fatto che anche i corpuscoli gravitazionali hanno spin, perché crediamo che Wataghin sapesse che non hanno lo stesso spin dell'elettrone, contrariamente a quanto sostenuto da Hagar. A ulteriore sostegno del nostro punto di vista vedremo che in un lavoro successivo Wataghin tornerà ancora sulla questione chiarendo *esplicitamente* il proprio pensiero.

Nei lavori seguenti Wataghin si dedica al problema delle divergenze all'interno della propria teoria unitaria e cerca di ampliarne il raggio d'azione introducendo anche il contributo dei campi di materia[37]. Noi non entreremo nei dettagli di come di Wataghin si occupa delle divergenze, perché nella propria analisi l'autore non considera il campo gravitazionale. Menzioniamo solo il fatto, curioso a nostro avviso, che l'autore immaginava fosse necessario scrivere in generale le equazioni del moto senza termini di massa e ottenere questi ultimi attraverso 'l'interazione con i campi di altre particelle elementari' ([Wat37c]; pag. 282). Questa idea, riletta a posteriori, ci ricorda l'attuale meccanismo di di Higgs. Per quanto riguarda il secondo problema affrontato da Wataghin, ovvero l'in-

[35]Nel decadimento beta l'introduzione del neutrino serve per salvaguardare il principio di conservazione dell'energia. Wataghin immagina un ruolo simile per il quanto gravitazionale quando parla della salvaguardia della conservazione dell'impulso. Non entreremo nei dettagli di questo fatto perché non sono rilevanti.

[36]Wataghin userà sempre il plurale e, da quanto ci risulta, non scriverà mai che il neutrino è il gravitone. Notiamo per inciso che in realtà Pauli nel 1931 li chiamava neutroni; il neutrone verrà scoperto nel 1932 e il nome neutrino era stato introdotto da Fermi nel 1933.

[37]Come detto nella nota ([33]), per Wataghin il campo elettromagnetico dovrebbe coincidere con la connessione di spin.

troduzione dei campi di materia, l'autore modifica le "equazioni gravitazionali del primo ordine" (4.8) nel seguente modo[38]:

$$D_\mu \gamma^\nu = \kappa \tau_\mu^\nu \ , \tag{4.12}$$

dove, come scrive l'autore, '[...] κ indica la costante della gravitazione mentre τ_μ^ν è un tensore caratteristico della materia, formato con operatori e spinori che rappresentano gli elettroni, i fotoni e le particelle pesanti'[39] ([Wat37c]; pag. 283). Wataghin ha in mente il processo di seconda quantizzazione, e anche in questo lavoro ribadisce che la quantizzazione delle γ^μ rappresenta le 'onde gravitazionali quantizzate' ([Wat37c]; pag. 283). Nel resto del lavoro, però, Wataghin si dedica solamente all'elettrodinamica, trascurando la gravità. Quest'ultima, infatti, è protagonista della nota seguente [Wat37d], presente nello stesso volume dei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. In questo lavoro l'autore si occupa di problemi di carattere tecnico che, rispetto alle questioni che stiamo qui trattando, non aggiungono molto all'idea originale. Alla fine del lavoro Wataghin ribadisce ancora una volta quanto appena detto sulle nuove equazioni del campo gravitazionale e sulla relazione tra i neutrini e i 'corpuscoli gravitazionali' ([Wat37c]; pag. 283), entrambi emergenti dal processo di seconda quantizzazione applicato alle γ^μ ([Wat37d]; pag. 289). Per confonderci ulteriormente le idee riguardo alla relazione tra neutrini e gravitoni, Wataghin dichiara che in una nota precedente ha già *identificato* i corpuscoli gravitazionali con i neutrini. La questione si chiude, a nostro avviso, con il lavoro seguente.

Tra i contributi del 1938, quello che appare sui *Comptes Rendus*, [Wat38a], è esplicitamente dedicato alla teoria dei neutrini. Per l'autore però neutrini e gravitoni erano strettamente collegati[40], conviene quindi analizzarlo un po' in dettaglio. Finalmente Wataghin esprime in maniera più tecnica la propria idea di relazione tra neutrini e gravitoni. Il punto di partenza è, ancora una volta, il fatto che è possibile ricavare le equazioni di Einstein 'da un sistema di equazioni del primo ordine (4.14) relativo a quattro matrici del quarto ordine γ^μ che sono legati ai potenziali della gravitazione $g^{\mu\nu}$ dalle relazioni di Tetrode (4.13)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot I, \tag{4.13}$$

$$\partial_\rho \gamma^\mu - \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \gamma^\sigma + \gamma^\mu \Gamma_\rho - \Gamma_\rho \gamma^\mu = \kappa \tau_\rho^\mu \text{'} \tag{4.14}$$

[38]L'autore dichiara di averle già introdotte in un lavoro precedente: in [Wat37b] in effetti le suggerisce a parole, ma formalmente le scrive qui per la prima volta. In questi lavori di Wataghin il simbolo della derivata covariante è per definizione identico al membro di sinistra della (4.8).

[39]Per l'autore il tensore $\tau_{\mu\nu}$ *contiene* il tensore energia impulso, ma Wataghin non chiarisce l'esatta relazione che dovrebbe esserci tra i due.

[40]Il lavoro non viene menzionato in [Hag14].

([Wat38a]; pag. 425)[41] dove compare ancora la connessione di spin *generica*[42] come nelle (4.8). Subito dopo Wataghin sottolinea che '[...] è possibile trovare delle soluzioni periodiche del sistema di equazioni (4.13) e (4.14), rappresentate da onde piane, e, considerando un insieme di n soluzioni in un volume finito, queste possono essere rappresentate da funzioni antisimmetriche in tutte le coordinate. Queste saranno in generale soluzioni delle equazioni non lineari (4.14), (4.13)[...] si può applicare il metodo della seconda quantizzazione per caratterizzare gli stati antisimmetrici, con numeri di occupazione N_1, N_2, [...] che assumeranno i valori 1 e 0' ([Wat38a]; pag. 426). Quindi Wataghin si aspetta di trovare delle soluzioni che rappresentino particelle con spin $\frac{1}{2}$ e a questo punto chiarisce la loro relazione con le onde gravitazionali quantizzate. Infatti continua: 'A ogni rappresentazione antisimmetrica delle γ^μ corrisponde, in virtù delle relazioni (4.13), una rappresentazione simmetrica delle $g^{\mu\nu}$, e a ogni frequenza delle γ^μ corrisponde una frequenza doppia delle $g^{\mu\nu}$. Quindi si ha la possibilità di stabilire una statistica di Fermi per i corpuscoli ottenuti quantizzando i campi γ^μ, e collegarlo a una statistica di Bose per i campi quantizzati corrispondenti alle $g^{\mu\nu}$' ([Wat38a]; pag. 426). Dunque, nonostante alcune affermazioni potessero suonare ambigue, come affermato da noi poco sopra, Wataghin sapeva bene che il gravitone è un bosone, e ha sempre pensato allo scambio di un gravitone come allo scambio di *due* neutrini ([Wat38a]; pag. 427). Nel resto dell'articolo l'autore si ripropone di analizzare più a fondo l'identificazione dei neutrini come i 'semifotoni del campo gravitazionale' ([Wat38a]; pag. 426), prendendo spunto, come l'autore stesso ricorda, da un'idea di de Broglie e Jordan[43]. Wataghin ammette che 'l'identificazione non appare necessaria ma solamente plausibile' ([Wat38a]; pag. 427), perché *intravede* solamente la possibilità di utilizzare due operatori fermionici per descrivere lo scambio di un quanto gravitazionale[44].

Nelle altre comunicazioni dello stesso anno, [Wat38b] [Wat38c] [Wat38d] [Wat38e], Wataghin torna ad analizzare le conseguenze dell'introduzione di un impulso massimo b

[41] Abbiamo riportato qui nuovamente queste equazioni, sia per comodità, sia per notare che abbiamo corretto un evidente errore di stampa nel testo originale. Rispetto al testo originale abbiamo cambiato ovviamente la numerazione delle equazioni.

[42] Le equazioni (4.10) compariranno in [Wat38f], che è successivo a quello che stiamo commentando.

[43] Jordan in particolare si era adoperato per cercare di descrivere il *fotone* utilizzando due neutrini. Il problema della costruzione di operatori bosonici a partire da quelli fermionici viene discusso anche da altri autori perché presenta delle difficoltà che non approfondiremo in questa sede. Si vedano per esempio le comunicazioni di Fock su *Nature*, il quale aveva osteggiato il modello proposto da Jordan [Foc36] [Foc37].

[44] L'autore sembra far riferimento al fatto che è possibile utilizzare due operatori di creazione fermionici per definire un operatore di creazione bosonico. Tale tecnica è oggi nota col nome di *procedura di bosonizzazione*. Come vedremo verso la fine del capitolo, l'idea di usare più fermioni per descrivere lo scambio di un bosone verrà perfezionata da de Broglie e alcuni suoi collaboratori.

e conseguentemente di una minima lunghezza misurabile $\Lambda = \frac{h}{b}$. L'approccio utilizzato dall'autore in questo lavoro è simile a quello di Born che analizzeremo a breve in questo capitolo[45]. I due autori introducono inoltre entrambi una sorta di elemento di linea matriciale per lo spazio degli impulsi $\gamma^\mu p_\mu$ ([Wat38c]; pag. 2) e ([Wat38f]; pag. 573), che per Wataghin è *duale* all'elemento di linea $ds = \gamma_\mu dx^\mu$ per lo spazio delle configurazioni. Riguardo all'introduzione della lunghezza minima, Wataghin sottolinea: 'Una particolare attenzione meritano le conseguenze dell'esistenza di una lunghezza minima Λ nella teoria della gravitazione' ([Wat38c]; pag. 02). Per l'autore la conseguenza è che la metrica risulta *indefinita* per lunghezze minori della lunghezza[46] Λ: 'Recentemente abbiamo investigato le ragioni che rendono necessaria la seconda quantizzazione dei campi di gravità e abbiamo esaminato la possibilità di quantizzare i campi dei vettori-matrici γ_μ e γ^μ che figurano nell'elemento lineare matriciale $ds = \gamma_\mu dx^\mu$ [...]. Le proprietà metriche della gravitazione descritte classicamente dai potenziali $g_{\mu\nu}$ costituiscono un aspetto complementare delle proprietà corpuscolare dei fotoni o dei « neutrini » gravitazionali. Negli spazi di dimensioni lineari $< \Lambda$ la metrica risulta indeterminata' ([Wat38c]; pag. 02).

Nell'ultimo lavoro che prendiamo in considerazione, Wataghin cerca di stabilire un collegamento fra il proprio approccio e il principio di complementarietà di Bohr[47]. Il lavoro viene pubblicato nel Bollettino di Fisica dell'Università di San Paolo, dove Wataghin lavora [Wat38g]. Le considerazioni tecniche non differiscono da quelle già esposte e commentate. Alla fine del breve lavoro Wataghin osserva: 'Abbiamo proposto di quantizzare con la tecnica della seconda quantizzazione i campi delle γ^μ e di identificare i corpuscoli così ottenuti con i neutrini di Pauli-Fermi. Vogliamo far notare, a questo proposito, che in analogia con quello che succede per i fotoni e gli elettroni, l'osservazione dei corpuscoli gravitazionali si può realizzare a condizione di rinunciare alla conoscenza dell'aspetto complementare del problema, ovvero del campo classico delle funzioni $g_{\mu\nu}$ che descrivono la metrica. In questo modo la gravitazione risulta soggetta al principio di complementarietà di Bohr, nel senso che quando si studiano gli scambi di energia e di quantità di moto tra il campo gravitazionale e un altro sistema, risulta indeterminato l'aspetto complementare del problema, e quindi, diventa indeterminato il campo metrico delle $g_{\mu\nu}$ [...]' ([Wat38g]; pag. 41). Ricordiamo che il principio di complementarietà, formulato da Bohr nel 1927, si configura, in un certo senso, come un'interpretazione *filosofica* delle relazioni di indeterminazione, ma in realtà è qualcosa di più: è il tentativo di spiegare l'evidenza macroscopica di descrizioni mutuamente esclusive dei fenomeni. Infatti, secondo Bohr, un

[45]Nonostante la somiglianza delle idee i due autori probabilmente procedono indipendentemente.
[46]L'autore non fa particolari commenti su tale lunghezza.
[47]In altri brevi lavori del periodo l'autore riprende senza cambiarli gli stessi concetti.

elettrone è un'onda o un corpuscolo a seconda dello strumento di misura che si utilizza, e per questo per ottenere una generalizzazione naturale del modo classico di descrivere le cose è necessario considerare l'insieme delle rappresentazioni mutuamente esclusive dei fenomeni. Se ci si focalizza su uno solo dei due aspetti, e quindi nel caso esposto da Wataghin si considerano le ampiezze di probabilità che caratterizzano i processi d'urto mediati da quanti gravitazionali, risulta naturale pensare che il corrispondente concetto classico, ovvero il concetto di metrica, risulti "sfuocato". Quest'affermazione è basata ancora una volta sulla convinzione che la quantizzazione delle matrici gamma produca, attraverso la relazione (4.13), l'indeterminatezza della metrica. Wataghin chiude il lavoro facendo riferimento per l'ultima volta al fatto che i neutrini sono i "semi-fotoni gravitazionali". Dopo il 1938, infatti, l'autore continuerà a occuparsi di raggi cosmici, ma abbandonerà questa idea, per dedicarsi ad altre questioni.

4.1.2 Il principio di reciprocità e la geometria non commutativa

L'anno 1938 segna anche l'inizio di una serie di tentativi da parte di Max Born, per cercare di unificare Relatività Generale e Meccanica Quantistica utilizzando il principio di *reciprocità* formulato dallo stesso autore [Bor38a] [Bor38b]. Pur partendo dunque da posizioni differenti da quelle viste per Finzi nel precedente Capitolo, anche Born approderà all'idea che lo spazio-tempo "quantistico" debba essere descritto da coordinate non commutanti. Gli articoli prodotti in questi anni non porteranno a dei risultati concreti e non entusiasmeranno molti colleghi, come Born stesso ammetterà successivamente[48] nel 1949 ([Bor49]; pag. 463).

L'idea del principio di reciprocità si basa sull'osservazione che le equazioni di Hamilton per la meccanica classica del punto in una dimensione[49]:

$$\dot{x} = \{x, H\} \qquad \text{e} \qquad \dot{p} = \{p, H\} \ , \tag{4.15}$$

dove $H(x,p)$ è la Hamiltoniana e il punto indica come al solito la derivata temporale, sono invarianti se si operano le seguenti trasformazioni:

$$x \to p \qquad \text{e} \qquad p \to -x \, , \tag{4.16}$$

[48]L'articolo del 1949 e le idee di Born verranno recuperate a più riprese da vari autori, proprio nell'ambito della ricerca di una teoria quantistica della gravitazione. Si veda per esempio [Ven86] per la Teoria delle Stringhe e [JM06] per l'applicazione alle geometrie non commutative, oppure [MP] per l'applicazione alla cosmologia.

[49]Ricordiamo che in questo caso le parentesi graffe rappresentano le *parentesi di Poisson*.

invarianza che si estende anche alle relazioni di indeterminazione di Heisenberg[50]. Born intravede nella relazione di reciprocità tra lo spazio degli stati e lo spazio degli impulsi proprio una possibilità di *unificazione* tra la RG e la MQ. All'inizio del lavoro Born introduce il concetto di reciprocità: 'Il moto di una particella libera nella teoria quantistica è rappresentata da un'onda piana. [...] L'espressione è completamente simmetrica nei due quadrivettori x^μ e p_μ. La teoria delle trasformazioni in meccanica quantistica estende questa "reciprocità" sistematicamente'[51] ([Bor38a]; pagg. 291-292). Poi nota che in RG questo principio non sembra applicabile e vede quindi nella sua estensione la possibilità di integrare i principi quantistici con la teoria di Einstein: 'Quando però si applicano i principii della relatività generale vi è una sorta di rottura nella trattazione reciproca. Questa teoria ha le sue origini nelle domande di carattere astronomico connesse con la teoria della gravitazione, ed è fondata sui principi della meccanica classica dove il moto di una massa puntiforme non è rappresentato da una funzione d'onda, ma da un'orbita. La nozione fondamentale è l'elemento di linea quadri-dimensionale

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu \,, \tag{4.17}$$

dove i coefficienti di $g_{\mu\nu}$ formano il tensore metrico.

Secondo il mio modo di vedere il principio di reciprocità dovrebbe portarci a considerare un elemento di linea per lo spazio degli impulsi p :

$$d\sigma^2 = \gamma^{\mu\nu}(p)\, dp_\mu dp_\nu \,, \tag{4.18}$$

che definisca la metrica in questo spazio, ma che non è direttamente connessa con il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ dello spazio delle configurazioni x' ([Bor38a]; pag. 292). Born giustifica la propria assunzione attraverso l'evidenza "empirica" che le leggi del microcosmo sono quelle della MQ: 'Se valessero solamente le leggi della meccanica classica, questa assunzione sarebbe ovviamente impossibile; poiché in tal caso p^μ sarebbe uguale a $m\dot{x}^\mu$ dove m è la massa a riposo e il punto denota la derivata rispetto al tempo proprio; quindi le leggi di trasformazione del vettore p sarebbero completamente determinate da quelle

[50] Si ricordi che in MQ il commutatore tra due operatori A e B è definito nel seguente modo: $[A, B] = AB - BA$ e che le relazioni di indeterminazione sono diretta conseguenza delle relazioni di commutazione canonica. Queste ultime, in una dimensione, sono le seguenti: $[x, p] = i\hbar$ e sono evidentemente invarianti per le trasformazioni (4.16).

[51] Questo è il punto in cui Born introduce il termine, a lui tanto caro in questi anni, per la teoria delle particelle elementari. Tale termine era già stato utilizzato per descrivere il *reticolo reciproco* nella fisica dello stato solido, come ricorda lo stesso autore ([Bor38a]; pag. 292, nota). Abbiamo deciso di spendere alcune parole sul lavoro di Born, perché, da quanto ci risulta, non è stato ancora analizzato in dettaglio [Bee13].

del vettore x e non sarebbe ammissibile assumere una metrica differente per lo spazio degli impulsi p. Ma le leggi della Natura sono quelle della teoria quantistica' ([Bor38a]; pag. 292). Ovviamente questa prima motivazione può sembrare un po' debole, quindi l'autore ne offre anche un'altra di carattere più fisico: 'Le leggi classiche si riferiscono solamente a un caso limite, ovvero quello che descrive il moto di corpi con una grande massa nello spazio-tempo. È caratterizzato dalla condizione che l'energia e il momento dei quanti coinvolti ($h\nu$ e h/λ) siano estremamente piccoli (comparati con $h\nu_0$ e h/λ_0, dove $\lambda_0 = c/\nu_0$ è la lunghezza d'onda Compton), mentre lo spazio e il tempo sono illimitati. Vi è un'altra possibilità limite, quella in cui si considerino regioni molto piccole di spazio e tempo (comparate con λ_0 e $1/\nu_0$), ma senza restrizioni sull'energia e sul momento. Questo è il dominio delle particelle *elementari* e dei fenomeni nucleari. *Mi sembra ingiustificato assumere che questi due casi limite, tra loro reciproci, siano tra loro soggetti alla stessa metrica, basata sull'elemento di linea dello spazio delle configurazioni* x'[52] ([Bor38a]; pag. 293). Born sembra però voler sottolineare che la sua assunzione è comunque provvisoria. L'autore infatti continua: 'Suggerisco che il concetto di metrica sia inapplicabile per quei fenomeni in cui lo spazio delle configurazioni x e quello dei momenti p sono coinvolti simultaneamente nello stesso modo; è valido solamente per due casi limite, per i processi che coinvolgono grandi masse nello spazio delle configurazioni x, e per i processi nucleari nello spazio degli impulsi p' ([Bor38a]; pag. 293). L'autore sembra quindi voler tradurre per il concetto di metrica l'indeterminazione propria del principio di Heisenberg. A riprova di questo fatto conclude l'introduzione nel seguente modo: 'Abbiamo imparato che la misura simultanea di una coordinata x^μ e di un momento p_μ è soggetta alle leggi dell'indeterminazione[...] Tali leggi danno la libertà necessaria di avere due metriche differenti e indipendenti per i due casi limite che, per brevità, chiameremo il mondo *molare* e il mondo nucleare'[53] ([Bor38a]; pag. 293).

Vale la pena approfondire brevemente alcuni dettagli tecnici di questo primo lavoro di Born, che ci faranno comprendere meglio come l'autore arriverà ad ipotizzare la non commutatività dello spazio-tempo. Come ha accennato nell'introduzione all'articolo, l'autore è spinto dal principio di reciprocità a introdurre una metrica per lo spazio degli impulsi. L'introduzione di tale metrica avviene però grazie al solo strumento dell'*analogia* con lo spazio delle configurazioni. Nella parte rimanente del lavoro Born si adopera per analizzare le conseguenze dei suoi assunti. L'autore introduce un tensore di curvatura per lo

[52] Il corsivo è nostro. Born non usa l'espressione *particelle elementari*, ma letteralmente *particelle ultime* (ultimate particle).

[53] Il corsivo è nostro: non siamo riusciti a trovare una traduzione accettabile per l'aggettivo *molar* usato dall'autore, che fa riferimento a corpi con grande massa, per i quali vale, per Born, l'approssimazione classica.

spazio degli impulsi $P^{\mu\nu\rho\sigma}$ associato alla metrica $\gamma^{\mu\nu}(p)$ dell'equazione (4.18). A questo punto, in analogia con le equazioni di Einstein che riportiamo per comodità:

$$R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right) g_{\mu\nu} = 0\,, \tag{4.19}$$

dove Λ è la costante cosmologica, l'autore immagina che per lo spazio degli impulsi valgano le seguenti equazioni:

$$P^{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2}P + \Lambda'\right) \gamma^{\mu\nu} = 0\,, \tag{4.20}$$

dove Λ' dovrebbe essere l'analogo della costante cosmologica, ma non dà particolari giustificazioni se non il principio di reciprocità. È sicuramente singolare che Born usi la costante cosmologica in un periodo in cui anche Einstein l'aveva abbandonata ([EdS32]). Tuttavia bisogna dire che Born sembra più che altro interessato a sottolineare che quella dell'equazione (4.19) è semplicemente *la forma più generale possibile* delle equazioni del campo gravitazionale. In effetti Born resterà sempre vago nei confronti della costante Λ. Per Born una delle conseguenze più interessanti di tutte queste assunzioni è l'esistenza di una soluzione delle equazione (4.20) 'corrispondente a uno spazio dei momenti (p_x, p_y, p_z) che sia chiuso (a forma di ipersfera), indipendentemente dall'energia E' ([Bor38a]; pag. 294). L'autore non lo specifica, ma si tratta dell'analogo della soluzione cosmologica corrispondente a un Universo chiuso. L'importanza, per Born, di questa soluzione nello spazio dei momenti emerge subito dopo. 'Possiamo quindi concludere che per determinati sistemi esista *un limite superiore per i momenti*,* determinato dal raggio b dell'ipersfera' ([Bor38a]; pag. 294). L'asterisco presente nel testo originale, subito dopo il corsivo, fa riferimento a una nota a piè di pagina, riferita alla questione dell'esistenza di un limite superiore per il valore dell'impulso di una particella: 'Questa assunzione è già stata fatta, ma senza alcun riferimento ai principii relativistici da M. Born e G. Rumer [Bor31]. Si veda anche G. Wataghin [Wat34] e A. March, [Mar37a] [Mar37b] [Mar37c]. G. Wentzel, [Wen33a] [Wen33b] [Wen34], ha suggerito invece un criterio differente per evitare il problema dell'infinitezza dell'auto-energia'[54] ([Bor38a]; pag. 294). Born cita se stesso, un lavoro dove l'autore si occupava solamente delle conseguenze per l'elettrodinamica e di cui, pertanto, non ci siamo occupati; poi Born cita Wataghin e March, autori di cui ci siamo già occupati in questo stesso capitolo[55]. Dopo queste citazioni Born sottolinea che 'Questo risultato è di grande importanza, perché rimuove immediatamente gli infiniti che

[54]La notazione delle citazioni del testo di Born è stata modificata per renderla conforme a quella del presente lavoro.

[55]Questi lavori di Born, e in particolare anche la citazione di Wataghin, vengono presi in considerazione anche da Hagar, il quale, come detto precedentemente, ha recentemente discusso la figura di Wataghin stesso ([Hag14]; pag. 9).

sono un *notevole difetto* delle teorie attuali'[56] ([Bor38a]; pag. 294). Però l'autore nota anche che ' i sistemi a cui è applicabile l'idea [del limite superiore dei momenti] sono quelli *energeticamente chiusi*; certamente non si applica a tutti i sistemi, come ci conferma l'esistenza di particelle (i raggi cosmici) per le quali il momento e l'energia possono assumere qualunque valore' ([Bor38a]; pag. 294). Nella parte restante del lavoro l'autore si occupa delle conseguenze delle proprie ipotesi nell'ambito della sola elettrodinamica[57]. Non ci occuperemo dunque di questi dettagli, perché non riguardano direttamente la gravità.

