



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA**

Sede Amministrativa: Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale (DIMEG)

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN: INGEGNERIA INDUSTRIALE

INDIRIZZO: Progettazione Meccanica e Ingegneria Motociclistica

CICLO: XXIII

TITOLO TESI

**Ottimizzazione del Comportamento Dinamico Dei Motocicli
Attraverso Il Software Xoptima (Metodo della Manovra Ottima)**

Direttore della Scuola : Ch.mo Prof. Paolo Bariani

Supervisore :Ch.mo Prof. Vittore Cossalter

Dottorando : Simon Bobbo

SOMMARIO

INTRODUZIONE	7
CAPITOLO 1.....	11
CONCETTI DI MANOVRABILITÀ E MANEGGEVOLEZZA: METODI PER VALUTARLI.....	11
1.1 - INTRODUZIONE	11
1.2 - CONCETTI DI MANOVRABILITÀ E MANEGGEVOLEZZA IN LETTERATURA.....	13
1.3.- METODI USATI PER VALUTARE LA MANOVRABILITÀ E LA MANEGGEVOLEZZA.....	14
1.3.1 - Test Sperimentali	14
1.3.2 - Modelli Matematici E Modelli Di Pilota.....	21
1.4. - CONCLUSIONI.....	25
CAPITOLO 2.....	27
INTRODUZIONE DEI CONCETTI DI MANOVRABILITÀ, MANEGGEVOLEZZA E METODO DELLA MANOVRA OTTIMA	27
2.1 - INTRODUZIONE	27
2.2 - CONTROLLO DELLA DINAMICA DI UNA MOTOCICLETTA.....	28
2.3 - "IL PENDOLO INVERSO" PER LO STUDIO DELLA DINAMICA LATERALE DELLA MOTOCICLETTA	31
2.4 - UNA MANOVRA SEMPLICE: INTRODUZIONE ALLA "MANOVRA OTTIMA"	37
2.3.1 - Soluzione del problema di minimo valore efficace delle forze di contatto.....	39
2.3.2 - Soluzione del problema di tempo minimo.....	45
2.4. - CONCLUSIONI.....	49
CAPITOLO 3.....	52
IL METODO DEL CONTROLLO OTTIMO APPLICATO A SISTEMI MULTIBODY	52
3.1 - INTRODUZIONE	52
3.2 - ALGORITMI RISOLUTIVI	53
3.3 - FORMULAZIONE MATEMATICA.....	54
CAPITOLO 4.....	62
MODELLO MOTOCICLETTA A 12 GDL.....	62
4.1 - INTRODUZIONE.....	62
4.2 - MODELLO DINAMICO.....	62
4.3 - GRADI DI LIBERTA' DEL MODELLO	63
4.4 - TERNE E CORPI.....	64
4.4.1 Motocicletta.....	64
4.4.2 Ruota Posteriore.....	66
4.4.3 Avantreno.....	67
4.4.4 Ruota Anteriore.....	68
4.5 - FORZE ATTIVE E REATTIVE NEL MODELLO	69
4.5.1 Forza Di Gravita'.....	69
4.5.2 Coppia Di Sterzo E Ammortizzatore Di Sterzo	70
4.5.3 Coppia Frenante Alla Ruota Posteriore E Coppia Motore.....	71
4.5.4 Coppia Frenante Alla Ruota Anteriore.....	73
4.5.5 Forza Resistenza Aerodinamica	74
4.5.6 Forze Delle Sospensioni.....	75

4.5.6.1	Modello Delle Sospensioni	75
4.5.6.1.1	descrizione della parte elastica	76
4.5.6.1.1	descrizione dello smorzamento	79
4.5.7	Forze E Coppie Agenti Sul Pneumatico Posteriore.....	82
4.5.8	Modello Del Pneumatico.....	83
4.5.9	Descrizione Del Tracciato	88
4.5.10	Curva Di Coppia Del Motore	91
4.6	- EQUAZIONI	93
4.7	- DEFINIZIONE DEGLI INGRESSI	95
4.7	- CONDIZIONI AL CONTORNO.....	97
CAPITOLO 5	100
XOPTIMA GUI SOFTWARE	100
5.1	- INTRODUZIONE.....	100
5.2	- INSTALLAZIONE ED AVVIO DEL PROGRAMMA	101
5.3	- DESCRIZIONE DEL PROGRAMMA	101
5.3.1	Scelta Del File Input Della Motocicletta	103
5.3.2	Compilazione Del File Input Della Motocicletta.....	104
5.3.3	Scelta Del File Input Del Circuito	106
5.3.4	Compilazione Del File Input Di Un Tracciato.....	108
5.4	- ESECUZIONE DELLA SIMULAZIONE	109
5.4.1	Forcella Anteriore Flessibile	109
5.4.2	Sterzo Al Posteriore.....	112
5.5	- VISUALIZZAZIONE DEI RISULTATI	116
5.5.1	Confronto Di Risultati.....	119
5.5.1.1	esempio di analisi delle prestazioni di un veicolo superbike.....	120
CAPITOLO 6	130
APPLICAZIONE DELLA MANOVRA OTTIMA PER L'OTTIMIZZAZIONE DEL GEARBOX.....		130
6.1	- INTRODUZIONE.....	131
6.2	- ANALISI DEL GEARBOX	131
6.3	- CARATTERIZZAZIONE DEL PROPULSORE	132
6.4	- TRACCIATO VELOCE	134
6.4.1	- Confronto Con La Telemetria	135
6.4.2	- Analisi Dei Risultati Della Simulazione	136
6.5	- CIRCUITO LENTO	137
6.5.1	Confronto Con La Telemetria	138
6.5.2	Analisi Dei Risultati Della Simulazione	139
6.6	- OTTIMIZZAZIONE DEI RAPPROTI DI VELOCITA' DEL CAMBIO (GEARBOX)	140
6.6.1	Formulazione Del Problema Matematico.....	140
6.6.2	Gara Su Circuito Veloce.....	142
6.6.2.1	cambio ottimizzato	142
6.6.2.2	analisi delle performance di miglioramento.....	143
6.6.3	Gara Su Circuito Lento	144
6.6.3.1	cambio ottimizzato	144
6.6.3.2	analisi delle performance di miglioramento.....	145
CAPITOLO 7	148
INFLUENZA DELL'ADERENZA E DELLA POTENZA DEL MOTORE SULLA TRAIETTORIA IDEALE	148
7.1	- CURVA AD L.....	148
7.1.1	Descrizione Delle Fasi Di Manovra	149
7.1.2	Fase Di Ingresso In Curva.....	151
7.1.3	Fase Di Uscita Dalla Curva	154
7.2	- ANALISI PARAMETRICA	156
7.2.1	Performance Assoluta.....	156

7.2.2 <i>Analisi Semplificata</i>	158
7.2.2.1 <i>modello dinamico semplificato</i>	158
7.2.2.2 <i>massima frenata</i>	161
7.2.2.3 <i>massima accelerazione</i>	163
7.3 - ENTRATA IN CURVA	164
7.4 - USCITA DALLA CURVA	165
7.5 - CONCLUSIONI	166
CONCLUSIONI	170
BIBLIOGRAFIA	172

INTRODUZIONE

Com'è noto le proprietà di una motocicletta si possono descrivere in termini di manovrabilità e di maneggevolezza.

La prima qualifica la capacità del veicolo di eseguire determinate manovre, ovvero la massima prestazione fisicamente ottenibile con la motocicletta a prescindere dall'influenza dell'abilità del pilota; la seconda, invece, considera anche il grado di difficoltà effettivamente percepito dal pilota.

La misura oggettiva di questi due parametri è tuttavia molto complicata. Il metodo sperimentale prevede la pianificazione di una campagna di test, dove si eseguono manovre semplici come ad esempio cambi di corsia, slalom, curve a U, ecc. eseguite da differenti piloti. Per ciascuna prova si registrano i giudizi espressi dal collaudatore e nel contempo si misurano, attraverso sensori opportunamente installati, i valori di alcune grandezze chiave: la coppia applicata sul manubrio di sterzo da parte del pilota, l'angolo di rollio, la velocità d'imbardata, ecc. Da tutte queste informazioni si cerca quindi di quantificare la maneggevolezza e la manovrabilità del veicolo.

Tuttavia ci si rende facilmente conto di come tali valutazioni possano essere sensibilmente influenzate dal fattore umano: il massimo angolo di rollio dipende anche dalle capacità tecniche del pilota e dal suo grado di feeling con la moto; allo stesso modo i valori misurati per la coppia di sterzo possono essere influenzati dallo stile di guida, dal grado di *aggressività* e dallo spostamento del corpo che il pilota effettua nell'affrontare la manovra. Statisticamente si otterrà quindi un'indicazione tanto più accurata quanto più elevato sarà il numero di collaudatori coinvolti.

È comunque doveroso affermare come la messa a punto delle motociclette, soprattutto quelle destinate alle competizioni, si basi quasi esclusivamente su questo metodo; inoltre le case costruttrici preferiscono la professionalità, l'esperienza e soprattutto la sensibilità dei tester rispetto alla loro numerosità. Non è un caso, infatti, che i successi di un team partano e siano strettamente correlati alla bravura dei propri collaudatori.

Un metodo alternativo è invece rappresentato dall'utilizzo di codici di calcolo che si basano su modelli matematici che descrivono il comportamento del sistema veicolo-pilota.

A tal proposito in questa tesi si descrive il Metodo della Manovra Ottima. In particolare vengono illustrate le potenzialità del software Xoptima, sviluppato all'interno di MDRG (*Motorcycle Dynamics Research Group*) del *Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale* dell'Università degli Studi di Padova.

Il metodo, presentato in modo rigoroso in questo lavoro, è del tutto generale, e risolve un problema di tempo minimo in cui un veicolo, soggetto a vincoli fisici (i.e.: aderenza dei pneumatici, bordi della strada, ecc.), deve muoversi da un punto iniziale ad un punto finale di un dato tracciato.

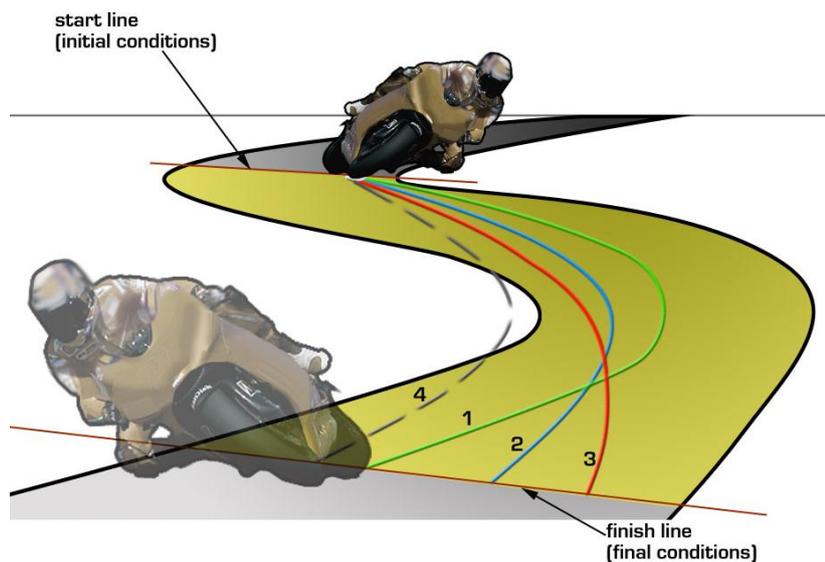


Figura1: il "Metodo della Manovra Ottima"

Gli ingressi di controllo, che rappresentano le azioni del pilota, sono ottenuti come parte integrante del metodo di risoluzione, e servono a produrre la manovra più efficiente. Il moto risultante è detto *manovra ottima*, e gli ingressi di controllo che la generano sono definiti *ingressi ottimi*.

Una motocicletta e il suo pilota possono essere ridotti allo schema in Figura2.

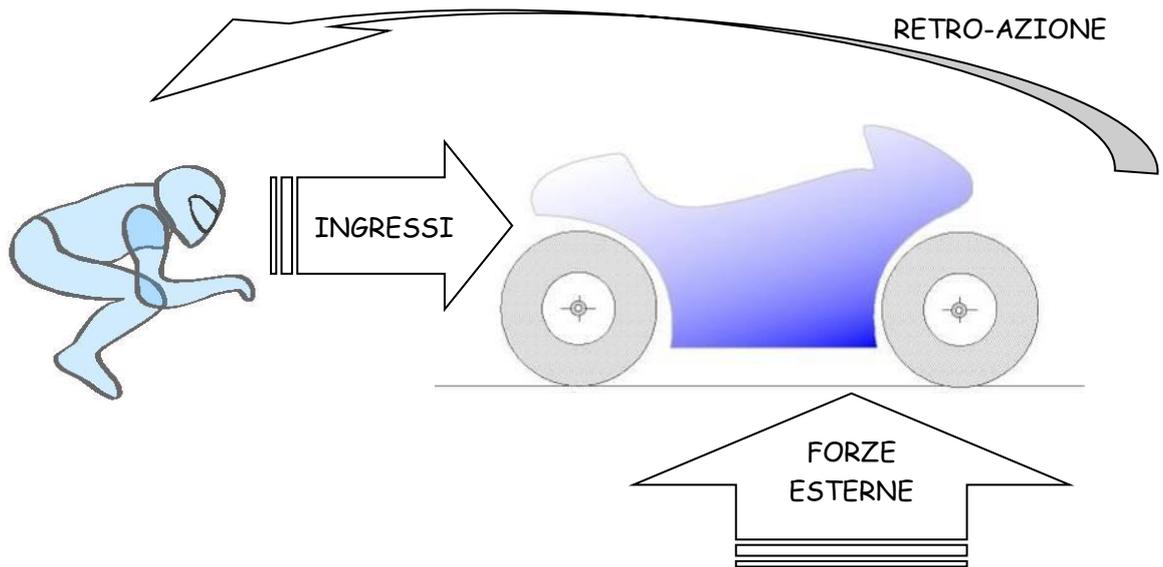


Figura 2: Schema riassuntivo del metodo della Manovra Ottima

Il pilota agisce sul sistema motocicletta attraverso una serie di input come ad esempio il gas, i freni e la coppia applicata allo sterzo. La moto reagirà, secondo le leggi fisiche della dinamica che la governano, in funzione non solo degli ingressi derivanti dal guidatore, ma anche dall'interazione che essa subisce con il terreno, come le forze che si sviluppano tra pneumatici e terreno.

A completare lo schema viene rappresentata anche una retro-azione che definisce il nostro sistema come un loop-chiuso che parte dalla motocicletta e ritorna al pilota, influenzandone i successivi input.

La motocicletta è un sistema intrinsecamente instabile, che necessita in continuazione di correzioni e manovre per rimanere in equilibrio, pertanto la definizione matematica di un modello reale di pilota è molto complicata: un certo modello potrebbe essere rappresentativo di una categoria di piloti e nel contempo essere molto distante da un'altra.

Inoltre una certa motocicletta può adattarsi in modo migliore alle caratteristiche di un pilota, mentre per altri può essere meno performante. Nel campo delle competizioni, è noto come una motocicletta, grazie a determinate caratteristiche che ben si sposano con le preferenze del suo pilota, può portarlo alla vittoria, mentre per il suo compagno di scuderia può risultare ostica e ingovernabile confinandolo in posizioni più arretrate.

La scelta operata nel Metodo della Manovra Ottima è stata pertanto quella di utilizzare un pilota *ideale*, ovvero quello che riesce in ogni situazione a sfruttare al massimo le potenzialità della motocicletta che sta conducendo. In questo modo è possibile effettuare un valido e oggettivo confronto tra due motociclette valutandone con obiettività le

caratteristiche di manovrabilità e maneggevolezza, senza ottenere risultati fuorvianti e in quanto influenzati dall'abilità di un pilota *reale*.

Un pilota ideale, infatti, può essere considerato un ottimo tester essendo oggettivamente il migliore ed essendo in grado di condurre al limite il mezzo che sta pilotando.

Si pensi di dover partire da un certo punto iniziale per raggiungere, percorrendo un dato tracciato, il punto finale (Figura 1 **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**).

Le manovre e le traiettorie per portarsi da un punto ad un altro all'interno del tracciato sono infinite, ciascuna differente da un'altra a seconda dell'azione che viene apportata dal pilota sul gas, sui freni, dal rapporto utilizzato e dalla coppia applicata allo sterzo. Una soltanto tra tutte queste manovre, però, permetterà al pilota di condurre la sua motocicletta dal punto iniziale al punto finale nel più breve tempo possibile. Questa manovra sarà caratterizzata dallo sfruttamento massimo delle caratteristiche dinamiche della motocicletta, dell'interazione tra pneumatici e asfalto e della pista che ha a disposizione. È evidente come solamente il pilota *ideale* sia in grado di effettuare tale manovra che prende pertanto il nome di *manovra ottima*.

L'obiettivo della manovra ottima, pertanto, è quello di minimizzare il tempo di percorrenza, evidentemente nel rispetto dei limiti fisici imposti e dal sistema e dall'ambiente: è ovvio come una traiettoria che esca dal tracciato tagliando eccessivamente una curva non possa essere accettata, al pari di una manovra che sfrutti il pneumatico oltre il suo limite di aderenza.

Per rispettare tutti i vincoli fisici e quindi creare una simulazione aderente alla realtà, sono state imposte delle limitazioni anche sui carichi minimi presenti sui punti di contatto pneumatico-strada, in modo da evitare l'impennamento ed il rovesciamento del veicolo, oltre che, ovviamente, sulla potenza erogabile dal motore.

Questi limiti possono considerarsi sufficienti per la descrizione delle caratteristiche di manovrabilità; nel caso si voglia tenere conto anche della maneggevolezza, bisogna introdurre anche delle limitazioni per quanto riguarda la velocità con cui il pilota esercita il suo controllo su sterzo, freni e gas.

Il pilota ideale governa la motocicletta variando gli input in modo quasi istantaneo, e si può affettivamente affermare come un ottimo pilota reale si avvicini proprio a questi standard.

Il software Xoptima, pertanto, definisce una funzione detta *funzione obiettivo* o *penalità* a partire dalla somma dei vincoli suddetti. Di questa funzione calcola la soluzione (ovvero la manovra) che la rende minima. Viene chiamata penalità perché qualora non rispetti i vincoli e l'obiettivo di tempo minimo viene notevolmente penalizzato (la funzione assume valori molto alti e quindi lontani dal minimo) e di conseguenza scartata.

CAPITOLO 1

CONCETTI DI MANOVRABILITÀ E MANEGGEVOLEZZA: METODI PER VALUTARLI

1.1 - INTRODUZIONE

"Il successo della prototipazione dinamica di un veicolo è pregiudicata nella maggior parte dei casi dal problema di decidere quali possano essere le migliori qualità del veicolo e viceversa quali sono i parametri che ci fanno ottenere questo migliore comportamento". Questo è quanto scrive R.S. Sharp in *"Vehicle dynamics and the judgment of quality"* ed è un concetto largamente condiviso da molti autori. Infatti, è facile notare come in letteratura è notevole lo sforzo di individuare quali siano le grandezze che definiscono la bontà o meno di un veicolo e com'è possibile misurarle in modo oggettivo. Generalmente si usano i termini di "maneggevolezza" e "manovrabilità" per stabilire il grado di guidabilità di un veicolo, inteso come facilità di guida o come capacità di raggiungere le massime prestazioni (generalmente il tempo minimo per eseguire un giro di pista).

Tuttavia, questo problema è una conseguenza di un'altra questione fondamentale: il veicolo è comunque condotto da un essere umano e quindi va valutato nel suo complesso, ovvero come sistema uomo-macchina ed è a partire da questo concetto che si devono sviluppare le considerazioni sulla maneggevolezza e manovrabilità dei veicoli.

Questo fatto è tanto più vero nel caso dei veicoli a due ruote in quanto guidarli non è una cosa semplice, perché la motocicletta è un sistema intrinsecamente instabile. Infatti, per far curvare un veicolo a due ruote è necessario inclinarlo dal lato in cui si desidera

girare. Tuttavia esiste il fenomeno "dell'*out-tracking*" che rende la manovra non così intuitiva. Infatti, se si desidera curvare a destra è necessario ruotare lo sterzo prima a sinistra in modo tale che l'effetto della forza centrifuga faccia cadere la motocicletta sul lato destro. In seguito si ruota lo sterzo a destra per cercare l'equilibrio necessario a percorrere la curva. Quando il pilota "sente" il veicolo inclinarsi cerca in qualche modo di trovare un equilibrio agendo sullo sterzo o muovendo il corpo.

Attraverso la percezione del movimento e degli effetti degli ingressi di controllo applicati un essere umano impara a governare una motocicletta. Si capisce fin da ora quanto complicato sia guidare un veicolo a due ruote e il motivo per cui i modelli matematici che descrivono le azioni del pilota sono sempre una semplice schematizzazione dell'effettivo comportamento. Oltre a questo va rilevato che, tanto maggiori sono la sensibilità, la prontezza, l'esperienza e le capacità fisiche-mentali di un pilota, tanto più lui è in grado di condurre il veicolo sfruttando al meglio le sue caratteristiche intrinseche nelle condizioni in cui si trova ad operare. Si può intuire quindi perché molti autori, ed in particolare quelli giapponesi, sostengono che le prestazioni del sistema motocicletta-pilota che si vanno a misurare cambiano in modo considerevole in base alle condizioni di marcia e all'abilità di guida del conducente. Ogni pilota ha un suo stile di guida e delle capacità individuali che nascono da una lunga esperienza di prove, errori e correzioni (per tradurre il termine inglese *trail and error*) che gli permettono di guidare una motocicletta in un modo del tutto soggettivo. Questo fatto risulta fondamentale soprattutto nel caso della valutazione delle prestazioni massime del veicolo. Se un pilota non è in grado di sfruttare completamente il veicolo non è neppure possibile stabilire se effettivamente il veicolo è migliore o peggiore rispetto ad un altro in base al solo giudizio del pilota. D'altra parte è anche naturale chiedersi: se un veicolo che è il migliore in termini di prestazioni massime è allo stesso tempo adatto ad ogni livello di pilota? E come si può migliorare sia in termini di prestazioni massime che in facilità di guida?

Con questa ricerca si è cercato di rispondere a queste domande seguendo un approccio oggettivo e rigoroso, in modo che, definito cosa s'intende per i concetti di manovrabilità e maneggevolezza, sia possibile valutarli per mezzo di un solo indice. Questo è il risultato fondamentale dell'applicazione del *Metodo della Manovra Ottima*.

Tuttavia, prima introdurre il metodo e applicarlo, si desidera presentare i concetti e le soluzioni trovate da diversi autori nel corso degli anni passati. In tal modo sarà possibile mettere in luce i punti in comune e sottolineare gli eventuali punti deboli che sono alla base delle motivazioni di questa ricerca.