Cercando di portare all'attenzione della comunità internazionale il proprio approccio, Born pubblica su *Nature* una breve comunicazione[58] in cui ipotizza che le due metriche $g_{\mu\nu}$ e $\gamma^{\mu\nu}$ siano collegate da una 'trasformazione di contatto', ovvero una sorta di trasformata di Fourier, generalizzata per uno spazio non euclideo ([Bor38b]; pag. 327).

Born ritorna sulla questione successivamente in occasione del contributo pubblicato per l'Accademia indiana delle Scienze, scritto per ricordare il proprio incontro con il fisico Chandrasekhara V. Raman, avvenuto nel biennio 1935-1936, e per esprimere ammirazione e apprezzamento per lo sviluppo raggiunto da tale organizzazione scientifica ([Bor38d]; pag. 309). In questo contributo Born approda, grazie all'uso del principio di reciprocità, all'idea che lo spazio-tempo "quantistico" debba essere descritto da coordinate non commutanti. L'autore apre il lavoro con una panoramica su alcuni tentativi di introduzione dei concetti di lunghezza, momento, energia e massa universali, tra cui il tentativo dello stesso autore di creare una teoria non-lineare dell'elettrodinamica[59], oggi nota col nome di teoria di Born-Infeld. Born considera la situazione della fisica teorica come soddisfacente, grazie al fatto che tutte le teorie di carattere *lineare*, come la teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell e la teoria di Dirac, sembrano spiegare correttamente la gran parte dei fenomeni fisici. L'autore afferma che solamente gli 'Yukoni' ([Bor38d]; pag. 311), ovvero le particelle di Yukawa, i mesoni, sembrano sfuggire all'approccio offerto dalla teoria lineare[60]. Poiché non ha in mano quindi particolari evidenze di carattere sperimentale, Born sottolinea che 'non ha senso discutere di possibili sviluppi futuri, se non di considerazioni puramente teoriche' ([Bor38d]; pag. 311). L'autore intravede nel proprio approccio basato sul principio di reciprocità la possibilità di introdurre il concetto di non-linearità in maniera consistente. La motivazione principale che lo spinge, come già

[56]Il corsivo è nostro: l'espressione usata da Born sarebbe, letteralmente 'punti neri delle attuali teorie'.

[57]Born si occupa dell'applicazione del principio di reciprocità anche ad altri ambiti. Per esempio in [Bor38c] considera le sue applicazioni alla fisica del nucleo.

[58]La comunicazione si posiziona temporalmente tra la pubblicazione di [Bor38a] e quella di [Bor38c].

[59]Tentativo che Born stesso giudica come non promettente.

[60]Born riferisce di una comunicazione personale tra lui e Heitler, ma non fa riferimento ad alcun lavoro pubblicato.

osservato, è proprio l'analogia con la teoria di Einstein: 'L'unico modo per introdurre in maniera naturale e unica la non-linearità nella teoria dei campi è quello usato da Einstein per la teoria della gravitazione, ovvero postulando l'invarianza generale che porta a considerare lo spazio-tempo come non-euclideo[...]' ([Bor38d]; pag. 311). A questo punto l'autore riassume brevemente il proprio approccio e facendo riferimento ai lavori da noi già commentati scrive: 'Ho mostrato che un certo numero di fatti riguardanti le particelle elementari possono essere messi tra loro in relazione attraverso un approccio razionale' ([Bor38d]; pag. 311), facendo riferimento, a nostro avviso, al fatto che è riuscito a giustificare l'introduzione di un limite superiore per il valore dell'impulso. Dopodiché, procede nel cercare di sostenere ulteriormente l'idea dell'introduzione di una metrica curva per lo spazio degli impulsi: 'Desidero corroborare questi risultati attraverso un'argomentazione formale ma decisamente *convincente*'[61] ([Bor38d]; pag. 311). Born osserva che in uno spazio-tempo curvo, dato un covettore ϕ_ν, la sua derivata semplice $\partial_\mu \phi_\nu$ non trasforma come un tensore, mentre la sua derivata covariante $\nabla_\mu \phi_\nu$ sì. A questo punto Born tenta di 'combinare i principii della relatività con il metodo degli operatori della meccanica quantistica' ([Bor38d]; pag. 312): l'autore introduce il simbolo $\xi_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e lo interpreta come un *operatore*, sottolineando che valgono le usuali regole di commutazione canonica tra x^μ e ξ_ν.[62] In conseguenza di quanto affermato poco sopra, dunque, la quantità $\xi_\mu \phi_\nu$ non trasforma come un quadri-tensore, e quindi, per l'autore, le componenti di ξ_μ non possono essere identificate con quelle di un quadri-momento, visto che il commutatore tra due vettori deve trasformare come un tensore doppio. Al contrario, introducendo un simbolo che ricorda una sorta di "derivata covariante":

$$p^\mu_{\nu,\lambda}(x) = \xi_\nu \delta^\mu_\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}, \tag{4.21}$$

dove i $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ sono gli usuali simboli della connessione affine, le quantità $p^\mu_{\nu,\lambda}\phi_\mu$ trasformano come un tensore. Born interpreta le quantità del simbolo (4.21) come le componenti ${}^\mu_\lambda$ di un operatore tensoriale che indica, per semplicità, con p_ν, le cui quattro componenti verranno identificate con quelle del momento di una particella, rappresentata da una funzione d'onda differente dalle usuali, perché per l'autore deve essere una 'funzione d'onda vettoriale'[63] ([Bor38d]; pag. 312). Come conseguenza della definizione di p_ν, il commutatore tra due differenti momenti definisce un tensore di curvatura per lo spazio dei momenti, proprio analogamente a quanto avviene per la geometria non riemanniana. Dopo questa argomentazione di carattere teorico, l'autore sottolinea che un'ulteriore conseguenza delle

[61] Il corsivo è nostro: Born usa l'aggettivo *impressive*, che letteralmente potrebbe essere tradotto come eclatante o notevole.

[62] Volutamente l'autore non utilizza il simbolo p_ν.

[63] Born è vago e non sappiamo se faccia riferimento a una sorta di campo di Rarita-Schwinger ψ_μ.

proprie assunzioni è che 'per particelle a cui è associata una funzione d'onda vettoriale la commutabilità delle componenti del momento (condizione che usualmente si ritiene soddisfatta) non risulta evidente, ma dipende dal fatto che lo spazio è euclideo' ([Bor38d]; pag. 313). Born è convinto dunque del fatto che a una relazione di *non commutazione* tra le componenti dei momenti, deve corrispondere anche una relazione di *non commutazione* tra quelle che chiama 'coordinate covarianti o operatori di moltiplicazione' ([Bor38d]; pag. 313) e che per lui giocano il ruolo di operatori quantistici per le coordinate dello spazio-tempo. In questo senso dunque l'autore è convinto che sia necessario far intervenire la *geometria non commutativa*, sia per lo spazio dei momenti che per lo spazio delle coordinate. Born conclude il proprio lavoro commentando questo suo risultato. 'Queste leggi di commutazione possono essere interpretate[...] come leggi che determinano la curvatura dello spazio ($x-$spazio o $p-$spazio). Non tenterò qui di formulare tali leggi poiché non abbiamo ancora a disposizione evidenze sperimentali nell'eventuale dominio della fisica in cui ci si aspetta di poter applicare tali leggi' ([Bor38d]; pag. 314). Infine, nonostante stia suggerendo una modifica del concetto di spazio-tempo, Born sembra non ritenere che tale modifica influenzi la gravità. Infatti chiude l'articolo sottolineando che 'se è possibile descrivere i fenomeni sub-atomici in termini geometrici, l'equazione della curvatura conterrà le costanti a e b (oppure a e $\hbar$), ma non la costante gravitazionale, visto che la gravitazione è un effetto macroscopico che si manifesta quando si hanno grandi quantità di materia neutra'[64] ([Bor38d]; pag. 314).

4.1.3 Solomon: la gravitazione e i quanti

Nel 1938 Solomon, che abbiamo incontrato nel precedente capitolo al paragrafo 3.2.1, torna a riflettere sul problema della descrizione quantistica della gravità [Sol38]. Come descritto ampiamente in una biografia dell'autore [Bus97], Solomon nutrì per tutta la vita l'interesse per questa problematica, tanto da pensare di redigere un programma per la quantizzazione del campo gravitazionale, programma che poi non vedrà mai la luce. Il lavoro del 1938 comincia con le seguenti osservazioni. 'Per lungo tempo la gravitazione e i quanti sono apparsi come due domini molto lontani: la prima si estendeva a fenomeni su grande scala, i secondi a quelli microscopici. La debolezza della forza gravitazionale rispetto alla forza elettromagnetica sembrava giustificare questo fatto' ([Sol38]; pag. 478).

[64] Le costanti a e b a cui l'autore fa riferimento rappresentano una lunghezza e un momento fondamentali. La costante b era già stata introdotta dall'autore nel primo dei suoi lavori [Bor38a], e ricordiamo che rappresenta il valore massimo che può assumere il modulo di un momento tridimensionale, mentre la seconda costante è conseguenza, implicata dal principio di reciprocità, dell'introduzione di b e rappresenta una sorta di lunghezza minima. Le due costanti, per Born, soddisfano alla relazione $\hbar = ab$.

Solomon sostiene anche che sembrava fosse possibile estendere il formalismo della MQ agli spazi riemanniani. Ma si riferisce solamente all'adattamento delle equazioni d'onda agli spazi-tempo curvi, perché cita il proprio lavoro, quello di Fock e quello di Schrödinger. Date queste premesse, conclude Solomon, sembrava che questo ambito di studio, ovvero l'intersezione delle due teorie, non fosse suscettibile di ulteriori sviluppi. Qualcosa però è cambiato, infatti l'autore continua: 'Tuttavia, da qualche tempo, la questione del rapporto tra la gravitazione e i quanti ha ridestato interesse sostanzialmente per due ragioni. [...] da una parte vi è il suggerimento di Pauli [...] a mettere in relazione i neutrini con le onde gravitazionali. Dall'altra parte vi sono i lavori di Eddington e di Milne [...] che cercano di esaminare la questione della nuova teoria quantistica della gravitazione' ([Sol38]; pag. 478). Della questione dell'associazione tra neutrini e gravitoni abbiamo già parlato, mentre per quanto riguarda il lavoro di Eddington e il suo rapporto professionale con Milne rimandiamo ai lavori di Durham[65] [Dur03] [Dur05]. A questo punto l'autore comincia con il chiedersi 'se è possibile parlare della legge di Newton tra particelle elementari senza incorrere in contraddizioni' ([Sol38]; pag. 478). Per capire perché Solomon si ponga questo problema apriamo una breve parentesi.

Le riflessioni del fisico prendono spunto da un articolo di George Gamow, apparso l'anno precedente sulla rivista *Physikalische Zeitschrift* [Gam37]. In questo lavoro il fisico di origine ucraina fa il punto della situazione sulla "teoria del decadimento β" nata nel 1933 a opera di Fermi. Alla fine dell'articolo l'autore prende in considerazione la probabilità di emissione di una *coppia di neutrini* ([Gam37]; pag. 813). Come commenta lo stesso Gamow: 'nonostante si ottenga una probabilità molto bassa, il processo di emissione di due neutrini coinvolge un trasporto di energia e può portare all'emissione di quanti gravitazionali, analogamente a quanto accade quando una *coppia di elettroni* emette un quanto di luce'[66] ([Gam37]; pag. 814). Gamow osserva che la teoria dei processi elementari quantistici che coinvolgono il campo gravitazionale risulta ancora poco esplorata e dichiara di voler affrontare una questione minore, chiedendosi 'in quale rapporto si trovino l'ipotetico *carattere neutrinico del campo gravitazionale* con la legge della gravitazione di Newton'[67] ([Gam37]; pag. 814). Il fisico ucraino riporta una possibile risposta alla domanda in questione, formulata da Walter Heitler, Lothar W. Nordheim ed Edward Teller, i quali

[65]Nel resto dell'articolo Solomon non tornerà più su questo argomento.

[66]Il corsivo è nostro: Gamow parla di *Elektronenpaaremission*, ovvero di emissione di una coppia di elettroni, ma sta ovviamente pensando a una coppia elettrone-positrone.

[67]Il corsivo è nostro. Abbiamo tradotto *letteralmente* l'espressione difficilmente traducibile 'Neutrinocharakter des Gravitationfeldes', che sembra alludere all'ipotesi di cui abbiamo già parlato, avanzata da Wataghin e da altri autori, che il quanto gravitazionale abbia un qualche legame con i neutrini. Il condizionale è d'obbligo, perché Gamow non è per nulla chiaro in proposito.

osservavano, come riportato da Gamow, che *non ha senso* considerare l'effetto della forza gravitazionale *newtoniana* tra due particelle elementari[68]. Come detto Solomon è sensibile alla questione degli effetti quantistici della gravitazione, avendone anche già affrontato alcune problematiche, ed è proprio in relazione all'argomento riportato da Gamow, citato in [Sol38], che Solomon riflette sulla possibilità di parlare di forza newtoniana tra due particelle elementari[69].

Ma veniamo al lavoro del fisico francese. Solomon comincia riportando l'argomentazione attribuita da Gamow ad Heitler, Nordheim e Teller. Date due particelle elementari di uguale massa M, separate da una distanza r, sia τ il tempo necessario per poter misurare una variazione della quantità di moto di una delle due particelle dovuta all'azione della forza gravitazionale, descritta dalla legge di Newton. Se si considera un tempo sufficientemente breve, la variazione della quantità di moto sarà data approssimativamente dal prodotto della forza per l'intervallo di tempo considerato, cioè $p \sim F\tau = \frac{GM^2}{r^2}\tau$. Detta a questo punto Δp l'imprecisione sulla variazione della quantità di moto e Δr l'imprecisione nella misura della variazione della distanza tra le due particelle, supponiamo che siano soddisfatte le condizioni per cui è possibile parlare di traiettoria di una particella elementare, chiediamo cioè che le incertezze siano piccole confrontate con i rispettivi valori, ovvero:

$$\Delta p << p \qquad \text{e} \qquad \Delta r << r\ . \tag{4.22}$$

Grazie alle relazioni (4.22) e al principio di indeterminazione di Heisenberg, $\Delta p \Delta r > \hbar$, è quindi possibile scrivere le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{GM^2}{r^2}\tau > \Delta p > \frac{\hbar}{\Delta r} > \frac{\hbar}{r}\ . \tag{4.23}$$

Da queste relazioni si pió ricavare una disuguaglianza per il tempo di misura:

$$\tau > \frac{\hbar r}{GM^2}. \tag{4.24}$$

D'altra parte, poiché lo spostamento di una delle due particelle durante il tempo τ è dato dall'azione della forza gravitazionale, la seconda delle (4.22) impone che valga anche la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}\frac{GM}{r^2}\tau^2 < r. \tag{4.25}$$

Combinando (4.24) con (4.25) si ottiene quindi:

$$r > \frac{\hbar^2}{GM^3}, \tag{4.26}$$

[68]Gamow non dà alcun riferimento bibliografico e anche la nostra ricerca non ha prodotto effetti. È probabile che si tratti di una comunicazione di carattere privato che non risulta pubblicata ufficialmente.

[69]Nel paragrafo 4.2.2 vedremo come un altro fisico francese interpreterà in maniera differente le osservazioni di Heitler e colleghi.

che è il risultato finale ottenuto da Heitler, Nordheim e Teller. Solomon riporta anche il commento dei tre autori: grazie alla relazione (4.26) è possibile affermare che per poter misurare l'effetto della forza gravitazionale tra due particelle la loro distanza deve essere *maggiore* di $\frac{\hbar^2}{GM^3}$, oppure, alternativamente, si può concludere che la legge di Newton tra due particelle elementari *non é applicabile* a distanze *minori* di $\frac{\hbar^2}{GM^3}$. Se si inseriscono gli ordini di grandezza dei valori numerici delle costanti e il valore della massa del protone[70], la distanza in questione è dell'ordine di $10^{25}cm$ ovvero, come riporta Solomon 'comparabile con il raggio dell'Universo' ([Sol38]; pag. 479). La conclusione logica a cui porta la disuguaglianza (4.26) è che risulta *priva di senso* l'applicazione della legge di Newton tra due particelle elementari. Solomon riporta anche che Heitler e gli altri autori ritengono corretto questo ragionamento, perché se lo si applica a due elettroni, sostituendo la forza gravitazionale con quella coulombiana, la disuguaglianza (4.26) diventa $r > \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \sim 10^{-10}m$, e si ritrova il fatto che 'è impossibile parlare dell'applicazione della legge di Coulomb a distanze inferiori a quelle del dominio atomico' ([Sol38]; pag. 479).

Solomon non concorda con il risultato appena esposto. Il fisico francese conosce infatti i lavori di Bronstein[71] e sa dunque che la descrizione quantistica dell'interazione gravitazionale attraverso le tecniche della nascente teoria dei campi riproduce, con le dovute approssimazioni, proprio la legge di Newton, analogamente a come la nascente elettrodinamica riproduce la legge di Coulomb. Convinto dunque della bontà del risultato del fisico russo, Solomon scrive questo lavoro per mostrare che la disuguaglianza (4.26) ottenuta dai Heitler, Nordheim e Teller non è corretta. L'autore comincia notando che 'Per risolvere tale difficoltà è necessario distinguere due differenti tipologie di problemi, a proposito della misura di un campo:

a) la misura di un campo in un determinato punto dello spazio-tempo (o più precisamente la misura del valore medio di un campo per un piccolo volume di spazio-tempo).

b) La misura della forza che si esercita su una particella data'

([Sol38]; pag. 479). Per l'autore il problema della misura sollevato da Heitler e dai colleghi rientra in questo seconda tipologia di problemi, perché si tratta di 'verificare che una particella è sottomessa a una forza con una data legge [...]' ([Sol38]; pag. 480).

[70]Ovvero: $\hbar \sim 10^{-34}Js$; $G \sim 10^{-10}\frac{Nm^2}{kg^2}$; $M \sim 10^{-27}kg$.

[71]Come riportato in [Bus97], nel 1930 Solomon aveva vinto un viaggio premio in Russia; in quell'occasione aveva conosciuto Frenkel ed era dunque venuto a conoscenza dei risultati pubblicati da Bronstein.

Solomon, come vedremo, è convinto che la chiave per formulare un ragionamento coerente si trovi in un uso corretto delle relazioni di indeterminazione, e comincia quindi a discutere l'applicazione del principio di Heisenberg. Per prima cosa Solomon specifica che vuole analizzare il caso di due particelle *libere*, ovvero non soggette ad alcuna forza esterna se non alla loro interazione mutua. Posto un sistema di riferimento nel centro di massa si chiamino r_1 ed r_2 le posizioni delle due particelle, $r(t)$ la distanza tra le due, e siano δr_1 e δr_2 le larghezze dei due pacchetti d'onda associati alle due particelle elementari. Allora Solomon fa notare che 'Il teorema di Ehrenfest sostiene che la meccanica classica è applicabile al moto del centro di massa [...] quando il campo non varia troppo rispetto all'estensione dei due pacchetti d'onda [...]'[72] ([Sol38]; pag. 480). Se poi si considerano dei pacchetti d'onda estremamente localizzati, ovvero imponendo che:

$$r >> \delta r_1, \tag{4.27}$$

potremo parlare di traiettoria in senso semi-classico e applicare le usuali leggi di Newton alla coordinata che rappresenta il centro di ogni pacchetto d'onda ([CCTL77]; pag. 242-244). Più precisamente Solomon commenta: 'sappiamo che il limite inferiore per δr_1 sarà approssimativamente $\frac{\hbar}{Mc}$. Di conseguenza fintanto che le due particelle sono a una distanza superiore a [...] $10^{-13} cm$ l'applicazione della legge di Newton può essere garantita'[73] ([Sol38]; pag. 480). Per Solomon non vi è dunque alcun dubbio sull'applicabilità della seconda legge di Newton, ma è necessario chiarirne meglio i limiti di applicabilità. Come conseguenza dei ragionamenti appena fatti, una prima disuguaglianza da tener presente, per l'autore, è dunque la seguente:

$$r >> \frac{\hbar}{Mc} \tag{4.28}$$

dove al solito $\lambda_C = frac\hbar Mc$ è la lunghezza d'onda Compton associata alla massa M.

A questo punto, per mettere in evidenza *perché* la relazione (4.26) sia errata e per trovarne la sostituta, Solomon descrive un esperimento ideale, pensato proprio per *misurare* l'azione della forza di Newton tra due particelle elementari. L'apparato sperimentale è il seguente. Immaginiamo uno schermo lungo l'asse verticale con due fori di apertura Δx, attraverso cui faremo passare due particelle supponiamo che esista uno secondo schermo, ortogonale al primo e di lunghezza L, che separi le due traiettorie, in modo da evitare che le due particelle risentano della forza gravitazionale. Ovviamente, come sottolinea lo stesso autore, tale schermo *non esiste*, proprio a causa dell'universalità della forza gravitazionale: in questo senso l'esperimento è ideale, perché Solomon ipotizza che esista 'uno schermo impermeabile alla gravitazione' ([Sol38]; pag. 482). Appena superato lo

[72] Per una formulazione moderna del teorema si veda per esempio ([CCTL77]; pag. 242)

[73] Solomon utilizza ancora la massa del protone.

schermo le due particelle interagiranno tramite la forza gravitazionale: la lunghezza L dello schermo sarà dunque legata con il limite entro cui riusciamo a *misurare* gli effetti di tale forza. Seguiamo dunque una sola delle due particelle, ignorando l'altra grazie alla presenza dello schermo ideale. Chiamiamo t_0 il momento iniziale in cui la particella entra nella fessura e supponiamo di misurare l'impulso $p_x(t)$, lungo l'asse x. Seguendo per un momento ancora il modo di ragionare di Heitler e colleghi, Solomon chiama τ il tempo necessario per misurare una variazione dell'impulso, mentre v e v' saranno le velocità della particella prima e dopo la misura, e applicando il principio di indeterminazione si ottiene che l'incertezza sulla misura *dell'impulso* sarà $\delta p_x = \frac{\hbar}{(v-v')\tau}$. Ora Solomon osserva che 'la differenza $v - v'$ non può superare la velocità della luce' ([Sol38]; pag. 481), e grazie a questo limite si ottiene quindi una precisione *massima* per la misura della variazione dell'impulso pari a:

$$\delta p_x = \frac{\hbar}{c\tau}. \tag{4.29}$$

Come conseguenza la precisione sulla posizione sull'asse x sarà:

$$\delta x = c\tau. \tag{4.30}$$

Come detto, quando la particella sarà sottoposta all'azione della forza gravitazionale esercitata dall'altra particella, identica alla prima, si può scrivere la relazione usuale $\frac{dp_x}{dt} = \frac{gM^2}{r^2}\left(\frac{x}{r}\right)$ per l'impulso lungo l'asse x, e la variazione dell'impulso data dall'azione di tale forza si ottiene integrando l'equazione differenziale, ottenendo:

$$p_x(t_0 + T) - p_x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\frac{GM^2}{r^2}\left(\frac{x}{r}\right)\right] dt\ , \tag{4.31}$$

dove T è l'intervallo di tempo in cui tale forza agisce effettivamente[74]. Solomon sottolinea che il problema della verifica degli eventuali limiti di validità dell'applicazione della legge di Newton alle particelle elementari è equivalente a una *verifica* della relazione (4.31) tramite una misura degli impulsi *prima* e *dopo* l'effetto della forza gravitazionale, e tramite una misura del membro di sinistra della (4.31), e tramite 'una misura dell'integrale del secondo membro' ([Sol38]; pag. 481).

A questo punto l'autore fa una serie di ragionamenti sulla (4.31), per ottenere delle relazioni che gli serviranno più avanti e per mettere in evidenza il "paradosso" ottenuto da Heitler e colleghi. Innanzitutto, grazie alla (4.29) è possibile affermare che la precisione massima $\delta(\Delta p)_{max}$ nella misura del membro di sinistra è pari a $\delta(\Delta p)_{max} = \frac{\hbar}{c\tau}$, mentre l'ordine di grandezza del membro di destra[75] è pari a $\Delta p \sim \frac{GM^2}{r^2}T$. Di conseguenza l'autore

[74]Ricordiamo che, fino a quando la particella non ha superato lo schermo ideale, la forza di Newton è nulla e l'impulso non varierà.

[75]Il rapporto $\frac{x}{r}$ ha un ordine di grandezza pari a uno perché si tratta del coseno di un angolo.

si può calcolare l'incertezza relativa alla misura della variazione del momento dopo l'azione della forza gravitazionale, e imponendo che tale incertezza relativa sia piccola, per i motivi esposti all'inizio del paragrafo, ottiene:

$$\frac{\delta(\Delta p)_{max}}{\Delta p} \sim \frac{\hbar/c\tau}{\frac{GM^2}{r^2}T} << 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\hbar r^2}{c\tau GM^2 T} << 1, \tag{4.32}$$

oppure, alternativamente,

$$T >> \frac{\hbar r}{GM^2}\left(\frac{r}{c\tau}\right) \tag{4.33}$$

Fino a qui abbiamo riportato le relazioni che Solomon userà anche dopo. Ora apriamo una breve parentesi per mostrare, come fa l'autore, che 'è un uso brutale delle relazioni come la (4.29) a condurci a dei paradossi'[76] ([Sol38]; pag. 481). Se si valuta anche l'incertezza del secondo membro della (4.31), inserendo la (4.30), si ottiene $\delta'(\Delta p) = \frac{GM^2}{r^3}c\tau T$, e imponendo che anche l'incertezza relativa ottenuta in questo modo sia piccola, ovvero

$$\frac{\delta'(\Delta p)}{\Delta p} = \frac{GM^2 c\tau T/r^3}{\frac{GM^2}{r^2}T} << 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{c\tau}{r} << 1\ , \tag{4.34}$$

deve valere anche la seguente disuguaglianza:

$$r >> c\tau. \tag{4.35}$$

Combinando la relazione (4.33) con la (4.35) si ottiene:

$$T >> \frac{\hbar r}{GM^2}\ , \tag{4.36}$$

ovvero una relazione che è identica alla (4.24) se il tempo di misura coincide con il tempo con cui agisce la forza di Newton, come nel caso di Heitler. Ma come osserva Solomon, la (4.36) porta, con ragionamenti identici a quelli fatti da Heitler, alla (4.26), ovvero: 'ci indica che lo spostamento durante la misura è certamente superiore a $\frac{\hbar^2}{MG^3}$. Ricadiamo dunque nel paradosso che volevamo evitare' ([Sol38]; pag. 481).

Torniamo all'esperimento ideale, e vediamo ora come Solomon riesca nel proprio intento di evitare il paradosso. L'autore sottolinea che solitamente, parlando del principio di indeterminazione, si fa riferimento a una sola misura. In tal senso non è possibile misurare *contemporaneamente* posizione e quantità di moto della particella con precisione assoluta. Nel caso preso in esame, però, le misure da fare *sono più di una* ed è possibile quindi misurare con precisione massima la posizione della particella e "subito dopo", con la stessa precisione, misurarne la quantità di moto. Detto questo seguiamo una delle due

[76] Il numero sequenziale della formula all'interno della citazione è stato ovviamente cambiato perché corrispondesse a quello del nostro testo.

particelle elementari di massa M che passa da una fessura di larghezza Δx e si muove con velocità v longitudinalmente allo schermo ideale, di lunghezza L, "impermeabile" alla forza gravitazionale. Misuriamone la posizione nell'istante t_0 in cui passa per la fessura: l'incertezza nella determinazione della posizione del pacchetto d'onda sarà la larghezza Δx. Solomon osserva: 'Sappiamo dove si trova la particella all'istante t_0 e conosciamo anche la precisione sulla variazione della quantità di moto tra l'istante precedente e quello successivo al passaggio per la fessura che è dell'ordine di $\frac{\hbar}{\Delta x}$. Misuriamo *poi*, dopo un certo tempo sufficientemente lungo, la quantità di moto (per esempio per effetto Doppler). Naturalmente, durante questo tempo noi ignoriamo completamente la posizione della particella, ma se il tempo della misura è τ conosceremo la quantità di moto con precisione $\frac{\hbar}{c\tau}$. Grazie al teorema di Ehrenfest però conosceremo l'incertezza nella posizione Δx e della quantità di moto a un istante t qualsiasi, visto che la particella non è sottoposta ad alcun campo esterno' ([Sol38]; pag. 482). Infatti, durante il moto longitudinale allo schermo "impermeabile" alla gravità, il moto del centro del pacchetto d'onda sarà quello di una particella classica che viaggia a velocità costante, perché la particella non subisce l'azione della forza gravitazionale e visto che i pacchetti d'onda sono collimati l'autore può utilizzare la relazione (4.28). Grazie al principio di indeterminazione la quantità di moto Mv dovrà essere *maggiore* di $\frac{\hbar}{\Delta x}$ e si ottiene così la seguente relazione:

$$\frac{c}{v} < \frac{\Delta x}{\frac{\hbar}{Mc}}. \tag{4.37}$$

Diversamente da quanto fatto da Heitler e colleghi, il "tempo di misura" τ corrisponde ora al tempo per misurare la quantità di moto *prima* che la particella subisca l'azione della forza gravitazionale. A questo punto Solomon suppone che 'la quantità di moto dopo l'azione della forza gravitazionale venga misurata senza alcuna incertezza' ([Sol38]; pag. 482): l'autore eviterà quindi di usare la *seconda* delle due incertezze, ovvero $\delta'(\Delta p)$, visto che l'incertezza sulla posizione mentre agisce la forza gravitazionale è assoluta. Inoltre, mentre per Heitler e colleghi il tempo τ era dato, grazie alla (4.29), da $\tau = \frac{\Delta x}{c}$, per Solomon deve valere invece la relazione $\tau = \frac{L}{v}$ e tale tempo è *differente* dal tempo T, che indica invece l'intervallo di tempo nel quale agisce la forza gravitazionale. Riprendiamo il ragionamento sull'incertezza di misura dell'impulso e ripartiamo dalla (4.31) che riportiamo per comodità:

$$p_x(t_0+T) - p_x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\frac{GM^2}{r^2}\left(\frac{x}{r},\right)\right] dt\,. \tag{4.38}$$

Misuriamo in due momenti differenti $p_x(t_0+T)$ e $p_x(t_0)$, il primo senza incertezza, mentre il secondo con incertezza $\frac{\hbar}{c\tau}$ con $\tau = \frac{L}{v}$. Essendo completamente indeterminata la posizione

x durante l'azione della forza gravitazionale, utilizziamo il membro di destra solamente per calcolare l'ordine di grandezza della variazione della quantità di moto e imponiamo come prima che l'errore relativo così calcolato sia piccolo. Analogamente a quanto già discusso otteniamo ancora la (4.33) dove però $\tau = \frac{L}{v}$, ovvero:

$$T >> \frac{\hbar r}{GM^2}\left(\frac{r}{c}\frac{v}{L}\right). \tag{4.39}$$

A questo punto si può imporre, come facevano Heitler e colleghi, che la separazione delle due particelle sia maggiore dello spostamento dato dall'azione della forza di Newton, usando però il tempo T e non il tempo τ, e si ottiene:

$$r > \frac{1}{2}\frac{GM^2}{r^2}T^2 >> \frac{1}{2}\frac{GM^2}{r^2}\left[\frac{\hbar r}{GM^2}\left(\frac{r}{c}\frac{v}{L}\right)\right]^2, \tag{4.40}$$

dove abbiamo utilizzato la (4.39).
La relazione appena scritta permette finalmente a Solomon di sostituire la (4.26) con una nuova disuguaglianza che, come osserva l'autore, ha un verso *opposto* rispetto a quella ottenuta dai colleghi:

$$r < \frac{L^2GM^3}{\hbar^2}\left(\frac{c^2}{v^2}\right). \tag{4.41}$$

Per mostrare che la propria relazione è più ragionevole di quella data da Heitler, Solomon inserisce la (4.37) nella (4.41) e utilizza la (4.28) ottenendo una nuova disuguaglianza[77] ([Sol38]; pag. 482, eq.(15)):

$$L^2 >> \left\{\frac{\frac{\hbar}{Mc}}{\Delta x}\right\}^2 \frac{\hbar^3}{M^4cG} \tag{4.42}$$

Inserendo i valori numerici degli ordini di grandezza per le costanti fondamentali e per la massa del protone come Heitler, e ipotizzando che l'ordine di grandezza della fessura sia quello del raggio di Bohr[78] nella (4.42), Solomon ottiene che la lunghezza dello schermo ideale necessario per misurare l'effetto della forza gravitazionale tra due particelle elementari deve essere maggiore di un centimetro: $L >> 1cm$.

L'autore osserva onestamente che anche il suo approccio è incompleto per una serie di ragioni. Una di queste è che, come scrive Solomon, 'si è usata l'approssimazione newtoniana della legge della gravitazione, il che equivale a trascurare gli errori dovuti al fatto che l'interazione tra le due particelle non si propaga istantaneamente, ma con la velocità della

[77]Abbiamo deciso di riportare la disuguaglianza nella stessa forma usata da Solomon. La (4.42) può essere però scritta anche nel seguente modo, facendo comparire esplicitamente la massa di Planck $m_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$: $L > \frac{\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2 \cdot m_{Planck}}{\Delta x \cdot M}$.

[78]Ricordiamo i seguenti valori delle costanti: lunghezza Compton del protone $\frac{\hbar}{Mc} \sim 10^{-16}m$; massa del protone $M \sim 10^{-27}kg$; $c \sim 10^8\frac{m}{s}$; $G \sim 10^{-10}\frac{Nm^2}{kg^2}$ e $\hbar \sim 10^{-34}Js$.

luce' ([Sol38]; pag. 483). Come osserva anche Stachel [Cao99], Solomon conosce i lavori di Bronstein, e infatti riporta i risultati ottenuti dal collega russo, nell'approssimazione di campo debole. In particolare, per Solomon, il fatto che Bronstein abbia mostrato che dalla quantizzazione del campo gravitazionale segue la legge di Newton[79] è una ulteriore riprova del fatto che 'è necessario considerare l'interazione di Newton tra due particelle elementari' ([Sol38]; pag. 484).

Nella parte finale del lavoro Solomon esprime perplessità riguardo alla possibilità che la teoria dei campi, efficace nella descrizione in cui la gravità è debole, possa invece offrire una corretta descrizione della RG nel suo complesso. L'autore sottolinea che uno scoglio che impedisce alla teoria dei campi di essere efficace è la non linearità della teoria di Einstein. Riguardo alla non linearità Solomon cita un risultato ottenuto da Nathan Rosen l'anno precedente [Ros37]: le equazioni di Einstein nel vuoto, in generale, non ammettono una soluzione di tipo *onda piana* senza singolarità[80] ([Sol38]; pag. 484). Questo fatto segna, per l'autore, una notevole differenza tra le equazioni linearizzate e quelle non lineari, differenza che indurrà lo stesso Rosen a dubitare dell'esistenza delle onde gravitazionali e del gravitone ('Gravitational Waves' in [eAMK56]). Oggi sappiamo che il risultato di Rosen non è corretto. L'errore nella derivazione di Rosen verrà messo in luce Hermann Bondi nel 1957, come dichiarato da questi in [Bon57], prima alla conferenza che si terrà a Chapel Hill e poi con una lettera all'editore di *Nature* in cui si nota come la singolarità nelle coordinate trovata da Rosen non è di tipo fisico, ma è legata alla scelta delle coordinate stesse.

4.2 1939: Fierz, Pauli e lo spin del gravitone

Come detto all'inizio del capitolo precedente, Rosenfeld aveva chiarito che lo spin del gravitone doveva essere intero. Nel 1939 Fierz e Pauli capiscono che il gravitone può essere descritto come una particella quantistica di spin pari a 2. Per poter fare questo tipo di identificazione sono stati necessari due passaggi. Questi due passaggi sono contenuti nei tre articoli che vengono pubblicati a pochissima distanza l'uno dall'altro: [Fie39], [FP39a] e [FP39b]. I primi due si trovano nello stesso volume degli *Helvetica Physica Acta*, mentre l'annuncio dell'imminente pubblicazione del terzo è presente nella breve comunicazione [FP39a], la prima in cui viene indicato che il gravitone ha spin pari a 2.

[79] Si riveda il paragrafo 3.4.1.

[80] Solomon nota anche come nello stesso anno Einstein avesse dimostrato proprio assieme a Rosen, che le sue equazioni nel vuoto ammettono delle soluzioni di tipo *onda cilindrica*.

A nostro avviso è dunque chiaro che i tre lavori rappresentano un corpus unico, ma per comodità li tratteremo come se fossero temporalmente consequenziali.

I passaggi che hanno reso possibile l'identificazione dello spin del gravitone non scaturiscono dall'esigenza dello studio della gravità, ma dall'analisi di un problema molto più generale. Nel primo e lungo lavoro di Fierz [Fie39], infatti, l'autore presenta le equazioni di una particella quantistica *massiva* libera con spin qualsiasi, distinguendo ovviamente tra le particelle di carattere bosonico e quelle di carattere fermionico. L'esigenza è quindi quella di arrivare a capire quali siano le equazioni del moto di una particella *qualsiasi*: l'autore non farà mai riferimento esplicito alla gravità. Il punto di partenza è quello di un campo classico che, una volta quantizzato, rappresenterà la particella quantistica. Indichiamo con s il valore dello spin[81] e con m la massa della particella: per questo caso particolare Fierz associa a un bosone di spin s un tensore *simmetrico* con s indici spazio-temporali $A_{\mu\nu\ldots\rho}$, le cui componenti rappresentano i potenziali da cui si calcola l'intensità del campo. La dinamica del campo libero viene descritta da un'equazione d'onda che è la generalizzazione dell'equazione di KG, e che si riduce a essa se si considera il campo scalare, che ha spin nullo ed è quindi senza indici:

$$\Box A_{\mu\nu\ldots\varrho} = M^2 A_{\mu\nu\ldots\varrho} \qquad \text{dove} \qquad M^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \,. \tag{4.43}$$

Fierz sta seguendo, senza citarla esplicitamente, la strada tracciata da Ernest C. G. Stueckelberg, il quale l'anno precedente aveva usato un'identica analogia limitandosi al caso della particella massiva con spin 1 [Stu39a] [Stu39b]. Il numero di componenti indipendenti del tensore, risulta superiore al numero degli effettivi gradi di libertà di una particella massiva di spin s, ovvero $2s+1$. È quindi necessario imporre delle condizioni aggiuntive[82]:

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu\sigma\ldots\varrho} = 0 \,, \tag{4.44}$$

$$\partial^{\mu} A_{\mu\nu\sigma\ldots\varrho} = 0 \,, \tag{4.45}$$

dove la seconda in particolare è la generalizzazione della condizione di gauge-fixing di Lorenz, e come spiega lo stesso Fierz è fisicamente necessaria per ottenere una Hamiltoniana

[81] A differenza di Fierz, noi siamo interessati solamente a valori interi dello spin e seguiremo i ragionamenti di Fierz solo per quelli.

[82] Il fatto che dalle sole equazioni (4.43) non discendano le (4.45) si può evitare se si segue l'approccio di Alexandru Proca, il quale aveva proposto, prima di Stueckelberg, di modificare le equazioni di Maxwell per il caso libero nel seguente modo: $\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = M^2 A_{\nu}$. Derivando e usando l'antisimmetria del tensore $F_{\mu\nu}$ si ottiene proprio la condizione di Lorenz. A nostro avviso, Fierz segue l'approccio di Stueckelberg proprio perché è più esplicita l'analogia con il campo scalare, analogia che Fierz persegue sin dal primo lavoro [Fie39].

che sia definita positiva[83]. Nel corso del proprio lavoro Fierz si occupa della costruzione del tensore energia impulso e della quantizzazione dei campi liberi[84]. Finalmente, nell'appendice del lavoro, l'autore considera molto brevemente i casi particolari $s = \frac{3}{2}$ ed $s = 2$, ma senza fare riferimenti alla gravità. Per Fierz si tratta solamente di analizzare i due casi successivi ai valori $s = 0$, $s = \frac{1}{2}$ e $s = 1$ dello spin, casi per i quali, come specifica lo stesso autore, esistono già degli esempi in letteratura. Quindi l'autore sta chiedendo implicitamente se i casi $s = \frac{3}{2}$ ed $s = 2$ corrispondano a qualche particella non ancora identificata.

Il secondo passaggio che porta all'identificazione del gravitone con il quanto del campo di spin 2 è conseguenza dell'esigenza di descrivere la dinamica di una qualsiasi particella quantistica relativistica in presenza di un campo elettromagnetico esterno. Ancora una volta, dunque, l'obiettivo principale non è la gravità. Questo secondo passaggio, come già osservato, si esplica in due articoli: nel breve lavoro scritto con Pauli pubblicato sugli *Helvetica Physica Acta*, [FP39a], e in un lavoro più lungo pubblicato sui *Proceedings of the Royal Society* [FP39b]. Nel perseguire il loro obiettivo gli autori si rendono conto che le equazioni del moto di un campo di spin 2 con massa nulla sono identiche alle equazioni di Einstein linearizzate. Nonostante questo fatto sia oggetto della *prima* delle due comunicazioni, per comprendere meglio le ragioni dell'approccio di Fierz e Pauli conviene riferirsi a entrambi i lavori contemporaneamente. Ripercorriamo alcuni passaggi fondamentali. Fierz e Pauli cominciano con l'osservare che per descrivere la dinamica di una particella in presenza di un campo esterno *non è possibile utilizzare la sostituzione minimale*, ovvero sostituire l'operatore ∂_μ con[85] $D_\mu = \partial_\mu - ie\phi_\mu$. Più precisamente Fierz e Pauli mettono in luce la seguente problematica che si presenta quando si vuole passare dal caso del campo libero a quello del campo interagente con un campo elettromagnetico esterno, utilizzando la sostituzione minimale[86]. Nel caso libero, se ci limitiamo al campo massivo di spin 1, le equazioni (4.43), (4.44) e (4.45) diventano:

$$\Box A_\mu = M^2 A_\mu \,, \tag{4.46}$$

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \,, \tag{4.47}$$

[83]Ricordiamo che la Hamiltoniana deve essere inferiormente limitata, perché in una teoria quantistica la presenza di stati a energia positiva e negativa rende lo stato di vuoto non stabile.

[84]A nostro avviso, a differenza di Stuekelberg, Fierz non si rende conto che nel processo di quantizzazione del campo massivo, le condizioni (4.45) non sono compatibili con le relazioni di commutazione. Per una discussione di questo fatto si veda per esempio [RRA04].

[85]Poiché abbiamo deciso di indicare con A_μ il campo di spin 1, solo per questo paragrafo indicheremo con ϕ_μ i potenziali elettromagnetici. Notiamo inoltre che quando il campo dovrà essere carico il tensore A_μ diventa *complesso*.

[86]Gli autori non esplicitano il seguente ragionamento.

che risultano compatibili tra loro, perché prendendo la quadridivergenza delle (4.46) e utilizzando le (4.47) si ottiene un'identità. Se si opera la sostituzione minimale le equazioni diventerebbero:

$$\begin{aligned} D^\nu D_\nu A_\mu &= M^2 A_\mu \ , & (4.48) \\ D^\mu A_\mu &= 0 \ , & (4.49) \end{aligned}$$

ma questa volta, applicando la nuova derivata D^μ alla (4.48) e utilizzando la (4.49), non si ottiene più un'identità, perché, come osservano anche Fierz e Pauli: 'l'operatore $D^2 = D^\nu D_\nu$ e l'operatore D_μ non commutano'[87] ([FP39a]; pag. 213). Questo significa che le equazioni (4.48) non sono compatibili con le equazioni (4.49).

Per aggirare questo problema, gli autori utilizzano un metodo simile a quello usato da Stueckelberg, introducendo un campo scalare ausiliario C, grazie al quale le condizioni (4.45) sono conseguenza delle equazioni del moto derivate da una Lagrangiana e si potrà quindi applicare la sostituzione minimale per descrivere il caso del campo in interazione con un campo elettromagnetico esterno. Il punto di partenza è quello di scrivere una Lagrangiana da cui ricavare le equazioni d'onda (4.43) come equazioni del moto. In [FP39a] gli autori presentano la Lagrangiana per il caso dello spin 2, senza spiegare tutte queste motivazioni, che si trovano invece in [FP39b]. Come osservato in precedenza, è però chiaro che i vari ragionamenti erano già presenti ai due autori. Continuiamo a riferirci a [FP39b]. Indichiamo con $A_{\mu\nu}$ il tensore *reale* a due indici che rappresenta i potenziali del campo di spin 2, esattamente come fanno i due autori. La lagrangiana scritta da Fierz e Pauli è la seguente:

$$\begin{aligned} L &= \partial_\mu A_{\nu\rho}\partial^\mu A^{\nu\rho} + M^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} + a_1 \partial_\mu A^{\mu\nu}\partial^\varrho A_{\varrho\nu} \\ &+ a_3 \partial_\mu C \partial^\mu C + a_2 M^2 C^2 \\ &+ \partial^\mu A_{\nu\sigma}\partial^\sigma C \ , & (4.50) \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono delle costanti[88] arbitrarie[89]. Nella prima riga riconosciamo il termine cinetico, il termine di massa e il termine che fissa la gauge per il campo $A_{\mu\nu}$; nella seconda

[87] Ricordiamo che vale la seguente relazione per il commutatore tra le derivate: $[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}$ dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu$.

[88] I numeri delle costanti sono volutamente invertiti, perché abbiamo mantenuto la notazione originale di Fierz e Pauli ma abbiamo riordinato i termini della Lagrangiana.

[89] Spesso Fierz e Pauli vengono identificati come i "padri" della *Massive Gravity*, perché hanno scritto per primi la lagrangiana (4.50), ma da quanto ci risulta non hanno mai fatto riferimento, in questi anni, a tale teoria come a una teoria massiva della gravitazione e non ne hanno studiato eventuali proprietà. Vedremo verso la fine del capitolo che la questione verrà presa in considerazione da altri autori nel periodo della guerra.

riga riconosciamo il termine cinetico e quello di massa per il campo ausiliario, mentre nell'ultima riga è presente una sorta di termine di interazione tra i due campi, che produrrà appunto le condizioni ausiliarie. Come accennato, le costanti vengono determinate proprio dalla richiesta che dalle equazioni del moto ottenute variando in maniera indipendente $A_{\mu\nu}$ e C si ottenga come conseguenza che[90] $\partial^\mu A_{\mu\nu} = 0$. Fierz e Pauli ottengono: $a_1 = -2$ e $a_2 = 2a_3 = -\frac{3}{4}$. In [FP39a] gli autori presentano la lagrangiana con i coefficienti fissati come un Ansatz, e discutono brevemente le equazioni del moto per il caso massivo e con massa nulla. Le equazioni del moto che si ottengono da (4.50) variando i campi sono le seguenti:

$$2M^2 A_{\mu\nu} - 2\Box A_{\mu\nu} + 2\left\{\partial_\mu\partial^\sigma A_{\sigma\nu} + \partial_\nu\partial^\sigma A_{\sigma\mu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\partial^\rho\partial^\sigma A_{\rho\sigma}\right\} - \partial_\mu\partial_\nu C + \frac{\eta_{\mu\nu}}{4}\Box C = 0 \quad (4.51)$$

$$-\frac{3}{2}M^2 C + \frac{3}{4}\Box C - \partial^\rho\partial^\sigma A_{\rho\sigma} = 0\ . \quad (4.52)$$

Se si prende la quadridivergenza della (4.51) e la si inserisce nella (4.52) si ottiene:

$$\partial^\sigma A_{\sigma\mu} - \frac{3}{4}\partial_\mu C = 0\ , \quad (4.53)$$

e se ora si prende la quadridivergenza di (4.53) si ottiene

$$\partial^\mu\partial^\sigma A_{\sigma\mu} - \frac{3}{4}\Box C = 0. \quad (4.54)$$

Inserendo quest'ultima equazione nella (4.52) si ottiene $C = 0$ e di conseguenza, inserendola nella (4.53), si ottiene la condizione desiderata: $\partial^\sigma A_{\sigma\mu} = 0$. Se la massa è nulla, dopo aver introdotto il seguente cambio di variabili:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}C\ , \\ h &= \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = C\ , \end{aligned} \quad (4.55)$$

il sistema formato dalle due equazioni (4.51) e (4.52) si può ridurre a un'unica equazione:

$$-\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h + \partial_\mu\partial^\rho h_{\varrho\nu} + \partial_\nu\partial^\rho h_{\varrho\mu} = 0\ , \quad (4.56)$$

che rappresenta le equazioni di Einstein nel vuoto nell'approssimazione di campo debole[91]. Grazie a questa identificazione, dunque, Fierz e Pauli affermano che il quanto del campo di spin 2 di massa zero dovrà essere necessariamente il gravitone.

[90] Si veda più sotto quello che accade una volta che i coefficienti sono fissati.

[91] Ricordiamo che nell'approssimazione di campo debole la metrica viene decomposta nel seguente modo: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, e si considerano solamente i contributi lineari nelle variabili $h_{\mu\nu}$.

Nel terzo lavoro [FP39a] gli autori osservano anche che la lagrangiana (4.50), nel caso in cui la massa sia nulla e i coefficienti siano fissati come detto sopra, risulta essere invariante per le seguenti variazioni dei campi per trasformazioni di gauge:

$$\begin{aligned}\delta A_{\mu\nu} &= \partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma f_\sigma \ ,\\ \delta C &= 2\,\partial^\sigma f_\sigma \ ,\end{aligned} \tag{4.57}$$

e le identificano con le trasformazioni infinitesime di coordinate ([FP39b]; pag. 225). Per Fierz e Pauli, quanto scoperto a proposito del campo gravitazionale è importante per due motivi. Il primo è che l'identificazione delle equazioni del moto con le equazioni di Einstein e l'identificazione delle trasformazioni di gauge con le trasformazioni infinitesime di coordinate permette loro di definire 'ragionevole' l'introduzione del campo ausiliario C ([FP39b]; pag. 213-214). Il secondo motivo è che ora possono sostituire in (4.50) ∂_μ con $\partial_\mu - ie\phi_\mu$ e considerare un tensore $A_{\mu\nu}$ *complesso*, per ottenere una descrizione, dal loro punto di vista consistente[92], della particella quantistica in presenza di un campo elettromagnetico esterno, diversamente da prima. Tutto quello che gli autori fanno per il campo di spin 2, viene reiterato anche per il campo con spin $\frac{3}{2}$, che è il secondo campo di cui si era occupato Fierz nel primo lavoro. In questo caso però i due autori concludono scrivendo che 'non abbiamo alcuna connessione con teorie note' ([FP39b]; pag. 227) e quindi non ne approfondiscono ulteriormente le caratteristiche[93].