1.2 - CONCETTI DI MANOVRABILITÀ E MANEGGEVOLEZZA IN LETTERATURA

"Manovrabilità" e "maneggevolezza" che cosa sono? Che legame possono avere con la sicurezza? Com'è possibile misurarle e quali parametri le influenzano? Tutte queste risultano essere delle questioni cui i vari ricercatori e ingegneri che lavorano nel settore dei veicoli cercano di dare delle risposte precise da ormai circa 30 anni. Il problema fondamentale risiede nel fatto che non si riesce a ricavare una definizione univoca di questi termini. Le definizioni e la percezione del concetto di manovrabilità e maneggevolezza sono spesso diverse per i vari autori, per cui anche il modo in cui vengono misurate e valutate, sono differenti tra loro. Solo una rigorosa definizione matematica di questi concetti è utile dal punto di vista ingegneristico. Infatti, risolto questo punto, è possibile formulare delle ipotesi sui modi e le metodologie da utilizzare per valutare la manovrabilità e la maneggevolezza.

La strada fino ad ora seguita per determinare le caratteristiche di un veicolo sia esso a due o quattro ruote sono di cercare l'esistenza di correlazioni tra i dati sperimentali ottenuti dai test in pista o durante manovre tipiche e i giudizi soggettivi dei collaudatori. A questi si cerca sempre di affiancare dei modelli matematici nel tentativo di descrivere lo stesso fenomeno, con lo scopo di riprodurre il comportamento ottenuto dai dati sperimentali e capirne i motivi. L'astrazione da queste "presunte" correlazioni di indici di prestazione da usare come valutazioni oggettive delle qualità intrinseche del veicolo non sempre significano capire il fenomeno.

"La memoria storica che sta alla base di questa metodologia insegna che solo quelle correlazioni che hanno portato ad una profonda e chiara conoscenza del fenomeno cui si riferiscono sono sopravvissute e sono diventate di comune applicazione" [1]. E i modelli matematici sono un valido aiuto in questo.

Ad ogni modo definire la guidabilità di un veicolo rimane sempre un problema spinoso in quanto è una caratteristica complessiva che viene creata da un insieme di molteplici e differenti componenti del mezzo, quali sono il motore, i freni, l'aerodinamica, la ciclistica e i pneumatici. Inoltre, a questo si aggiunge una forte componente soggettiva nell'utilizzo e nella valutazione che il pilota fa del mezzo, in dipendenza delle sue capacità e sensibilità di guida. Staccarsi dalla soggettività del giudizio del pilota è fondamentale, ma allo stesso tempo alquanto difficile. La medesima dipendenza si ha anche con l'utilizzo dei modelli matematici che descrivono il comportamento del pilota. Sarebbe quindi auspicabile avere un solo indice che valuti in modo oggettivo le prestazioni del sistema veicolo-pilota e fornisca un'informazione globale. Spesso quando si cambiano uno o più parametri si possono ottenere risultati difficilmente interpretabili ai fini della guidabilità di un veicolo soprattutto se si hanno molti indici e grandezze da confrontare fra loro.

1.3.- METODI USATI PER VALUTARE LA MANOVRABILITÀ E LA MANEGGEVOLEZZA

I veicoli sono dei sistemi molto complessi controllati dagli esseri umani i quali a loro volta agiscono in modo differente in base al veicolo e alla loro esperienza. I fattori determinanti dell'intero sistema veicolo-pilota si possono dividere in due categorie:

- 1: Proprietà meccaniche, legate ai parametri di progetto del veicolo, come inerzie masse e loro posizioni, pneumatici, motore, e via dicendo.
- 2: Azioni di controllo del pilota, legate alle sue capacità psicofisiche.

Sebbene il comportamento dinamico dei veicoli possa essere simulato al calcolatore in risposta agli ingressi forniti dal pilota, non è ancora veramente chiaro quale comportamento determina una "buona maneggevolezza". In definitiva ciò che conta è il giudizio del pilota. Purtroppo il comportamento dei piloti e le strategie che seguono per guidare un veicolo sono molto complessi. Molti studi sono stati condotti sul funzionamento del cervello umano quando impara a guidare o sceglie quella migliore, tra numerose opportunità. In particolare il campo dell'aeronautica è stato il più fertile in questo senso. Tuttavia recentemente è stato pubblicato un lavoro da K. Spackman [2] sul modo in cui funziona il cervello dei piloti di formula 1 e com'è possibile aiutarli a migliorare il loro stile di guida per incrementare le prestazioni. Quest'autore mette in luce come effettivamente anche tra i piloti di alto livello esistano delle differenze e ci siano alcuni che sono in grado di scegliere sempre la migliore traiettoria. La migliore traiettoria significa sfruttare al meglio il veicolo. A questi studi può essere affiancato un intero filone legato alla logica fuzzy e alle reti neurali. Entrambe cercano di mimare il comportamento di un pilota reale durante la guida, comportamento che non può essere schematizzato, se non in parte, con i controlli PID (proporzionali derivativi e integrali). Le reti neurali sono in grado di riprodurre, se ben allenate, comportamenti di guida anche molto complessi. Purtroppo non forniscono una spiegazione chiara del fenomeno che ci sta sotto. D'altra parte i controlli fuzzy hanno prodotto dei risultati notevoli in quanto ci sono delle leggi non lineari note che collegano gli ingressi con le uscite. E in questo sono sicuramente superiori ai classici controlli PID. Anche i controlli fuzzy riproducono in modo sorprendentemente fedele il comportamento di guida dei piloti, ma la bontà del controllo è basata su una buona descrizione della logica di controllo stessa. In termini più semplici è necessario scrivere delle regole che dicono come agire se si verificano determinate situazioni. Si capisce fin da ora che pur producendo dei risultati importanti si è sempre legati alla definizione del modello di pilota e non si ha la certezza che il giudizio o la valutazione che si ottiene sia indipendente dal modello.

1.3.1. - Test Sperimentali

A causa della complessità del problema e anche per validare i modelli matematici sviluppati è sempre necessario analizzare il comportamento reale di un veicolo. Anche nel campo delle motociclette, sebbene in misura minore rispetto agli autoveicoli, fin dal

1970 si sono condotti numerosi test sperimentali. Citare e illustrare i punti fondamentali dei lavori di questi autori è importante perché da questi studi spesso trovano fondamento i modelli matematici e i metodi teorici. L'elemento comune che si evince dalla lettura di questi lavori è il fatto che il comportamento della moto è descritto dalla logica con cui sono legate le grandezze d'ingresso ed uscita nelle manovre di utilizzo del mezzo. In sostanza si è pensato al sistema veicolo-pilota in termini funzionali, dove ci sono vari blocchi tra loro collegati con delle grandezze d'ingresso e altre di uscita. In questo senso da numerose ricerche è emerso che il pilota controlla l'angolo di rollio utilizzando la coppia sterzante. Questo fatto giustifica tra le altre cose la suddivisione del sistema pilota-veicolo in blocchi funzionali e giustifica l'inseguimento del rollio nelle simulazioni al calcolatore per ottenere la coppia con cui guidare la motocicletta. Oltre a questo si nota come molti autori abbiano cercato di sintetizzare la prestazione attraverso un indice. Risulta chiara l'esigenza di trovare il modo di esprimere in qualche maniera una misura compatta del grado di maneggevolezza della motocicletta senza fare ricorso ad un numero eccessivo di grandezze da confrontare.

Con queste premesse è fondamentale stabilire le manovre da far compiere alla moto per riprodurre condizioni e situazioni di utilizzo realistiche. Questo vale tanto nelle simulazioni quanto nei test sperimentali. Infatti, non è possibile scomporre una generica traiettoria in una semplice sequenza di curve e rettilinei perché un pilota affronta diverse manovre in modo differente. Ovvero una curva a raggio costante è diversa da uno slalom da una schivata di un ostacolo o da un cambio di corsia. Inoltre è anche vero che in molti casi, soprattutto in pista, il modo di guidare dipende dalle manovre precedenti e da quelle successive. Infatti, il modo di guidare il veicolo è diverso se si affronta per la prima volta o se è noto¹. Per questo motivo nei test sperimentali spesso sono stati messi a punto dei sistemi per evitare che un pilota imposti la manovra sapendo da che parte deve andare o che tipo di situazione deve affrontare.

Tenendo conto di quanto detto sono state definite diverse manovre differenti per spaziare tutto il campo delle situazioni in cui un veicolo e il suo pilota si possono trovare. Tra le manovre più usate ci sono le curve a raggio costante che sono impiegate per analizzare il comportamento d'inserimento in curva e la condizione di moto stazionario. Per questo tipo di test tra i risultati più importanti ci sono quelli di (1978) W. Zellner e D. H. Weir i quali hanno studiato le condizioni a regime provando diverse moto a diverse velocità variando i raggi di curvatura [3], [4]. Essi basandosi sulla diffusa convinzione che il pilota controlla con la coppia di sterzo l'angolo di rollio, fatto per altro

¹ Si capisce fin da ora che quando nelle simulazioni si fa "inseguire" un angolo di rollio desiderato (attraverso l'utilizzo di controlli PID), o una traiettoria, si capiscono solo certi fenomeni, perché si fissano determinate condizioni (la traiettoria o l'angolo di rollio). Si potrebbe pensare che i controlli fuzzy non siano soggetti a questo problema, ma in realtà per il fatto che sono sempre basati su delle leggi che descrivono come il modello di pilota deve agire mantengono anch'essi un certo grado di soggettività nella pianificazione della manovra.

dimostrato da alcuni autori, hanno calcolato per diverse velocità i rapporti tra queste due grandezze che quantificano la risposta del veicolo all'azione del pilota. I grafici del rapporto $\frac{\tau}{\phi}$ in funzione della velocità di percorrenza della curva mostrano come la coppia passa da valori negativi a quelli positivi, ovvero manifesta il passaggio tra due comportamenti diversi del veicolo.

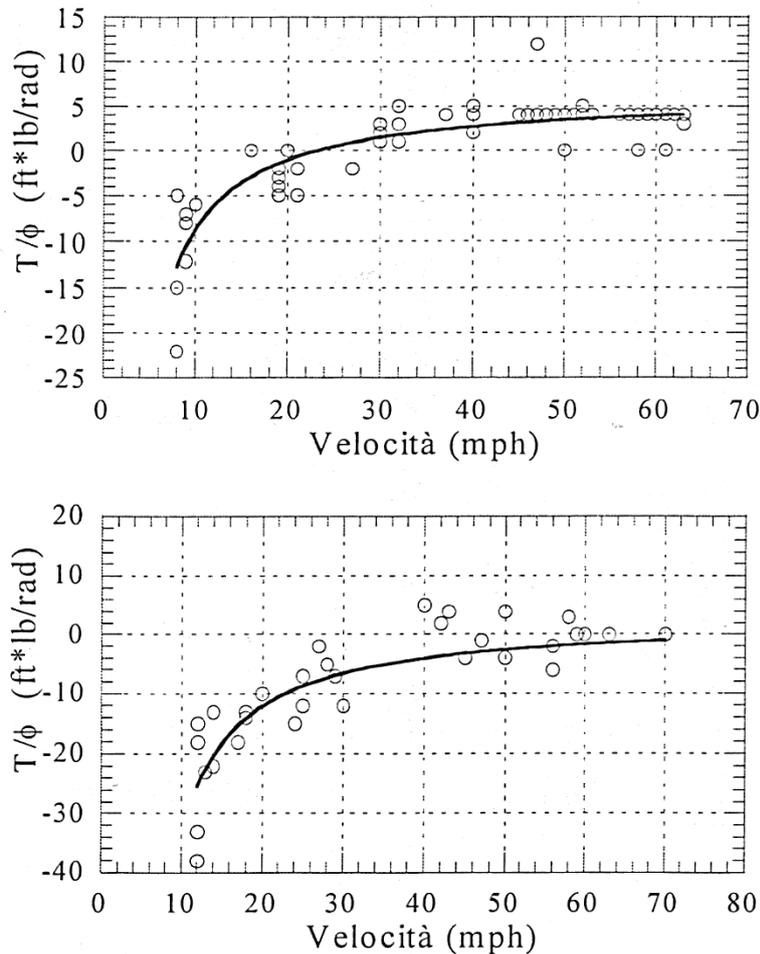


Figura 0.1 -- Rapporti coppia di sterzo angolo di rollio in funzione della velocità.

Questa tendenza a passare da una coppia positiva ad una negativa non è comune a tutte le motociclette. Capire quali sono i parametri di progetto che influenzano questo fenomeno, è altrettanto importante. Cossalter, Lot, Doria [5] attraverso un modello matematico che calcola la cinetostatica della motocicletta sono riusciti ad ottenere delle curve simili a quelle di Figura 0.1 - - Rapporti coppia di sterzo angolo di rollio in funzione della Figura 0.1.

Nei loro grafici in ordinata si legge il rapporto $\frac{\tau}{acc_{lat}}$ tra la coppia allo sterzo e l'accelerazione laterale acc_{lat} che quantifica la velocità con cui è percorsa una curva, in ascissa la velocità di percorrenza della curva. Le curve sono parametrizzate in funzione

dei raggi di curvatura. Questi autori hanno verificato l'importanza dei pneumatici sul valore della coppia di sterzo a regime, osservando come la forma delle curve cambia al variare delle proprietà dei pneumatici.

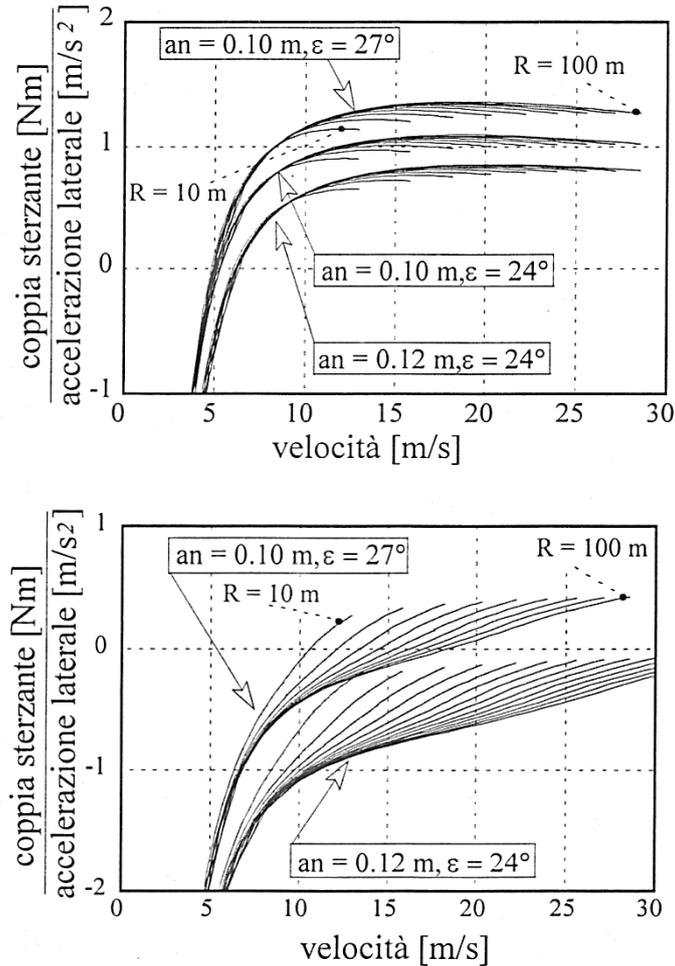


Figura 0.2 - Rapporto tra coppia di sterzo e accelerazione laterale in funzione della velocità per diversi raggi di curvatura.

Nel 1991 T.S.Liu e I.H.Hsiao [6] hanno definito la maneggevolezza come la facilità con cui è possibile eseguire una determinata traiettoria. Questi autori hanno rilevato la traiettoria effettiva con una telecamera posta su una moto in cui potevano essere cambiati alcuni parametri di progetto (avancorsa e rigidità delle sospensioni). Dall'analisi dei dati raccolti l'avancorsa e l'esperienza del pilota, sono risultate particolarmente influenti sulla precisione di guida. In questo caso emerge ancora una volta come i ricercatori associno il concetto di maneggevolezza all'esperienza del pilota. Questo punto va tenuto a mente per fare in seguito i debiti confronti con il concetto di maneggevolezza che verrà adottato con il metodo della Manovra Ottima. Nel 1978 J. Koch per le fasi d'inserimento in curva ha definito un fattore dato dal rapporto tra il picco massimo della coppia di sterzo e il picco della velocità di rollio $\frac{\hat{\tau}}{\hat{\Phi}_v}$.

Ottenere dei valori bassi per questo parametro significa produrre elevate velocità di rollio con valori minimi del picco di coppia, ed è indice di buona maneggevolezza. Anche quest'autore ha cercato di ricavare quali sono i parametri di progetto che più influenzano indice e ha dimostrato come l'inerzia della ruota anteriore, dell'avantreno attorno all'asse di sterzo e della moto attorno all'asse di rollio sono le grandezze inerziali più influenti sul coefficiente e quindi sulla maneggevolezza.

Le considerazioni fin qui fatte si riferiscono a condizioni stazionarie. Tuttavia le condizioni di moto non sono mai stazionarie e per questo si conducono i test di schivata di un ostacolo. Infatti questo tipo di test costringe a bruschi cambi di direzione e in molti casi si comunica al pilota da che parte passare l'ostacolo quando la motocicletta è in prossimità dell'ostacolo stesso. In tal modo il pilota è costretto ad affrontare una situazione incognita e non può preimpostare la manovra.

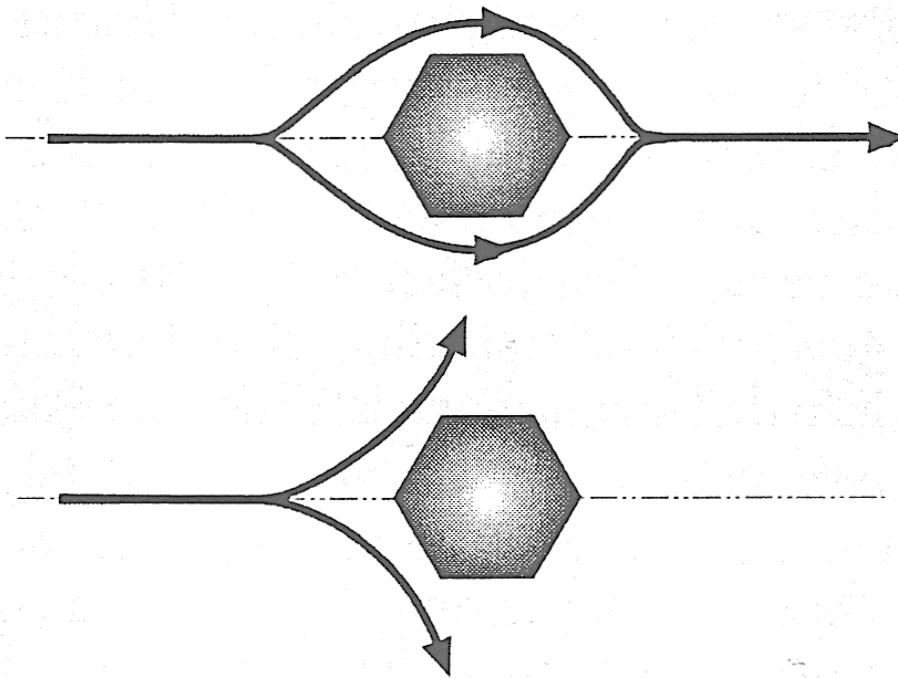


Figura 0.3 - Esempi di test di schivata dell'ostacolo

Infatti l'abilità del pilota gioca un ruolo fondamentale nella tecnica d'impostazione della manovra, e questo influenza molto l'efficacia della manovra stessa. L'analisi dei segnali requisiti dai test sperimentali, mostra che il pilota esperto imposta la curva con valori di ricco di angolo di sterzo e coppia controsterzanti (*out-tracking*) più elevati e brevi, ottenendo così velocità ed angoli di rollio maggiori. All'aumentare della velocità si osserva che il pilota esperto mantiene elevate velocità di rollio spostando il proprio peso ed aumentando il picco di coppia, mentre il pilota inesperto non riesce a contrastare l'accresciuta instabilità della moto e realizza minori velocità di rollio. In merito a questi tipi di test si riportano le considerazioni di Y. Watanabe e K. Yoshida. Questi autori nel

'73 hanno studiato come diverse moto schivano un ostacolo quando viene comunicato al pilota da che parte evitarlo appena giunge ad una certa distanza. Essi hanno condotto anche delle simulazioni numeriche che mostrano un buon accordo con i risultati sperimentali e l'influenza dell'abilità del pilota è stata ben riprodotta limitando i valori massimi che possono assumere la velocità di rollio e lo spostamento laterale del peso del pilota. Le grandezze misurate sono la coppia di sterzo, angolo di sterzo e l'angolo di rollio. Contrariamente alle aspettative, la moto che ha ottenuto l'efficacia peggiore è quella più leggera, il che significa che la maneggevolezza non ha sempre un legame diretto con ingombro e peso. Si vedrà nel capitolo 4 che motociclette più pesanti sono più rapide nei cambi di direzione (raggiungono velocità di rollio più elevate), ma pagano nei rettilinei in fase di accelerazione.

Nel '88 M. Sugizaki e A. Hasegawa [7] hanno rilevato gli andamenti della coppia di sterzo, dell'accelerazione laterale, dell'angolo di rollio e della velocità di rollio per quattro moto diverse. La manovra prevede di evitare l'ostacolo da un lato ritornando subito dopo in traiettoria e l'obiettivo che si sono posti è quello di trovare delle correlazioni, valide per tutte le moto, tra le grandezze misurate le sensazioni di maneggevolezza riportate dai piloti. Dopo un'approfondita analisi statistica si evidenzia che la grandezza più significativa nella sensazione di maneggevolezza della moto è il ritardo temporale tra l'azione della coppia sterzante e la risposta della velocità d'imbardata, dove un minor ritardo è indice di migliore maneggevolezza della moto.

Globalmente le prove della manovra evasiva di un ostacolo danno una buona comprensione del comportamento della moto in condizioni di emergenza, in cui le manovre sono molto veloci e la dinamica del veicolo è sempre in fase transitoria e non di regime.

Anche il cambio di corsia rappresenta un'altra situazione realistica interessante per lo studio del comportamento della moto in condizioni tipicamente transitorie, pertanto mette in luce meglio delle prove stazionarie la reale maneggevolezza del mezzo. Questa prova può essere assimilata anche ad un sorpasso di un altro veicolo. Nel '78 R. S. Rice ha studiato questa manovra e ha notato che può essere divisa in fasi temporali corrispondenti alle azioni del pilota e che le strategie di guida dei diversi piloti si differenziano in base all'entità del controsterzo iniziale e all'utilizzo dell'inclinazione laterale del pilota rispetto alla moto. Piloti esperti eseguono la manovra con un accentuato *out-tracking* iniziale, visibile sia come angolo sia come coppia di sterzo, ed usano l'inclinazione del corpo per mantenersi tendenzialmente verticali o addirittura come comando aggiuntivo rispetto la coppia. Questi risultati sono interessanti perché mettono in luce ancora una volta l'importanza della bravura del pilota nello sfruttare al meglio le potenzialità del veicolo e come la dinamica laterale sia controllata non solo con la coppia, ma anche con il movimento del corpo.