4.2.1 Lo strano caso del Dottor Kaliviaris

Nello stesso anno in cui Fierz e Pauli riescono trovare un ponte tra la nascente teoria dei campi e la teoria di Einstein, il fisico greco Anarghiros Kaliviaris tenta di quantizzare una personale versione della teoria della gravitazione [Kal39]. L'autore, come altri prima di lui, è convinto che sia necessario adottare come teoria della gravitazione un modello analogo a quello del campo elettromagnetico di Maxwell[94] in cui la carica che genera il

[92] Alla fine degli anni sessanta Giorgio Velo e Daniel Zwanziger, utilizzando il formalismo introdotto da Fierz e Pauli, metteranno in luce il fatto che nel caso delle teorie di spin maggiore di uno accoppiate con un campo elettromagnetico esterno emergono dei problemi legati alla trattazione dei vincoli, nel caso dei campi massivi, ed emergono dei problemi nella descrizione dell'accoppiamento stesso per campi a massa nulla [VZ69]. Vedremo alla fine del capitolo che questo tipo di problematiche verranno messe in luce anche da un altro fisico, con l'utilizzo di un differente formalismo.

[93] Oggi, infatti, il campo corrispondente al quanto con spin $\frac{3}{2}$ è noto come *campo di Rarita-Schwinger* o anche *gravitino*.

[94] Kaliviaris dichiara di aver preso spunto da altri autori, come per esempio Weyl o Eddington, e di fare riferimento alla teoria introdotta da I. E. Viney e G. H. Livens. Ovviamente la ricostruzione di tale approccio alla teoria della gravità esula dai nostri scopi. Per maggiori approfondimenti si vedano le referenze presenti nel lavoro di Kaliviaris stesso [Kal39].

campo è rappresentata dalla massa[95]: 'Come punto di partenza[...] adottiamo il principio dell'esistenza di una carica gravitazionale associata a ogni particella materiale' ([Kal39]; pag. 457). L'autore cerca da subito una connessione con la teoria quantistica. Per questo motivo vuole trattare i corpi come un insieme di N elettroni, dove N indica il numero di Avogadro, e cerca di trovare un legame[96] tra l'emissione di un fotone e di un gravitone: 'La probabilità di emissione di un quanto gravitazionale di un sistema di elettroni [...] può essere ottenuto combinando la probabilità[...] di emissione di un quanto di luce con l'energia totale delle masse che gravitano[...]' ([Kal39]; pag. 455). Sviluppando questa idea il fisico greco riesce a scrivere una relazione che lega la costante gravitazionale con le altre costanti della fisica microscopica[97]:

$$G = \frac{32\pi hc}{N^2 m_0^2} \tag{4.58}$$

([Kal39]; pag. 456), dove m_0 è la massa dell'elettrone, combinazione che restituisce un valore effettivamente compatibile con le misure dell'epoca e che gli fornisce quindi una sorta di base *empirica* per il modello[98]. Dal modello di Kaliviaris emerge inoltre che '[...] la probabilità di emissione di un quanto gravitazionale da parte di un sistema meccanico è proporzionale alla quantità $\sqrt{G}Nm_0$, analoga alla carica elettrica che produce i quanti di luce' ([Kal39]; pag. 456). Per questo motivo questa quantità viene definita dall'autore come *l'unità di carica gravitazionale*. Per perseguire l'analogia con l'elettromagnetismo Kaliviaris introduce un quadrivettore complesso[99] V^μ '[...] la cui componente temporale V_0[...] si riduce al potenziale scalare di Newton' ([Kal39]; pag. 456) con cui costruisce il tensore antisimmetrico $G_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$, che obbedisce alla condizione $\partial_\mu V^\mu$, e utilizza come Lagrangiana quella introdotta da Proca, ovvero quella di un campo massivo di spin 1, scritta nel seguente modo[100]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^*_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}V^*_\mu V^\mu + J_\mu V^\mu \ , \tag{4.59}$$

[95]Una delle innovazioni portate dalla teoria di Einstein è stata proprio quella di considerare non più la massa come unica generatrice del campo gravitazionale, come accade nella teoria di Newton, ma anche l'energia.

[96]Tale legame risulta totalmente arbitrario e pone l'approccio di Kaliviaris in contrasto con la RG.

[97]Abbiamo deciso di non approfondire ulteriormente i particolari tecnici perché esulano dal nostro lavoro.

[98]Le relazioni come (4.58), come detto più volte, sono tipiche degli approcci alla Eddington.

[99]Kaliviaris non discute la scelta del quadrivettore *complesso*, una premessa ereditata dal modello classico proposto di Viney Livens. Per approfondire le eventuali ragioni fisiche di questa scelta rimandiamo ancora ai lavori dei due autori citati da Kaliviaris.

[100]Nel lavoro originale Kaliviaris scrive la lagrangiana in maniera differente, ma equivalente: abbiamo preferito mantenere una notazione *moderna* nel presentarla.

dove $J_\mu = \left(M, \frac{M}{c}\vec{v}\right)$ è una corrente conservata dalla forma decisamente inusuale che contiene la velocità la massa M e la velocità $\vec{v}$ della massa che produce il campo gravitazionale, ed m_g è la massa del gravitone. Nel modello di Kaliviaris dunque, a causa della presenza di un gravitone massivo, il raggio dell'interazione gravitazionale non sarà più infinito. In questo scenario la quantizzazione della gravità per Kaliviaris corrisponde alla quantizzazione del campo V^μ, quantizzazione che l'autore esegue nella maniera usuale della teoria dei campi, scegliendo cioè delle opportune variabili coniugate e scrivendone i commutatori. Coerentemente trova che il "gravitone" ha *tre* polarizzazioni, due trasversali e una longitudinale, dovute al fatto che si tratta di un quanto massivo di spin 1. Per il fisico greco l'introduzione della massa del gravitone è una conseguenza del tentativo di conciliazione tra la teoria di Newton e la fisica quantistica. Per stabilirne il valore l'autore introduce una 'legge cosmologica', secondo la quale 'la massa totale dell'Universo sia uniformemente distribuita sulla superficie di una sfera di raggio R[...]' ([Kal39]; pag. 456). Kaliviaris giustifica l'introduzione di tale legge asserendo che dovrebbe servire a 'evitare gli infiniti del potenziale del campo associati a $G_{\mu\nu}$ nelle regioni cosmiche[...]' ([Kal39]; pag. 456). Per il fisico greco, sulle distanze cosmiche, la legge che descrive l'energia potenziale gravitazionale $\mathcal{E}$ deve avere, schematicamente, la stessa forma del potenziale di Yukawa:

$$\mathcal{E} \sim \frac{e^{-kr}}{r} \ , \tag{4.60}$$

dove la costante $k = \frac{m_g c}{\hbar} = \frac{1}{2\pi R_0}$ con R_0 raggio dell'Universo. L'autore dunque mette in relazione la massa del gravitone con il raggio dell'Universo che per Kaliviaris è:

$$R_0 = \frac{N^2 \alpha m_0}{32\pi^2 m_p} r_0 \sim 1,2x10^{27}\, cm \ , \tag{4.61}$$

dove α è l'usuale costante di struttura fine, m_p è la massa del protone ed r_0 è 'il raggio classico [di un corpo di massa $m = Nm_0$], che è noto dagli esperimenti d'urto nella fisica nucleare come la minima distanza possibile' ([Kal39]; pag. 456). Per l'autore, la relazione (4.61) giustifica l'identificazione della costante N col numero di Avogadro, sostanzialmente perché così ottiene una stima del raggio dell'universo compatibile con le stime dell'epoca. Kaliviaris commenta questo fatto aggiungendo: '[...] abbiamo mostrato come mai la natura preferisca un numero di N coppie di elettroni in modo da rendere compatibile la legge della gravitazione con la teoria quantistica' ([Kal39]; pag. 457). Occupandosi della questione cosmologica l'autore non può non intervenire sul fenomeno della recessione delle galassie. Riportiamo a tal proposito l'ultimo commento del lavoro: 'Poiché le vere leggi della natura sono quelle della meccanica quantistica, l'armonizzazione tra la teoria della gravità di Newton e il fenomeno dell'*allontanamento* di Hubble sarà possibile solamente grazie a una teoria quantistica della gravitazione completa'[101] ([Kal39]; pag. 457).

4.2.2 Contributi minori

Come nei precedenti capitoli passiamo brevemente in rassegna in questo paragrafo tre contributi di minor impatto, che vengono pubblicati nel 1939: i lavori di Jean Mariani, un articolo di Schrödinger e una breve nota di William Band.

Come osservato da Kragh, nel 1938 Heisenberg era tornato a lavorare alla formulazione di una teoria in cui sia presente una lunghezza minima misurabile ([Kra95]; pag. 413), motivato prima di tutto dalla ricerca di un cut-off per risolvere gli infiniti in elettrodinamica quantistica. Nel 1939 anche un fisico francese, Jean Mariani, tenta di introdurre il concetto di lunghezza minima, spinto dall'idea che fosse una proprietà essenziale per lo spazio-tempo microscopico ([Kra95]; pagg. 422-423 e nota (54)). Come infatti scrive Kragh, in quest'anno vengono pubblicati due brevi interventi per la rivista *Comptes Rendus*, [Mar39a] [Mar39b], in cui Mariani suggerisce un modello *geometrico* per il mondo microscopico, modello che ricorda i vecchi tentativi di Jeffery e Ghosh. È interessante spendere alcune parole riguardo alle idee di Mariani. In una breve comunicazione all'editore di *Nature*, [Mar39c], il fisico francese propone infatti una personale interpretazione delle osservazioni di Heitler, Nordheim e Teller, riportate da Gamow, e di cui abbiamo parlato nel paragrafo 4.1.3. Ricordiamo che Heitler e colleghi, riflettendo sulle relazioni di indeterminazione e la legge di Newton, erano giunti alla conclusione, errata, che non fosse possibile parlare di forza newtoniana tra due particelle elementari. Mariani, che evidentemente non conosce le giuste obiezioni sollevate da Solomon, interpreta questo fatto come un elemento che esclude la possibilità di utilizzare la geometria einsteiniana nel mondo microscopico. Il fisico francese motiva in questo modo l'introduzione della geometria di de Sitter nel mondo microscopico, immaginando l'atomo come una sorta di "micro-universo" sferico, il cui raggio di curvatura coincide proprio con la lunghezza minima introdotta dall'autore. Nello stesso anno Mariani pubblica un lungo lavoro sulla rivista *Journal de Physique et le Radium* in cui si occupa di varie questioni che ruotano attorno al fatto che per l'autore, come recita il titolo del lavoro stesso, ci sono dei 'limiti di applicazione della geometria metrica all'ambito della fisica "nucleare" ' [Mar39d]. Tra le varie questioni che l'autore discute una riguarda ancora il rapporto tra il principio di indeterminazione e la sua introduzione nell'ambito della RG ([Mar39d]; pagg. 305-306). L'anno successivo, poi,

[101] Il corsivo è nostro: Kaliviaris usa la parola *recession*, riferendosi al moto di allontanamento delle galassie senza parlare esplicitamente di espansione dell'Universo.

il fisico francese pubblica il seguito del lavoro, [Mar40], in cui ci si rende conto che anche per Mariani la trattazione dei fenomeni quantistici avviene attraverso l'introduzione di una Meccanica Ondulatoria, che è più simile alla descrizione tramite l'approssimazione di ottica geometrica della particella puntiforme, piuttosto che alla più moderna MQ ([Mar40]; pag. 328). In questo secondo articolo Mariani raccoglie tutte le idee precedentemente esposte e le sviluppa ulteriormente. All'inizio del lavoro cita anche la lettera all'editore di Nature, e questo fatto conferma che il fisico francese interpretava il risultato di Heitler e colleghi come una sorta di "base empirica" che giustificava il coinvolgimento della metrica di de Sitter a livello microscopico.

All'inizio del capitolo abbiamo accennato al fatto che Schrödinger, dal 1937, era diventato un difensore delle idee di Eddington. Più precisamente, come riportato da Michel Bitbol, 'L'idea che [Schrödinger] aveva preso da Eddington consisteva nel considerare le "particelle" come i modi propri di vibrazione di un Universo chiuso, pensato come un tutt'uno [...]' ([Bit96]; pag. 48). Nel 1939 Schrödinger applica la teoria dei campi quantistici a un Universo in espansione [Sch39], e studia la possibilità che l'espansione produca il fenomeno della creazione di particelle ([BD82], pag. 50). L'influenza delle idee di Eddington danno conto del titolo del lavoro, ovvero *Le vibrazioni proprie di un Universo in espansione*. Le motivazioni di Schrödinger sono chiare sin dall'introduzione al lavoro: 'La Meccanica Ondulatoria ci dà una ragione a priori per assumere che lo spazio sia chiuso [...]. La teoria della gravitazione di Einstein ci dà invece una ragione a priori per assumere che lo spazio sia, se è chiuso, in espansione o in contrazione [...]' ([Sch39]; pag. 899). L'autore analizzerà le soluzioni dell'equazione di KG su uno spazio-tempo curvo, utilizzando la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Il fatto che lo spazio sia *chiuso* permette a Schrödinger di imporre le condizioni al contorno per il campo scalare. Le vibrazioni proprie dell'Universo corrispondono dunque alle armoniche soluzioni dell'equazione d'onda che per Schrödinger rappresentano onde di materia. In questo frangente l'autore analizza il possibile fenomeno della creazione di coppie. Non entreremo nei dettagli tecnici del lavoro che meriterà sicuramente ulteriori approfondimenti nell'ambito dello studio della storia dei campi quantistici su spazi-tempo curvi[102]. Tale fenomeno verrà studiato in maniera più approfondita nei primi anni Sessanta, e ancora oggi crediamo sia una prima approssimazione di quanto accade in una teoria quantistica della gravitazione.

Chiudiamo il paragrafo con una curiosità. Nello stesso anno Band suggerisce una nuova possibile interpretazione della quinta dimensione introdotta da Klein, ma rifacendosi ai lavori dei primi anni trenta di Flint. L'autore pubblicizza la propria interpretazione con

[102]Ovviamente le tecniche usate dall'autore non sono ancora quelle della moderna teoria quantistica dei campi.

una lettera all'editore di Nature [Ban39a], mentre il lavoro viene pubblicato sulla rivista *Philosophical Magazine* [Ban39b]. Band si rende conto che scegliendo opportunamente la periodicità della quinta dimensione può ottenere per il momento coniugato lungo la quinta dimensione p_5 proprio il valore dello spin dell'elettrone. L'autore interpreta questo risultato come la definizione da lui cercata di un significato fisico della quinta dimensione: 'Questo risultato suggerisce con forza che dovremmo interpretare la quinta coordinata come la coordinata dello spin[...]' ([Ban39b]; pag. 550). Il lavoro di Band contiene anche delle conseguenze curiose, come la predizione che le particelle come l'elettrone o il protone possano avere la forma di *dischi* ([Ban39b]; pag. 551). La proposta di Band è praticamente identica a quella suggerita dall'italiano Carrelli quasi dieci anni prima, di cui abbiamo riportato nel Capitolo 2, sempre nel paragrafo dedicato ai contributi minori. Le idee di Band, ovviamente, non ha avuto seguito.

4.3 1939-1945: Gli anni della guerra

In questo ultimo paragrafo ci occupiamo di un periodo decisamente complesso. Con l'inizio della Seconda Guerra Mondiale la circolazione delle idee si fa ancora più difficile ed è logico pensare che nelle aree colpite dal conflitto la ricerca scientifica su temi teorici come il nostro sia passata decisamente in secondo piano. In realtà, nonostante queste premesse, incontreremo ancora molti tentativi di armonizzazione tra la MQ e la RG, sia da parte di autori lontani dal fronte della guerra, sia parte di autori che vivono in zone colpite dal conflitto. Affronteremo innanzitutto una serie di contributi eterogenei e non collegati tra loro, ma che avranno comunque qualche rilievo dopo la fine della Seconda Guerra Mondiale. Poi prenderemo in considerazione due autori che si concentrano sulla relazione tra la struttura dello spazio-tempo e le relazioni di indeterminazione. Infine il nostro lavoro si concluderà con l'analisi dei lavori del primo piccolo nucleo di ricerca sulla quantizzazione della forza gravitazionale, i cui risultati, per varie ragioni, non sono oggi molto noti.

4.3.1 Contributi eterogenei

Nella Svizzera neutrale Fierz continua a investigare la teoria dei campi quantistici con spin qualsiasi. In particolare, in [Fie40], è interessato allo studio dell'impulso tridimensionale di un campo a massa nulla. Nella discussione emerge naturalmente, come esempio, il campo gravitazionale. Non riportiamo i dettagli tecnici del lavoro, ma è interessante osservare che Fierz sottolinea come l'effetto dell'emissione di un gravitone sia troppo debole per essere misurato ([Fie40]; pag. 46).

Nello stesso anno Einstein interviene sulla rivista *Science* per fare delle 'Considerazioni riguardo ai fondamenti della Fisica Teorica', come recita il titolo [Ein40]. Einstein non aggiunge particolari tecnici alla questione, perché l'articolo ha un taglio sostanzialmente divulgativo, ma, dopo aver discusso l'evoluzione della fisica d Newton fino ai primi del Novecento, racconta i problemi incontrati nello sviluppo della fisica agli inizi del ventesimo secolo. Riguardo alla teoria della relatività e alla teoria quantistica[103] dice che si tratta di 'due sistemi essenzialmente indipendenti l'uno dall'altro' ([Ein40]; pag. 489). In particolare, riguardo alla teoria della RG, sottolinea che non può essere considerata come un punto di arrivo perché anch'essa soffre di alcuni "difetti", di carattere teorico ovviamente, che riflettono la ricerca dell'autore di una *teoria unitaria di campo.* 'In primo luogo il campo totale ci si presenta composto da due parti logicamente disconnesse, quello gravitazionale e quello elettromagnetico.In secondo luogo, questa teoria [la RG], come le prime teorie di campo non è riuscita fino a ora a fornire una spiegazione della struttura atomica della materia' ([Ein40]; pag. 490). Come detto sin dal primo capitolo, Einstein cercherà sempre di costruire una teoria di campo *classica* che renda conto dei nuovi fenomeni quantistici. Einstein sottolinea che l'apparato matematico sviluppato dai padri della MQ è completamente differente da quello della RG. E dopo aver descritto i punti di rottura con i metodi della fisica teorica classica di questo apparato, sottolinea ancora che: 'Bisogna ammettere che la nuova concezione teorica non si basa su fantasie, ma sulle solide basi dell'esperienza. Tutti i tentativi di rappresentare il dualismo onda-corpuscolo che si manifesta nei fenomeni che coinvolgono la luce e la materia, attraverso il ricorso a un modello che coinvolga direttamente lo spazio-tempo si sono conclusi con un fallimento' ([Ein40]; pag. 491). Poi Einstein sottolinea come Heisenberg abbia "bandito" definitivamente il carattere deterministico della natura, ma aggiunge che ovviamente non vi è nulla che vieti, in linea di principio, di ritornare a una descrizione di tipo deterministico. Conclude infine: 'Per ora dobbiamo ammettere che non possediamo alcuna base teorica che possa essere presa come pilastro dei fondamenti logici della fisica. La *teoria dei campi* ha fallito nella sfera atomica. Alcuni fisici, tra cui io, non possono credere di dover abbandonare definitivamente la descrizione della realtà in termini di spazio-tempo; o che si debba accettare la visione che gli eventi in natura seguano le regole del gioco d'azzardo' ([Ein40]; pag. 491). Il corsivo è nostro: ribadiamo ancora che il fisico tedesco avrà sempre in mente una teoria dei campi di carattere *classico.* Einstein chiosa con un invito: 'La strada è aperta a ogni uomo che decida di intraprendere una propria strada [per armo-

[103]Einstein *non* parla di Meccanica Quantistica.

nizzare le due teorie], in modo che ognuno di questi uomini possa trarre giovamento dal detto di Lessing il quale sosteneva che la ricerca della verità è molto più preziosa della sua conquista' ([Ein40]; pag. 491).

Riportiamo ora brevemente di un tentativo di "interazione", più che di armonizzazione, tra MQ e RG operato da Podolsky ed Herman Branson [PB40]. I due autori parlano di *quantizzazione della massa*, come recita il titolo del lavoro. Il loro punto di partenza è la considerazione che l'equazione di Dirac per l'elettrone libero su uno spazio-tempo piatto, ovvero $\frac{i\hbar}{c}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi$, sia interpretabile come un'equazione agli autovalori della forma $A\psi = a\psi$, dove di solito ψ è una funzione d'onda, A è un operatore e i valori a sono i suoi autovalori. Gli autori dunque concludono che gli autovalori di quello che oggi viene chiamato operatore di Dirac, ovvero $\frac{i\hbar}{c}\gamma^\mu\partial_\mu$, saranno in principio tutti possibili valori per la massa dell'elettrone[104]. Podolsky e Branson scrivono: "D'altra parte il fatto che l'equazione di Dirac per un elettrone libero abbia soluzioni corrispondenti a valori arbitrari della massa mostra che in uno spazio-tempo piatto tutti i valori della massa sono possibili. Questo è analogo al fatto che in uno spazio infinito una particella libera può avere un'energia arbitraria' ([PB40]; pag. 494). A questo punto gli autori chiamano in causa la RG, dove quest'ultima entra come modello di descrizione del nostro Universo, per cercare di giustificare la quantizzazione della massa. Infatti i due fisici continuano: 'In una scatola di dimensioni finite, come sappiamo, l'energia è quantizzata. Questo fatto è connesso con le condizioni al contorno imposte alla funzione d'onda ψ al bordo di x, y e z. In maniera simile, se fosse possibile imporre delle condizioni al contorno anche a t, ci si aspetterebbe come conseguenza l'esistenza di uno spettro discreto per m. Qualcosa di simile accade se uno spazio-tempo è curvo è finito pur essendo illimitato. Allora le condizioni al contorno verrebbero sostituite con delle condizioni di periodicità. Come conseguenza i possibili valori di m dipenderebbero dal raggio dell'universo, dalle costanti c e $\hbar$, e da un numero quantico' ([PB40]; pag. 494). Affascinati da questa possibilità, come dichiarano gli stessi autori, Podolsky e Branson studiano dunque gli autovalori dell'operatore di Dirac $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$ che vive su spazi-tempo curvi generici, infatti compare la derivata D_μ che coinvolge sia i simboli della connessione della metrica presa in considerazione, sia la connessione di spin. Il lavoro è molto tecnico e la conclusione degli autori è che, nonostante l'idea iniziale fosse accattivante, essa risulta priva di fondamento. Podolsky e Branson concludono dicendo che 'forse il fallimento non è così sorprendente' ([PB40]; pag. 500). Gli autori sottolineano che nonostante i loro lunghi calcoli ottengono come unico risultato

[104]Lo studio degli autovalori dell'operatore di Dirac è un problema non banale che avrà ulteriori sviluppi dopo la fine della Seconda Guerra Mondiale. Per una trattazione dettagliata del problema si veda ad esempio [Roe01].

quello per loro più ovvio. Infatti la relazione chiave che esprimerebbe la quantizzazione della massa è $m = n\frac{\hbar}{bc}$, dove $n \in \mathbb{N}$, e b corrisponde al raggio dell'Universo[105]. Il risultato non è soddisfacente per i due fisici, perché per $n = 1$ e sostituendo il valore della massa dell'elettrone ottengono un risultato decisamente *non interpretabile* come raggio dell'universo: $b \sim 10^{-10}cm$. La cosa non è sorprendente, perché la relazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{1}{b} = n\frac{mc}{\hbar} = n\frac{1}{\lambda_C}, \tag{4.62}$$

che mostra come l'inverso della lunghezza b sia proporzionale all'inverso della lunghezza Compton dell'elettrone. Quello che per gli autori non è accettabile è il fatto che per riottenere un valore accettabile del raggio dell'universo sia necessario imporre che l'elettrone 'si trovi in uno stato estremamente eccitato, ovvero $n = 10^{37}$' ([PB40]; pag. 500). Da quanto sappiamo un autore proverà a seguire il solco tracciato da Branson e Podolsky [Vil]. Vale la pena menzionare anche il fatto che sarà proprio lo studio degli autovalori dell'operatore di Dirac su spazi-tempo non banali a stimolare la nascita di nuovo campo di indagine *nella ricerca matematica*, come raccontato in [Jam06].