Un'altra manovra tipica è lo slalom in cui gli andamenti tipici delle grandezze misurate sono praticamente armonici ed è molto importante se si pensa che l'insieme dei segnali acquisiti percorrendo un tratto di strada normale si può scomporre secondo un insieme di ampiezze e frequenze equivalenti a quelle che possono essere ottenute in uno slalom.

In questo senso Schweers e Remde [8] hanno eseguito uno studio approfondito sullo slalom provando moto e piloti differenti. Quindi hanno scelto un segnale come ingresso (la coppia di sterzo) e uno come uscita (l'angolo di rollio) e hanno diagrammato il loro rapporto e sfasamento. I grafici ottenuti da questi due autori sono quelli riportati in Figura 0.4 e Figura 0.5.

Facendo riferimento a questi grafici, valori elevati del rapporto tra uscita ed ingresso significano un buon movimento della moto con poco sforzo sterzante, mentre valori negativi di sfasamento dicono che l'uscita (angolo di rollio) segue l'ingresso (coppia sterzante) con un certo ritardo. I grafici sperimentali mostrano che, per tutte le moto, al crescere della frequenza dello slalom i rapporti uscita/ingresso diminuiscono, quindi all'aumentare della frequenza le moto tendono a diventare sempre meno maneggevoli nel senso che richiedono uno sforzo sempre maggiore per essere guidate, il che concorda con le sensazioni di guida dei piloti. Quindi, *il sistema di sterzo serve al pilota per controllare il veicolo, ma anche per percepire la difficoltà della manovra che sta eseguendo.*

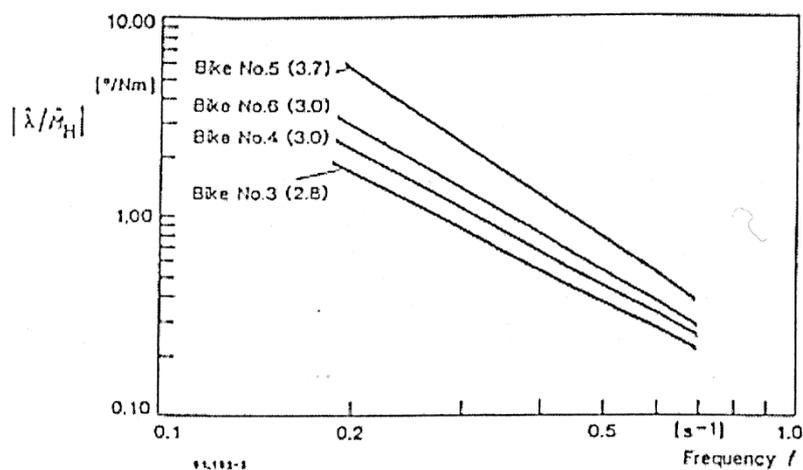


Figura 0.4 - Rapporto tra i moduli dell'angolo di rollio e della coppia di sterzo e corrispondente giudizio del pilota per motociclette differenti.

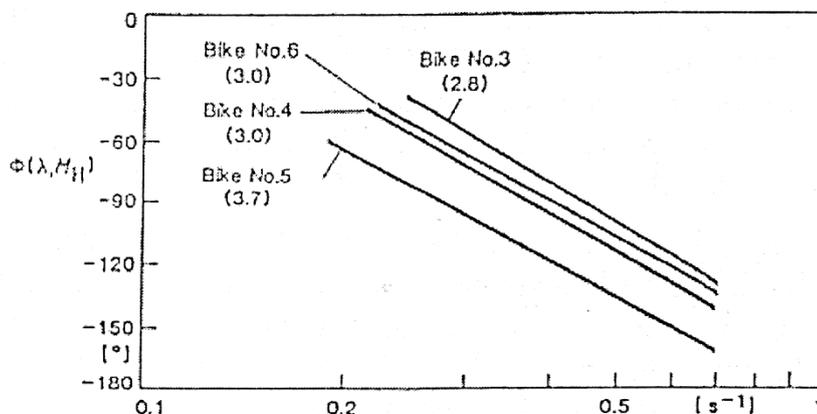


Figura 0.5- Ritardo di fase tra l'angolo di rollio e la coppia di sterzo e corrispondente giudizio del pilota, per motociclette differenti.

Contrariamente a questo, però, le moto che richiedono sforzi maggiori (cioè che hanno curve più basse) sono percepite come più maneggevoli, il che suggerisce che questo rapporto non è il parametro che viene maggiormente rilevato dai piloti. D'altra parte, una buona correlazione con le sensazioni dei piloti si ottiene considerando il ritardo angolare tra angolo di rollio e coppia sterzante: moto che rispondono prontamente al comando sterzante sono considerate più maneggevoli. Tale grandezza presenta anche una bassa dipendenza dal pilota, limitata dispersione statistica e forte dipendenza dalla moto. Questo è un risultato di rilievo perché si muove nella direzione della valutazione della maneggevolezza in modo oggettivo.

Risultati altrettanto importanti in questo senso, sono stati ottenuti da Cossalter, Da Lio, Bortoluzzi [9], confrontando la funzione di trasferimento di una motocicletta sportiva misurata usando un test di slalom con differenti distanze tra i birilli a differenti velocità e la funzione di trasferimento analitica ottenuta da un semplice modello che descrive la dinamica in grande di una motocicletta. Dal momento che la funzione di trasferimento spiega la facilità di utilizzo del veicolo, è possibile risalire a quali sono i parametri di progetto che influiscono sulla maneggevolezza. In particolare essi hanno evidenziato come esiste una velocità alla quale lo sfasamento tra coppia e rollio aumenta e corrisponde in particolare alla velocità alla quale l'effetto giroscopico della ruota comincia a diventare significativo.

Da notare come gran parte dei test e dei risultati sperimentali qualificano la maneggevolezza di un veicolo, ma non fanno riferimento alle prestazioni massime che si possono ottenere dalla motocicletta. Questo fatto è importante perché dimostra come forse non è chiara, o almeno non è diffusa l'opinione di separare il concetto di prestazione massima ottenibile indipendentemente dalla bravura del pilota e la prestazione massima ottenibile considerando anche la facilità con cui il pilota è in grado di gestire la motocicletta. Le ricerche si sono focalizzate e si focalizzano soprattutto su quest'ultimo punto e si parla di maneggevolezza, anche se non sono così infrequenti i casi in cui si utilizza il concetto di manovrabilità per definire la "facilità" di guida.

1. 3. 2. - Modelli Matematici E Modelli Di Pilota

Ai testi sperimentali, com'è stato messo in luce più volte, sono state affiancate in parallelo delle simulazioni numeriche basate su modelli matematici che cercavano di riprodurre il fenomeno reale rilevato o le manovre eseguite nella realtà. I modelli matematici una volta validati servono anche per prevedere a priori l'influenza dei parametri di progetto sulla maneggevolezza e manovrabilità.

Nel lavoro di Cossalter, Doria, Lot [5] si è ottenuta la curva della coppia partendo da relazioni cinematiche del modello matematico che descrive la dinamica di una motocicletta, calcolando le posizioni dei punti di contatto dei pneumatici con il terreno che influenzano il comportamento della moto in quanto determinano i punti di applicazione delle forze di contatto. Attraverso la risoluzione delle equazioni stazionarie in curva si ottiene dei grafici $\frac{\tau}{\mu}$, dove μ è la curvatura. Dai grafici, che mostrano le curve

di livello della coppia di sterzo come funzione della velocità e del raggio di curvatura per diversi tipi di pneumatici, si evidenzia l'importanza di quest'ultimi sulla coppia di sterzo. Poiché la coppia di sterzo è l'ingresso con il quale il pilota controlla il veicolo, è anche la grandezza che in un certo senso quantifica in modo diretto lo sforzo del pilota durante la guida. Di conseguenza è indice della maneggevolezza della motocicletta. Quindi poiché i pneumatici influiscono così pesantemente sulla maneggevolezza, sarà bene tenere a mente questo punto quando si valuterà l'influenza dei pneumatici sulla maneggevolezza con il "Metodo della Manovra Ottima".

Un modello teorico di questo tipo permette di simulare a priori il comportamento di una moto in funzione dei pneumatici adottati e anche di scegliere quelli più adatti alle esigenze di progetto, almeno nelle condizioni stazionarie.

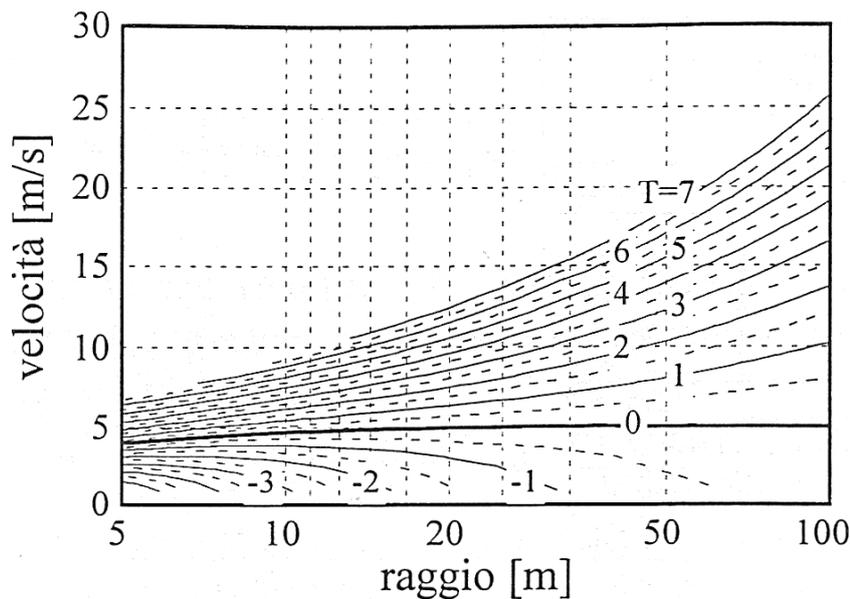


Figura 0.6 - Curve di livello della coppia di sterzo per pneumatico A

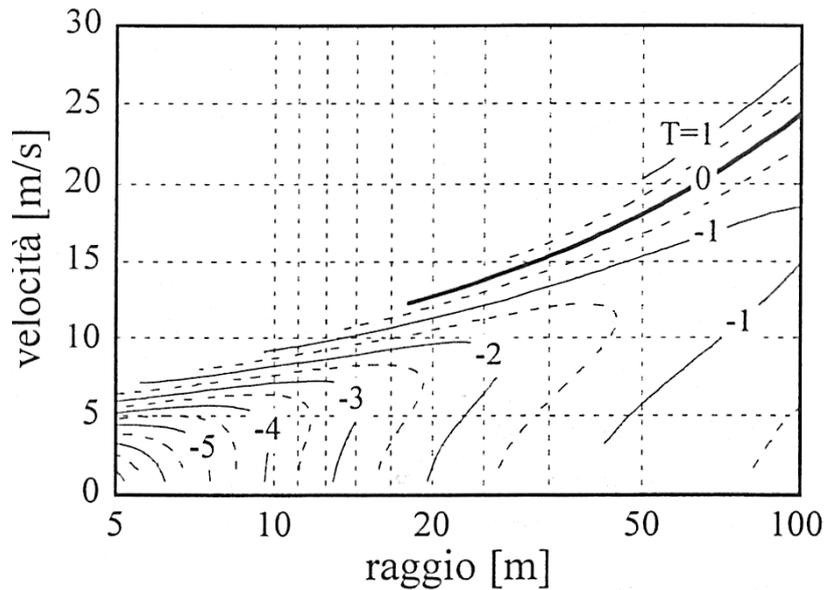


Figura 0.7- Curve di livello della coppia di sterzo per pneumatico B

In "A Model for Rider-Motorcycle System Using Fuzzy Control", T.S. Liu e J.C. Wu mettono in netta contrapposizione la maneggevolezza come caratteristica del sistema pilota-motocicletta con la dinamica del veicolo da solo. La maneggevolezza è caratterizzata dal controllo sullo sterzo e dal controllo che il pilota esercita con il corpo. Di conseguenza secondo questi autori le possibilità della motocicletta variano considerevolmente in funzione dello stile di guida, e quindi la prestazione del sistema motocicletta-pilota cambia in modo apprezzabile in base le condizioni di marcia e esperienza del pilota. Quello che emerge con chiarezza dalle loro considerazioni, è che le azioni del pilota contribuiscono alle prestazioni di maneggevolezza la motocicletta più di quanto non faccia la ciclistica della motocicletta stessa. Per questo è necessario adottare la legge di controllo più appropriata. Essi infatti adottano un controllo fuzzy e riescono ad ottenere una manovra di cambio di corsia, che rappresenta in modo fedele . analogo test sperimentale. Per valutare la maneggevolezza questi autori considerano le intensità delle coppie applicate per eseguire un certo tipo di manovra a partire dalle stesse condizioni iniziali. La sensibilità allo sterzo della velocità d'imbardata e dell'accelerazione di rollio aumenta all'aumentare della velocità, e quindi diventa più difficile compensare ampi guadagni e ritardi di fase. Anche con il controllo fuzzy è necessario adattare le "regole" per il tipo di manovra che si considera (le leggi di controllo cambiano con il tipo di manovra), e quindi è presumibile che la valutazione della maneggevolezza sia dipendente dalla definizione delle regole fuzzy. Un esempio di schema di modello di pilota fuzzy è il seguente:

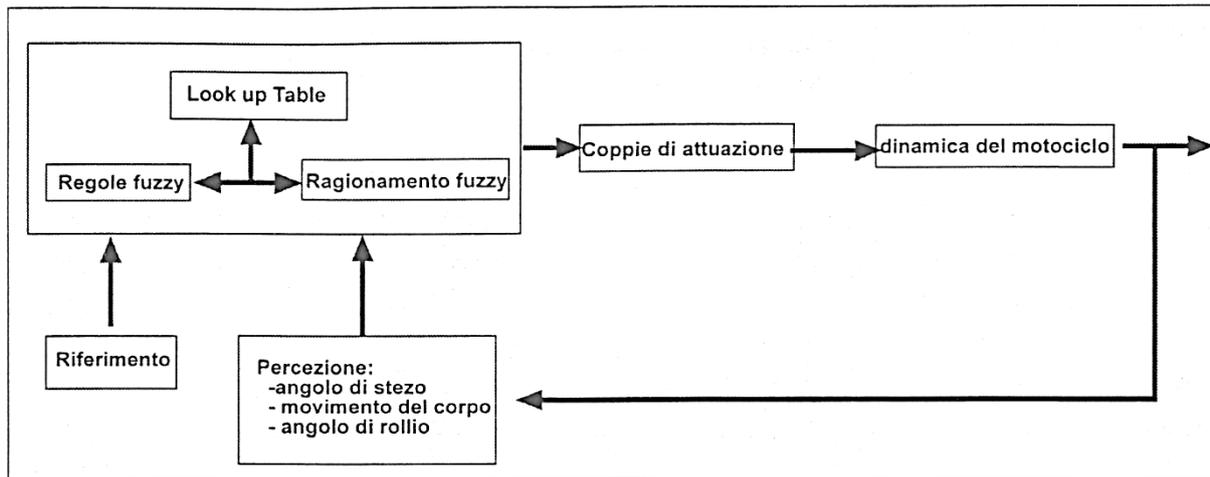


Figura 0.8 - Modello di pilota fuzzy - T.S. Liu e J.C. Wu

Nel '97 T. Katayama, T. Nishimi, T. Okayama, A. Aoki [10] hanno studiato il comportamento di diverse moto in differenti manovre, sia sperimentalmente, acquisendo la coppia di sterzo, la velocità di rollio, lo spostamento laterale e l'inclinazione del busto, teoricamente con un modello analogo a quello sviluppato da R. S. Sharp. L'obiettivo del loro studio è di sviluppare un modello matematico che sia in grado di simulare, in varie situazioni, il comportamento di controllo del pilota sulla moto. Tra queste, la manovra evasiva di un ostacolo è stata provata con un percorso che prevede l'inversione ad U dal lato cui è comunicato al pilota di svoltare.

La logica di controllo del pilota sulla moto è stata riprodotta introducendo nell'azione del conducente dei ritardi rispetto al segnale di svolta. Attivando un certo ritardo per l'azione sterzante ed un ritardo leggermente superiore per l'inclinazione del corpo si raggiunge un buon accordo tra dati sperimentali e simulati.

Come si era annunciato sono state utilizzate le reti neurali per modellare il comportamento di un pilota reale [11], I risultati sono molto realistici se la rete è stata ben allenata, ma rimane il fatto che la rete è in grado di svolgere soprattutto le manovre per cui è stata addestrata. Rimane comunque il problema dell'indipendenza dal modello di pilota (ovvero come la rete è stata allenata), dall'informazione di maneggevolezza che si ricava.

Molto spesso vengono usati i controlli PID, i quali hanno come svantaggio il fatto che se cambiano le condizioni in cui deve operare il sistema vanno adattati di conseguenza. Per risolvere il problema sono stati sviluppati i modelli adattivi che cambiano i guadagni secondo certe leggi e criteri in accordo con la situazione in cui si trova ad operare. Un esempio è di recente presentato da Sharp, Casanova [12]. Il loro modello è un sofisticato controllo PID per veicolo di FI, che insegue la traiettoria desunta dalla telemetria. In questo sta lo svantaggio maggiore, poiché se si vuole valutare veicoli diversi, è opportuno che ognuno segua la propria traiettoria ottima e non quella imposta. A questo proposito Spackman [2] mette in luce l'importanza di seguire traiettorie diverse per

veicoli di versi e l'importanza del fatto che un pilota deve capire e mettere in atto questo. Questo stesso autore si rende conto che non è facile conoscere a priori la traiettoria ottimale per cui utilizza un modello di pilota che ottimizza il veicolo su diverse traiettorie fino a trovare la migliore.

Sono possibili molti altri esempi, ad esempio anche nel campo dell'aeronautica sono stati sviluppati dei modelli di pilota molto complessi, ma si ritiene sufficiente il quadro fornito riportando i principali risultati ottenuti nel settore.

1.4. - CONCLUSIONI

In questi paragrafi, dai principali risultati ottenuti da diversi autori sull'argomento della valutazione della maneggevolezza, emergono alcuni punti fondamentali. Il primo fra questi è il fatto che la maggior parte dei lavori riguarda la maneggevolezza legata in particolare alla misura della coppia di sterzo (grandezza d'ingresso) confrontata con altre grandezze da controllare (l'uscita) come l'angolo di rollio, la velocità di rollio o d'imbardata. Con riferimento a questo si sono evidenziati molti parametri di progetto che influenzano queste grandezze. In particolare si sono definiti degli indici per riassumere il comportamento del veicolo stesso e intesi come rapporto tra la grandezza in ingresso e quella in uscita. Non viene invece considerata in modo altrettanto sistematico il problema di come valutare la massima prestazione di un veicolo e come migliorarla. Per questo si deduce che forse non è chiara la differenza tra la facilità di guida e la massima prestazione ottenibile da un veicolo. Un altro punto importante che è stato evidenziato chiaramente è la schematizzazione per blocchi frizionali del sistema veicolo-pilota, o almeno l'aver considerato il sistema veicolo come un blocco in cui entrano delle grandezze d'ingresso (in particolare la coppia di sterzo) ed escono delle grandezze di uscita (in particolare l'angolo di rollio).

Per quanto riguarda i modelli matematici adottati per descrivere il sistema veicolo-pilota si deve dire che comunque dipendono dal modello di pilota descritto sia esso tradizionale in ciclo chiuso oppure quelli più recenti fuzzy o a reti neurali. La maneggevolezza in questo caso viene considerata come una grandezza che dipende in larga misura dalle capacità di guida del pilota.

L'approccio della Manovra Ottima è completamente diverso. Infatti non ci si pone il problema di definire un modello di pilota, ma piuttosto si cerca di definire il modo migliore per condurre il veicolo. In sostanza quello che un pilota ideale dovrebbe fare per guidarlo nel modo più efficiente. Lo scopo del metodo è quello, non solo valutare in modo oggettivo la manovrabilità e la maneggevolezza che comunque sono considerate caratteristiche del solo veicolo, ma anche presentarsi come strumento per predire l'influenza dei parametri di progetto sulla manovrabilità e la maneggevolezza.

CAPITOLO 2

INTRODUZIONE DEI CONCETTI DI MANOVRABILITÀ, MANEGGEVOLEZZA E METODO DELLA MANOVRA OTTIMA

2.1 - INTRODUZIONE

Nel capitolo precedente, è stato fatto notare con chiarezza come i concetti di manovrabilità e maneggevolezza non siano percepiti in modo uniforme e chiaro da tutti gli autori che operano nel campo della dinamica dei veicoli. In particolare, si è fatto notare che manca una definizione matematica rigorosa di questi due concetti, e la possibilità di valutarli in modo semplice, preferibilmente attraverso un solo indice, quale potrebbe essere uno scalare. In questo capitolo si risponderà puntualmente alle richieste emerse nel capitolo precedente. Si definiranno i concetti di manovrabilità e maneggevolezza e s'introdurrà il concetto di "*manovra ottima*", che sarà alla base dell'omonimo metodo utilizzato per la valutazione della manovrabilità e maneggevolezza dei veicoli. Pur essendo possibile usare questo approccio per qualsiasi tipo di veicolo, le considerazioni e gli esempi esposti riguarderanno il settore delle motociclette. Comunque, nella prima parte del capitolo successivo la trattazione matematica rigorosa del metodo è sviluppata per un sistema dinamico generico.

2.2 - CONTROLLO DELLA DINAMICA DI UNA MOTOCICLETTA

Si considerino nuovamente i grafici di Schweers e Remde (Figura 1 e Figura 2) già presentati nel capitolo precedente. Come si è detto questi due autori hanno cercato un'eventuale correlazione esistente, nella prova dello slalom, tra una grandezza d'ingresso usata per controllare la motocicletta, come la coppia di sterzo, ed una grandezza di uscita significativa, quale l'angolo di rollio. Per queste due grandezze hanno diagrammato in funzione della frequenza: rapporti tra l'ampiezza dell'uscita e dell'ingresso, e il loro sfasamento (la funzione di trasferimento tra i due segnali).

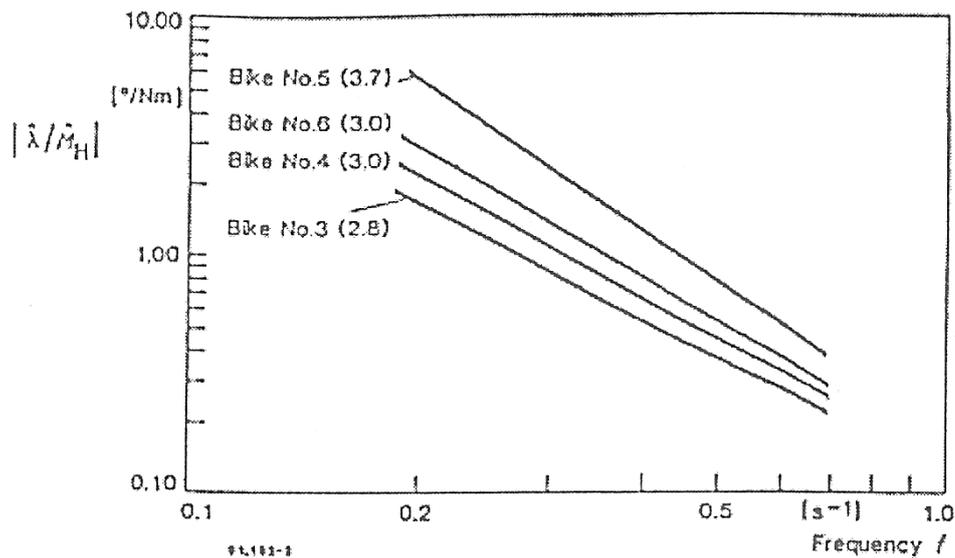


Figura 1- Rapporto tra i moduli dell'angolo di rollio e della coppia di sterzo e corrispondente giudizio del pilota per motociclette differenti.

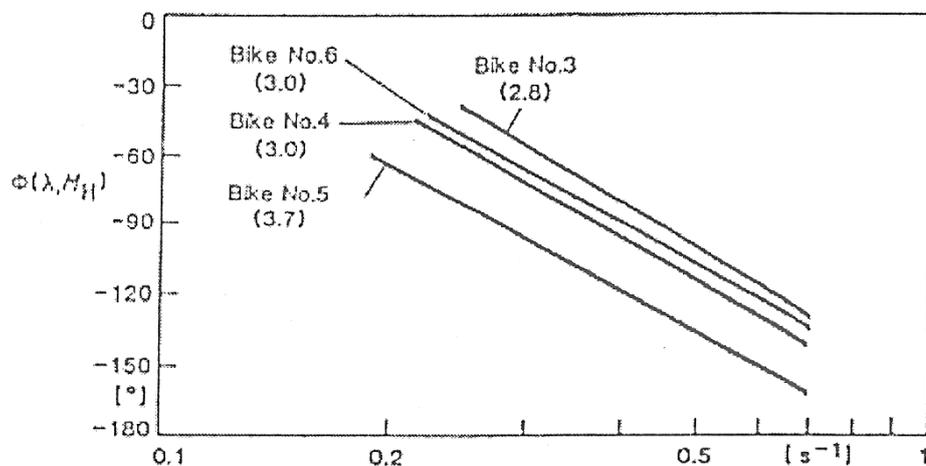


Figura 2- Ritardo di fase tra l'angolo di rollio e la coppia di sterzo e corrispondente giudizio del pilota, per motociclette differenti.

Facendo riferimento a questi grafici, valori elevati del rapporto tra uscita ed ingresso unificano un buon movimento della moto con poco sforzo sterzante, mentre valori negativi di sfasamento dicono che l'uscita (angolo di rollio) segue l'ingresso (coppia sterzante) con un certo ritardo. I grafici sperimentali mostrano che, per tutte le moto, al crescere della sequenza dello slalom i rapporti uscita/ingresso diminuiscono, quindi all'aumentare della frequenza le moto tendono a diventare sempre meno maneggevoli nel senso che richiedono uno sforzo sempre maggiore per essere guidate, il che concorda con le sensazioni di guida dei piloti. Quindi, *il sistema di sterzo serve al pilota per controllare il veicolo, ma anche per percepire la difficoltà della manovra che sta eseguendo*. Contrariamente a questo, però, le moto che richiedono sforzi maggiori (cioè che hanno curve più basse) sono percepite come più maneggevoli, il che suggerisce che questo rapporto non è il parametro che viene maggiormente rilevato dai piloti. D'altra parte, una buona correlazione con le sensazioni dei piloti si ottiene considerando il ritardo angolare tra angolo di rollio e coppia sterzante: moto che rispondono prontamente al comando sterzante sono considerate più maneggevoli. Tale grandezza presenta anche una bassa dipendenza dal pilota, limitata dispersione statistica e forte dipendenza dalla moto. Quindi, *lo sfasamento tra coppia di sterzo e angolo di rollio evidenzia una caratteristica intrinseca del veicolo* che esprime in un certo senso la sua guidabilità. L'approccio adottato da questi autori, di vedere la motocicletta come un sistema in cui entra un certo numero d'ingressi e si ha un certo numero di uscite, e la buona correlazione ottenuta suggeriscono che il sistema veicolo-pilota può essere scomposto in più blocchi funzionali (Figura 3).

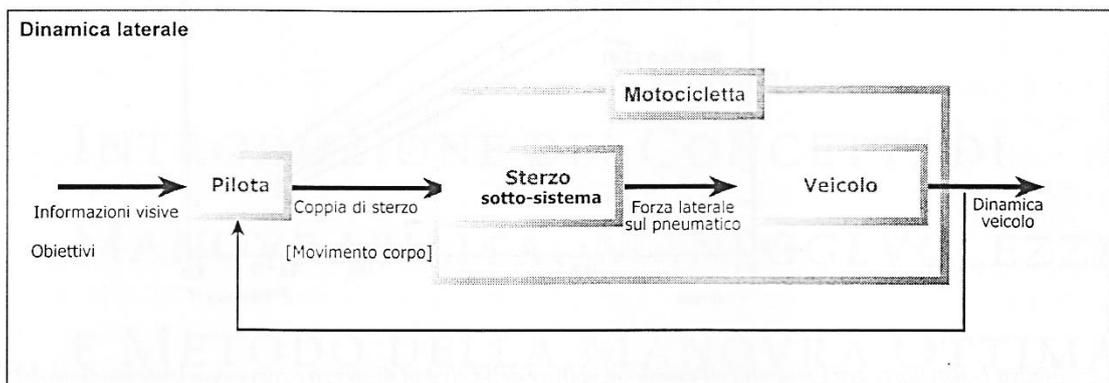


Figura 3 -Blocchi funzionali del sistema veicolo-pilota, nella dinamica laterale.

Ad esempio per la dinamica laterale in Figura 4 (un discorso analogo può essere fatto per la dinamica longitudinale), il pilota controlla la motocicletta con la coppia di sterzo e il movimento del corpo. La coppia di sterzo viene trasformata dal sottosistema del blocco motocicletta in una forza laterale sul pneumatico (attraverso la rotazione stessa dello sterzo). Analogamente, il pilota spostando il corpo inclina il veicolo e genera sui pneumatici la conseguente forza laterale. Tuttavia, il movimento del corpo può essere controllato ad una frequenza di molto inferiore rispetto a quella che si può produrre con

la coppia di sterzo che di conseguenza può essere considerata a buona ragione l'ingresso più importante. Quindi, per semplicità ci si soffermerà alla sola azione della coppia di sterzo.

Come primo caso consideriamo il solo blocco funzionale del veicolo, il quale avrà come ingresso la forza laterale sul pneumatico anteriore e come uscita la dinamica del veicolo. In questa situazione non consideriamo in sostanza lo sforzo che il pilota deve eseguire per generare una certa forza laterale. Tuttavia, le forze di controllo, in questo caso le forze che i pneumatici sono in grado di generare, non possono essere infinite, ma saranno un insieme di forze ammissibili che possono essere prodotte. All'interno di questo insieme di forze ammissibili il veicolo potrà produrre a sua volta un insieme di moti come risposta a queste forze, che comunque sarà limitato. Tenendo in considerazione questi ragionamenti, possiamo definire la manovrabilità come quella grandezza legata all'insieme dei moti possibili che il veicolo è in grado di produrre considerando soltanto le limitazioni che riguardano le forze di controllo.

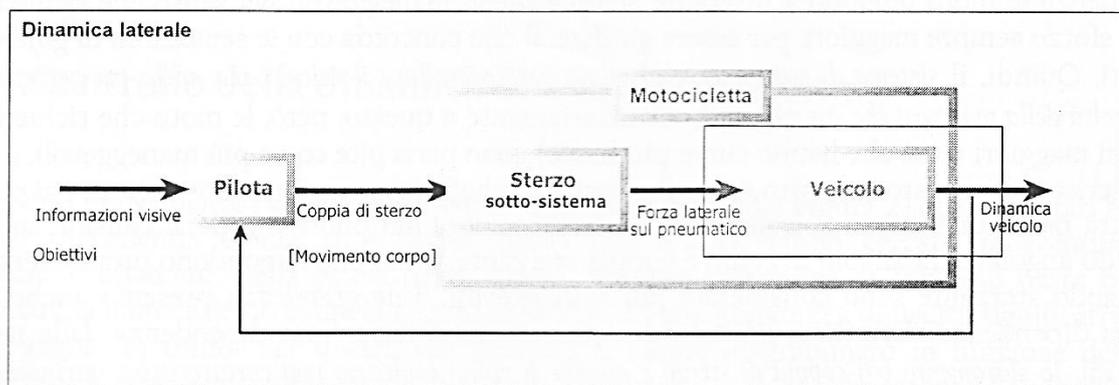


Figura 4- Blocco funzionale che riguarda la manovrabilità.

Tuttavia, esiste anche un'ulteriore limitazione ai moti possibili del veicolo se consideriamo che la coppia di sterzo che il pilota può esercitare è a sua volta limitata: perché o è troppo ampia, oppure dovrebbe variare così rapidamente che il pilota non è in grado di produrla. In questa situazione si sta considerando anche il blocco funzionale dello sterzo e di conseguenza i limiti fisici e mentali del pilota. In base a queste considerazioni si può definire maneggevolezza quella grandezza legata all'insieme dei moti che il veicolo è in grado di produrre considerando soltanto anche le limitazioni che riguardano gli ingressi di controllo che esercita il pilota.

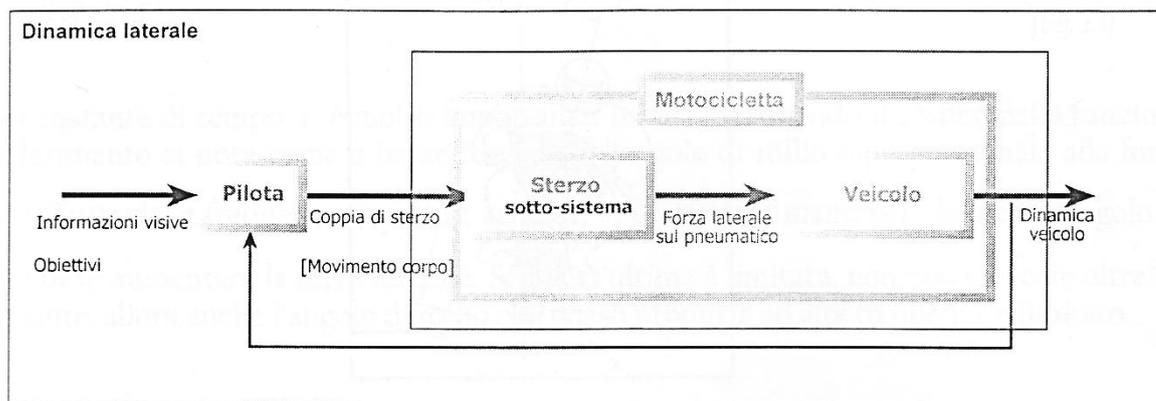


Figura 5 - Blocchi funzionali che riguardano la maneggevolezza.

In altre parole, per "veicolo maneggevole" s'intende un veicolo che può essere controllato facilmente, o che può produrre un ampio insieme di moti con un costo limitato da parte del pilota. "Veicolo manovrabile" invece, significa un veicolo in grado di produrre un ampio insieme di moti nel rispetto dei suoi soli limiti fisici. Con queste definizioni si può dire che la manovrabilità è valutabile solo quando il veicolo è guidato da un *pilota ideale* che per definizione non ha limiti (oppure è il migliore pilota al mondo). In tutti gli altri casi in cui si considera un pilota reale, e quindi con le proprie capacità di guida si sta valutando la maneggevolezza.

A questo punto resta da capire come determinare l'ampiezza di questo insieme di moti ammissibili del veicolo considerando i limiti fisici cui è soggetto, ed eventualmente quelli del pilota se si vuole valutare la maneggevolezza. Per fare questo in modo chiaro, si adotterà un modello a due gradi di libertà per studiare la dinamica laterale della motocicletta.

2.3 - "IL PENDOLO INVERSO" PER LO STUDIO DELLA DINAMICA LATERALE DELLA MOTOCICLETTA

Il "pendolo inverso" è un semplice modello a due gradi di libertà che serve a studiare la dinamica laterale di un veicolo a due ruote. I passaggi matematici dello sviluppo del modello non sono riportati, qui si useranno solo i risultati. Si desidera usare questo modello per due motivi fondamentali. Il primo è perché le equazioni sono semplici e tutti gli sviluppi possono essere facilmente seguiti e capiti. Inoltre come secondo motivo, questo modello evidenzia un aspetto tipico dell'inserimento in curva di un veicolo a due ruote: ovvero la motocicletta non può accelerare lateralmente fintanto che non è inclinata di un adeguato angolo di rollio per vincere la forza centrifuga cui è soggetto durante il moto in curva. In altre parole una motocicletta può curvare solo dopo che è stata rollata. Il veicolo è schematizzato come un corpo rigido (in Figura 6) con la ruota considerata lenticolare. I due gradi di libertà del modello sono l'angolo di rollio $\varphi(t)$ e lo spostamento laterale del punto di contatto del pneumatico $x(t)$. Il veicolo è direttamente controllato

con la forza laterale sul pneumatico $f(t)$. Le equazioni del moto sono descritte dalle tre condizioni di equilibrio in direzione verticale laterale e attorno al punto di contatto ([Eq. 2.1]).

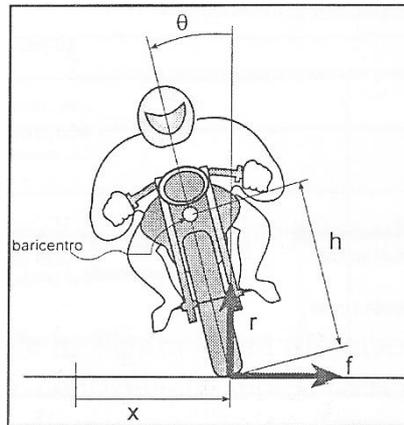


Figura 6 - Schema del modello a due gradi di libertà

$$\begin{aligned}
 m \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} x_G &= f \\
 m \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} y_G &= r - m \cdot g \\
 m \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \theta &= f \cdot h \cdot \cos(\theta) + r \cdot h \cdot \sin(\theta) \\
 x_G &= x - h \cdot \sin(\theta) \\
 y_G &= h \cdot \cos(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{2-1}$$

Linearizzando le equazioni precedenti, dalla seconda delle [Eq. 2.2], si ottiene che il carico verticale è costante e uguale al peso del veicolo. Ovviamente, le equazioni linearizzate valgono solo per piccoli valori dell'angolo di rollio.

$$\begin{aligned}
 m \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} x - m \cdot h \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \theta &= f \\
 r &= m \cdot g \\
 J \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \theta - r \cdot h \cdot \theta &= f \cdot h.
 \end{aligned}
 \tag{2-2}$$

Queste equazioni mostrano chiaramente l'accoppiamento tra il moto laterale e il rollio. Dalle equazioni linearizzate calcoliamo la trasformata di Laplace in modo da passare nel dominio della frequenza e analizzare la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita, in particolare quella tra la forza laterale (ingresso) e l'angolo di rollio (uscita). Quest'ultima corrisponde alla funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine con due radici reali ($\tau, -\tau$) e rappresentate in Figura 7.

$$\Theta = \frac{h}{J \left(s + \sqrt{\frac{g \cdot h \cdot m}{J}} \right) \left(s - \sqrt{\frac{g \cdot h \cdot m}{J}} \right)} F \quad [2-3]$$

$$\tau = \sqrt{\frac{J}{g \cdot h \cdot m}}$$

Questa costante di tempo τ è molto importante. Infatti, osservando il grafico della funzione di trasferimento si nota come a basse frequenze l'angolo di rollio è proporzionale alla forza laterale. Tuttavia, a frequenze superiori ad $\omega = 1/\tau$, se si vuole mantenere lo stesso angolo di rollio, si deve aumentare la forza laterale. Se quest'ultima è limitata, non può crescere oltre un certo valore, allora anche l'angolo di rollio che posso produrre ad alte frequenze è limitato.

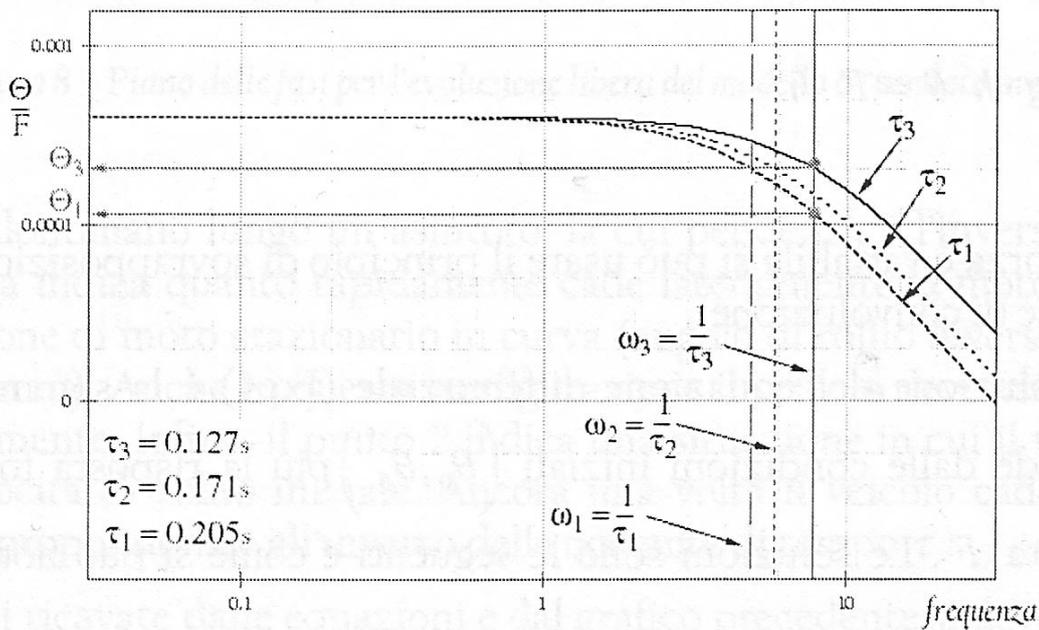


Figura 7 - Funzione di trasferimento tra angolo di sterzo e forza laterale, per diverse motociclette

Da quanto detto risulta preferibile avere un valore di τ il più piccolo possibile. In questo modo si ha un intervallo più ampio in cui la forza laterale è proporzionale all'angolo di rollio.

L'interpretazione delle informazioni fornite dal grafico precedente è duplice. La zona in cui il rollio è proporzionale alla forza laterale implica una zona in cui si è in condizioni di regime. Se la frequenza è nulla è il moto circolare uniforme. Tuttavia si può anche considerare il fatto che ad esempio ogni manovra d'inserimento in curva ha un certo contenuto in frequenza che ha una corrispondenza con la funzione di trasferimento. Ora se le frequenze principali "eccitate" con la manovra d'inserimento in curva cadono all'interno della zona di proporzionalità tra angolo di rollio e forza laterale, allora la manovra ha una certa efficacia con uno sforzo non eccessivo da parte del pilota. D'altra

parte se il contenuto in frequenza della manovra (e quindi della forza di controllo $f(t)$) è superiore alla frequenza limite per la zona di proporzionalità, per ottenere l'angolo di rollio desiderato la forza deve essere ben maggiore che nella zona di proporzionalità. La manovra d'inserimento in curva richiede uno sforzo maggiore da parte del pilota. Quindi, se il veicolo ha un valore di τ più piccola rispetto ad un altro, questa zona di proporzionalità tra rollio e forza laterale sarà più ampia e a parità di forza di controllo $f(t)$ (nell'istante in cui la curva di Figura 7 comincia a "declinarsi"), avrà un angolo di rollio maggiore rispetto all'altro veicolo (vedi Figura 7). In altre parole, il veicolo possiede un insieme di moti più ampio in cui finisce il moto stazionario, per un dato limite sulla forza di controllo $f(t)$, evidenziato in questo caso dal valore di ω_c . Se si riprende la definizione di manovrabilità data nel paragrafo precedente, si può dire che la motocicletta con τ_3 è più manovrabile delle altre (vedi Figura 7). Inoltre, si può notare come il valore della costante di tempo τ è legata alle caratteristiche geometriche ed inerziali della motocicletta ([Eq. 2.3]), e quindi si ha un'ulteriore prova che la manovrabilità, così com'è stata definita, è una caratteristica intrinseca del veicolo.

Per meglio comprendere la relazione che lega l'insieme dei moti ammissibili e la costante di tempo τ e la forza di controllo $f(t)$, si considererà la soluzione dell'equazione dell'equilibrio alla rotazione, (che è indipendente dall'altra variabile), quando la forza di controllo è costante.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ F & (t \geq 0) \end{cases} \quad [2-4]$$

$$J \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \theta - m \cdot g \cdot h \cdot \theta = F \cdot h$$

Nel caso in cui la forza è variabile, si può usare il principio di sovrapposizione degli effetti per mezzo dell'integrale di convoluzione.

Com'è noto, la soluzione dell'equazione differenziale (Eq.4) è la somma dell'evoluzione "libera", che dipende dalle condizioni iniziali (θ_0, θ'_0) più la risposta forzata che dipende dalla forza applicata F . Le soluzioni sono le seguenti e come si può notare dipendono dal rapporto $\frac{t}{\tau}$.

$$\theta = \theta_0 \cdot \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) + \theta'_0 \cdot \tau \cdot \sinh\left(\frac{t}{\tau}\right) + \frac{F}{g \cdot m} \left(\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right) \quad [2-5]$$

$$\theta' = \frac{\theta_0}{\tau} \cdot \sinh\left(\frac{t}{\tau}\right) + \theta'_0 \cdot \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) + \frac{F}{g \cdot m} \sinh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Il parametro τ sarà il fattore scala di tutti i moti, e più piccolo è il suo valore e più veloce sarà la motocicletta. Nelle [Eq. 2.5] il primo termine rappresenta l'evoluzione libera il secondo l'evoluzione forzata.

Per la rappresentazione della soluzione si userà il "piano delle fasi". In questo tipo di grafici si ha sull'asse delle ascisse l'angolo di rollio e sull'asse delle ordinate la velocità di

rollio. Ogni punto del grafico rappresenta uno stato del moto del sistema. Con riferimento alla Figura 8, si commentano alcuni punti. Il punto 0 indica una condizione con angolo di rollio e velocità di rollio nulla. Siamo in condizioni di veicolo verticale. Come si può notare è una condizione di equilibrio instabile. Infatti, tutte le curve si allontanano da questo punto indefinitamente. In altre parole la motocicletta tende a cadere lateralmente se risulta senza controllo.