A Ginevra, tra il 1941 e il 1942, anche Stueckelberg pubblica due lavori [Stu41] [Stu42], in cui analizza lo stesso problema affrontato da Schrödinger nel 1939, ovvero il fenomeno della creazione di particelle nell'ambito della RG. Stueckelberg parte però da una differente prospettiva. L'autore immagina gli elettroni come particelle che viaggiano *in avanti nel tempo* e i positroni come particelle che viaggiano *indietro nel tempo*. Stueckelberg disegna dei *grafici* che sembrano anticipare quelli introdotti da Feynman, in cui un'unica linea d'Universo curva a forma di "U" rappresenta l'annichilazione o la creazione di due particelle. L'idea dello svizzero ricorda quella che cercheranno di sviluppare Wheeler e Feynman dopo la guerra. Stueckelberg si chiede dunque se la RG sia compatibile con linee d'Universo che abbiano più di una intersezione con l'iperpiano di equazione $t =$ costante, e ne conclude che è necessario modificare l'equazione della geodetica aggiungendo un contributo che sarà responsabile proprio della creazione di particelle. In [Stu41] Stueckelberg accenna solamente al fatto che l'interpretazione statistica della funzione d'onda deve apportare delle modifiche alla teoria di Einstein[106]. In [Stu42] cercherà di raffinare il proprio modello, discutendo anche il fatto che le linee di Universo sembrano essere contrarie al nostro concetto di *causalità*, ma non prende in considerazione la quantizzazione

[105]La situazione ottenuta da Podolsky e Branson può ricordare quanto accade nella moderna Teoria delle Stringhe, dove gli stati massivi prodotti dalle varie eccitazioni della stringa sono anch'essi tutti proporzionali all'inverso di una lunghezza di riferimento, ovvero la lunghezza della stringa stessa.

[106]L'autore infatti considererà sempre e solo la MQ e non la teoria quantistica dei campi.

del campo gravitazionale. Per questo motivo non entreremo ulteriormente nei dettagli di questi lavori.

Nel 1942 viene pubblicato su Physical Review un articolo di Cornelius Lanczos [Lan42]. L'approccio di Lanczos è puramente classico: forse per i suoi trascorsi come collaboratore di Einstein e quasi sicuramente influenzato dalle idee di quest'ultimo, Lanczos cerca di modificare la lagrangiana della RG per ottenere una sorta di teoria unificata[107] dalla quale emergano le equazioni d'onda per la materia, come soluzioni delle equazioni del moto per la metrica. Le 'onde di materia' che l'autore vorrebbe identificare con quelle descritte dall'equazione di Dirac, in realtà sono delle onde gravitazionali che però, come osserva lo stesso Lanczos, sono 'onde gravitazionali, ma non della tipologia usuale' ([Lan42]; pag. 720). Proprio riguardo a questo ultimo particolare però, l'autore è *molto vago* nel lavoro e promette di esporre questo fantomatico collegamento tra le onde gravitazionali e l'equazione di Dirac in lavori futuri, di cui noi però non abbiamo trovato traccia.

Tra il 1943 e il 1944 Georg D. Birkhoff ricomincia a lavorare a una personale formulazione della teoria della gravitazione, convinto che la teoria elaborata da Einstein fosse troppo complessa. La teoria presentata da Birkhoff all'inizio del 1943 prende spunto da dei lavori dello stesso autore datati 1927. Non ne abbiamo discusso nel capitolo precedente, perché Birkhoff stesso,nel 1943, descrive il proprio approccio come superato e ne offre una nuova formulazione utilizzando un formalismo differente. L'approccio di Birkhoff, analizzato con occhio moderno, è essenzialmente classico[108]. L'unico ingrediente che può ricordare, seppur vagamente, l'intervento della fisica quantistica, è che l'autore non rinuncia, anche nella nuova versione, a introdurre un 'potenziale atomico' ψ, che aveva già usato per tentare di introdurre l'equazione di Schrödinger[109] nel 1927. La teoria di Birkhoff va segnalata, nella storia della Gravità Quantistica, perché verrà ripresa più volte: per esempio a metà degli anni cinquanta da Frederick J. Belinfante e J. C. Swihart che tenteranno di quantizzarla [BS54], e alla fine degli anni cinquanta da Suraj N. Gupta [Gup59], per discuterne il rapporto con la teoria di Einstein e per affrontare la quantizzazione della RG. Gupta affermerà di aver studiato a fondo l'approccio di Birkhoff, perché convinto del fatto che si potesse quantizzare solamente la versione lineare della teoria di Einstein. La teoria di Birkhoff sarà quindi oggetto di approfondimento in un lavoro futuro.

Infine, nel 1944 in Cina, K. C. Wang e L. Tsao, cercano di sviluppare l'idea che le forze

[107] La teoria di Lanczos dovrebbe infatti descrivere il campo gravitazionale, quello elettromagnetico e i campi di materia.

[108] La teoria Birkhoff è essenzialmente una teoria *lineare* per un campo classico a massa nulla di spin 2 su uno spazio-tempo piatto [Bir43].

[109] La *materia*, nell'approccio del matematico, veniva rappresentata da un fluido e non si fa cenno, nemmeno nel 1943, all'equazione di Dirac.

gravitazionale e nucleare[110] abbiano la stessa origine e scrivono una lettera all'editore dei *Physical Review* [WT44]. Da quello che ci risulta l'idea non avrà seguito.

4.3.2 Metrica e indeterminazione

Veniamo ora ai due autori, Schrödinger e Frank Saxby, che in questo periodo discutono la relazione tra lo spazio-tempo e le relazioni di indeterminazione. Nel 1943 Schrödinger lavora su una teoria unitaria, tentando di inglobare al suo interno il campo che descrive il campo *mesonico*, ovvero quello che dovrebbe descrivere i mesoni[111]. Schrödinger riprende un punto di vista già utilizzato da Weyl e da Eddington, cercando di identificare i coefficienti della connessione affine, ovvero i simboli di Christoffel, come le variabili su cui costruire la propria teoria[112], senza cioè specificare a priori la struttura *metrica* della varietà spazio-tempo[113] e introducendo una connessione affine non simmetrica. In questo modo la componente simmetrica rappresenta la gravità, mentre quella non simmetrica, ovvero la torsione, dovrebbe rappresentare il campo mesonico. Questo modo di procedere ha delle conseguenze che Schrödinger analizza in maniera lucida in un intervento fatto sulla rivista *Nature* [Sch44], dove espone per sommi capi il proprio approccio. Nonostante queste premesse la teoria resta però classica, come lo stesso autore ci fa notare, sottolineando che dal suo punto di vista la completa integrazione tra teoria della gravitazione e teoria quantistica risulta ancora "avvolta nella nebbia".

Nello stesso periodo Frank R. Saxby pubblica su una rivista semi-sconosciuta un contributo in cui, come Schrödinger, introduce una connessione non simmetrica, ma con un fine differente: inglobare nel concetto di geometria affine il principio di indeterminazione di Heisenberg [Sax43]. Saxby è un ingegnere appartenente allo staff matematico dei laboratori dell'azienda *National Cash Register*[114] e pubblica il proprio lavoro sul *Bollettino* della compagnia. Il matematico inglese Henry T. H. Piaggio scrive una breve nota all'editore della rivista *Nature* perché tale lavoro 'potrebbe sfuggire ai fisici' ([Pia44]; pag. 94). In questa nota Piaggio parte proprio dal lavoro di Schrödinger e dal suo commento sulla necessità di fondere gravità e fisica quantistica, per sottolineare appunto che nell'approccio di Saxby sembra emergere con successo tale unione [Pia44]. L'anno seguente

[110] Si sottintende nella forma suggerita da Yukawa.

[111] Non ci occuperemo del lavoro di Schrödinger in dettaglio, perché è già stato ampiamente analizzato nell'ambito della storia delle teorie di unificazione. Si veda per esempio [Goe14].

[112] Per questo motivo si parla anche di geometria affine.

[113] Nella teoria di Einstein avviene di solito il contrario: a partire dalla metrica si definiscono i simboli di Christoffel.

[114] L'azienda americana, nata come produttrice di registratori di cassa, in questi anni contribuì attivamente alla costruzione di armi per scopo bellico.

Saxby stesso scrive all'editore di *Nature*, forse perché ritiene che il proprio lavoro non abbia ricevuto la giusta attenzione [Sax45]. In effetti non abbiamo trovato citazioni al lavoro di Saxby in una prima ricognizione che abbiamo effettuato sui lavori pubblicati subito dopo la fine della Seconda Guerra Mondiale. Rimandiamo quindi a lavori futuri un eventuale approfondimento *tecnico* del lavoro di Saxbi, limitandoci per ora a riportare i punti essenziali scelti dallo stesso autore nell'intervento di *Nature* del 1945. All'inizio Saxby fa una panoramica della situazione mettendo in chiaro la relazione fra il proprio pensiero e quello di Schrödinger, rifacendosi ai lavori di Eddington: 'Schrödinger ha affermato [Sch44] "Nascosto dietro alla nostra difficoltà nel trovare una teoria unitaria di campo, quello che ci aspetta è il grande problema di allinearla alla teoria quantistica". Noi ci differenziamo rispetto a questa linea per due motivi. (1) Eddington ha risolto il "grande problema" di Schrödinger allineando il concetto di curvatura dello spazio alla teoria quantistica. [Eddington] ha specificato [Edd]: "Nella teoria della relatività energia e momento sono coefficienti della curvatura dello spazio-tempo; nella teoria quantistica sono caratteristiche delle funzioni d'onda nello spazio piatto. Si farebbe un grande passo avanti nell'unificazione della fisica se potessimo trovare una connessione precisa tra questi due modi di rappresentare la stessa cosa" [Eddington] ha dimostrato che [il tensore] energia-momento, solitamente espresso tramite la curvatura, può essere espresso attraverso una distribuzione di probabilità, e quindi in termini di funzioni d'onda come nella teoria quantistica. (2) Il problema è piuttosto quello di allineare la teoria quantistica alla curvatura dello spazio' ([Sax45]; pag. 609). Da queste osservazioni, a nostro avviso, si evince che Saxby sembra convinto che sia necessario modificare la MQ per renderla compatibile con la RG. La sua idea è quella di ripercorrere il processo di Eddington al contrario, come descritto dallo stesso autore: 'I passi sono l'inverso di quelli di Eddington; la distribuzione di probabilità è esprimibile in termini di curvatura dello spazio. In questo modo si può rispondere al problema inverso di quello di Schrödinger; ciò nonostante ci si dovrebbe convincere del fatto che stanno ignorando* "quelle caratteristiche della descrizione convenzionale dei campi fisici che interessano il loro carattere quantistico"' ([Sax45]; pag. 609). Saxby vuole dunque una rappresentazione della fisica quantistica simile a quella della RG, ma deve trovare un modo per recuperare il carattere quantistico che in questo modo sembra si perda. Per risolvere questa ambiguità l'autore introduce quella che lui chiama *teoria dello spazio-tempo indeterminato*. Per spiegarci in cosa consiste l'autore chiarisce perché ha introdotto una connessione non simmetrica: 'Come Schrödinger, [tale teoria] utilizza la matematica della relatività, e gli assiomi di una connessione affine non simmetrica. Schrödinger è ansioso di fornire due enti matematici in aggiunta al tensore gravitazionale di Einstein, che rappresentino, rispettivamente, il cosiddetto campo mesonico e quello elettromagnetico [...] Il motivo principale per cui [noi] utilizziamo una connessione non simmetrica è dettato dall'esigenza di inserire *l'idea dell'indeterminazione* tra gli assiomi [della teoria]. Per fare questo è necessario un numero maggiore di componenti dell'*affinità*, oltre a quelle introdotte da Einstein. Queste componenti addizionali ci danno la possibilità di introdurre le potenzialità della discontinuità, così necessarie per creare una connessione con le caratteristiche quantistiche' ([Sax45]; pag. 609). Questo commento è decisamente poco chiaro, forse complice il fatto che mancano i dettagli tecnici. Il corsivo è nostro: l'autore parla di *affinity*, ma fa riferimento ai coefficienti della connessione affine[115], quindi d'ora in poi tradurremo *connessione affine*. Cerchiamo di seguire ancora il ragionamento di Saxby. 'Nel mio approccio le componenti non simmetriche della connessione affine devono essere *non determinate*. La non determinatezza è collegata con il principio di indeterminazione'[116] ([Sax45]; pag. 609). L'autore continua: 'Questo requisito ha delle ricadute in altri ambiti. Una delle più importanti è il fatto che non compare il campo mesonico[...] si può considerare questo fatto come una condizione necessaria per comprendere quali sono le conseguenze per la connessione affine. In qualunque modo vengano scelti, i coefficienti sono indeterminati e in questo modo l'incertezza si unisce alla natura dello spazio-tempo. Questo fa uscire di scena il campo mesonico, in accordo con quanto ipotizzato da Eddington'[117] ([Sax45]; pag. 609). Dal proprio punto di vista, Saxby può dunque usare l'indeterminazione dei coefficienti non simmetrici per introdurre l'indeterminazione dello spazio-tempo. Quello che non viene detto esplicitamente nei due brevi interventi di Piaggio e Saxby su *Nature* è quali siano le conseguenze di tale indeterminazione sul campo gravitazionale. Alla fine della lettera all'editore, Saxby accenna anche al fatto che nella costruzione della propria teoria l'autore incontra dei problemi nella costruzione di una teoria unitaria che inglobi anche l'elettromagnetismo: per l'autore anche questo fatto è conseguenza della natura *quantistica* dell'elettromagnetismo stesso.

Nello stesso anno, Piaggio [Pia45] recensisce il libro scritto qualche anno prima da un fisico francese, Henri Varcollier, dal titolo *Propagazione ellissoidale, Relatività, Quanti* [Var42]. Come traspare dal commento di Piaggio, l'opera di Varcollier si muove su binari *alternativi* a quelli della teoria di Einstein. Partendo infatti da una formulazione alternati-

[115] Anche Piaggio, in [Pia44], afferma che sono i coefficienti della connessione affine a essere indeterminati.

[116] L'autore usa il termine *indeterminate*, che abbiamo tradotto *non determinate*, e il termine *uncertainty*, termine che fa riferimento al principio di indeterminazione di Heisenberg.

[117] L'autore fa riferimento al fatto che, secondo quanto affermato dallo stesso Saxby poco sopra, Eddington ha mostrato che non è necessario introdurre in maniera esplicita il campo mesonico mostrando che il tensore energia impulso può essere 'costruito attraverso le funzioni d'onda'.

va della Relatività Ristretta[118], Varcollier arriverebbe a introdurre in maniera alternativa anche la forza gravitazionale, e a offrire addirittura un nuovo punto di vista per la teoria atomica. Per come ci viene presentato, il lavoro sembra decisamente bizzarro. Quello che ci colpisce di più sono però le ultime righe, che riguardano non tanto la fisica quanto la situazione storica del periodo. Il libro, infatti, era stato pubblicato ad Algeri nel 1942, dove evidentemente Varcollier si era rifugiato, ma viene recensito solo tre anni più tardi: 'Qualunque cosa si possa pensare dei risultati di Varcollier, possiamo tutti ammirare il coraggio che lo sostiene, nelle ore più buie della storia del suo paese, nel continuare le proprie ricerche e nel completare la loro pubblicazione in Algeria, lontano dalle comodità della Francia Metropolitana' ([Pia45]; pag. 4).

4.3.3 Madame Tonnelat, Monsieur Petiau e la *Massive Gravity*

Negli anni della guerra vengono pubblicati sulla rivista *Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* alcuni lavori sulla descrizione quantistica dei campi di spin qualsiasi e quindi con le particelle di spin 2. Tra tutti gli autori, i più prolifici sono Marie-Antoniette Tonnelat, allieva di de Broglie, e Gérard Petiau: i lavori di entrambi gli autori figurano spesso come "presentati" da de Broglie, il quale ha giocato un ruolo di primo piano a Parigi nel periodo dell'occupazione tedesca ([Goe14]; pag. 104). Molti contributi riguardano il problema generale della descrizione delle particelle con spin qualsiasi e non sempre viene fatto esplicito riferimento alla gravità. Riporteremo comunque tutti i lavori incontrati che a nostro avviso hanno una qualche rilevanza. Anche se non si può parlare di un gruppo di ricerca vero e proprio, questo insieme di articoli è decisamente un primo esempio di filone di ricerca con un occhio di riguardo verso la questione della quantizzazione della gravità. Vedremo anche come in questi lavori non si scarti a priori l'idea di introdurre un gravitone con massa diversa da zero, discutendone eventuali conseguenze. A nostro avviso, possiamo quindi attribuire a Petiau e Tonnelat il ruolo di "padri" della moderna *Massive Gravity*. Cominciamo dunque da questi due autori e da de Broglie stesso. Seguiremo il percorso cronologico, perché spesso i lavori di questi autori sono collegati tra loro.

Nello stesso anno dell'uscita del lavoro di Fierz, il 1939, de Broglie [dB39] cerca 'di ottenere una Meccanica Ondulatoria delle particelle con spin $\frac{n}{2}$ operando la fusione di n corpuscoli di spin $\frac{1}{2}$' ([dB39]; pag. 265) dove la variabile n è un numero *pari*. Si tratta di quello che è oggi noto con il nome di *metodo di fusione* proposto da de Broglie. L'idea di partenza è quella di utilizzare le rappresentazioni spinoriali del gruppo di Lorentz per descrivere un campo di spin qualsiasi. In questo modo, esattamente come avviene per le

[118]Piaggio ci fa intendere che Varcollier rifiuta il postulato della costanza della velocità della luce.

regole di somma tra i momenti angolari, il prodotto tensoriale di due rappresentazioni di spin $\frac{1}{2}$ può essere decomposto nella somma diretta di due rappresentazioni: una scalare e una vettoriale, rispettivamente relative ai valori 0 e 1 dello spin e quindi può rappresentare una particella di spin 1 attraverso due particelle di spin $\frac{1}{2}$.[119] De Broglie vuole usare questa idea per rappresentare *tutte* le particelle di spin qualsiasi come particelle composte. Il metodo di fusione elaborato in questi anni da de Broglie è complesso e non è certo questo il contesto per offrirne una panoramica. Tale metodo prevede inoltre una sorta di doppia descrizione, una in termini spinoriali e una in termini tensoriali, e le equazione di una descrizione possono essere "tradotte" nell'altra forma[120]. Nel primo lavoro [dB39] de Broglie si concentra sulle particelle di spin 2, come fusione di quattro particelle di spin $\frac{1}{2}$ e ritrova, come Fierz, che il campo prodotto da tali particelle, nella rappresentazione tensoriale, può essere descritto da un tensore simmetrico a traccia nulla. Come nell'esempio precedente, la fusione di quattro particelle di spin $\frac{1}{2}$ è *analoga* al prodotto tensore di quattro rappresentazioni dello spin $\frac{1}{2}$. Questo significa però che in una teoria in cui il gravitone emerge dalla fusione di quattro spinori, il quanto gravitazionale non è che *una* delle rappresentazioni in cui si può decomporre la somma dei quattro spin. La teoria di de Broglie è sopravvissuta fino ai giorni nostri e per un approfondimento dettagliato, che ripercorre anche alcuni dei lavori che considereremo anche noi, si veda [BS02].

L'anno successivo de Broglie presenta una nota di Petiau in cui quest'ultimo discute la rappresentazione delle matrici di spin per un corpuscolo con spin qualsiasi [Pet40a]. Petiau discute la forma dell'operatore che rappresenta lo spin nella fusione di più particelle. Per fare questo usa le matrici di Pauli σ_i con $i = 1, 2, 3$, definite nel modo usuale[121] e definisce le matrici di spin per un valore $s = \frac{n}{2}$, con n pari, nel seguente modo[122]:

$$S_i = -\frac{n}{2}\hbar s_i \quad con \quad s_i = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \sigma_i^{(p)}, \tag{4.63}$$

dove $\sigma_i^{(p)}$ sono le matrici di Pauli della $p-$esima particella che partecipa alla fusione. Gli operatori s_i hanno autovalori[123] $0; \pm\frac{2}{n}; \pm\frac{2k}{n}; \ldots; \pm 1$ con $k = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$. Per esempio per i corpuscoli di spin 1, cioè $n = 2$, l'equazione (4.63) diventa:

$$S_i = \hbar s_i = \hbar\left[\frac{\sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)}}{2}\right]. \tag{4.64}$$

[119]Si tratta, come già notato in precedenza, di un'ulteriore elaborazione dell'idea avanzata da Jordan e portata avanti da Wataghin.

[120]Per ulteriori dettagli si veda [BS02].

[121] Ricordiamo che $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$; $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

[122]Consideriamo solamente valori *interi* dello spin.

[123]Si ricordi che n assume solamente valori pari.

Una volta fissato lo spin, si può verificare che gli operatori S_i soddisfano a delle identità ben precise. Usando le proprietà delle matrici di Pauli[124], per esempio, si può verificare che gli operatori S_i dell'equazione (4.64) soddisfano alla seguente relazione:

$$S_i^3 - S_i = 0, \tag{4.65}$$

dove S_i^3 è il cubo dell'operatore. Con la stessa tecnica Petiau ricava anche delle identità analoghe[125] alla (4.65) per diversi valori dello spin. Quella per la particella di spin 2 è la seguente:

$$4S_i^5 - 5S_i^3 + S_i = 0. \tag{4.66}$$

Nel 1941 Petiau si concentra sulle particelle di spin 2 e cerca di replicare l'approccio applicandolo alle equazioni del moto [Pet40b]. L'autore questa volta parte però dalla fusione di due particelle di Proca, ovvero con spin 1. Le equazione del moto da cui parte Petiau sono però scritte utilizzando gli spinori. L'autore quindi cerca di tradurre in termini tensoriali le equazioni, utilizzando però sempre le due differenti formulazioni. Nel processo di traduzione introduce un tensore a due indici la cui parte simmetrica soddisfa delle equazioni che, secondo l'autore, sono relative a un campo di spin 2. Per verificare tale affermazione l'autore utilizza le matrici di spin che compaiono nella versione spinoriale delle equazioni e mostra che tali matrici soddisfano all'identità (4.66). Né in questo lavoro, né in quello precedente, c'è alcun riferimento ai lavori di Fierz e al fatto che le due formulazioni hanno delle piccole differenze[126]. Non vi è nemmeno alcun riferimento al fatto che il quanto a massa nulla di spin 2 era stato identificato con il gravitone, forse perché, partendo dalla fusione di due campi massivi di spin 1 l'autore arriva a descrivere un campo *massivo* di spin 2.

Nello stesso volume del 1941 compare il primo lavoro di Tonnelat [Ton40a], che, a nostro avviso, non si discosta dal punto di vista tecnico dal lavoro di Petiau appena citato. L'unica differenza rilevante è che Tonnelat fa riferimento *esplicito* al metodo di fusione proposto da de Broglie[127]. Nel lavoro successivo Tonnelat fa finalmente riferimento anche al lavoro di Fierz, senza fare ancora alcun accenno alle differenze tra i due approcci: nel titolo, forse per la prima volta, compare il termine *gravitone* [Ton40b]. L'autrice si

[124]Le matrici di Pauli per "particelle differenti" commutano, mentre per la stessa particella il quadrato di una matrice di Pauli dà la matrice identica.

[125]Ovviamente gli operatori S_i cambiano al variare dello spin secondo l'equazione (4.63).

[126]Vedremo a breve che tali differenze saranno analizzate da Tonnelat

[127]Nello stesso volume viene pubblicato anche un contributo di Jean R. Valette [Val40], il quale sottolinea che per ottenere la funzione d'onda di una particella come fusione di un numero *pari* di corpuscoli è necessario che le quattro funzioni d'onda di Dirac non siano tra loro tutte differenti, ma coniugate a due a due.

occupa di cercare le soluzioni di tipo onda piana per le equazioni del moto di un campo di spin 2, cercando di identificare le possibili polarizzazioni delle onde gravitazionali in questo approccio. Nelle equazioni del moto, però, è ancora presente il termine di massa del precedente lavoro, e questo rende difficile l'identificazione di tali onde con le onde gravitazionali della RG. Negli interventi seguenti, infatti, Tonnelat si riferisce solamente ai corpuscoli di spin 2, senza analizzare il caso a massa nulla. In [Ton40c] l'autrice applica la seconda quantizzazione al campo di spin 2 e trova un espressione per il propagatore, che risulta però valida, come nota la stessa autrice, solo se la massa è diversa da zero.

Le differenze formali tra l'approccio di Fierz e quello di Tonnelat vengono analizzate dall'autrice in [Ton41]: il tensore a due indici simmetrico $\Phi_{\mu\nu}$ introdotto da Petiau e Tonnelat non ha traccia nulla, mentre quello usato da Fierz sì. L'autrice risolve brillantemente la questione, trovando anche una relazione tra la massa m_g del campo di spin 2 e la costante cosmologica[128] Λ, relazione che, da quanto ci risulta, è stata riscoperta solo recentemente: in [BS02] vengono riproposti i risultati di Tonnelat, mentre in [GG05] la questione viene riesaminata nel filone di ricerca oggi noto come *Massive Gravity*.