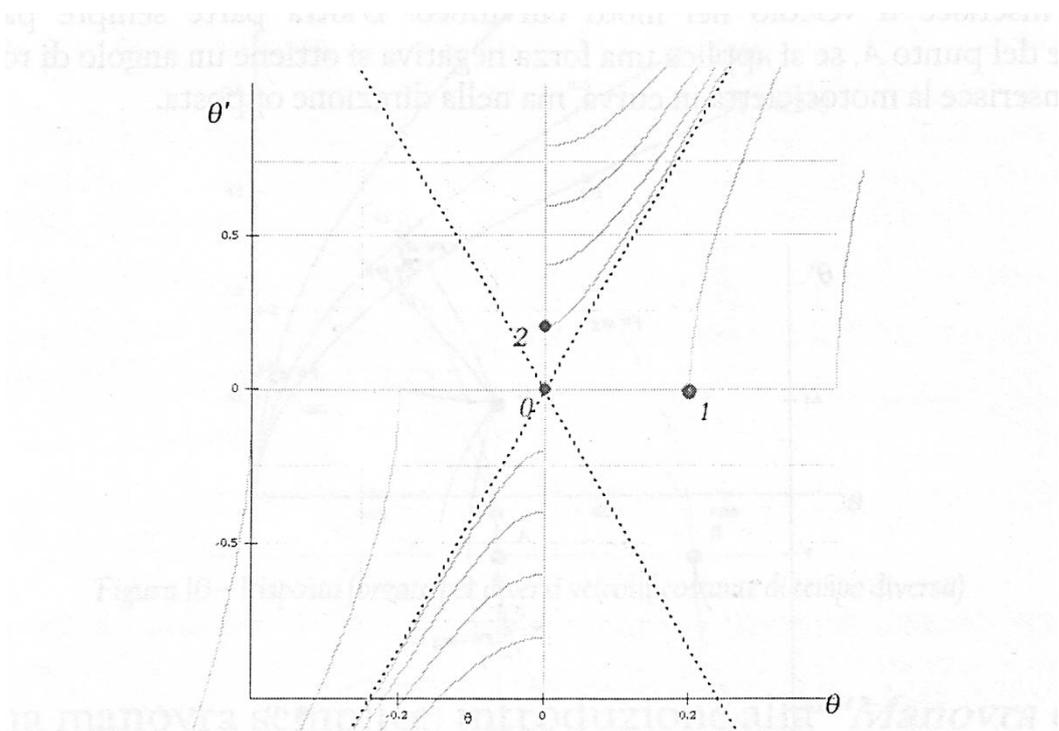


Figura 8 - Piano delle fasi per l'evoluzione libera del modello a "pendolo inverso"

Queste curve si allontanano lungo un asintoto, la cui pendenza è l'inverso della costante di tempo. In sostanza indica quanto rapidamente cade lateralmente la motocicletta. Il punto 1 indica una situazione di moto stazionario in curva (angolo di rollio diverso da zero e velocità di rollio uguale a zero). Anche in questa configurazione il veicolo deve essere controllato per non cadere lateralmente. Infine, il punto 2 indica una situazione in cui il veicolo è verticale e dotato di una velocità di rollio iniziale. Ancora una volta il veicolo cade tendendo ad una velocità di caduta proporzionale all'inverso della costante di tempo τ .

Per le informazioni ricavate dalle equazioni e dal grafico precedente, si deve far presente che il modello matematico usato è una schematizzazione abbastanza grossolana della realtà, anche se fornisce delle indicazioni molto utili. I limiti del modello, e per primo la mancanza dello sterzo, non permettono di mettere in luce le caratteristiche di stabilità della motocicletta che nella realtà dei fatti sono presenti e sono state dimostrate anche da modelli matematici più complessi. Una motocicletta a seconda del segno della coppia di sterzo può essere stabile e quindi durante il moto stazionario in curva è possibile non esercitare alcun controllo senza rischiare la caduta del veicolo. In altre parole se durante il moto stazionario in curva il pilota deve applicare una coppia in senso opposto al verso di percorrenza della curva, significa che il veicolo ha la naturale tendenza a tornare nella

posizione verticale. La stabilità è fortemente influenzata dalla geometria dell'avantreno e dalle caratteristiche dei pneumatici, nonché dalla velocità con cui si sta percorrendo la curva. Come si può osservare la forza di controllo è fatta variare da $+(m \cdot g)$ a $-(m \cdot g)$.

Ad esempio partendo dallo stato A, che rappresenta la condizione di veicolo verticale (ad esempio moto rettilineo), se si applica una forza positiva, si rolla il veicolo di un angolo positivo. In altre parole s'inserisce il veicolo nel moto curvilineo. D'altra parte sempre partendo dalla condizione del punto A, se si applica una forza negativa, si ottiene un angolo di rollio negativo, ovvero s'inserisce la motocicletta in curva, ma nella direzione opposta.

Nel caso dell'evoluzione forzata, la Figura 9 mostra la possibilità di "guidare" il veicolo da uno stato all'altro dosando opportunamente la forza di controllo F . Il fascio di curve che si dipartono dai punti A, B, C, D sono parametrizzate in funzione della forza di controllo F .

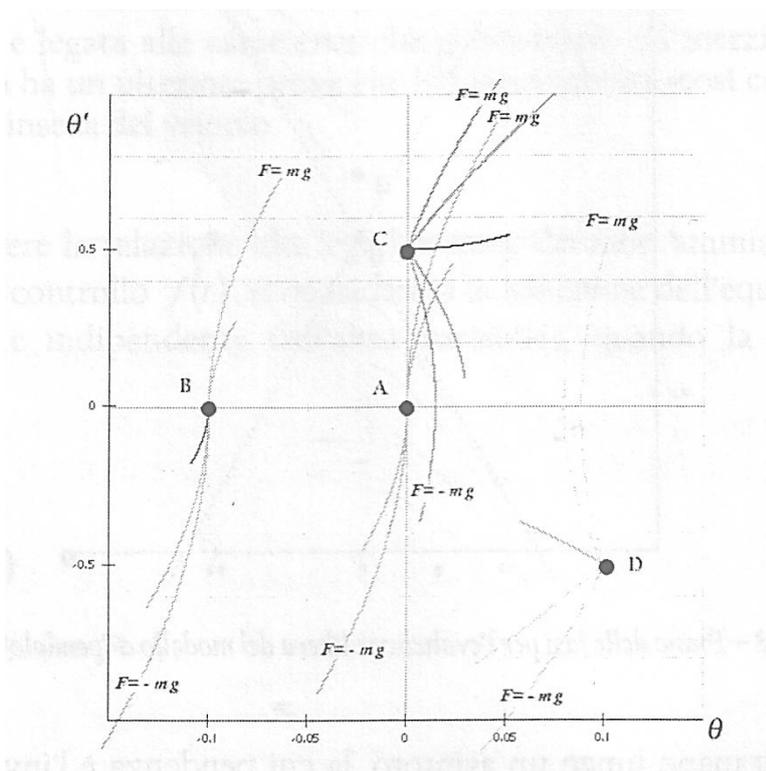


Figura 9 - Piano delle fasi per l'evoluzione forzata del modello a "pendolo inverso"

Sia con forza F positiva sia negativa, l'angolo di rollio e la velocità di rollio raggiunti dipendono dall'intensità della forza F applicata, oltre che dal parametro r . Infatti, come in precedenza evidenziato, la costante di tempo r è il fattore scala dei moti, per cui al suo aumentare la velocità con cui un veicolo passa da uno stato all'altro diminuisce. Se si osserva la Figura 10, si può notare come a parità di forza e per un intervallo di tempo uguale (a esempio 0.15 s in Figura 10) si raggiungono degli stati diversi per veicoli che hanno una costante di tempo diversa. Esprimendo il concetto da un altro punto di vista si può dire che, se si vuole raggiungere lo stesso stato con due veicoli differenti, le forze di controllo da applicare sono diverse.

Riassumendo, si può affermare che a parità di forza (supponendo che questa sia un limite), veicoli con un valore di r più piccoli possono raggiungere un insieme di stati (condizioni di moto, ovvero coppie $(\vartheta_0, \vartheta'_0)$) più ampio rispetto a motociclette con costanti di tempo più grandi. Per chiarire il concetto, tornando alla Figura 10, se il limite della forza laterale è $+0.5 m \cdot g$ come indicato, i veicoli con la costante di tempo $r = 0.169$ e $r = 0.240$, non potranno mai raggiungere gli stati raggiunti dal veicolo con $r = 0.138$ se non utilizzando una forza maggiore. Ciò tuttavia non è possibile perché la forza è limitata al valore $+0.5 m \cdot g$.

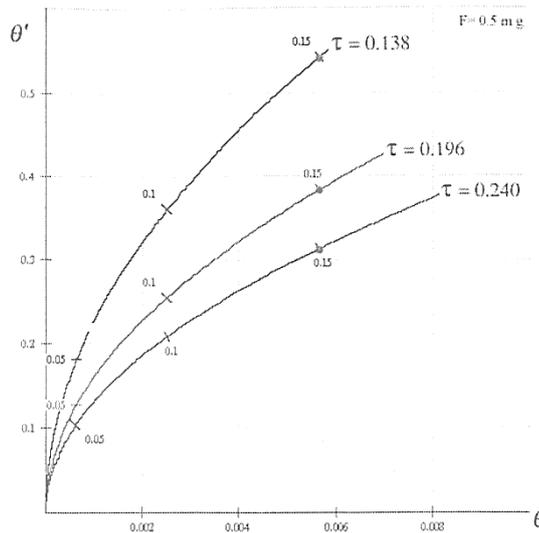


Figura 10 - Risposta forzata per diversi veicoli (costante di tempo diversa)

2.4 - UNA MANOVRA SEMPLICE: INTRODUZIONE ALLA "MANOVRA OTTIMA"

Si consideri ora una semplice manovra che sposti una motocicletta dallo stato iniziale con angolo di rollio e velocità di rollio nulli ad uno stato finale con angolo di rollio diverso da zero e velocità di rollio nulla. Questa manovra equivale a guidare un veicolo a due ruote dalla condizione di moto rettilineo a quella di moto circolare uniforme (Figura 11). La più semplice delle manovre cui si potrebbe pensare è quella che inizialmente applica una forza per un certo tempo e in seguito richiede di applicare una forza di segno opposto F_2 per un tempo sufficiente a raggiungere la condizione finale. Se si fissano pari a $F = |mg|$ il valore massimo della forza laterale esercitabile dal pneumatico nei due sensi, la manovra più rapida è proprio quella che utilizza i valori massimi della forza. Infatti facendo riferimento alla Figura 11, la manovra più rapida è quella che si ottiene applicando la forza $F_x = mg$ per 0.6s con la quale si raggiunge lo stato $(\vartheta_0 \approx 0.2, \vartheta'_0 \approx 2.6)$ e a questo punto si applica la forza $F_2 = -mg$ per 1.1s. Le forze

usate in questo caso sono le massime possibili e con queste si compirebbe manovra complessivamente in 1.7s. D'altra parte se si vogliono usare valori delle forze più bassi, si ottengono delle manovre più lente. Ad esempio con una coppia di forze $F_3 = 0.2mg$ e $F_4 = -0,6mg$ si compirebbe la manovra in circa 2.7s. Per valori inferiori delle forze di controllo il tempo cresce molto, per tendere all'infinito con forze F che tendono a zero.

Si deve sottolineare che non tutte le coppie di forze possono essere applicate in quanto esistono dei limiti fisici, dovuti ad esempio all'aderenza dei pneumatici. Per questo motivo inizialmente si è fissato un valore massimo della forza per entrambi i sensi e solo per semplicità è stato posto pari al peso del veicolo. In realtà il suo valore dipende dal coefficiente massimo di aderenza laterale del pneumatico.

In quest'ottica, se le forze F_1 e F_2 rappresentano i limiti superiori delle forze esercitabili dai pneumatici, l'insieme dei moti e quindi delle manovre che è possibile eseguire con la motocicletta risulta limitato. In particolare, l'insieme dei moti ammissibili sono quelli compresi tra i due valori massimi e indicati in Figura 11 con l'area colorata. Tanto più è larga questa zona (e quindi maggiori le forze² che possono essere prodotte dai pneumatici), tanto più manovrabile risulterà la motocicletta nel senso definito nei paragrafi precedenti. La zona dei moti ammissibili può essere ampliata (e quindi la manovrabilità della motocicletta), anche cambiando la costante di tempo r , che dipende dai parametri di progetto del veicolo (nel caso in Figura 12 si è cambiato il momento d'inerzia a rollio).

A questo punto è naturale chiedersi com'è possibile valutare il grado di manovrabilità del veicolo. Poiché si è visto in questo caso che *applicando le forze massime non solo si è compiuta la manovra nel minor tempo possibile, ma si sono anche raggiunti i limiti dell'insieme dei moti ammissibili*. Dalla precedente considerazione segue naturalmente che per *valutare la manovrabilità della motocicletta è sufficiente eseguire la manovra più efficiente e associare ad essa un indice che ne valuti l'efficienza*. In altre parole, la manovra più efficiente è quella che evidenzia i limiti dell'insieme dei moti ammissibili del veicolo nel passare dallo stato iniziale allo stato finale, ovvero sceglie tra tutti i moti ammissibili quello che rispetta i vincoli fisici e meglio rispetta il criterio scelto per definire l'efficienza. Tale manovra è detta "ottima".

Esistono diversi criteri per definire la manovra "migliore", o "ottima", e ora s'illustreranno i due più importanti.

a] - Minimo valore efficace delle forze:

Un altro criterio è quello che richiede di muoversi dallo stato iniziale allo stato finale in un tempo T , *noto a priori*, usando le forze minime necessarie per compiere la manovra.

² Il fatto che le manovre associate alle forze di aderenza massime esercitabili dei pneumatici rappresentino la delimitazione dei moti ammissibili, e quindi indirettamente il grado di manovrabilità del veicolo, sottolinea come i pneumatici non devono essere considerati degli elementi disgiunti dal veicolo, ma parte integrante di esso nella valutazione della manovrabilità.

Matematicamente l'integrale da minimizzare assume in questo caso la seguente espressione: $I = \int_0^T f^2(t)dt$, che implica la ricerca del minimo valore medio quadratico delle forze di contatto (o valore efficace) in modo da eseguire la manovra tra lo stato iniziale e finale nel tempo T .

b] - Tempo minimo:

Richiede di muoversi dallo stato iniziale a quello finale nel minor tempo possibile. Matematicamente significa minimizzare l'integrale $I = \int_0^T f^2(t)dt$ considerando le forze di controllo limitate $|f(t)|$. Il tempo finale T non è noto a priori, ma fa parte della soluzione da trovare. Affinché il problema abbia significato fisico, si devono limitare le forze di controllo, altrimenti sarebbe possibile raggiungere lo stato finale in un tempo zero.

L'espressione, o funzione integranda, che definisce il criterio di efficienza è detta *funzione penalità* sarà indicata con f_0 . La sua espressione nel problema A è $f_0 = 1$, mentre per il problema B è $f_0 = f^2(t)$.

Nei prossimi paragrafi si cercherà di risolvere i due problemi e si farà riferimento alle equazioni del controllo ottimo ottenute con l'applicazione della teoria del calcolo variazionale. Per cui le equazioni del controllo ottimo per ora si prendono acquisite, poiché si ritiene in questa fase più importante spiegare l'essenza e le implicazioni del "Metodo della Manovra Ottima".

2.3.1 - SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI MINIMO VALORE EFFICACE DELLE FORZE DI CONTATTO

Si comincia con la risoluzione del problema di minimo in cui il criterio di efficienza è il minimo valore efficace delle forze di contatto, in quanto è un problema di più facile risoluzione, oltre ad avere ovviamente il significato fisico di trovare la manovra che più "risparmia l'utilizzo dei pneumatici". La sua formulazione matematica è la seguente:

Trovare le funzioni $\theta(t)$ e $v(t)$, variabili di stato, e l'ingresso $f(t)$, in modo che soddisfino le seguenti condizioni:

1. Soddisfare le equazioni del moto (riscritte come sistema del primo ordine):

$$J \frac{\partial v(t)}{\partial t} - mg \cdot h \cdot \theta(t) - h \cdot f = 0$$

$$\frac{\partial \theta(t)}{\partial t} - v(t) = 0$$

2. Rispettare le condizioni al contorno:

Per $t=0$ si deve avere: $\theta(t)=0$ e $v(t)=0$

Per $t = T$ si deve avere: $\theta(t)=\theta_f$ e $v(t)=v_f$

3. Minimizzare il seguente integrale:

$$J = \int_0^T f^2 \cdot dt$$

Chiaramente si potrebbe pensare che la soluzione $f(t) = 0$ renda minimo l'integrale, ma questa soluzione non genera alcun tipo di moto, e quindi viola le condizioni al contorno. Le condizioni (1) e (2) hanno infinite soluzioni e solo imponendo la condizione (3) si sceglie un; di queste soluzioni.

In altre parole, si devono scegliere i valori di $\theta(t)$, $v(t)$ ed $f(t)$ in modo da minimizzare (3), ma ristretti a quelli che soddisfano (1) e (2). Matematicamente il problema consiste in una minimizzazione vincolata, che può essere ridotto ad un problema di minimizzazione non vincolata attraverso l'utilizzo del Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange.

Questo metodo richiede di minimizzare non più la (3), ma una nuova funzione (detta "Lagrangiano"), che è data dalla somma della funzione penalità più una combinazione lineare, delle altre equazioni di vincolo (1) e (2) per mezzo dei moltiplicatori di Lagrange.

In formule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} &= \dot{\theta} \\ \frac{\partial v(t)}{\partial t} &= \dot{v} \\ L &= f^2 + \lambda_1 (J\dot{v} - mg \cdot h \cdot \theta - h \cdot f) + \lambda_2 (\dot{\theta} - v) \end{aligned} \quad [2-6]$$

$$I = \int_0^T L \cdot dt \quad [2-7]$$

I moltiplicatori di Lagrange $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$ (detti co-variabili di stato) vanno ad aggiungersi all'insieme delle variabili di stato del problema iniziale $\theta(t)$ e $v(t)$, raddoppiando in tal modo il numero delle incognite.

Il problema matematico così formulato si risolve usando la "Teoria del Calcolo Variazionale", di cui si dirà nel capitolo successivo. I risultati dell'applicazione di tale teoria che danno luogo al *metodo della Manovra Ottima* e consistono dei seguenti due punti.

Prima di tutto si tratta di calcolare le equazioni del controllo ottimo applicando le equazioni di Lagrange per la nuova funzione Lagrangiana L ottenuta. In formule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} &= 0 \end{aligned} \quad [2-8]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad [2-9]$$

Dalle prime due si ottengono nuovamente le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} J \cdot \ddot{\theta} - g \cdot m \cdot h \cdot \theta - h \cdot f &= 0 \\ \dot{\theta} - v &= 0 \end{aligned} \quad [2-10]$$

Dalle ultime due si tengono delle equazioni ausiliarie, dette co-equazioni, associate ai moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{aligned} J \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \lambda_2 &= 0 \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + g \cdot m \cdot h \cdot \lambda_1 &= 0 \end{aligned} \quad [2-11]$$

Quindi, come prima considerazione si può dire che applicando la teoria del controllo ottimo si ottengono nuovamente le equazioni del moto del problema iniziale (che sono state trattate come dei vincoli sui quali minimizzare l'integrale), alle quali vanno aggiunte le *co-equazioni* in numero uguale alle equazioni del problema iniziale. Per cui il problema finale, avrà un numero d'incognite ed equazioni doppio rispetto a quello iniziale, in quanto ci sono anche i moltiplicatori di Lagrange.

Infine, va calcolata l'espressione dell'ingresso ottimo da applicare per eseguire la manovra. Questo si ottiene ponendo a zero la derivata (nel caso di più ingressi sarà da porre a zero il gradiente) del Lagrangiano rispetto all'ingresso $f(t)$. Nuovamente in formule:

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 0 \quad [2-12]$$

Generalmente si ottengono delle equazioni implicite funzione degli ingressi e delle variabili di stato del problema. Per il problema in questione si ottiene:

$$f(t) - \frac{1}{2} h \cdot \lambda_1(t) = 0 \quad [2-13]$$

In aggiunta in questo caso è possibile esplicitarne il valore:

$$f(t) = \frac{1}{2} h \cdot \lambda_1(t) \quad [2-14]$$

Si ottiene così la funzione dell'ingresso ottimo, che dipende dalle variabili di stato (e questa è una situazione che si verifica in molti casi). E' l'ingresso che deve essere

applicato per eseguire la manovra minimizzando il criterio di efficienza stabilito e rispettando le condizioni di vincolo sia al contorno sia fisiche.

Tuttavia, non sempre è possibile esplicitare gli ingressi ottimi, per cui è necessario risolverli per via numerica.

A questo punto avendo a disposizione la forma esplicita del valore ottimo della forza di controllo $f(t)$, si sostituisce il valore nelle equazioni del controllo ottimo e si tenta di risolvere il sistema di equazioni differenziali del primo ordine così ottenuto. Solitamente, a causa della complessità delle equazioni sarà necessario risolverlo per via numerica. In questo caso è possibile farlo in forma analitica. Le Figure 13 rappresentano le soluzioni ottenute per due valori del tempo T . In particolare, la prima Figura 13 rappresenta la manovra (detta "ottima") da seguire per spostare il veicolo tra i due stati iniziali e finali con il minimo valore efficace delle forze. A queste due manovre sono associati due diversi andamenti delle forze di controllo. Per la precisione la manovra che deve essere fatta in un tempo minore richiede delle forze molto più elevate rispetto a quella che può essere eseguita in un tempo maggiore. Questo fatto era prevedibile, in quanto deve raggiungere lo stesso angolo di rollio, ma in un tempo minore.

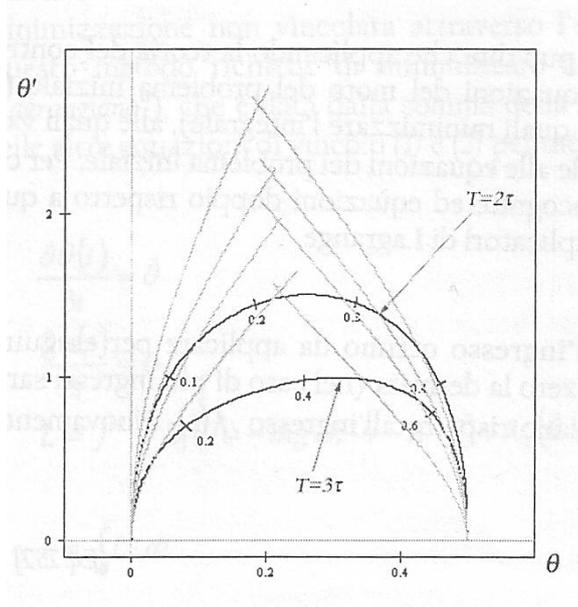


Figura 13 - Manovre Ottime con criterio del minimo valore efficace delle forze di contatto

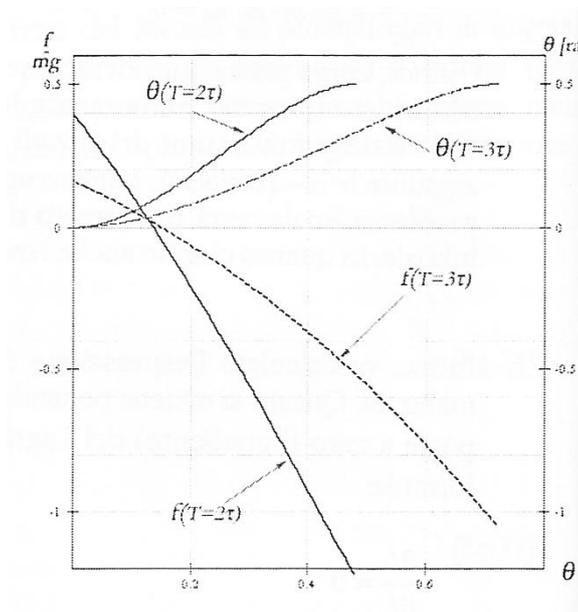


Figura 14 - Forze di controllo e angolo di rollio con criterio del minimo valore efficace delle forze di contatto

Se si calcola il valore dell'integrale da minimizzare si ottiene il valore dell'indice I che rappresenta una misura della manovrabilità del veicolo. Infatti, se si cerca nuovamente la soluzione per il medesimo problema, ma con un veicolo differente si otterrà un valore dell'indice di prestazione differente. Nelle seguenti Figura 15 e Figura 16 è riportato un esempio di due manovre eseguite da due veicoli differenti, in cui è cambiato il momento e inerzia a rollio, e di conseguenza la costante di tempo τ . Osservando i grafici si possono ricavare delle informazioni molto utili e di carattere generale. Prima di tutto, cambiando i parametri di progetto del veicolo cambia anche la manovra ottima da seguire pur rimanendo costanti le condizioni al contorno. Questo fatto suggerisce che veicoli differenti devono essere guidati in modo diverso se si vuole sfruttarne completamente le caratteristiche. In secondo luogo si nota come il veicolo con la costante

di tempo più bassa, (che in precedenza era stato indicato il più manovrabile perché dotato di un insieme di moti ammissibili più ampio), esegue la stessa manovra con un valore medio delle forze inferiore (Figura 16). Questo vinifica avere a disposizione una maggiore sicurezza di guida, in quanto rimane a imposizione per le situazioni di emergenza un margine di forza di controllo maggiore. Infine, si può notare che il veicolo con costante di tempo inferiore ha un indice di prestazione inferiore, che equivale ad affermare che ha meglio rispettato il criterio di efficienza di minimo valore efficace delle forze di controllo. Dopo tutto quest'ultimo fatto concorda con la necessità di usare delle forze inferiori evidenziata in precedenza.

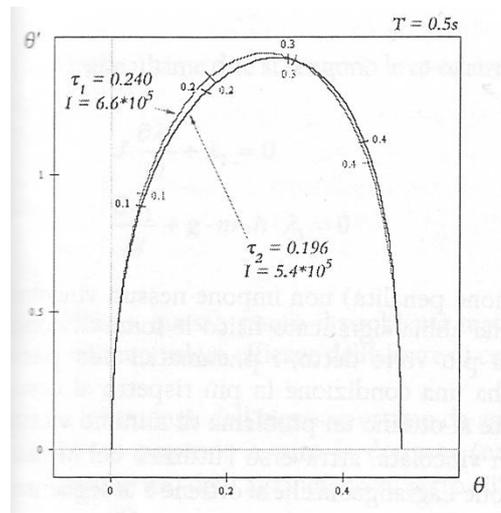


Figura 15 - Manovre Ottime con criterio del minimo valore efficace delle forze di contatto per due veicoli differenti

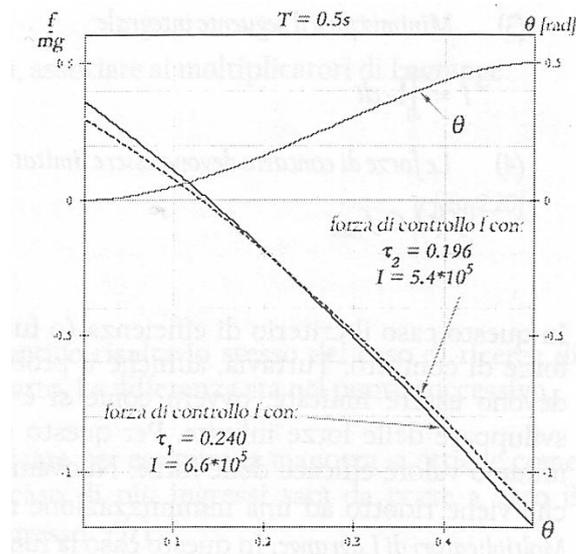


Figura 16 - Forze di controllo con criterio del minimo valore efficace delle forze di contatto per due veicoli differenti

A questo punto a buona ragione si può considerare l'indice di prestazione (il valore finale dell'integrale da minimizzare), come uno strumento per valutare la manovrabilità

dei veicoli. In particolare si può utilizzare per confrontare veicoli differenti ai quali è richiesto di eseguire la stessa manovra.

2. 3. 2. - SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI TEMPO MINIMO

La risoluzione del problema di tempo minimo è di più difficile risoluzione, in quanto il tempo finale della manovra non è noto a priori. La sua formulazione matematica è la seguente:

Trovare le funzioni $\theta(t)$ e $v(t)$, variabili di stato, e l'ingresso $f(t)$, in modo che soddisfino le seguenti condizioni:

- 1) Soddisfare le equazioni del moto (riscritte come sistema del primo ordine):

$$J \frac{\partial v(t)}{\partial t} - mg \cdot h \cdot \theta(t) - h \cdot f = 0$$

$$\frac{\partial \theta(t)}{\partial t} - v(t) = 0$$

- 2) Rispettare le condizioni al contorno:

Per $t=0$ si deve avere: $\theta(t)=0$ e $v(t)=0$

Per $t = T$ si deve avere: $\theta(t)=\theta_f$ e $v(t)=v_f$

- 3) Minimizzare il seguente integrale:

$$I = \int_0^T 1 \cdot dt$$

- 4) Le forze di contatto devono essere limitate:

$$|f(t)| \leq f_{\max}$$

In questo caso il criterio di efficienza (o funzione penalità) non impone nessun vincolo alle forze di contatto. Tuttavia, affinché il problema abbia significato fisico, le forze di contatto devono essere limitate, in altre parole come si è già più volte detto, i pneumatici non possono sviluppare delle forze infinite. Per questo si ha una condizione in più rispetto al caso del minimo valore efficace delle forze. Nuovamente si ottiene un problema di minimo vincolato che è ridotto a una minimizzazione non vincolata, attraverso l'utilizzo del *Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange*. In questo caso la funzione Lagrangiana che si ottiene è la seguente:

$$\frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} = \dot{v}$$

[2-15]

$$L = 1 + \lambda_1 (J\dot{v} - mg \cdot h \cdot \theta - h \cdot f) + \lambda_2 (\dot{\theta} - v) \quad [2-16]$$

$$I = \int_b^x L \cdot dt$$

Applicando nuovamente il procedimento seguito nel paragrafo precedente, si ottiene:

Le equazioni del controllo ottimo ottenute applicando le equazioni di Lagrange alla nuova funzione Lagrangiana L ottenuta sono:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \quad [2-17]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \quad [2-18]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Al solito dalle prime due si ottengono nuovamente le equazioni del moto:

$$J \cdot \dot{v} - g \cdot m \cdot h \cdot \theta - h \cdot f = 0 \quad [2-19]$$

$$\dot{\theta} - v = 0$$

Dalle ultime due si tengono le *co-equazioni*, associate ai moltiplicatori di Lagrange:

$$J \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \lambda_2 = 0 \quad [2-20]$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + g \cdot m \cdot h \cdot \lambda_1 = 0$$

Fino a questo punto il problema matematico risulta lo stesso del caso di ricerca di minimo valore efficace delle forze di contatto. La differenza sta nel punto successivo.

La funzione dell'ingresso ottimo da applicare per eseguire la manovra si ottiene come detto ponendo a zero la derivata (nel caso di più ingressi sarà da porre a zero il gradiente) del Lagrangiano rispetto all'ingresso $f(t)$.

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 0 \quad [2-21]$$

Per il problema in questione si ottiene:

$$\frac{\partial L}{\partial f} = -h \cdot \lambda_1 \quad [2-22]$$

Tuttavia in questo caso si nota che la derivata del Lagrangiano rispetto all'ingresso $f(t)$ non dipende dall'ingresso, in quanto nella funzione penalità non è presente nessun termine (o vincolo) che limita il valore dell'ingresso. Inoltre, si può notare come essa possa essere una funzione monotona crescente o decrescente. Apparentemente non è possibile ottenere un'espressione per l'ingresso $f(t)$. Comunque, è possibile risolvere il problema facendo ricorso al *Principio di Pontryagin*. Questo principio afferma che a ogni istante t deve essere scelto il valore massimo o minimo dell'ingresso, all'interno del suo intervallo di variazione, in modo che sia minimo il Lagrangiano L , all'interno del campo ammissibile di valori dell'ingresso. Una spiegazione intuitiva del principio di Pontryagin può essere ricavata osservando la Figura 17. In questa si vedono due casi in cui il Lagrangiano è crescente (curva continua) o decrescente (curva tratteggiata), come è il caso di tempo minimo che stiamo considerando. La zona colorata indica il campo ammissibile di valori dell'ingresso.

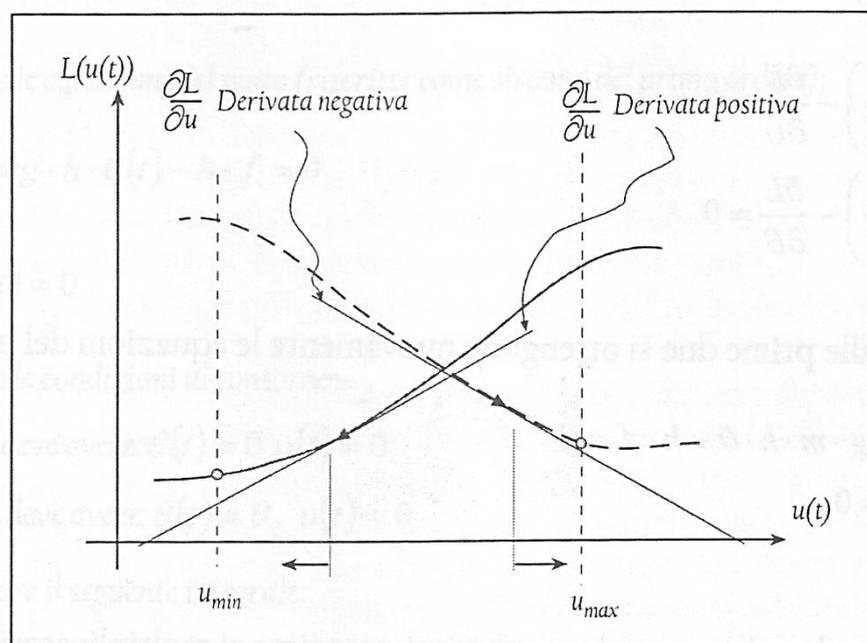


Figura 17- Valori dell'ingresso limitati- Principio di Pontryagin

Ad esempio nel caso del Lagrangiano crescente (derivata positiva), il suo valore minimo si ottiene nell'estremo sinistro del campo ammissibile di valori dell'ingresso. E quindi in questo caso il valore ottimo dell'ingresso sarà il suo valore minimo. Viceversa, con Lagrangiano con derivata negativa il valore minimo si trova sulla destra, l'ingresso ottimo sarà quello massimo. Poiché, generalmente il Lagrangiano dipende dalle variabili di stato e quindi anche la sua derivata rispetto all'ingresso, significa che istante per istante la crescita o decrescenza può variare e di conseguenza l'ingresso ottimo

commuta tra il suo valore massimo e minimo. Questo tipo di controlli sono detti *bang-bang*, e sono piuttosto bruschi. Tuttavia è presumibile che un pilota ideale guidi in un modo simile a questo. D'altra parte è possibile risolvere questo problema inserendo nella funzione penalità un termine che quantifichi un costo per l'attuazione dell'ingresso all'interno del campo ammissibile di valori. Un esempio potrebbe essere un termine quadratico della velocità di variazione del controllo normalizzato rispetto al valore massimo che può assumere. Questa soluzione possiede il vantaggio di gestire i controlli in modo continuo, condizione che invece non è rispettata con un controllo *bang-bang*. La precedente considerazione assume particolare significato dal punto di vista numerico, in quanto le discontinuità non sono ben tollerate numericamente.

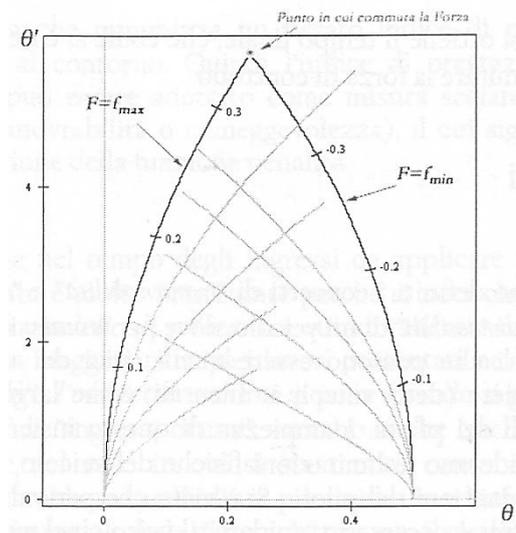


Figura 18 - Manovra Ottima con criterio del tempo minimo

In questo caso applicando il Principio di Pontryagin è abbastanza semplice trovare la soluzione del problema di tempo minimo, in quanto l'ingresso è costante (o è uguale al valore massimo o è uguale al valore minimo) e quindi ricadiamo nel caso dell'ingresso a gradino per il quale si è già trovata la soluzione analitica.

La soluzione prevede di applicare la forza massima per un tempo T_s sufficiente a raggiungere la curva che si ottiene applicando la forza minima (in questo caso uguale e di segno opposto), che passa per lo stato finale. Il tempo T_s è detto *istante di switch*, ovvero è l'istante in cui il controllo commuta da un valore limite all'altro. Infatti, in questo punto si cambia la forza di controllo dal suo valore massimo a quello minimo e si raggiunge lo stato finale nel tempo T , che è minimo in virtù del Principio di Pontryagin. La curva che si ottiene con la forza di controllo massima e passa per lo stato iniziale e la curva che si ottiene con la forza di controllo minima e passa per lo stato finale, devono incontrarsi nel punto in cui la forza si commuta. Imponendo l'uguaglianza delle equazioni del moto ([Eq. 2.5]) in questo punto si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite.

$$f_{min} + (\cosh(t_1) - 1)f_{max} - \frac{1}{2}(2f_{min} + g * m) \cosh(t_2) = 0 \quad [2-23]$$

$$f_{min} + \sinh(t_1) - \frac{1}{2}(2f_{min} + g * m) \sinh(t_2) = 0 \quad [2-24]$$

Dalle quali risolvendo numericamente si ottiene:

$$\begin{aligned} t_1 = T_s &= 0.34068 \\ t_2 &= -0.38717 \\ T = t_1 + |t_2| &= 0.7277 \end{aligned} \quad [2-25]$$

Sommando i due tempi si ottiene il tempo finale, che come si è detto è minimo, e il tempo di "switch", in cui devo commutare la forza di controllo.

2.4. - CONCLUSIONI

In questo capitolo si sono definiti i concetti di "manovrabilità" e "maneggevolezza" e sono stati legati "all'insieme dei moti ammissibili" di un veicolo, dove per ammissibili s'intende che l'insieme deve rispettare dei limiti che possono essere quelli fisici del veicolo oppure dovuti alla manovra che deve compiere (detti vincoli ambientali, come larghezza della pista) o anche legati ai limiti psicofisici del pilota. L'ampiezza di questo insieme rappresenta il grado di manovrabilità se si considerano le limitazioni fisiche del veicolo, o di maneggevolezza se si considerano anche le limitazioni del pilota. Si è visto che per valutare l'ampiezza di questo insieme di moti ammissibili, è necessario "guidare" il veicolo nel modo più efficiente possibile. L'efficienza è stabilita da un "criterio di efficienza" e in termini matematici è rappresentato da una "funzione penalità" il cui integrale va minimizzato nel dominio del tempo (o dello spazio nel caso del problema di tempo minimo). In tal modo tra le infinite soluzioni (o infiniti moti) che esistono per spostare un veicolo da un punto a un altro di una pista date delle condizioni iniziali e finali, si seleziona la manovra migliore, o meglio quella che rispetta maggiormente il criterio di efficienza definito. Per manovra s'intende l'evoluzione del moto e dei controlli da applicare per ottenere quel moto e tale manovra è detta "ottima", così come i controlli da applicare. In base al criterio di efficienza usato (e quindi in base all'espressione della funzione penalità) si chiarisce il significato del concetto di: manovrabilità e maneggevolezza che è usato.

In questo capitolo si sono presi in considerazione due "criteri di efficienza" per un semplice modello che descrive la dinamica laterale di una motocicletta. I criteri presentati sono il "minimo valore efficace delle forze" e il "problema di tempo minimo". Per la risoluzione di questi due problemi si è fatto ricorso alla teoria del calcolo variazionale dalla quale si sono ricavate le equazioni del "Metodo della Manovra Ottima", che è presentato in modo rigoroso nel capitolo successivo. Si è preferito seguire quest'approccio con un semplice modello cui si sono applicate le equazioni del controllo

ottimo, senza spiegare la loro derivazione, per focalizzare il discorso sui concetti di manovrabilità e maneggevolezza e su com'è possibile misurarli in modo oggettivo. Infatti, è risultato, che ogni veicolo va guidato in modo diverso da un altro e che esistono veicoli più manovrabili di altri. Quindi se si desidera confrontare due veicoli differenti, questi devono essere guidati nel modo più efficiente possibile, per avere la certezza che il confronto sia realistico. Il "*Metodo della Manovra Ottima*" fornisce una soluzione a questo problema e misura la prestazione di un veicolo attraverso un indice, detto "*indice di prestazione*". Sulla base del confronto degli indici di prestazione di due veicoli differenti che devono percorrere lo stesso tracciato nelle medesime condizioni iniziali e finali, è possibile stabilire quale dei due è più manovrabile o maneggevole.

Dal punto di vista matematico il "*Metodo della Manovra Ottima*" consiste nel risolvere un sistema di equazioni differenziali ridotte al primo ordine con condizioni al contorno. La soluzione ottenuta fornisce:

- La manovra che minimizza un fissato indice di prestazione e soddisfa le condizioni al contorno. Quindi l'indice di prestazione, essendo il minimo possibile può essere adottato come misura scalare delle prestazioni di un veicolo (manovrabilità o maneggevolezza), il cui significato esatto è definito dall'espressione della funzione penalità.
- L'evoluzione nel tempo degli ingressi da applicare per ottenere la manovra. Questo punto è molto importante perché si nota che *non è stato necessario definire un modello di pilota*. Si è quindi "saltato" il problema in cui venivano a "cadere" la maggior parte dei lavori. Si è piuttosto definito qual è *l'obiettivo* che ci si pone quando si guida un veicolo lungo un tracciato. Tali "ingressi ottimi" saranno anche quelli che dovrebbe usare un pilota reale nel caso in cui si sia tenuto conto dei suoi limiti psicofisici, altrimenti sarebbero quelli di un pilota ideale, e l'informazione che otteniamo dall'indice riguarda solo la motocicletta e non il sistema-pilota motocicletta.

A proposito del punto precedente è bene sottolineare che la maneggevolezza è comunque una caratteristica intrinseca dei veicoli. In altre parole una motocicletta più maneggevole di un'altra è veicolo più facile da guidare anche per un pilota meno esperto, ma questo dipende dal veicolo non dal pilota. La manovrabilità è una grandezza intrinsecamente legata al veicolo, mentre la maneggevolezza esprime sempre una caratteristica legata al veicolo, ma indica il grado di difficoltà che il pilota deve esercitare per poter sfruttare al meglio la manovrabilità del veicolo. In termini più concreti, se ad esempio il criterio di efficienza è il tempo minimo, con la manovrabilità si misura quanto un veicolo è più veloce rispetto a un altro, mentre con la maneggevolezza si misura il livello di bravura e di sforzo fisico che è necessario che un pilota esprima per guidare al meglio quel veicolo.

Da questo punto di vista si può pensare che un veicolo più manovrabile, può essere anche più maneggevole. Questa deduzione può derivare dal fatto che, in accordo a quanto visto in questo capitolo un veicolo è considerato più manovrabile se dotato di una gamma di moti più ampia a parità di forza di controllo e quindi permette più ampi

marginari di manovra in condizioni di emergenza. Tuttavia in alcune situazioni può risultare troppo oneroso gestire il veicolo per cui solo un pilota di un certo livello è in grado di farlo.

CAPITOLO 3

IL METODO DEL CONTROLLO OTTIMO APPLICATO A SISTEMI MULTIBODY

3.1 - INTRODUZIONE

La pianificazione del moto vincolato di un sistema multibody consiste nel calcolare per un finito lasso di tempo l'andamento di tutto il sistema delle variabili e dei controlli che descrivono il sistema stesso al fine di raggiungere l'obiettivo nel migliore dei modi.

L'effettiva fattibilità del moto è ristretta e regolata dalle limitazioni intrinseche della dinamica e dai limiti ambientali. Nella pianificazione del moto (riferendosi sia alla manovra sia alla traiettoria) il modello del sistema svolge un ruolo fondamentale nel descrivere il comportamento dinamico generale del sistema reale che rappresenta. Per ottenere ciò può essere necessaria l'introduzione nel modello di equazioni fortemente non lineari e con un gran numero di variabili di stato e che rendono quindi difficile la soluzione del sistema globale, specialmente in *real-time*.

La soluzione *real-time* della pianificazione del moto vincolato è stata oggetto di studio negli ultimi dieci anni in un ampio numero di campi di applicazione come l'automazione industriale, la chimica, l'evitare ostacoli sul percorso da parte di veicoli auto-guidati, il calcolo del tempo minimo di manovra per veicoli militari auto-guidati o simili e, recentemente, il campo di applicazioni dell'Advance Driver Assistance Systems (ADAS) che si occupano di assistere e rendere più sicura la guida di veicoli a 2-4 ruote.

L'obiettivo comune resta il calcolo della manovra ottimale lungo un percorso prefissato che rispetti i limiti legati alla dinamica del sistema stesso e del sistema circostante.

Queste manovre possono essere monitorate per il controllo di un veicolo durante una simulazione, come manovra di riferimento per avvertire e assistere il conducente al fine di evitare situazioni di pericolo o utilizzate in un modello predittivo non lineare (NMCP) come feedback diretto delle leggi di controllo. In tutti questi problemi la questione critica è rappresentata dal tempo di calcolo che deve essere sufficientemente rapido per permettere di intervenire nella dinamica del sistema e modificarla in tempo senza dover superare le capacità di movimento (manovrabilità) del sistema stesso. Evidentemente il tempo *sufficientemente rapido* dipende dalla scala temporale, dalle limitazioni intrinseche del sistema e quanto velocemente possono cambiare le condizioni al contorno. Inoltre, un piano di manovra deve essere calcolato abbastanza rapidamente da lasciare al sistema un certo margine di manovrabilità che può essere utilizzato per riportarlo all'interno di uno stato o configurazione di sicurezza.