Per capire il risultato dell'autrice partiamo dalle equazioni del moto per il campo di spin 2 ricavate con il metodo di fusione nella descrizione tensoriale[129] ([Ton41]; pag. 687). A partire dal tensore simmetrico $\Phi_{(\nu\rho)}$ si definiscono i tensori $\Phi_{[\nu\mu]\rho}$ e $\Phi_{[\mu\nu][\rho\sigma]}$ nel seguente modo:

$$\Phi_{[\nu\mu]\rho} = \partial_\mu \Phi_{(\nu\rho)} - \partial_\nu \Phi_{(\mu\rho)} \tag{4.67}$$

$$\Phi_{[\mu\nu][\rho\sigma]} = \partial_\mu \Phi_{[\rho\sigma]\nu} - \partial_\nu \Phi_{[\rho\sigma]\mu}, \tag{4.68}$$

e le equazioni del moto hanno la seguente forma:

$$\partial^\rho \Phi_{[\rho\mu]\nu} = -M^2 \Phi_{(\mu\nu)} \qquad \text{con} \qquad M = \frac{m_g c}{\hbar} \tag{4.69}$$

$$\partial^\mu \Phi_{[\mu\nu][\rho\sigma]} = M^2 \Phi_{[\nu\rho]\sigma}, \tag{4.70}$$

a cui si aggiungono le condizioni[130]:

$$\partial^\mu \Phi_{(\mu\nu)} = 0 \qquad ; \qquad \partial^\rho \Phi_{[\mu\nu]\varrho} = 0 \qquad \text{e} \qquad \Box \Phi_{(\mu\nu)} = M^2 \Phi_{(\mu\nu)}. \tag{4.71}$$

A questo punto Tonnelat nota che 'è difficile mettere in relazione il tensore $\Phi_{(\mu\nu)}$ con la metrica $g_{(\mu\nu)}$, perché pur non essendo nulla la traccia di $\Phi_{(\mu\nu)}$, la divergenza di $\Phi_{(\mu\nu)}$ è nulla

[128] Si potrebbe nuovamente osservare come sia singolare l'uso della costante cosmologica in un periodo nel quale la si era abbandonata. Come vedremo, in questo caso Λ emerge dal formalismo.

[129] Per comodità, come nel testo originale, le parentesi tonde attorno agli indici indicano il fatto che sono simmetrici, mentre le parentesi quadre che sono antisimmetrici.

[130] I tensori a tre e quattro indici soddisfano anche delle identità tipo identità di Bianchi che non riporteremo.

mentre quella della metrica no' ([Ton41]; pag. 688). La fisica francese sta confrontando la prima delle condizioni (4.71), la quale ci dice appunto che la divergenza di $\Phi_{(\mu\nu)}$ è nulla, con l'identità $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$ a cui soddisfa il tensore metrico. L'autrice propone quindi una diversa identificazione:

$$g_{\mu\sigma} = \frac{1}{M^2}\eta^{\nu\rho}\Phi_{[\mu\nu][\rho\sigma]}, \tag{4.72}$$

dove M è stata definita in (4.69). Tonnelat non lo dice esplicitamente, ma si verifica che contraendo gli indici come in (4.72) si ottiene un tensore simmetrico: a nostro avviso è probabile che questo fatto abbia suggerito all'autrice la definizione (4.72). Riscriviamo ora la (4.72) in una forma alternativa che ci aiuta a capire i successivi risultati dell'autrice. Indicando con Φ la traccia di $\Phi_{(\mu\nu)}$ e usando la prima e l'ultima delle (4.71) nella (4.68) si ottiene:

$$g_{\mu\sigma} = \frac{1}{M^2}\eta^{\nu\rho}\Phi_{[\mu\nu][\rho\sigma]} = -\Box\Phi_{(\mu\sigma)} - \partial_\mu\partial_\sigma\Phi. \tag{4.73}$$

A questo punto l'autrice ci fa notare che questa metrica soddisfa alla seguente proprietà:

$$\Box g_{\mu\sigma} = M^2 g_{\mu\sigma}, \tag{4.74}$$

relazione che si ottiene facilmente grazie alla (4.73) e alla terza delle (4.71). Tonnelat è a conoscenza del fatto che questi risultati si possono utilizzare per descrivere il campo gravitazionale debole e dopo aver ricordato che introducendo tale approssimazione[131] e grazie alla gauge armonica[132], il tensore di Ricci può essere scritto come:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box g_{\mu\nu}, \tag{4.75}$$

inserendo la (4.74) in (4.75) Tonnelat ottiene la seguente equazione:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{M^2}{2} g_{\mu\nu}. \tag{4.76}$$

L'autrice riconosce che tale equazione ha la stessa struttura delle equazioni di Einstein all'infinito temporale[133] e *in presenza di una costante cosmologica*[134] Λ:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{4.77}$$

[131]Ricordiamo che per ottenere l'approssimazione di campo debole si scrive la metrica come $g_{\mu\sigma} = \eta_{\mu\sigma} + h_{\mu\sigma}$ e si considerano solamente i termini *lineari* in $h_{\mu\sigma}$.

[132]L'autrice non la chiama in questo modo.

[133]Esattamente come discusso nel paragrafo 2.3.3, in occasione del lavoro di Wiener e Struik, per $t \to +\infty$ il tensore energia impulso tende a zero.

[134]Ricordiamo che tali equazioni, date le nostre convenzioni che coincidono con quelle di Tonnelat, sono $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = 0$. Prendendo la traccia di questa equazione e risostituendovi il risultato ottenuto si ottiene la (4.77).

Tonnelat commenta l'analogia tra le due dicendo: 'se la massa del gravitone è nulla, l'Universo all'infinito tende a un Universo di Schwarzschild (supponendo che $R_{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$) e se $M \neq 0$ tende a una legge che è la legge di de Sitter' ([Ton41]; pag. 689). La costante cosmologica emerge dunque in maniera naturale se si ipotizza una massa non nulla per il gravitone. Confrontando (4.76) con (4.77) l'autrice trova anche una relazione ben precisa tra massa del gravitone e costante cosmologica, $\Lambda = -\frac{M^2}{2}$, che non si discosta da quella trovata in tempi più recenti [GG05].

Nell'ultimo articolo che incontriamo sul numero della rivista *Comptes Rendus* del 1941 Petiau considera un campo di spin 2 in *cinque* dimensioni [Pet41]. Anche Petiau scrive una relazione identica all'equazione (4.77) senza citare il lavoro di Tonnelat, e, a differenza di quest'ultima, non commenta esplicitamente il risultato ottenuto. Petiau, infatti, è più interessato al fatto che, come accennato all'inizio del paragrafo, il metodo di fusione di de Broglie offre un modo per ottenere una teoria "unitaria", perché con la fusione di quattro particelle di spin $\frac{1}{2}$ dal formalismo emerge, oltre al tensore simmetrico, che è collegabile alla gravità, anche un tensore *antisimmetrico*, che Petiau identifica con quello dell'elettromagnetismo. Si tratta comunque di un lavoro breve e molto tecnico, che non approfondiremo ulteriormente.

Nel 1942 Jean Roubaud-Valette si occupa degli assiomi di una possibile geometria del mondo microscopico, che chiama 'geometria ondulatoria' [RV42a] [RV42b], senza però affrontare il carattere quantistico della gravitazione. Nello stesso anno Tonnelat raccoglie tutti i risultati esposti in maniera più frammentata nei *Comptes Rendus* in un lungo lavoro pubblicato sulla rivista *Annales de Physique* [Ton42]. Nell'articolo non sono presenti nuovi risultati[135], ma come evidenziato anche da Goenner in [Goe14], l'autrice sottolinea come il metodo di fusione sia un *formalismo* utile per trattare una teoria unitaria.

Con il 1943 Petiau tenta di scrivere delle equazioni che rappresentino l'interazione tra quello che lui chiama 'il sistema protone-neutrone', ovvero un campo spinoriale, e un gravitone, proponendo l'utilizzo di una particolare Hamiltoniana di interazione [Pet43]. Non riportiamo tali equazioni, perché sono scritte utilizzando la descrizione spinoriale e si renderebbero necessarie una serie di note per rendere perspicua la trattazione. Tonnelat, invece, considera il caso generale di una particella immersa in un campo elettromagnetico esterno [Ton43], utilizzando ancora il formalismo spinoriale. Per gli stessi motivi dunque non riportiamo le sue equazioni, ma possiamo fare le seguenti precisazioni. Poiché per l'autrice il punto di partenza per scrivere le equazioni di un campo con spin qualsiasi è l'equazione di Dirac, per introdurre il campo esterno Tonnelat utilizza, come si fa usual-

[135] L'articolo della Tonnelat è sicuramente utile per ricostruire lo sviluppo storico del metodo di fusione negli anni della guerra, ma esula dagli scopi di questa ricerca.

mente, la sostituzione minimale[136]. In particolare l'autrice considera anche il caso della particella di spin 2, per capire se risulti carica rispetto al campo esterno. L'autrice osserva che si incontrano delle difficoltà nell'applicazione del proprio metodo quando le particelle hanno spin maggiore di 1. Conclude quindi che, dal suo punto di vista, le difficoltà incontrate sono un'indicazione di come il formalismo implichi che le particelle di spin 2 debbano essere neutre. Le difficoltà rilevate da Tonnelat sono proprio quelle che verranno evidenziate, per esempio, da Velo e Zwanziger a cui abbiamo accennato nel paragrafo (4.2.1).

Nel 1944 Petiau continua il lavoro dell'anno precedente, cercando di calcolare gli elementi di matrice che rappresentano l'interazione tra due particelle attraverso lo scambio di un gravitone [Pet44a] [Pet44b]. Come per Tonnelat, si tratta però di gravitoni massivi, e Petiau può quindi limitarsi ai *gravitoni longitudinali* [Pet44a], che esistono solamente perché la particella di spin 2 considerata dall'autore ha massa diversa da zero[137]. Come ci si può aspettare, nel limite di campo debole il potenziale di interazione ha una forma del tipo potenziale di Yukawa, in cui compare l'usuale potenziale di Newton moltiplicato per un esponenziale decrescente, dipendente dalla massa del gravitone ([Pet44a]; pag. 36). In [Pet44b] Petiau ritorna ad analizzare le equazioni corrispondenti all'interazione tra un gravitone massivo e un nucleone scritte con il formalismo tensoriale. Petiau si convince del fatto che la massa del nucleone influenzi la struttura dello spazio-tempo[138] [Pet44b]. Nello stesso volume dei *Comptes Rendus* Tonnelat affronta le stesse problematiche di Petiau, senza citarne i lavori e in maniera più dettagliata. L'autrice chiama il potenziale d'interazione dovuto al gravitone massivo 'quasi newtoniano' ([Ton44a]; pag. 140) e osserva che l'interazione tra due masse è dominata dal grado di libertà scalare, che corrisponde al valore zero dello spin[139]. Nelle moderne teorie di *Massive Gravity* vengono chiamati *gravitoni longitudinali*[140]. Nel lavoro successivo [Ton44b], pur mantenendo la massa diversa da zero Tonnelat cerca di analizzare l'interazione particella-gravitone attraverso i soli stati trasversali, che corrispondono al valore 2 dello spin[141], inserendo un termine opportuno nella Hamiltoniana di interazione. Anche Tonnelat, come Petiau, passa dalla rappresentazione spinoriale, utilizzando cioè le equazioni di Dirac, alla rappre-

[136]Se chiamiamo ψ la funzione d'onda, la sostituzione minimale consiste nel sostituire l'operatore $\partial_\mu \psi$ nell'equazione di Dirac con l'operatore $(\partial_\mu + ieA_\mu)\,\psi$, dove e è la carica del campo spinoriale.

[137]Petiau usa il termine gravitoni anche per queste particelle.

[138]I dettagli tecnici non sono rilevanti.

[139]L'osservazione è simile a quella fatta da Bronstein nel precedente capitolo.

[140]Per un approccio moderno alla questione, applicata proprio alla gravità, si veda per esempio [Hin12].

[141]Ricordiamo che nella teoria costruita da Tonnelat il gravitone è composto dal *prodotto tensoriale* di quattro rappresentazioni dello spin 1/2, che si decompone nella somma di rappresentazioni scalari, vettoriali e di spin 2.

sentazione tensoriale[142], reintroducendo ancora il tensore simmetrico[143] $\Phi_{\mu\nu}$, per mostrare che le equazioni del moto arricchite del nuovo temine di interazione danno le equazioni di Einstein accoppiate a un tensore $T_{\mu\nu}$ dovuto alla presenza di materia. Nello stesso anno Tonnelat pubblica ancora dei contributi sugli *Annales de Physique*, di cui menzioniamo solamente la continuazione del lavoro pubblicato due anni prima[144] [Ton44c], dove, ancora una volta, raccoglie i propri risultati in un unico lungo lavoro. Anche questo articolo, come il precedente, è utile per ricostruire lo sviluppo storico del metodo di fusione negli anni della guerra, ma per questo motivo esula dagli scopi di questa ricerca.

Con il 1945 si chiude la nostra indagine. In quest'anno, l'unico lavoro *tecnico* che siamo riusciti a reperire e che si occupa del gravitone è quello di Robert Murard [Mur45], pubblicato ancora una volta sulla rivista *Comptes Rendus*. L'obiettivo dell'articolo è quello di considerare le rappresentazioni del gruppo di Lorentz al variare dello spin e a differenza dei contributi appena passati in rassegna, Murard ipotizza che la particella di spin 2 sia *elementare*. A parte questo fatto, l'autore fa semplicemente un accenno al gravitone, perché corrisponde alla particella di spin 2, ma non vengono discusse altre questioni. Di altro tenore è invece l'ultimo lavoro del periodo che abbiamo reperito scritto da Tonnelat. L'autrice pubblica un saggio per esporre la "filosofia" che sta alla base del metodo di fusione, sulla rivista *Revue de Métaphysique et de Morale* [Ton45]. Visto il carattere non tecnico del contributo rimandiamo a futuri lavori la sua analisi dettagliata, perché la figura di Marie-Antoinette Tonnelat, come mostrato, meriterà sicuramente ulteriori approfondimenti.

Concludiamo notando che nonostante Tonnelat e Petiau continueranno ad occuparsi dell'approccio alla Gravità Quantistica e che Tonnelat si ritroverà con molti degli autori incontrati in questo lavoro di tesi al convegno che si terrà a Chapel Hill nel 1957, il primo convegno per cui viene pensata una sessione *dedicata* alla quantizzazione della gravità. La teoria dei campi di Fierz e Pauli però avrà la meglio sul metodo di fusione, forse grazie anche ai suoi successi nel campo dell'elettrodinamica quantistica. L'idea iniziale di de Broglie però, ovvero quella di descrivere tutti i campi noti a partire da un unico "costituente", tornerà alla ribalta verso la metà degli anni Settanta e si concretizzerà con la nascita della Teoria delle Stringhe.

[142] Di questo procedura si occupa anche Jacques van Isacker [vI44], il quale mostra come si possano ottenere esattamente le stesse equazioni di Fierz per la particella di spin 2 a massa non nulla, particella che anche Isacker chiama gravitone.

[143] La traccia del tensore rappresenta i gravitoni scalari.

[144] Siamo recentemente venuti a conoscenza di almeno un altro lavoro dal titolo *Lien profond entre la théorie relativiste de la gravitation et celle de particule de spin 2*, pubblicato nello stesso volume di [Ton44c], e di cui ci occuperemo in altra sede.

4.4 Cronologia

1937 *March* riprende i lavori di Rosenfeld e Solomon e postulando l'esistenza di una lunghezza minima ottiene un valore finito per l'auto-energia gravitazionale del fotone.

Rosen pubblica un lavoro in cui dimostra l'assenza di soluzioni di tipo onda piana senza singolarità per le equazioni di Einstein non linearizzate. La dimostrazione, che contiene un errore, convincerà l'autore della non esistenza del quanto gravitazionale.

Sambursky propone un modello di Universo statico in cui il quanto d'azione $\hbar$ e altre costanti della fisica sono in realtà funzioni del tempo, scrivendo una relazione che lega G e $\hbar$.

Schrödinger diventa un aperto sostenitore delle idee di Eddington.

Wataghin riflette sulla GQ.

1938 *Born* cerca di utilizzare il suo principio di reciprocità per introdurre, accanto alla metrica dello spazio-tempo, una metrica per lo spazio degli impulsi e, in maniera simile a quanto fatto da Wataghin, tenta di porre dei limiti alle lunghezze e ai valori del momento osservabili.

Caldirola tenta un approccio unitario che inglobi l'equazione di KG attraverso scelte ad hoc dello scalare di curvatura.

Ertel propone un collegamento esplicito tra le idee di Eddington e il modello di Sambursky e Schiffer.

Haas discute le costanti "adimensionali" della fisica;

Heisenberg tenta ancora di costruire una teoria coerente in cui sia presente una lunghezza minima misurabile.

Jordan riprende l'idea di una costante gravitazionale che sia funzione del tempo.

March e discute la propria visione di struttura atomica dello spazio.

Sambursky, in collaborazione con *Schiffer*, pubblica un lavoro in cui dà corpo alle idee espresse l'anno precedente sulle "costanti-variabili" della fisica.

Solomon riflette sulla relazione tra le misure di carattere quantistico la teoria della gravitazione, richiamando in particolare i lavori di Bronstein.

van Dantzig specula su una possibile natura di origine statistica della gravità.

Wataghin pubblica una serie di lavori in cui cerca di descrivere lo scambio di un gravitone attraverso lo scambio di due neutrini; cerca inoltre di esplorare la possibilità di introdurre una lunghezza minima misurabile e un limite superiore ai valori del momento.

Weiss continua il suo progetto di generalizzare la teoria hamiltoniana su spazi-tempo curvi.

1939 *Band* propone, come fece Carrelli dieci anni prima ma senza citarlo, di identificare la quinta dimensione della teoria di Klein con lo spin.

Caldirola tenta altre soluzioni alla ricerca di una teoria unitaria dei campi, con un approccio puramente classico.

de Broglie introduce il metodo di fusione, grazie al quale tutte le particelle sono descritte come stati composti da spinori.

Fierz e *Pauli* identificano lo spin del gravitone, mostrando come le equazioni del campo gravitazionale linearizzate nel vuoto possano essere riprodotte partendo da una lagrangiana classica per un campo di spin 2.

Kaliviaris tenta di giustificare una teoria della gravitazione basata su un campo vettoriale complesso massivo, e ne considera la versione quantistica come la propria versione della gravità quantistica.

Mariani discute l'introduzione di una lunghezza minima per descrivere una geometria a livello microscopico.

Schrödinger discute per la prima volta il fenomeno della creazione di particelle a causa dell'espansione dell'Universo.

1940 *Einstein* interviene su Science sulla relazione tra relatività e MQ.

Fierz, discutendo ancora le equazioni d'onda per particelle con spin qualsiasi nota che l'emissione di un gravitone è un evento ancora non misurabile.

Mariani pubblica altri lavori per approfondire il proprio approccio.

Petiau introduce le matrici di spin che descrivono le particelle con determinato spin nell'approccio di de Broglie.

Podolski e *Branson* studiano i possibili autovalori dell'equazione di Dirac in uno spazio-tempo curvo, con particolare riferimento agli spazi cosmologici, nella speranza di introdurre una sorta di quantizzazione della massa.

1941 *Petiau* si concentra sulle particelle con spin 2 come fusione di due particelle di Proca e pubblica un breve lavoro in cui accenna alla relazione tra massa del gravitone e costante cosmologica.

Stueckelberg discute la creazione di coppie all'interno della teoria della RG.

Tonnelat pubblica una serie di lavori utilizzando il metodo di fusione: la particella massiva di spin 2 viene identificata col gravitone, vengono discusse le differenze con l'approccio di Fierz e viene evidenziato per la prima volta il significato cosmologico della massa del gravitone.

1942 *Dirac* introduce il concetto di metrica indefinita, che verrà poi utilizzato a metà degli anni cinquanta per quantizzare anche la teoria di Einstein.

Lanczos propone una modifica della RG da cui emergano le onde di materia.

Roubaud-Valette si occupa dei possibili assiomi di una geometria ondulatoria.

Stueckelberg riprende il lavoro dell'anno precedente.

Tonnelat discute il ruolo del formalismo di de Broglie nella costruzione di una teoria unitaria.

Wang e *Tsao* speculano su una possibile relazione tra forze nucleari e gravitazionale.

1943 *Birkhoff* migliora una sua vecchia idea: una teoria alternativa alla RG per la gravità che non faccia uso degli spazi-tempo curvi.

Petiau e *Tonnelat* continuano a indagare le proprietà del gravitone massivo; in particolare Tonnelat si rende conto che la teoria di de Broglie implica che il gravitone debba essere una particella elettricamente neutra.

Saxby tenta di usare la geometria affine con dei coefficienti "indeterminati" per introdurre geometricamente il principio di indeterminazione di Heisenberg.

1944 *Petiau* e *Tonnelat* studiano il ruolo dei gravitoni longitudinali, realizzando che sono particelle di natura scalare e mostrando che l'interazione tra particelle, dovuta al gravitone massivo, ha la forma di un potenziale di Yukawa.

Piaggio tenta di dare risonanza al lavoro di Saxby con un intervento su Nature.

1945 *Murard* analizza le rappresentazioni spinoriali del gruppo $SO(d)$ considerando come elementare il gravitone.

Saxby cerca di pubblicizzare il proprio approccio sulla rivista *Nature*.

Tonnelat pubblica un contributo di carattere non tecnico per esporre la filosofia alla base del metodo di fusione.

Bibliografia

[Ban39a] William Band (a1939); Klein's Fifth Dimension as Spin Angle. *Physical Review*, 56, page 204.

[Ban39b] William Band (b1939); On Flint's five-dimensional theory of the electron. *Philosophical Magazine Series 7*, 29, pages 548–552.

[BD82] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, 1982).

[Bee13] Nelson H.F. Beebe (2013); A Bibliography of Publications by, and about, Max Born. Www.scholar.google.it.

[Bir43] George D. Birkhoff (1943); Matter Electricity and Gravitation in flat spacetime. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 29.

[Bit96] Michel Bitbol, *Schrödinger's Philosophy of Quantum Mechanics* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996).

[Bon57] Hermann Bondi (1957); Plane Gravitational Waves in General Relativity. *Nature*, pages 1072 – 1073.

[Bor31] Max Born (1931); Ansätze zur Quantenelektrodynamik. *Zeitschrift für Physik*, 69, pages 141–152.

[Bor38a] Max Born (a1938); A Suggestion for Unifying Quantum Theory and Relativity. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 165, pages 291–303.

[Bor38b] Max Born (b1938); Relativity and Quantum Theory. *Nature*, 141, pages 327–328.

[Bor38c] Max Born (c1938); Application of Reciprocity to Nuclei. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 166, pages 552–557.

[Bor38d] Max Born (d1938); Some remarks on reciprocity. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A*, 8, pages 309–314.

[Bor49] Max Born (1949); Reciprocity Theory of Elementary Particles. *Reviews of Modern Physics*, 21, pages 463–473.

[BS54] Frederick J. Belinfante and J. C. Swihart, *A theory of gravitation and its quantization* (Purdue University, 1954).

[BS02] Thomas Georges Borne and Harald Stump, *Nonperturbative Quantum Field Theory and the Structure of Matter*, volume 114 of *Fundamental Theories of Physics* (Kluwer Academic Publishers, 2002).

[Bus97] Martha Cecilia Bustamante (1997); Jacques Solomon (1908-1942): profil d'un physicien théoricien dans la France des années trente. *Revue d'histoire des sciences.*, 50, pages 49–88.

[Cal38a] Piero Caldirola (a1938); Sull'equazione ondulatoria e sulla dinamica di una particella nella teoria della relatività. *Il Nuovo Cimento*, 15, pages 467–472.

[Cal38b] Piero Caldirola (b1938); Nuova forma delle equazioni gravitazionali della relatività generale. Deduzione delle equazioni ondulatorie del campo elettromagnetico e del campo materiale. *Il Nuovo Cimento*, 15, pages 594–603.

[Cal39a] Piero Caldirola (a1939); Le equazioni del mesotrone e interpretazione di risultati dedotti dalle equazioni gravitazionali sotto una nuova forma. *Il Nuovo Cimento*, 16, pages 14–19.

[Cal39b] Piero Caldirola (b1939); Elettrodinamica, interazione della materia col campo elettromagnetico e geometria dell'Universo secondo la nuova forma da noi proposta delle equazioni della relatività. *Il Nuovo Cimento*, 16, pages 136–146.

[Cao99] Tian Yu Cao (Editor), chapter V Quantum field theory and space-time. "Introduction" by John Stachel, pages 166–175 (Cambridge University Press, 1999).

[CCTL77] Bernard Diu Claude Cohen-Tannoudji and Franck Laloë, *Quantum Mechanics*, volume 1 of *A Wyley-Interscience Publication* (New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons, 1977). Originally published in French by HERMANN (Paris).

[CJS00] C.D. Chinellato, A.T. Júnior and R.A. Sponchiado, *Selected Papers Gleb Wataghin* (IF-UNICAMP, 2000). E-book: http://webbif.ifi.unicamp.br/ebook/capa.html.

[dB39] Louis de Broglie (1939); Sur la théorie des particules des spin quelconque. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 209, page 265.

[Dur03] Ian T. Durham (2003); Eddington and uncertainty. *Physics in Perspective*, 5, page 398. ArXiv:physics/0204057.