L'ultimo concetto definisce il *safely react*. Per esempio nella navigazione autonoma o in applicazioni di supporto al conducente la misura del *sufficientemente rapido* è data dal più veloce tra gli oggetti in movimento nello scenario rispetto alla manovrabilità del veicolo. In altre parole, il lasso di tempo per generare un piano è determinato dalla velocità degli oggetti che appaiono nello scenario e non possono essere evitati dal veicolo senza eccedere la sua capacità di movimento anche se rilevati istantaneamente. Ciò significa che i sistemi con una dinamica veloce, in movimento in un ambiente complesso e mutevole, richiedono una riduzione del tempo di calcolo e un modello di veicolo che include le capacità dinamiche. Per ottenere questo, però, il problema derivante richiede un modello di veicolo altamente non lineare e fornisce un grande sistema di equazioni non lineari con vincoli.

3.2 - ALGORITMI RISOLUTIVI

Secondo la letteratura recente, possono essere utilizzati due diverse classi di metodi per risolvere il problema di pianificazione del moto: algoritmi random di pianificazione del moto (RMPA ovvero Randomized Motion Planning Algorithms) oppure l'approccio con il metodo del controllo ottimo (OCP – Optimal Control Problem).

Il primo metodo è utilizzato per sistemi a grandi dimensioni perché è in grado di esplorare e valutare molto velocemente le varie possibilità di moto costruendo un albero dei percorsi utilizzabili nell'intero spazio di configurazioni integrando le equazioni del moto tra due nodi del percorso.

Ogni nodo corrisponde a una configurazione stabile o dall'assetto noto e l'integrazione si basa su controlli pre-calcolati quasi ottimi che indirizzano il sistema in queste configurazioni stabili. La manovra migliore è cercata nell'albero che minimizza una funzione di costo. Questi algoritmi sono veloci, facili da implementare e in grado di gestire sistemi multibody grandi.

Tuttavia, il moto e la manovra calcolata sono meno accurati rispetto a quelli prodotti con i metodi basati sul controllo ottimale. Di fatto, la traiettoria prodotta da questo tipo di

algoritmi è ottimale in senso probabilistico, inoltre sono esplorate e prese in considerazione solo un sottoinsieme di possibili controlli, in altre parole quelli che riescono a muovere il sistema tra configurazioni note.

Per questo motivo alcuni autori considerano questi metodi non adatti a generare percorsi che possono essere utilizzate direttamente come leggi di controllo predittivo .

Gli approcci di ottimizzazione dinamica, che si basano sulla formulazione del controllo, costituiscono la seconda categoria. La formulazione OCP è interessante perché la definizione della funzione di costo descrive il significato di *ottimo*. Ad esempio l'obiettivo può essere rappresentato dal tempo minimo, dalla sicurezza, dal percorso più breve, ecc., e la soluzione è per definizione la migliore tra tutti le ammissibili, in altre parole tutte quelle che rispettino sia la dinamica del veicolo sia i vincoli ambientali.

Sebbene questo tipo di approccio sia indubbiamente il migliore, da un punto di vista pratico invece, questi metodi generano problemi numerici di dimensioni molto grandi allungando di molto il tempo di soluzione e aumentando il costo computazionale.

OCP può essere risolto in seguito molti approcci diversi, che possono differire secondo quando il problema è discretizzato, il livello di discretizzazione, lo schema numerico adottato e il trattamento delle disuguaglianze di vincolo. È ampiamente riconosciuto come i metodi OCP possano essere distinti tra metodi diretti e indiretti. Nei metodi indiretti, la condizione necessaria di *ottimo* è prima generata e poi discretizzata, ottenendo così un *boundary value problem* (BVP). I metodi diretti differiscono da quelli indiretti in quanto prima si discretizza l'OCP ottenendo un problema di programmazione non lineare (NLP) che viene poi in gran parte risolto utilizzando algoritmi di programmazione quadratica sequenziale (SQP).

Per una rassegna esauriente di vantaggi e svantaggi di questi metodi si veda [13] e [14].

In Xoptima è stato utilizzato un solutore di tipo OCP, dove le disuguaglianze sono state eliminate attraverso la formulazione di funzioni penalità e dove è utilizzato un efficiente metodo quasi-Newton basato sulla formulazione di Broyden con una strategia di globalizzazione. Il metodo proposto si differenzia essenzialmente dagli algoritmi standard di NLP nel trattamento dei vincoli di disuguaglianza. In particolare, i vincoli di disuguaglianza vengono eliminati per mezzo di funzioni penalità con un significato fisico connesso. Inoltre, i parametri delle funzioni penalità non cambiano nel corso delle iterazioni del solutore.

3.3 - FORMULAZIONE MATEMATICA

La soluzione del problema di pianificazione del moto per sistemi multibody implica la minimizzazione di una funzione obiettivo sotto limitazioni differenziali e algebriche. Le limitazioni sono dovute a intrinseci limiti del sistema multibody o per l'ambiente circostante. La mappa $p(s) \in \mathbb{R}^p$ contiene la storia dell'andamento dei parametri che vengono utilizzati per rappresentare la manovra stessa e definire i suoi vincoli. La

mappa $x(s) \in \mathbb{R}^n$ rappresenta la storia delle variabili di stato del sistema, mentre $u(s) \in \mathbb{R}^m$ è la storia dei controlli di guida del multibody. Il problema di minimizzazione prende la seguente forma:

Trovare u e x tal da minimizzare:

$$\int_a^b J(x(s), u(s), p(s)) ds \quad [3-1]$$

Sotto le seguenti condizioni:

Limitazioni del sistema ODE:

$$A(x(s), p(s))x'(s) = f(x(s), u(s), p(s)) \quad [3-2]$$

Condizioni iniziali:

$$b(x(a), p(a)) = \mathbf{0} \quad [3-3]$$

Condizioni finali:

$$e(x(b), p(b)) = \mathbf{0} \quad [3-4]$$

Limitazione unilaterale:

$$g_k(x(s), u(s), p(s)) \leq 0, \quad k \in \mathcal{I}_1 \quad [3-5]$$

Limitazione bi-laterale:

$$-1 \leq g_k(x(s), u(s), p(s)) \leq 1, \quad k \in \mathcal{I}_2 \quad [3-6]$$

dove gli indici sono tali che:

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$$

[3-7]

Il problema appena descritto è risolto calcolando la prima variazione del funzionale aumentato attraverso i moltiplicatori di Lagrange per eliminare i vincoli di uguaglianza. Il metodo presente in Xoptima segue uno schema come nella colonna di destra della Figura 19. A sinistra è possibile vedere il confronto con un metodo indiretto classico.

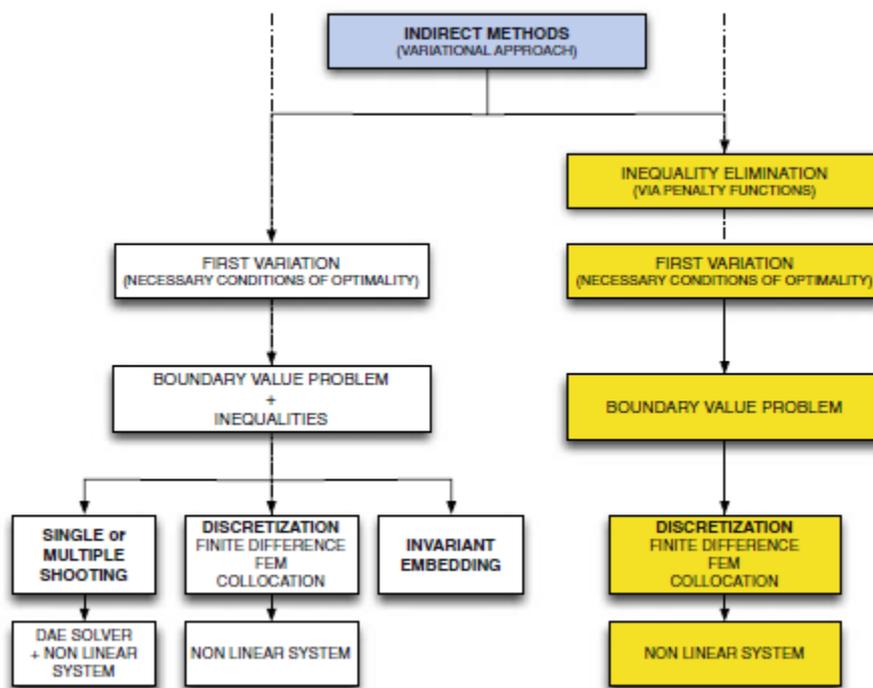


Figura 19 – Schema per il metodo generale indiretto (a sinistra) VS schema del metodo indiretto (a destra).

La condizione necessaria di *ottimo* porta ad avere la possibilità di scegliere tra 3 diversi metodi differenti per risolvere il BVP:

1. *Single o Multiple Shooting*;
2. Metodi di discretizzazione come le differenze finite, posizione o metodi agli elementi finiti.
3. *Invariant Embedding*.

I metodi di discretizzazione sono noti per essere più robusti riguardo alla scelta delle *guess* iniziali e le variabili aggiuntive, tuttavia anche con questo metodo rimangono da eliminare le disuguaglianze.

Prima di trattare la prima variazione per [3-1] si eliminano le disequazioni in [3-5]e [3-6] introducendo una funzione penalità. La strategia è mostrata nella colonna di destra in Fig.1.

Le funzioni ideali sono rappresentate da:

$$q_{\infty}(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 1, \\ \infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad p_{\infty}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \infty & x > 0, \end{cases} \quad [3-8]$$

Che devono essere sostituite alle condizioni [3-5]e [3-6]. così il problema diventa:

Trovare u e x tali da minimizzare:

$$\int_a^b \left\{ J(x, u, p) + \sum_{k \in I_1} p_{\infty}(g_k(x, u, p)) + \sum_{k \in I_2} q_{\infty}(g_k(x, u, p)) \right\} ds, \quad [3-9]$$

Sotto le seguenti condizioni

Condizioni ODE:

$$A(x(s), p(s))x'(s) = f(x(s), u(s), p(s)) \quad [3-10]$$

Condizioni iniziali:

$$b(x(a), p(a)) = 0 \quad [3-11]$$

Condizioni finali:

$$e(x(b), p(b)) = 0 \quad [3-12]$$

Le funzioni penalità così come sono state presentate non possono essere discretizzate, per cui, si considerano 3 diverse approssimazioni mostrate in Fig. 2.

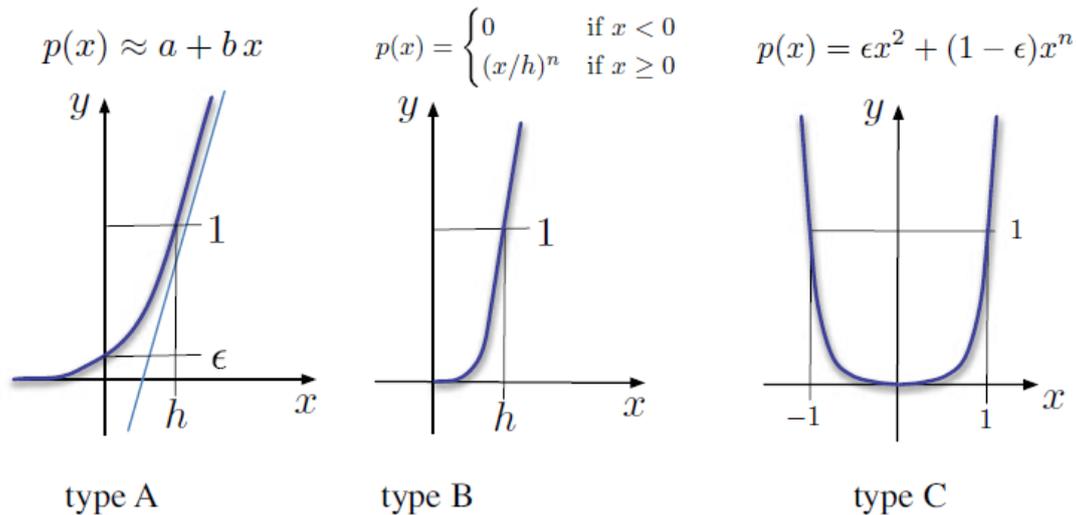


Figura 2: tre tipologie di funzioni penalità.

Il primo tipo di penalità è una versione regolarizzata della funzione $[x]^+ = \max(x, 0)$ e prende la forma di:

$$p_A(x; \epsilon, h, n) = ([x/h]_\epsilon^+)^n \quad [x]_\epsilon^+ = \begin{cases} \frac{\epsilon^2}{2(\epsilon - x)} & x < 0, \\ \frac{(\epsilon + x)^2 + x^2}{2(\epsilon + x)} & x \geq 0. \end{cases} \quad [3-13]$$

Il suo andamento per $n=1$ è mostrato in Fig. 2. Per h e ϵ tendenti a 0, la funzione penalità converge alla funzione ideale $p_\infty(x)$. Il parametro n è utilizzato per definire la crescita asintotica di $p_A(x; \epsilon, h, n)$ per $x \gg 0$. La seconda approssimazione della funzione $p_\infty(x)$ è mostrata nel grafico centrale di Fig. 2:

$$p_B(x; h, n) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ (x/h)^n & x \geq 0. \end{cases} \quad [3-14]$$

Questa penalty è uguale a 0 per valori non positivi di x e cresce molto rapidamente per $x > h$ e n positivi. Per entrambe le penalty n rappresenta un parametro che determina il grado d'influenza della penalty.

La terza approssimazione delle funzioni ideali è mostrata nel grafico più a destra della Fig. 2 e approssima la doppia disuguaglianza $p_\infty(x)$ attraverso la seguente formulazione:

$$p_C(x; \epsilon, n) = \epsilon x^2 + (1 - \epsilon)x^n \tag{3-15}$$

Questa espressione va a zero nell'intervallo (-1,1) per $n \rightarrow \infty$ mentre per $x > 1$ e $x < -1$ cresce molto rapidamente per alti valori di n . quest'ultima penalità permette di limitare una variabile all'interno di un intervallo di valori. È da notare come ogni combinazione per queste funzioni di penalità del primo e del secondo tipo sui due estremi dell'intervallo porti a ottenere una funzione penalità con derivata seconda nulla in qualche punto al suo interno. Questo può portare a punti di singolarità nello Jacobiano del sistema non-lineare risultante dalla discretizzazione. Per questa ragione funzioni di penalità solamente convesse, ad esempio $p''(x) > 0$ per tutte le x sono da utilizzare solo se necessario. Nell'Eq. 3-15 se $\epsilon > 0$ e $n > 2$ abbiamo $p''_C(0; 0, n) > 0$. Utilizzando queste funzioni penalità si definiscono:

$$J_p(x, u, p) = \sum_k p_k(g_k(x, u, p)), \quad p_k(x) = \begin{cases} p_A(x; \epsilon_k, h_k, n_k) & k \in A, \\ p_B(x; h_k, n_k) & k \in B, \\ p_C(x; \epsilon_k, n_k) & k \in C, \end{cases} \tag{3-16}$$

Dove A, B e C sono gli indici delle rispettive tipologie di penalità. Il parametro ϵ_k si sceglie per definire gli effetti trascurabili della funzione penalità, mentre h_k è scelto per definire le violazioni accettabili alle disuguaglianze descritte dalle penalità stesse. Quando $x > h_k$ il valore della penalità cresce così rapidamente che è improbabile che occorra una tale violazione. Utilizzando il set di equazioni [3-16] i vincoli di disuguaglianza sono sostituiti dalle penalità e il problema di controllo ottimo (OCP) mostrato nelle equazioni [3-1] è approssimato alla seguente formulazione del nuovo problema OCP che contiene solo uguaglianze algebriche e differenziali:

Minimizzare la seguente espressione per u ed x

$$\int_a^b J(x, u, p) + J_p(x, u, p) ds \tag{3-17}$$

Con i seguenti vincoli:

ODE:

$$A(x(s), p(s))x'(s) = f(x(s), u(s), p(s)) \tag{3-18}$$

Condizioni iniziali:

$$b(x(a), p(a)) = \mathbf{0} \quad [3-19]$$

Condizioni finali:

$$e(x(b), p(b)) = \mathbf{0} \quad [3-20]$$

Sono utilizzati i moltiplicatori di Lagrange per eliminare i vincoli di disuguaglianza [3-18][3-20] e si ricerca il minimo di [3-17] tra i punti stazionari per y , u , μ e ν della funzione:

$$\mathcal{F}(y, u, \mu, \nu; p) \quad [3-21]$$

Dove:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \lambda, u, \mu, \nu; p) = & \int_a^b \lambda \cdot [A(x, p)x' - f(x, u, p)] ds \\ & + \int_a^b J(x, u, p) + J_p(x, u, p) ds \\ & + \mu \cdot b(x(a), p(a)) + \nu \cdot e(x(b), p(b)) \end{aligned} \quad [3-22]$$

Si prende come prima variazione di F e ponendo

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \quad [3-23]$$

Si ottiene il seguente problema BVP (*Boundary Value Problem*):

$$\begin{aligned}
 a(y(s), y'(s); p(s)) - \frac{d}{ds} b(y(s); p(s)) &= \mathbf{0}, & s \in (\beta_k, \beta_{k+1}) \\
 \lim_{\ell \rightarrow \beta_k^-} \lim_{\rho \rightarrow \beta_k^+} j(y(\ell), y(\rho); p(\ell), p(\rho)) &= \mathbf{0}, & k = 1, 2, \dots, d \\
 h(y(a), \mu; p(a)) &= \mathbf{0}, \\
 g(y(b), \nu; p(b)) &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3-24}$$

Per i dettagli di derivazione delle equazioni si veda [15]. Secondo il metodo di cui lo schema di destra della Fig. 1, la BVP è approssimata da una discretizzazione alle differenze finite. In questo caso, l'uso di funzioni di penalità elimina i vincoli di disuguaglianza. Il sistema risulta non lineare discretizzato contenente pendenze molto forti nei pressi della zona di violazione del vincolo. Per questo motivo è necessario un solutore non lineare molto robusto per risolvere il sistema non lineare finale.

CAPITOLO 4

MODELLO MOTOCICLETTA A 12 GDL

4.1 - INTRODUZIONE

In questo capitolo si otterranno le equazioni del Metodo della Manovra Ottima che riproducono il comportamento dinamico della motocicletta in grande.

Lo strumento fondamentale che si è utilizzato per ottenere ciò è rappresentato da *Maple 10*, un software di matematica simbolica che genera al termine della scrittura del codice le matrici del sistema differenziale in linguaggio *Fortran* e *C++*. Successivamente, attraverso uno script scritto in linguaggio *Ruby* vengono redatti i file necessari alla compilazione dell'eseguibile.

4.2 - MODELLO DINAMICO

Il modello di motocicletta utilizzato è stato rivisto e aggiornato aggiungendo nuove ed ulteriori features rispetto la versione precedente. Infatti, mentre la prima versione descriveva la dinamica in grande del veicolo, non interessandosi quindi della presenza delle sospensioni e del movimento del forcellone, con questa nuova scrittura del modello si è andati a considerare anche l'effetto dato dalla presenza delle sospensioni e del tirocatena per valutarne l'influenza sulle performance della motocicletta.

Il veicolo quindi si può considerare composto di 6 corpi rigidi:

1. Il retrotreno che comprende telaio, pilota rigidamente collegato a esso, motore e serbatoio.

2. L'avantreno che ruota attorno all'asse di sterzo. Comprende tutte le masse sospese del telaio anteriore, come manubrio, leve e tutti gli accessori a esso connessi.
3. La ruota posteriore cui è permesso di ruotare attorno al proprio asse di simmetria e attorno l'asse passante per il perno forcellone;
4. La ruota anteriore collegata all'avantreno attraverso la forcella (quindi libera di scorrere lungo l'asse dell'avantreno) oltre che ruotare attorno al suo asse di simmetria.
5. Le masse non sospese anteriori
6. Le masse non sospese posteriori

Di seguito sarà descritto nel dettaglio il modello e come sono state ottenute le equazioni che lo descrivono.

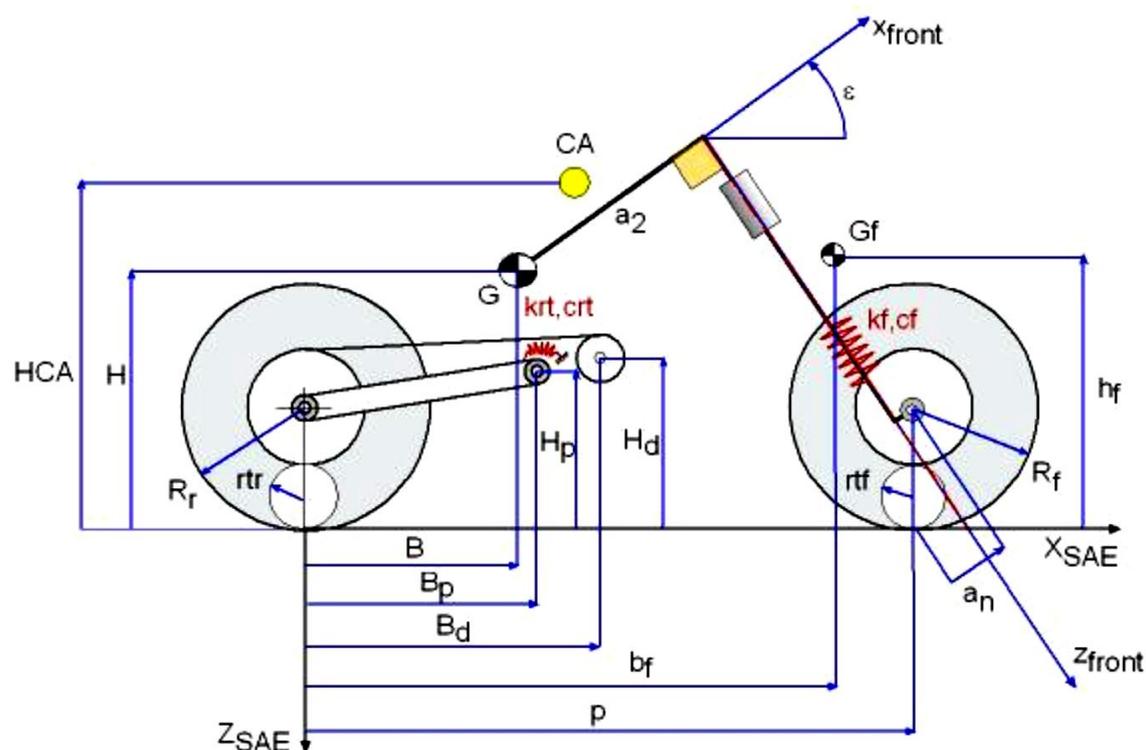


Figura 1 Rappresentazione grafica dei principali parametri del modello di motocicletta

4.3 - GRADI DI LIBERTA' DEL MODELLO

Il modello qui descritto risulta avere in definitiva 12 gradi di libertà:

1. Velocità di avanzamento longitudinale: $u(t)$;
2. Velocità laterale: $v(t)$;
3. Angolo di rollio: $\phi(t)$;

4. Angolo d'imbardata: $\psi(t)$;
5. Angolo di beccheggio: $\mu(t)$;
6. Angolo di sterzo: $\delta(t)$;
7. Scuotimento verticale del centro di gravità complessivo del veicolo: $z(t)$;
8. Movimento di deformazione lineare della forcella anteriore: $zsf(t)$;
9. Movimento di rotazione del forcellone posteriore rispetto la posizione iniziale: $\theta_s(t)$.
10. Ascissa curvilinea per la determinazione della posizione lungo la traiettoria: $sn(t)$.
11. Ordinata curvilinea per la determinazione della posizione lungo la traiettoria: $ss(t)$.
12. Orientamento lungo la traiettoria (imbardata relativa): $\alpha(t)$.