[Dur05] Ian T Durham (2005); *Sir Arthur Eddington and the Foundations of Modern Physics*. Ph.D. thesis, School of Mathematics, University of St. Andrews. ArXiv:quant-ph/0603146.

[eAMK56] ed. A. Mercier and M. Kervaire (Editors), *Fünfzig Jahre Relativitätstheorie/Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité/ Jubilee of Relativity Theory*, volume Helvetica Physica Acta, Supplementum IV (Basel: Birkhauser Verlag, 1956). Bern, 11-16 July 1955.

[Edd] Sir A. S. Eddington. Univ. Nacional d. S. Marcos, Lima.

Key: Eddington-4
Annotation: Ano XLVI, 447

[EdS32] Albert Einstein and Willem de Sitter (1932); On the relation between the expansion and the mean density of the universe. *Proceedings of the National Academy of Science*, 18, pages 213–214.

[Ein40] Albert Einstein (1940); Considerations concerning the Fundaments of Theoretical Physics. *Science*, 91, pages 487–492.

[Ert38a] Hans Ertel (1938); Gravitationskonstante, spezifische Ladung und Massenverhältnis von Proton und Elektron. *Naturwissenschaften*, 26, pages 498–499.

[Ert38b] Hans Ertel (1938); Quantenmechanisch-relativistische Begründung des Zusammenhangs der universellen physikalischen Konstanten. *Naturwissenschaften*, 26, pages 499–500.

[Fie39] Markus Fierz (1939); Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin. *Helvetica Physica Acta*, 12, pages 3–37.

[Fie40] Markus Fierz (1940); Über den Drehimpuls von Teilchen mit Ruhemasse null und beliebigem Spin. *Helvetica Physica Acta*, 13, pages 45–49.

[Foc36] Vladimir Fock (1936); Inconsistency of the Neutrino Theory of Light. *Nature*, 138, pages 1011–1012.

[Foc37] Vladimir Fock (1937); The Neutrino Theory of Light. *Nature*, 140, page 113.

[FP39a] Markus Fierz and Wolfgang Pauli (a1939); Über relativistischen Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld. *Helvetica Physica Acta*, 12, pages 297–300.

[FP39b] Markus Fierz and Wolfgang Pauli (b1939); On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 173, pages 211–232.

[Fra66] D. M. Fradkin (1966); Comments on a Paper by Majorana Concerning Elementary Particles. *American Journal of Physics*, 34, pages 314–318.

[Gam37] George Gamow (1937); Über den heutingen (I. Juni 1937) Stand der Theorie des β-Zerfalls. *Physikalische Zeitschrift*, 38, pages 800–814.

[GG05] Gregory Gabadadze and Andrei Gruzinov (2005); Graviton mass or cosmological constant? *Physical Review D*, 72.

[Goe14] Hubert F.M. Goenner (2014). On the History of Unified Field Theories. Part II. (ca. 1930 – ca. 1965). Living Review in Relativity 17 (cited on March 17 2015) http://www.livingreviews.org/lrr-2014-5.

[Gup59] Suraj N. Gupta (1959); Summer Lectures on Theoretical Physics. Technical Report - Argonne National Lab., Lemont, Ill.

[Haa38a] Arthur E. Haas (a1938); A relation between the average Mass of the Fixed Stars and the Cosmic Constants. *Science*, 87, pages 195–196.

[Haa38b] Arthur E. Haas (b1938); A relation between the Electron Radius and the Compton Wavelength of the Proton. *Science*, 87, pages 584–585.

[Haa38c] Arthur E. Haas (c1938); The Dimensionless Constants of Physics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 24, pages 274–276.

[Hag14] Amit Hagar (2014); Squaring the circle: Gleb Wataghin and the prehistory of quantum gravity . *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 46, pages 217 – 227. Part B.

[Hin12] Kurt Hinterbichler (2012); Theoretical aspects of massive gravity. *Reviews of Modern Physics*, 84, pages 671–710.

[Jam06] Ioan M. James (Editor), *History of Topology*, chapter "Topology and physics-a historical essay" by Charles Nash (Elsevier-North Holland, 2006).

[JM06] P. D. Jarvis and S. O. Morgan (2006); Born Reciprocity and the Granularity of Spacetime. *Foundations of Physics Letters*, 19, pages 501–517.

[Jor38] Pascual Jordan (1938); Zur empirischen Kosmologie. *Naturwissenschaften*, 26, pages 417–421.

[Kal39] Anarghiros Kaliviaris (1939); XLII. Quantum theory of gravitation. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 27, pages 453–467.

[Kra95] Helge Kragh (1995); Arthur March, Werner Heisenberg, and the search for a smallest length. *Revue d'histoire des sciences*, 48, pages 401–434.

[Kra11] Helge Kragh (2011); Quantenspringerei: Schrödinger vs. Bohr. *Research Publications on Science Studies.*

[Lan42] Cornelius Lanczos (1942); Matter Waves and Electricity. *Physical Review*, 61, pages 713–720.

[Maj32] Ettore Majorana (1932); Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario. *Nuovo Cimento*, 9, pages 335–344.

[Mar37a] Arthur March (a1937); Die Geometrie kleinster Räume. I. *Zeitschrift für Physik*, 104, pages 93–99.

[Mar37b] Arthur March (b1937); Die Geometrie kleinster Räume. II. *Zeitschrift für Physik*, 104, pages 161–168.

[Mar37c] Arthur March (e1937); Die Gravitationsenergie des Photons. *Zeitschrift für Physik*, 106, pages 291–295.

[Mar38a] Arthur March (a1938); Die Frage nach der Existenz einer kleinsten Wellenlänge. *Zeitschrift für Physik*, 108, pages 128–136.

[Mar38b] Arthur March (b1938); Die Idee einer atomistischen Struktur des Raumes. *Die Natürwissenschaften*, 40, pages 649–656.

[Mar39a] Jean Mariani (a1939); Non-Euclidean Geometry in Microscopic Space. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 208, page 640.

[Mar39b] Jean Mariani (b1939); Non-Euclidean Geometry in Microscopic Space. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 208, page 793.

[Mar39c] Jean Mariani (c1939); Non-Euclidean Geometry in Microscopic Space. *Nature*, 143, page 683.

[Mar39d] Jean Mariani (d1939); Sur les limites d'application de la géométrie métrique en physique nucléaire. I. *Journal de Physique et le Radium*, 10, pages 296 – 306.

[Mar40] Jean Mariani (1940); Géométrie métrique et corpuscules élémentaires. II. *Journal de Physique et le Radium*, 1, pages 322 – 334.

[MP] Christiaan Mantz and Tomislav Prokopec; Hermitian Gravity and Cosmology, year = 2008, note = arXiv:0804.0213 [gr-qc],.

[Mur45] Robert Murard (1945); Sur les divers types de corpuscules élémentaires. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 221, pages 607–609.

[P.36] H. H. P. (1936); The Observational Approach to Cosmology. *Nature*, 138, pages 1001–1002.

[PB40] Boris Podolsky and Herman Branson (1940); On the Quantization of Mass. *Pysical Review*, 57, pages 494–500.

[Pet40a] Gérard Petiau (a1940); Sur la théorie du spin. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 211, pages 765–767.

[Pet40b] Gérard Petiau (b1940); Sur une représentation du corpuscule de spin 2. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 212, pages 47–50.

[Pet41] Gérard Petiau (1941); Sur la représentation unitaire de l'électromagnétisme et de la gravitation en mécanique ondulatoire. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 212, pages 1126–1128.

[Pet43] Gérard Petiau (1943); Sur la représentation d'interactions neutron-proton s'exerçant par l'intermèdiaire de la particule de spin 2. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 217, pages 103–104.

[Pet44a] Gérard Petiau (a1944); Sur la représentation des interactions massiques par l'intermédaire des ondes longitudinales de la théorie de la particule de spin $2(h/2\pi)$. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 218, pages 34–36.

[Pet44b] Gérard Petiau (b1944); Sur les équations d'ondes macroscopiques du corpuscule de spin 2 en présence de matière. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 218, pages 136–138.

[Pia44] Henry T. H. Piaggio (1944); Gravitation, Electromagnetism and Quantum Theory. *Nature*, 154, page 94.

[Pia45] Henry T. C. Piaggio (1945); Elipsoidal waves or Relativity? *Nature*, 155, page 4.

[Pop07] Nikodem J. Poplawski (2007); Covariant differentiation of spinors for a general affine connection. ArXiv:gr-qc 0710.3982.

[Ric12] "Quantum Gravity Meets &HPS" by Dean Rickles. In: *Integrating History and Philosophy of Science*, (Editors) Seymour Mauskopf and Tad Schmaltz, volume 263 of *Boston Studies in the Philosophy of Science*, pages 163–199 (Springer Netherlands, 2012).

[Roe01] John Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods* (Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: Chapman & Hall/crc, 2001).

[Ros37] Nathan Rosen (1937); Plane Polarized Waves in the General Theory of Relativity. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, 12, pages 366–373.

[RRA04] Henri Ruegg and Marti Ruiz-Altaba (2004); The Stueckelberg Field. *International Journal of Modern Physics A*, 19, pages 3265–3348.

[RV42a] Jean Roubaud-Valette (a1942); Sur l'édification d'une géométrie ondulatoire. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 214, pages 791–794.

[RV42b] Jean Roubaud-Valette (b1942); Sur l'édification d'une géométrie ondulatoire. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 215, pages 173–175.

[Sam37] Samuel Sambursky (1937); Static Universe and Nebular Red Shift. *Pysical Review*, 52, pages 335–338.

[Sax43] Frank R. Saxby (1943); The Theory of Indeterminate Space-time. *The bulletin of the Research Laboratories of the N.C.R.*

[Sax45] Frank R. Saxby (1945); Unification of the Physical Fields. *Nature*, 155, page 609–610.

[Sch38] Erwin Schrödinger (1938); Sur la théorie du monde d'Eddington. *Il Nuovo Cimento*, 15, pages 246–254.

[Sch39] Erwin Schrödinger (1939); The proper vibrations of the expanding Universe. *Physica*, 6, pages 899–912.

[Sch44] Erwin Schrödinger (1944); The Affine Connexion in Physical Field Theories. *Nature*, 153, page 572–575.

[Sol38] Jacques Solomon (1938); Gravitation et quanta. *Journal de Physique et le Radium*, 9, pages 479–485.

[SS38] Samuel Sambursky and Menahem Schiffer (1938); Static Universe and Nebular Red Shift. II. *Pysical Review*, 53, pages 256–263.

[ST96] Wilfried Schröder and Hans-Jürgen Treder (1996); Hans Ertel and cosmology. *Foundations of Physics*, 26, pages 1081–1088.

[Stu39a] Ernst C. G. Stueckelberg (1939); Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte. Teil I. *Helvetica Physica Acta*, 11, pages 3–38.

[Stu39b] Ernst C. G. Stueckelberg (1939); Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte. Teil II und III. *Helvetica Physica Acta*, 12, pages 3–37.

[Stu41] Ernst C. G. Stueckelberg (1941); Remarque à propos de la création de paires de particules en théorie de relativité. *Helvetica Physica Acta*, 14, pages 588–594.

[Stu42] Ernst C. G. Stueckelberg (1942); La mécanique du point matériel en théorie de relativité et en théorie des quants. *Helvetica Physica Acta*, 15, pages 23–37.

[Ton40a] Marie-Antoinette Tonnelat (a1940); Sur la fusion de deux particules de spin 1. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 212, pages 187–189.

[Ton40b] Marie-Antoinette Tonnelat (b1940); Sur les ondes planes de la particule de spin 2 (graviton). *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 212, pages 263–266.

[Ton40c] Marie-Antoinette Tonnelat (c1940); La seconde quantification dans la théorie du corpuscule de spin 2. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 212, pages 430–432.

[Ton41] Marie-Antoinette Tonnelat (1941); Sur une interprétation possible des grandeurs issues d'un tenseur symétrique dans la théorie de la particule de spin 2. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 212, pages 687–689.

[Ton42] Marie-Antoinette Tonnelat (1942); Une nouvelle forme de théorie unitaire: étude de la particule de spin 2. *Annales de Physique*, 17, pages 158–207.

[Ton43] Marie-Antoinette Tonnelat (1943); Sur les équations d'ondes des particules à spin en preésence d'un champ extérieur. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 217, pages 385–388.

[Ton44a] Marie-Antoinette Tonnelat (a1944); Sur l'interaction entre deux particules matérielles au moyen du corpuscule de spin maximum 2; loi de gravitation newtonienne. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 218, pages 139–141.

[Ton44b] Marie-Antoinette Tonnelat (b1944); La particule de spin 2 et la loi de gravitation d'einstein dans le cas de présence de matiére. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 218, pages 305–308.

[Ton44c] Marie-Antoinette Tonnelat (c1944); Les phénomenes de gravitation: étude des interactions entre la materie et la particule de spin 2. *Annales de Physique*, 19, pages 396–445. 11e série.

[Ton45] Marie-Antoinette Tonnelat (1945); Les représentations corpusculaires et l'évolution de la physique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 50, pages 203–222.

[Val40] Jean R. Valette (1940); Sur l'obtention de corpuscules de spin élvé par la fusion de corpuscules de spin $(1/2)(h/2\pi)$. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 212, pages 226–229.

[Var42] Henri Varcollier (1942); Propagation ellipsoidale, Relativité, Quanta.

[vD38] David van Dantzig (1938); Some possibilities of the future development of the notions of space and time. *Erkenntnis*, 7, pages 142–146.

[Ven86] Gabriele Veneziano (1986); Stringy Nature Needs Just Two Constants. *Europhysics Letters*, 2, page 199.

[vI44] Jacques van Isacker (1944); Sur les décompositions des équations de particules à spin quelconque. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 218, pages 51–53.

[Vil] Víctor M. Villalba; Dirac equation in some homogeneous space-times, separation of variables and exact solutions, journal = Modern Physics Letters A, year = 1993, volume = 8, pages = 2351-2364,.

[VZ69] Giorgio Velo and Daniel Zwanzinger (1969); Noncausality and Other Defects of Interaction Lagrangians for Particles with Spin One and Higher. *Pysical Review*, 188, pages 2218–2222.

[Wat34] Gleb Wataghin (1934); Bemerkung über die Selbstenergie der Elektronen. *Zeitschrift für Physik*, 88, pages 92–98.

[Wat37a] Gleb Wataghin (a1937); Sopra l'energia propria e i sistemi di riferimento. *La Ricerca Scientifica*, 2, pages 01–02. Anno VIII, Serie 2, n.1-2.

[Wat37b] Gleb Wataghin (b1937); Sulla teoria quantica della gravitazione. *La Ricerca Scientifica*, 2, pages 01–03. Anno VIII, Serie 2.

[Wat37c] Gleb Wataghin (c1937); Sulla teoria delle particelle elementari. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti, Classi di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 26, pages 282–285. Serie 6.

[Wat37d] Gleb Wataghin (d1937); Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti, Classi di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 26, pages 285–289. Serie 6.

[Wat38a] Gleb Wataghin (1938); Sur la théorie des neutrinos. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 206, pages 425–427.

[Wat38b] Gleb Wataghin (a1938); Sur une généralisation des transformations relativistes. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 207, pages 421–423.

[Wat38c] Gleb Wataghin (b1938); Sulla teoria quantica e relatività. *La Ricerca Scientifica*, 2, pages 01–02. Anno IX, Serie 2.

[Wat38d] Gleb Wataghin (c1938); Sur l'indetermination dans l'espace des momentes et l'origine des gerbes à explosion. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 207, pages 358–360.

[Wat38e] Gleb Wataghin (d1938); Quantum Theory and Relativity. *Nature*, 142, pages 393–394.

[Wat38f] Gleb Wataghin (e1938); Sopra un sistema di equazioni gravitazionali del primo ordine. Nota II. *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti, Classi di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 27, pages 570–573. Serie 6.

[Wat38g] Gleb Wataghin (f1938); Sobre a teoria da trasformação das equações de Dirac e a relatividade geral. *Boletim da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Fisica 1, Separata de Boletim*, 5, pages 39–41.

[Wei38a] Peter Weiss (1938); On the Hamilton-Jacobi Theory and Quantization of a Dynamical Continuum. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 169, pages 102–119.

[Wei38b] Peter Weiss (1938); On the Hamilton-Jacobi Theory and Quantization of Generalized Electrodynamics. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 169, pages 119–133.

[Wen33a] Gregor Wentzel (a1933); Über die Eigenkräfte der Elementarteilchen. I. *Zeitschrift für Physik*, 86, pages 479–494.

[Wen33b] Gregor Wentzel (b1933); Über die Eigenkräfte der Elementarteilchen. II. *Zeitschrift für Physik*, 86, pages 635–645.

[Wen34] Gregor Wentzel (1934); Über die Eigenkräfte der Elementarteilchen. III. *Zeitschrift für Physik*, 87, pages 726–733.

[WT44] K. C. Wang and L. Tsao (1944); An attempt at Finding the Relationship Between the Nuclear force and the Gravitational Force. *Physical Review*.

Capitolo 5

Conclusioni

I trent'anni che intercorrono tra la nascita della Relatività Generale e la fine della Seconda Guerra Mondiale sono un periodo caratterizzato da una notevole varietà di tentativi che hanno lo scopo di conciliare una qualche descrizione della forza gravitazionale con i principi quantistici. Non a caso continuiamo, e continueremo, a utilizzare la locuzione vaga "una qualche teoria della forza gravitazionale". Abbiamo infatti constatato che solo una parte degli approcci coinvolgevano la teoria della gravitazione di Einstein; mentre in alcuni casi ci si accontentava di fare dei ragionamenti nell'ambito della teoria di Newton, in altri venivano coinvolte delle estensioni della Relatività Generale come la teoria di Weyl o il modello penta-dimensionale di Klein. Abbiamo raccontato come la necessità di conciliare due fenomeni così distanti abbia forzato in qualche modo alcuni autori a discutere se modificare la forma della teoria della gravitazione o la Meccanica Quantistica.

Il principale obiettivo che ci eravamo posti era quello di tentare un primo passo verso una ricostruzione storica dettagliata dei primi approcci alla Gravità Quantistica. Come detto nell'introduzione al nostro lavoro abbiamo stabilito *tre* ipotesi di lavoro:

i) considerare *tutti* i tentativi che hanno cercato *in qualche modo* di conciliare una qualunque teoria della forza gravitazionale con i vari sviluppi della Meccanica Quantistica;

ii) circoscrivere la ricerca all'arco temporale che abbraccia gli anni da 1915 al 1945, concentrandoci solamente sulle fonti primarie reperibili sulle riviste scientifiche;

iii) organizzare il materiale raccolto in ordine cronologico.

La nostra ricerca mostra come queste ipotesi di lavoro fossero corrette almeno per due motivi. Il primo è che nonostante i tentativi di quantizzazione del campo gravitazionale siano cominciati con il 1930, la riflessione sull'armonizzazione di questi due pilastri della fisica è cominciata proprio contestualmente alla nascita della Relatività Generale, motivo per cui abbiamo proposto il 1915 come anno di inizio della storia della Gravità Quantistica. Il secondo motivo è che la progressiva estensione del concetto di quantizzazione, esplicitata dalla nostra impostazione diacronica, ci ha permesso di sottolineare gli elementi di *discontinuità* fra le varie formulazioni incontrate. Ripercorriamo brevemente tali fasi. I primi venticinque anni del Novecento sono caratterizzati da una fase di scoperta, in cui, per quantizzare un sistema, venivano *discretizzate* per ipotesi alcune delle quantità che classicamente erano continue. Nel nostro primo capitolo è emersa proprio questa prima fase della vecchia teoria dei quanti. Dopo il biennio 1925-1926, con l'avvento della Meccanica Quantistica e il dominio della Meccanica Ondulatoria, si ha una prima estensione del termine *quantizzazione*: grazie all'equazione d'onda si aveva un metodo per dedurre gli autovalori discreti senza ipotizzarli. L'influenza della Meccanica Ondulatoria ha condizionato ovviamente gli approcci da noi analizzati nel secondo capitolo, fino alla fine degli anni venti del Novecento. Con il 1930 inizia infine l'ultimo periodo: dopo il consolidamento dell'idea che fosse il campo l'entità da dover quantizzare[1] e dopo i primi tentativi di Heisenberg e Pauli di quantizzazione del campo elettromagnetico, comincia l'era della teoria quantistica dei campi[2]. Gli sviluppi successivi della teoria dei campi, teoria che porta al suo interno un'ulteriore estensione del concetto di quantizzazione, hanno quindi segnato gli approcci analizzati nel terzo e nel quarto capitolo, rispettivamente prima e dopo l'identificazione del quanto del campo gravitazionale con una particella di spin 2. È indubbio quindi che l'estensione del termine quantizzazione abbia giocato un ruolo di primo piano, stimolando di volta in volta un cambiamento di prospettiva nelle successive formulazioni. Infine, il fatto che dopo il 1930 più di un autore abbia raccolto la sfida di Rosenfeld, cercando di mettere in evidenza le caratteristiche di una descrizione quantistica del *campo* gravitazionale, come si cerca di fare nei moderni approcci, giustifica la nostra scelta di definire *preistoria* tutto il periodo antecedente al 1930.

Come conseguenza dell'impostazione diacronica molte volte sono stati tralasciati alcuni aspetti tecnici e storici, e non sono stati approfonditi alcuni lavori degli autori affrontati,

[1] Vale la pena notare che già nel 1907 Einstein, discutendo la natura quantistica dei calori specifici e dopo aver introdotto nel 1905 il quanto di luce, aveva applicato l'idea di quantizzare anche il *campo vibrazionale* [Ein07].

[2] L'era della teoria dei campi quantizzati avrà alti e bassi. Dopo un periodo relativamente lungo di alterne vicende, il primo successo sarà sancito dalla nascita dell'elettrodinamica quantistica di di Feynman, Schwinger e Tomonaga. L'entusiasmo per la nuova teoria si scontrerà in breve con nuovi problemi legati alla quantizzazione delle interazioni nucleari deboli e forti. Questi problemi saranno risolti solo in tempi relativamente recenti con la formulazione di quello che va sotto il nome di Modello Standard delle particelle elementari.

proprio perché abbiamo scelto di evidenziare quelli che ritenevamo più significativi. Uno dei possibili sviluppi del nostro lavoro è quindi quello di analizzare anche i lavori che hanno un interesse più tangenziale, per ricostruire dettagliatamente il pensiero dei singoli autori.

Quello che può colpire maggiormente, dopo la lettura del nostro lavoro, è la *numerosità* degli approcci trovati, sia nei quindici anni antecedenti i tentativi di Rosenfeld, che, come ha sottolineato anche Rickles recentemente, sono ritenuti *a torto* poco significativi ([Ric13]; pag. 149), sia nei successivi quindici anni, compresi gli anni della guerra. Anche per questo risulta quindi giustificata la nostra scelta, presente nelle nostre ipotesi di lavoro sopra esposte, di mettere in secondo piano sia alcuni inquadramenti storici di contesto, sia l'analisi approfondita di altre fonti primarie come quelle epistolari, per concentrarci solamente sulle fonti primarie reperibili sulle riviste scientifiche. Dal nostro punto di vista questo tipo di analisi era la prima a dover essere eseguita, per utilizzarla come solida base di partenza in un secondo momento. Vogliamo segnalare che tale numerosità di approcci non è propria solamente di questo periodo, ma che si tratta di una tendenza che non sembra destinata a calare dopo il 1945. Infatti, una nostra ricognizione parziale dell'arco temporale che va dalla fine della Seconda Guerra Mondiale alla fine degli anni Sessanta mostra come quasi tutti i fisici teorici di rilievo tenteranno, almeno una volta nella loro carriera, di affrontare la questione della quantizzazione della gravità.

Oltre la numerosità degli approcci presentati, è emersa anche la *varietà* delle proposte incontrate. È conveniente dunque fare una panoramica di tutti i concetti che sono stati discussi, durante questi trent'anni, senza fare necessariamente distinzione tra i livelli di raffinatezza raggiunti nell'elaborazione del modello matematico. Stachel riporta che dalla metà degli anni Trenta erano già state formulate le tre principali posizioni, riguardo alla forma di una possibile teoria quantistica della gravitazione, che domineranno il periodo dopo la Seconda Guerra Mondiale e ce le presenta nel seguente modo ([Cao99]; pag. 173):

1) La Relatività Generale dovrebbe essere formulata in analogia con l'elettrodinamica quantistica; si presenteranno problemi simili la cui soluzione probabilmente sarà simile.

2) Le caratteristiche peculiari della gravità richiedono un trattamento speciale: ad esempio la necessità di quantizzare una teoria non lineare e la richiesta di indipendenza dal *background*.

3) La Relatività Generale ha solamente significato macroscopico e non deve essere quantizzata.

Grazie al lavoro svolto possiamo entrare più nel dettaglio: è importante sottolineare che i concetti discussi in questi trent'anni verranno più volte ripresi, nel prosieguo della storia della Gravità Quantistica, con o senza riferimenti espliciti a questo primo periodo e con simili o differenti strumenti matematici, a dimostrazione del fatto che anche tali tentativi presentavano già, seppur in forma embrionale, il seme dei moderni filoni di ricerca. Alcune volte, dunque, non sarà l'idea stessa a essere abbandonata, quanto la sua realizzazione dal punto di vista formale. Per quanto ne sappiamo, le eccezioni sono poche e verranno indicate nelle note seguenti[3].

La prima idea che menzioniamo è la necessità di stabilire dei postulati per una teoria unificata, per avere una base di tipo assiomatico, discutendo la compatibilità degli assiomi scelti. A tutt'oggi, nei convegni dedicati alla GQ si discute proprio di questa questione.

Una seconda prospettiva che è emersa è la quantizzazione diretta della forza gravitazionale attraverso la formulazione lagrangiana ed hamiltoniana della gravitazione, a cui seguono da una parte la questione della formulazione di un approccio canonico che non privilegi la coordinata tempo, e dall'altra la discussione sulla compatibilità tra i "metodi di quantizzazione" e la struttura della Relatività Generale. L'approccio canonico e l'approccio covariante moderni sono entrambi esempi che hanno sviluppato queste questioni.

In terza battuta ricordiamo due approcci incontrati tra loro antitetici. Il primo è quello che si basa sull'idea che la gravità possa emergere da un'equazione di carattere quantistico, il cui odierno esempio più emblematico è quello della Teoria delle Stringhe, e quello per cui la gravità è e deve rimanere classica. Riguardo a quest'ultima questione facciamo riferimento alla posizione di Rosen, esposta da Solomon nel lavoro del 1938, e che Rosen ufficializzerà al primo convegno sugli sviluppi della Relatività Generale, oggi nota con la sigla GR0, che si terrà nel 1955. Infatti, nel convegno per il cinquantesimo della Relatività Generale, Rosen esporrà l'idea della non esistenza del gravitone, basata sulla dimostrazione dell'autore dell'assenza di soluzioni di tipo onda piana senza singolarità delle equazioni non linearizzate di Einstein. Conclusione che, come accennato in precedenza, si dimostrerà essere errata solo dopo la morte di Einstein, a partire dal 1956.

Continuiamo la nostra carrellata dei concetti emersi ricordando l'idea che la teoria della gravità debba essere modificata. Nel periodo che abbiamo indagato, questo concetto ha

[3]Faremo di volta in volta anche un breve cenno ad alcuni degli ambiti che hanno recuperato le idee esposte, senza indicarne però una bibliografia puntuale. L'assolvimento di tale compito è possibile solo dopo un'ulteriore analisi storica degli anni successivi al 1945. Approfittiamo per dire subito che, da quanto ci è noto, i modelli planetari dell'atomo formulati coinvolgendo la Relatività Generale non faranno più la loro comparsa dopo la fine della Seconda Guerra Mondiale.

dato vita a due differenti diramazioni. La prima è l'idea che il gravitone sia una particella massiva, e la recente teoria nota come *Massive Gravity* è tutt'oggi un prolifico filone di ricerca[4]. La seconda diramazione porta al tentativo di utilizzare un campo vettoriale abeliano per descrivere i potenziali gravitazionali, invece di un tensore simmetrico. Per quanto ne sappiamo verrà formulato almeno un altro tentativo su quest'ultima direttrice, che descrive la gravità tramite una teoria di Yang-Mills non abeliana.

Un altro filone che ha coinvolto la Relatività Generale e la Meccanica Quantistica e che ha prodotto a sua volta due effetti è stata la discussione dei modelli cosmologici. Innanzitutto tale discussione ha stimolato la nascita di modelli in cui le costanti fondamentali $\hbar$ e G siano funzioni del tempo, idea che è stata sviluppata da teorie alternative alla Relatività Generale dopo la seconda guerra mondiale. Inoltre ha stimolato una prima analisi degli autovalori dell'operatore di Dirac su spazi-tempo curvi, analisi che si dimostrerà prolifica nel campo della ricerca in matematica, aprendo la strada ad un nuovo filone di ricerca nel campo della topologia.

Torniamo a parlare dell'approccio covariante menzionato sopra. Lo sviluppo di tale approccio, infatti, è collegato con altri due nodi concettuali. Il primo nodo è l'idea che un approccio variazionale unitario possa essere una strada per investigare la quantizzazione della gravità, con o senza l'uso delle dimensioni extra, che ritroveremo sia nella teoria quantistica dei campi su spazi-tempo curvi che nella Teoria delle Stringhe. Il secondo nodo è rappresentato dal problema delle divergenze ultraviolette, che emerge tra la fine degli anni Venti e l'inizio degli anni Trenta del Novecento. I primi tentativi di soluzione, pensati per l'elettrodinamica quantistica, vengono applicati anche al campo gravitazionale[5]. In particolare, il concetto di lunghezza minima che ha stimolato le discussioni su uno spazio-tempo discretizzato, connesso anche con i contrasti irrisolti tra il concetto di spazio-tempo classico e il principio di indeterminazione, che continuerà a vivere. Riguardo alla struttura dello spazio-tempo è emersa anche l'idea generale, sempre legata alla questione della lunghezza minima, che lo spazio-tempo del mondo microscopico sia differente da quello del mondo macroscopico[6]. L'idea di una metrica atomica ha fatto emergere

[4]Ricordiamo che negli anni della guerra il gravitone massivo nasce dall'idea che si tratti di una particella composta e non fondamentale. Per un periodo è stata discussa la possibilità che lo scambio di un gravitone sia equivalente allo scambio di due neutrini, ma questa posizione non è più riemersa.

[5]A metà degli anni Cinquanta accadrà invece esattamente il contrario. Esplorando la natura delle divergenze della teoria di Einstein con i metodi messi a punto per l'elettrodinamica quantistica verranno scoperte delle nuove tecniche matematiche per la quantizzazione covariante delle divergenze delle teorie di Yang-Mills.

[6]Un'idea che da quanto sappiamo non verrà ripresa è quella che proponeva la coesistenza di differenti metriche per una stessa regione dello spazio-tempo.

anche metriche statistiche, ondulatorie o spazi-tempo non commutativi. Tutti concetti che verranno sviluppati ulteriormente nel futuro. Ultima ma non meno importante è infine la questione della *misura* degli effetti quantistici della gravità, che resta forse l'unica argomentazione che avvicina questo campo di ricerca all'esperienza empirica.

Oltre la numerosità e la varietà degli approcci, si può avere l'impressione anche di una certa *frammentarietà* delle proposte incontrate. Questa in realtà è una caratteristica propria di questo periodo, nel quale il campo di ricerca della GQ non ha ancora contorni particolarmente definiti. In tal senso l'obiettivo di quantizzare il campo gravitazionale contribuirà a far convergere dopo la fine della Seconda Guerra Mondiale più autori fino alla formazione di gruppi di ricerca dedicati. Tale frammentarietà trae origine anche dalla non sempre efficace circolazione di informazioni nel settore. In alcuni casi la comunicazione è stata praticamente assente, come nel caso di Band, che nel 1939 riprende un'idea quasi identica a quella formulata dall'italiano Carrelli dieci anni prima. In altri casi le connessioni risultano fortuite: dalla biografia di Solomon [Bus97] abbiamo appreso che il fisico francese era a conoscenza dei lavori di Bronstein grazie all'amicizia personale con Fock, nata nel 1930, a seguito di un viaggio premio per la Russia. Abbiamo un solo esempio per cui i contorni del campo di ricerca risultano meno sfuocati e decisamente centrati sulla descrizione quantistica del campo gravitazionale. Si tratta dell'esperienza di Tonnelat e Petiau, che seguivano esplicitamente la strada aperta dal *metodo di fusione* messo a punto da de Broglie, e che, come visto nell'ultimo capitolo, possono a buon diritto essere indicati come gli iniziatori del filone di ricerca della *Massive Gravity*, sopra menzionato. L'esperienza di questi autori francesi meriterà sicuramente un approfondimento anche per il fatto che rimasero attivi durante l'occupazione tedesca della Francia.

Gli atti del convegno tenutosi a Regensburg, in Germania, nell'autunno del 2010, e pubblicati dalla Springer nel 2012, dal titolo *Quantum Field Theory and Gravity. Conceptual and Mathematical Advances in the Search for a Unified Framework* sottolineano che al di là di tutte difficoltà matematiche, il dibattito attuale si snoda attorno alle seguenti domande:

> '1) Possiamo aspettarci di ottenere una teoria quantistica della gravità da considerazioni puramente matematiche? Le nozioni matematiche attuali sono sufficienti per formulare una gravità quantistica? [...]
>
> 2) Evoluzione o rivoluzione? Dovremmo aspettarci di progredire per piccoli passi o per grandi passi?

[...]

6) (Come) possiamo testare la Gravità Quantistica?' ([FFZ12]; pag. ix)

Si tratta di domande che, implicitamente o esplicitamente, si sono posti tutti gli autori che abbiamo trattato e che mettono in luce innanzitutto le difficoltà concettuali nella formulazione di una teoria che descriva le caratteristiche quantistiche della forza gravitazionale. Vediamo dunque che cosa possiamo dire riguardo a queste questioni alla luce della nostra analisi storica[7].

Partiamo dalla prima e dall'ultima domanda. Abbiamo già detto che i vari tentativi che abbiamo articolato hanno ricevuto, di volta in volta, una nuova spinta grazie all'estensione progressiva del concetto *formale* di quantizzazione. In questo frangente appare dunque chiara l'importanza giocata dal ruolo degli strumenti *matematici*, con particolare riguardo alla teoria dei fenomeni microscopici, il cui progressivo raffinamento ha permesso di compiere i primi passi verso la comprensione di una descrizione quantistica della gravitazione. Non è la prima volta, infatti, che gli sviluppi della scienza si dispiegano partendo da modelli matematici in cui contano differenti livelli di coerenza, a partire da quella logica dei principi su cui si fonda il modello, fino al rigore matematico del formalismo e delle deduzioni ottenibili in base al modello stesso, attraverso le quali si approda alla verifica sperimentale. Come scriveva Eugene Wigner: 'È importante puntualizzare che la formulazione matematica delle evidenze sperimentali porta in uno sconcertante numero di casi ad una descrizione accurata di una grande classe di fenomeni. Questo mostra che il linguaggio matematico ha molto da dire in tal senso, mostra che è il linguaggio corretto' ([Wig60]; pag. 8). Il ruolo della matematica, però, come ribadisce lo stesso Wigner, non è semplicemente quello di "servire" la fisica. Infatti dall'analisi della storia della scienza emerge piuttosto una continua *oscillazione* tra la costruzione di teorie matematiche e di teorie fisiche, e un trasferimento di legittimazione dall'uno all'altro campo di ricerca, dipendente dalla fase (di scoperta o di giustificazione, come la definiscono i filosofi della scienza). Un esempio di tale oscillazione si è avuta tra la fisica e la topologia, come esposto in un contributo di Charles Nash [Jam06].

Non è certo una questione contemporanea quella che riguarda l'*urgenza* di rispondere alle domande, che emergono sia in ambito fisico che filosofico, sulla necessità di testare sperimentalmente le varie formulazioni di una teoria fisica, come nel caso della GQ. Infatti, come ci ricordano Einstein ed Infeld, 'Le teorie fisiche tentano di costruire una rappresentazione della realtà e di determinarne i legami con il vasto mondo delle impres-

[7]Non è inusuale guardare al passato per trovare nuove idee che stimolino sviluppi futuri [**?**].

sioni sensibili' ([EI11]; pag.270). È risaputo però che differenti modelli possono dare conto degli stessi fenomeni. La storia della nascita della Meccanica Quantistica ne è un caso emblematico. Ma l'utilizzo degli strumenti matematici per fare Scienza non è necessariamente legato ai dati empirici. Per citarne un esempio ci rifacciamo ancora alla storia della Meccanica Quantistica, usando sempre le parole di Wigner. 'Born, Jordan e Heisenberg hanno applicato le regole della Meccanica delle Matrici a pochi idealizzati problemi e i risultati erano soddisfacenti. Ma al tempo non vi era alcuna ragione che suggerisse che la Meccanica delle Matrici potesse essere una descrizione corretta sotto condizioni più realistiche' ([Wig60]; pag. 9). Nel caso della ricerca della GQ, la mancanza di evidenze sperimentali dirette investe la matematica di un'ulteriore responsabilità. Facendo ancora il parallelo con la storia della Meccanica Quantistica la dimostrazione dell'equivalenza tra Meccanica delle Matrici e Meccanica Ondulatoria ha contribuito al consolidamento della teoria stessa e ha avuto ricadute importanti nell'ambito sia teorico che sperimentale. È nostra opinione che la Storia della Fisica ci insegni dunque che anche per la GQ sarà fondamentale cercare di gettare dei ponti tra le varie formulazioni, opinione che trova risonanza nella voce autorevole di Hermann Nicolai, il quale nota come tutti gli approcci attuali siano tra loro *estranei*, e utilizzino linguaggi differenti[8] ([Nic13]; pag. 4).

L'ambito della ricerca di una teoria quantistica della forza gravitazionale mette in luce ancora una volta come lo strumento dell'analogia abbia giocato, e continuerà a giocare, un ruolo fondamentale. Ancora Einstein ed Infeld, nel famoso saggio dal titolo *L'evoluzione della fisica*, insistono proprio nel ribadire questo: 'In fisica è avvenuto più volte che progressi essenziali potessero realizzarsi seguendo coerentemente un'analogia fra fenomeni in apparenza estranei' ([EI11]; 252). L'analogia è comunque uno strumento epistemologicamente delicato: non sempre infatti le analogie tra settori diversi del sapere scientifico sono analogie totali, più spesso sono solo analogie parziali. È bene comprendere i limiti dell'analogia tra due classi di fenomeni: le leggi di una classe di fenomeni possono essere un utile punto di riferimento nell'altra, come i problemi incontrati nello sviluppo delle leggi in una classe di fenomeni e i modi con i quali si sono superati possono essere un utile punto di riferimento nell'altra. Ma queste analogie possono essere parziali, come dimostra la questione dell'emergere di quantità divergenti nell'ambito degli sviluppi della teoria dei campi (a partire dal campo elettromagnetico) e i modi nei quali questi problemi sono stati sanati, che faranno emergere l'esistenza di differenze tra i campi elettrodebole e forte e quello gravitazionale, come anche Bronstein e Solomon hanno messo per la prima volta in evidenza.

[8] Proprio per questo motivo l'autore sostiene che siamo ancora lontani da una formulazione definitiva della GQ.

Veniamo infine alla seconda domanda. 'Quale sarà lo sviluppo futuro? Seguirà l'indirizzo della fisica quantistica, o è forse più probabile che nuove idee rivoluzionarie si introdurranno nella fisica? La via del progresso farà un'altra svolta repentina, com'è spesso avvenuto in passato?' ([EI11]; pag. 269). Einstein e Infeld, ancora ne *L'evoluzione della fisica*, dopo aver discusso i grandi stravolgimenti che avevano portato le due teorie della relatività e la nuova fisica quantistica, volgendo lo sguardo al futuro si ponevano gli stessi quesiti. Dal nostro punto di vista possiamo sottolineare ancora una volta che l'estensione del concetto di quantizzazione ci ha offerto la possibilità di sottolineare il carattere *distintivo* delle varie formulazioni. Si pensi alla differenza tra i modelli planetari atomici, ad esempio quelli di Jeffery o Vallarta, e l'approccio di Bronstein, figlio della teoria quantistica dei campi. D'altra parte emerge chiaramente l'*unicità d'intenti* dei vari autori ed il fatto che anche i moderni filoni di ricerca si siano definiti in maniera lenta e graduale. Stiamo pensando all'approccio covariante che inizia "ufficialmente" con il lavoro di Rosenfeld del 1930, lavoro che, però, come abbiamo visto, contiene delle idee *analoghe* a quelle utilizzate dallo stesso autore nel 1927, in un contesto molto differente. È dimostrato come le teorie scientifiche siano tendenzialmente conservative. Abbiamo in mente la tesi Duhem-Quine, che si riferisce in prima battuta all'impossibilità di trovare, per una teoria fisica, l'"experimentum crucis" e che di fatto discute anche le conseguenze di questa affermazione con una tendenza a conservare la teoria il più a lungo possibile, scandagliando i possibili aggiustamenti marginali per venire incontro ai problemi che si presentano nell'atto della verifica della teoria stessa. Il nostro lavoro infatti mostra ancora una volta come nelle fasi di scoperta si proceda a partire da quanto ci è noto, provando, in rapida successione, tutte le possibili strade. E questo avviene anche mettendo semplicemente assieme, senza necessariamente cercare di integrarle sin da subito, le teorie note, per capire se è il legame logico tra esse che debba venire messo in discussione. In tal senso è emblematico lo sforzo di Solomon di discutere i limiti di applicabilità della teoria newtoniana al mondo microscopico.

Vorremmo concludere sottolineando che questa nostra tesi è un esempio di come la ricostruzione storica degli sviluppi di teorie del passato, tanto più del passato relativamente recente, possa far emergere la pluralità di motivazioni sottostanti a domande che non sempre hanno avuto una risposta, positiva o negativa che fosse. Questa ricostruzione, che è anche un ripercorrere cammini talvolta interrotti, non può che risolversi in uno stimolo anche per lo sviluppo di teorie future. Anche, e forse soprattutto, per il caso singolare di una teoria che non esiste, se non altro perché può aiutarci ad escludere alcune domande o a discriminare alcune strade rispetto ad altre. Concludendo ci piace osservare che tutti i tentativi da noi presentati sono mossi da due convinzioni, che sono ancora oggi diffuse nella comunità dei fisici: la prima afferma che 'con le nostre costruzioni teoriche è possibile raggiungere la realtà' ([EI11]; pag. 272), la seconda è la sicurezza che '[...] senza convinzione nell'intima armonia del nostro mondo, non potrebbe esserci scienza'([EI11]; pag. 272). Sono proprio queste convinzioni, emerse cercando di risolvere la questione di una descrizione quantistica della gravità, che hanno stimolato, e probabilmente stimoleranno ancora, il proliferare di speculazioni e di formulazioni matematicamente raffinate. In fondo: 'La scienza è un libro nel quale la parola «fine» non è né sarà mai scritta' ([EI11]; pag. 268).

5.1 Ringraziamenti

I miei ringraziamenti più sentiti vanno a coloro i quali mi hanno seguito da vicino nella stesura e nella discussione di questo lavoro, e senza i quali questa tesi non avrebbe visto la luce:

al *Prof. Giulio Peruzzi* che mi ha guidato nella selva intricata della Storia della Fisica e ha cercato di smussare con molteplici consigli le inclinazioni più spigolose del mio modo di scrivere;

al *Prof. Kurt Lechner*, che ha tentato in ogni modo di impedirmi di scrivere stupidaggini all'interno di questa tesi: l'abilità degli errori nel sopravvivere è nota, la speranza è che questa tesi abbia superato "l'approssimazione di ordine zero".

Infine a mia moglie *Sara*, che in ogni suo gesto e in ogni momento non ha mai mancato di sostenermi, anche nei momenti di difficoltà, di fronte ai quali la Vita ci mette in continuazione, ripetendomi, come ci siamo ripromessi dieci anni fa, che *ogni giorno ha la sua pena*.

Bibliografia

[Bus97] Martha Cecilia Bustamante (1997); Jacques Solomon (1908-1942): profil d'un physicien théoricien dans la France des années trente. *Revue d'histoire des sciences.*, 50, pages 49–88.

[Cao99] Tian Yu Cao (Editor), chapter V Quantum field theory and space-time. "Introduction" by John Stachel, pages 166–175 (Cambridge University Press, 1999).

[EI11] Albert Einstein and Leopold Infeld, *L'evoluzione della fisica* (Torino: Bollati Boringhieri, 2011).

[Ein07] Albert Einstein (1907); Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der Spezifischen Wärme. *Annalen der Physik*, 22, pages 180–190.

[FFZ12] Marc Nardmann Jürgen Tolksdorf Felix Finster, Olaf Müller and Eberhard Zeidler (Editors), *Quantum Field Theory and Gravity: Conceptual and Mathematical Advances in the Search for a Unified Framework* (Birkhäuser, 2012).

[Jam06] Ioan M. James (Editor), *History of Topology*, chapter "Topology and physics-a historical essay" by Charles Nash (Elsevier-North Holland, 2006).

[Nic13] Hermann Nicolai (2013); Quantum gravity: the view from particle physics.

Key: Nicolai
Annotation: arXiv: gr-qc 1301.5481

[Ric13] "*Pourparlers* for Amalgamation: Some Early Sources of Quantum Gravity Research" by Dean Rickles. In: *Traditions and Transformations in the History of Quantum Physics*, (Editors) Christoph Lehner Shaul Katzir and Jürgen Renn, chapter 6 (Max Planck Research Library for the History and Development of Knoledge. Proceedins 5, 2013). Third International Conference on the History of Quantum Physics, Berlin, June 28 – July 2, 2010; http://www.edition-open-access.de/proceedings/5/index.html.

[Wig60] Eugene P. Wigner (1960); The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13, pages 1–14.

Appendice A

Riviste consultate

Il reperimento dei lavori analizzati è cominciato con una ricognizione delle riviste scientifiche esistenti nel periodo da noi preso in esame, 1915-1945, partendo da quelle presenti nell'archivio del Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università degli Studi di Padova ed ampliando il più possibile il raggio d'azione. La ricerca è stata effettuata per la maggior parte dei lavori per via elettronica, utilizzando alcune parole chiave inserite nei motori di ricerca delle singole riviste, limitandoci al **titolo** dei lavori. La lista delle parole chiave usate è la seguente: *geometry, gravity, gravitation, gravitational, metric, quantum, quanta, quantization, relativity, space, space-time, wave; relativistisch, allgemein, Quantentheorie, Relativitätstheorie, Wellenfelder*. La lista delle riviste di fisica in ordine alfabetico è la seguente:

- Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae
- Acta Physica Polonica
- American Journal of Physics
- Annalen der Physik
- Annales de l'institut Henri Poincaré
- Annales de physique
- Anales de la Real Sociedad Española de Física y Química
- Annalen der Physik
- Annual Review
- Astronomische Nachrichten

- Fortschritte der Physik
- Canadian Journal of Physics
- Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences
- Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften SPRINGER
- European Physical Journal
- Helvetica Physica Acta
- Journal de Physique et le Radium
- Journal of Physics
- Journal of the Franklin Institute
- Monthly Notices of the Royal Astronomical Society
- Nature
- Naturwissenschaften SPRINGER
- Nuovo Cimento della Societa' Italiana di Fisica
- Philosophical Magazine
- Pramana
- Physica
- Physica Scripta
- Physical Review
- Physics Abstracts
- Physikalische Berichte
- Physics-Uspekhi
- Reports on Progress in Physics
- Reviews of Modern Physics
- The Astronomical Journal

- The Astrophysical Journal
- Proceedings of the Physical Society
- Proceedings of the Royal Society
- Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America
- Progress in Nuclear Physics
- Progress in Particle and Nuclear Physics
- Reports on Progress in Physics
- Zeitschrift für Naturforschung
- Zeitschrift für Physik

I siti che hanno permesso la nostra ricerca elettronica sono i seguenti:

- http://przyrbwn.icm.edu.pl/APP/apphome.html
- http://www.tandfonline.com (Taylor & Francis)
- http://scitation.aip.org/content/aapt/journal/ajp
- http://www.annphys.org/
- https://rsef.es/boletin
- http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34462944f/date
- http://onlinelibrary.wiley.com/advanced/search
- http://www.annualreviews.org/
- http://www.nrcresearchpress.com/journal/cjp
- http://www.epj.org
- http://iopscience.iop.org/search
- http://journals.jps.jp/journal/jpsj
- http://jetp.ac.ru/
- http://www.ias.ac.in/pramana/index.htm

- http://journals.aps.org/
- http://physicsessays.org/
- http://www.elsevier.com/advanced-search AND http://www.sciencedirect.com
- http://oxfordjournals.org/en/
- http://www.znaturforsch.com/ AND http://www.znaturforsch.com/a.htm
- http://www.aanda.org/
- http://jkas.kas.org/
- http://www.actaphys.uj.edu.pl/
- http://intlpress.com
- http://www.worldscientific.com
- http://www.mathnet.ru (→ ENGLISH → Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika)
- http://retro.seals.ch/digbib/browse4
- http://www.journaldephysique.org/
- http://www.nature.com
- http://digital-library.theiet.org/search/advancedsearch
- http://rspa.royalsocietypublishing.org/
- http://www.pnas.org/content/current
- http://link.springer.com/advanced-search

Riportiamo anche la lista di alcune riviste di matematica:

- Acta Mathematica (1882–present)
- Annals of Mathematics
- Bulletin of the American Mathematical Society
- Duke Mathematical Journal (1935–present)

- Inventiones Mathematicae (1966-present)
- Journal of Algebra
- Journal of the American Mathematical Society (1988-present)
- Topology (1962–2009)

Come prima i relativi siti sono i seguenti:

- http://www.jstor.org/journals/0003486x.html
- http://www.ams.org/journals/bull/
- http://projecteuclid.org/euclid.dmj
- http://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/jams

Segnaliamo il sito http://esoads.eso.org/journals_service.html il quale non permette di fare una ricerca, ma contiene la scannerizzazione di alcune riviste di cui avevamo delle referenze.

Altre riviste presenti in bibliografia sono il prodotto di ricerche secondarie di carattere e non sono state analizzate in maniera altrettanto sistematica.