A queste variabili ne sono aggiunte delle altre ausiliarie necessarie alla definizione completa del modello:

- Imbardata e rollio della ruota anteriore $\psi_4(t)$, $\phi_4(t)$;
- velocità angolari della ruota posteriore e anteriore $\omega_1(t)$, $\omega_4(t)$.

4.4 - TERNE E CORPI

4.4.1 MOTOCICLETTA

La terna di riferimento T1 si trova sul piano del terreno e ha origine nella proiezione del baricentro del veicolo a livello della strada, mentre la terna T2 ha origine nel baricentro complessivo del veicolo, denominato con G.

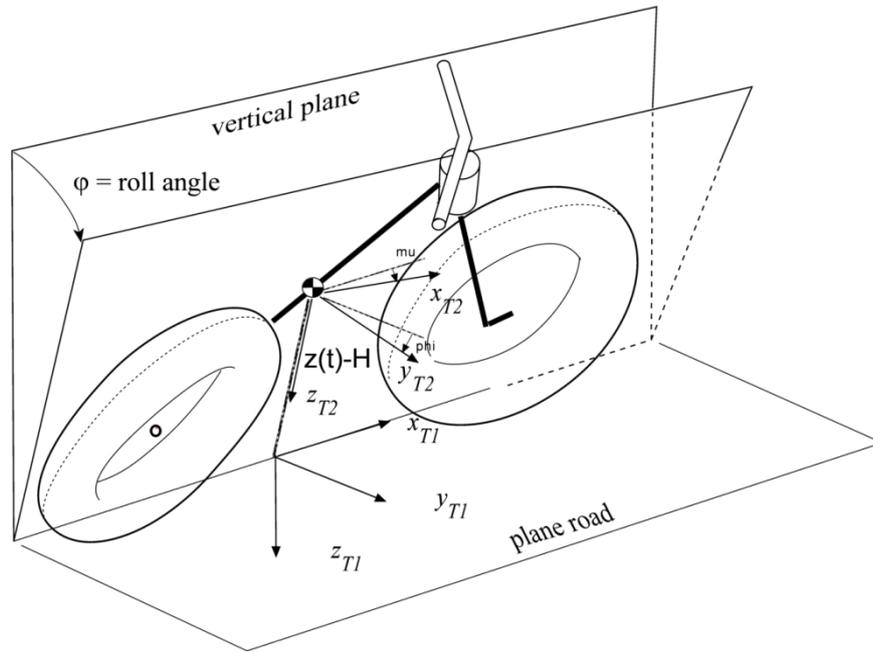


Figura 2 Rappresentazione grafica terne di riferimento

Il tensore d'inerzia in terna T2 della motocicletta è così definito:

$$inertia = \begin{bmatrix} IX & 0 & -CXZ \\ 0 & IY & 0 \\ -CXZ & 0 & IZ \end{bmatrix}$$

Considerando $CYZ = CXY = 0$ a causa della simmetria rispetto al piano X-Y.

La massa totale del veicolo (comprensivo di pilota) è invece pari a:

$$mass = M$$

4.4.2 RUOTA POSTERIORE

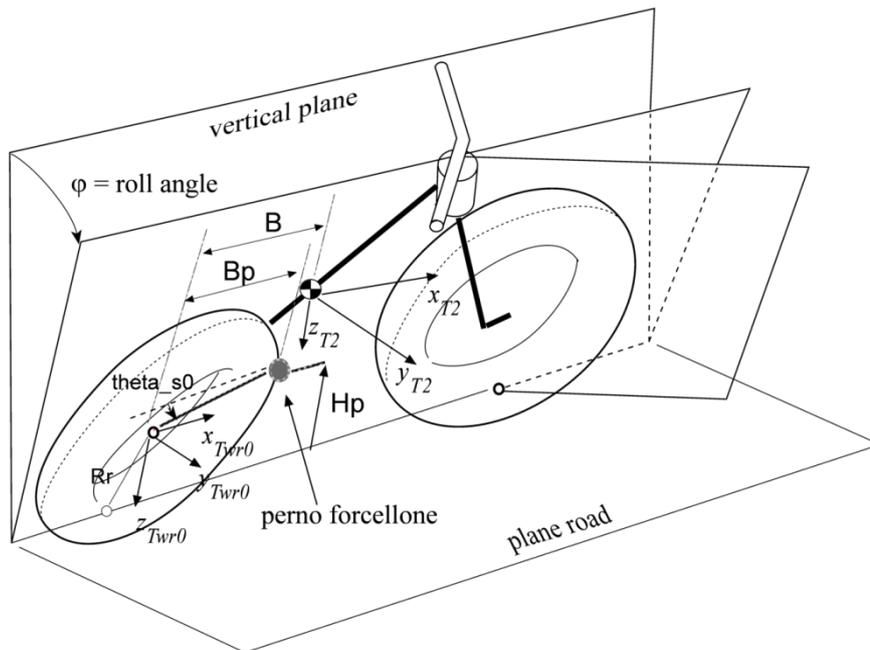


Figura 3 Rappresentazione grafica terne di riferimento

Il centro della ruota posteriore risulta avere le seguenti coordinate, considerando θ_{s0} la rotazione iniziale del forcellone e (B_p, H_p) le coordinate del perno forcellone in terna SAE con centro coincidente al punto di contatto del pneumatico posteriore. L_{sw} rappresenta la lunghezza del forcellone.

$$\text{coords} = \begin{bmatrix} -L_{sw} c(\theta_s(t) + \theta_{s0}) - B + B_p \\ 0 \\ H + L_{sw} s(\theta_s(t) + \theta_{s0}) - H_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sono state definite 2 terne con centro coincidente il perno della ruota posteriore:

1. TWR0 che rimane costantemente parallela al terreno;
2. TWR che ruota attorno all'asse y di simmetria con velocità $\omega_1(t)$.

La ruota posteriore è modellata come un momento puro d'inerzia rotante attorno al suo asse di simmetria, mentre la sua massa (che comprende il pneumatico, disco freno e tutte le altre componenti rotanti) è inclusa all'interno delle masse non sospese.

A quest'inerzia è aggiunta quella ridotta del motore che è funzione del rapporto del cambio innestato.

$$inertia = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mwr Rr^2 + iry_engine & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4.3 AVANTRENO

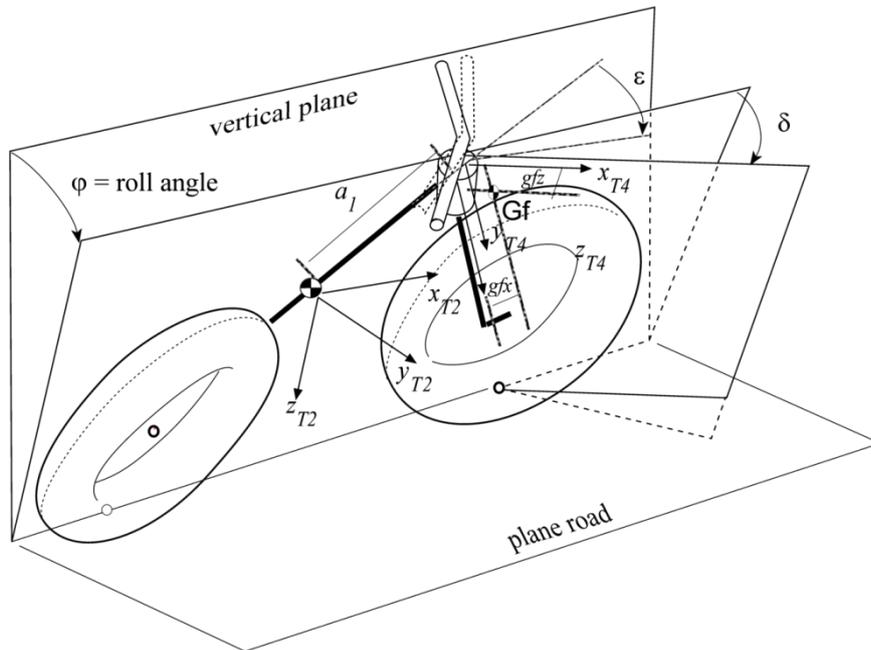


Figura 4 Rappresentazione grafica terne di riferimento

Si definisce la terna di riferimento T4 con il centro fissata all'avantreno e che dista della distanza $a1$ dal baricentro complessivo della motocicletta misurata lungo una retta inclinata di $epsilon$ (caster angle) in condizioni statiche. Le coordinate del baricentro dell'avantreno in terna T4 sono:

$$Gf = POINT \left(frame = T4, coords = \begin{bmatrix} gfx \\ 0 \\ gfx \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Mentre la sua inerzia è definita come:

$$inertia = \begin{bmatrix} Ifx & 0 & 0 \\ 0 & Ify & 0 \\ 0 & 0 & Ifz \end{bmatrix}$$

4.4.4 RUOTA ANTERIORE

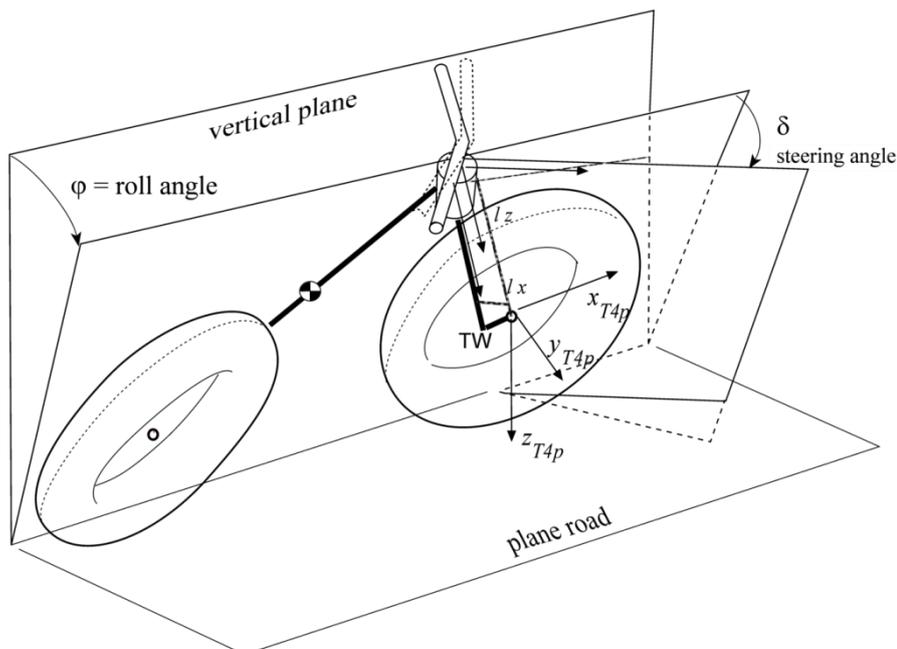


Figura 5 Rappresentazione grafica terne di riferimento

Si definisce la terna T4p che analogamente per la terna Twr ha centro nell'asse di simmetria della ruota anteriore e asse x sempre orizzontale. Il centro della terna in condizioni dinamiche riferendosi a T4 risulta avere le seguenti componenti:

$$coords = \begin{bmatrix} lx \\ 0 \\ lz + zsf(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con lz offset rispetto la forcella, lx distanza verticale dal centro della terna T4. $zsf(t)$ rappresenta la deformazione lineare lungo l'asse z della sospensione anteriore.

Analogamente alla ruota posteriore anche per la ruota anteriore la sua massa è inclusa all'interno delle masse non sospese anteriori ed è modellata attraverso un momento puro d'inerzia attorno al proprio asse di geometria.

Attraverso la chiusura del poligono tra la terna T4p e la terna di riferimento T1 è possibile determinare le espressioni algebriche di $a1$, lx ed lz che risultano così essere legate alle grandezze geometriche fondamentali che definiscono il layout della motocicletta e che andranno a fare parte del file d'input, ad esempio il raggio della ruota anteriore Rf e l'avancorsa normale an .

$$\begin{aligned} a1 &= an + \cos(\varepsilon) p - \cos(\varepsilon) B - H \sin(\varepsilon) \\ lz &= p \sin(\varepsilon) - B \sin(\varepsilon) - \cos(\varepsilon) Rf + \cos(\varepsilon) H \\ lx &= -an + Rf \sin(\varepsilon) \end{aligned}$$

L'imbardata e il rollio della ruota anteriore in funzione degli altri gradi di libertà risultano, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \psi_A(t) &= \frac{\cos(\mu(t) + \varepsilon) \delta(t)}{\cos(\phi(t))} \\ \phi_A(t) &= \phi(t) + \delta(t) \sin(\mu(t) + \varepsilon) \end{aligned}$$

4.5 - FORZE ATTIVE E REATTIVE NEL MODELLO

4.5.1 FORZA DI GRAVITA'

La forza di gravità agisce nel baricentro complessivo della motocicletta in direzione z:

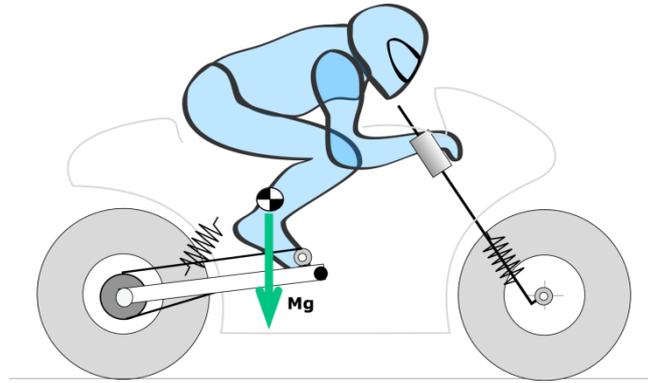


Figura 2 Rappresentazione grafica forza di gravità

4.5.2 COPPIA DI STERZO E AMMORTIZZATORE DI STERZO

Entrambe queste coppie agiscono lungo l'asse z della terna T4, fissa all'avantreno e con l'asse z orientato lungo il canotto di sterzo.

La coppia risultante risulta dunque:

$$STZ = \tau(t) - C_{delta} \left(\frac{d}{dt} \delta(t) \right)$$

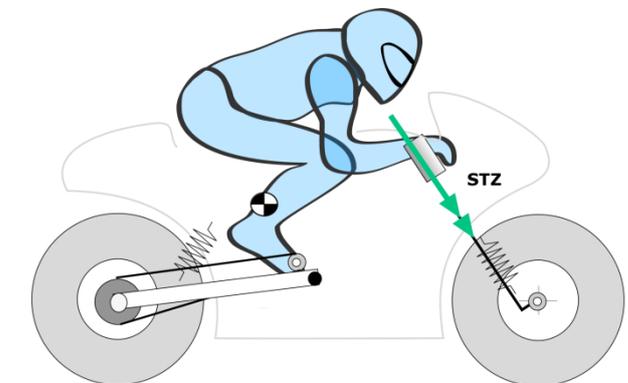


Figura 2 Rappresentazione grafica coppia applicata allo sterzo

4.5.3 COPPIA FRENANTE ALLA RUOTA POSTERIORE E COPPIA MOTORE

La coppia motore può essere applicata direttamente alla ruota posteriore qualora sia opportunamente ridotta attraverso tutti i rapporti di velocità corretti.

Alla ruota posteriore, applicata nel centro di simmetria della stessa, è applicata dunque la coppia complessiva:

$$M_{tTOT} = M_r(t) - TC(t) r_c$$

Dove con $M_r(t)$ è descritta la coppia frenante alla ruota posteriore, mentre $TC(t)$ è la forza di tiro-catena direttamente dipendente dalla coppia erogata dal motore.

r_c rappresenta il raggio della corona posteriore.

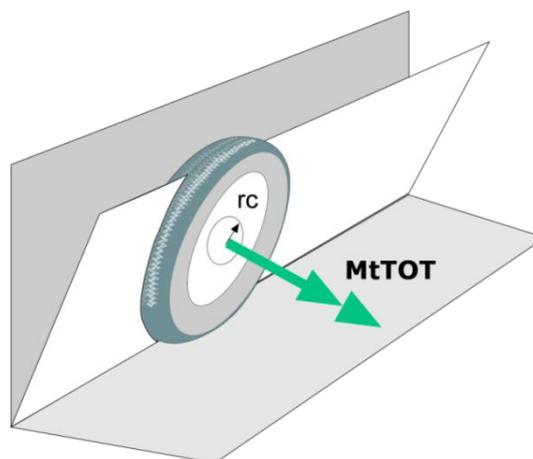


Figura 2 Rappresentazione grafica coppia applicata alla ruota posteriore.

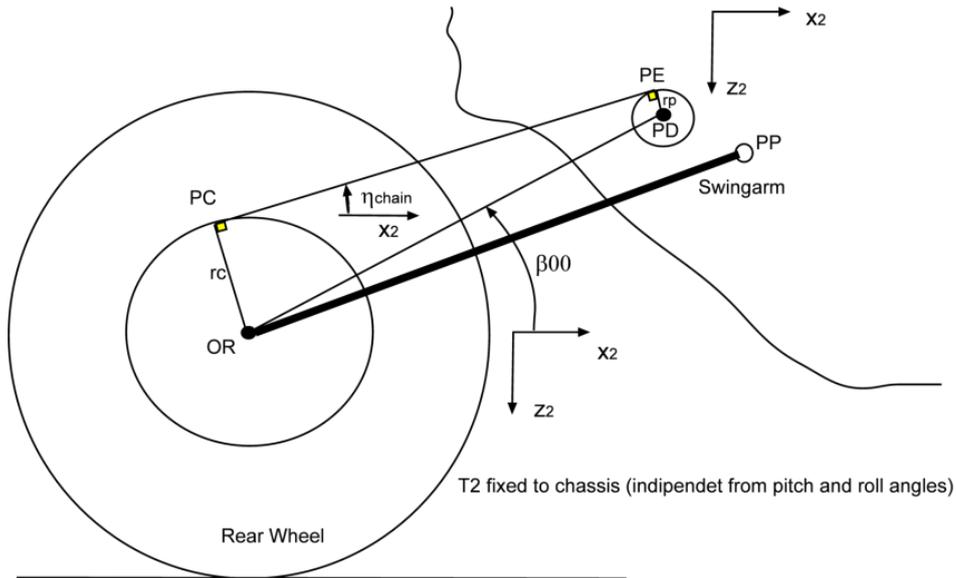


Figura 2 Rappresentazione grafica modellazione del forcellone

Definisco con PP il perno forcellone in terna T2 fissa a telaio con le seguenti coordinate

$$coords = \begin{bmatrix} -B + Bp \\ 0 \\ H - Hp \end{bmatrix}$$

(Hp: altezza del perno forcellone, Bp: distanza orizzontale del perno forcellone dal perno ruota posteriore)

Analogamente il perno del pignone PD:

$$coords = \begin{bmatrix} -B + Bd \\ 0 \\ H - Hd \end{bmatrix}$$

(Hd: altezza del perno pignone anteriore, Bd: distanza orizzontale del perno forcellone dal perno pignone anteriore)

β_{00} rappresenta l'angolo tra il vettore congiungente il centro ruota posteriore ed il pignone anteriore. Questi può essere espresso attraverso l'equazione:

$$\beta_{00} := \arctan \left(\frac{Hd + L_{sw} \sin(\theta_s(t) + \theta_{s0}) - Hp}{Bd + L_{sw} \cos(\theta_s(t) + \theta_{s0}) - Bp} \right)$$

La distanza tra PD e OR invece è espressa con l'equazione:

$$PDOR = \left((-Bd - L_{sw} \cos(\theta_s(t) + \theta_{s0}) + Bp)^2 + (Hd + L_{sw} \sin(\theta_s(t) + \theta_{s0}) - Hp)^2 \right)^{0.5}$$

Risultando anch'esso funzione dell'angolo $\theta_s(t)$.

Definendo pertanto l'angolo della catena attraverso:

$$\eta_{chain} := \beta_{00} - \arcsin \left(\frac{rc - rp}{PDOR} \right)$$

Si può facilmente linearizzare tale grandezza ritenendola somma di una quantità costante e di una funzione della deformazione del forcellone $\theta_s(t)$:

$$\eta_{chain} := \eta_{chain0} + \eta_{chain1} \theta_s(t)$$

Il punto di distacco della catena dal pignone motore PE risulta avere le seguenti coordinate in terna T2:

$$\begin{bmatrix} -B + Bd - rp \sin(\eta_{chain0} + \eta_{chain1} \theta_s(t)) \\ 0 \\ H - Hd - rp \cos(\eta_{chain0} + \eta_{chain1} \theta_s(t)) \end{bmatrix}$$

Ipotizzando la catena come collegamento rigido si può applicare la forza di tirocatena al punto PE agente sulla ruota posteriore e reagente invece sul telaio.

4.5.4 COPPIA FRENANTE ALLA RUOTA ANTERIORE

Alla ruota anteriore, invece, è preente solo la coppia frenate $M_f(t)$

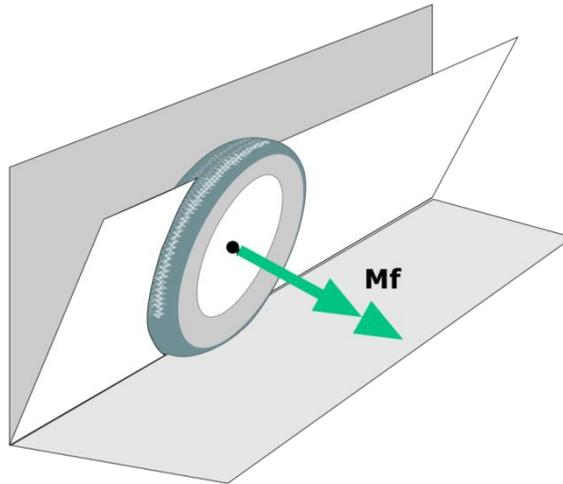


Figura 2 Rappresentazione grafica coppia applicata alla ruota anteriore.

4.5.5 FORZA RESISTENZA AERODINAMICA

Applicata nel centro di pressione aerodinamica la cui altezza da terra è espressa con la quantità HCA, la forza di resistenza è rivolta lungo l'asse x della terna T2 ed è quantificabile con:

$$\text{drag_force} = -kD VX(t)^2$$

VX (t) velocità di avanzamento longitudinale, kD si esprime il coefficiente di resistenza aerodinamica calcolabile attraverso l'espressione:

$$kD = \frac{1}{2} \rho C_d A$$

Dove con ρ s'indica la densità dell'aria, C_d coefficiente aerodinamico e A area frontale del veicolo.

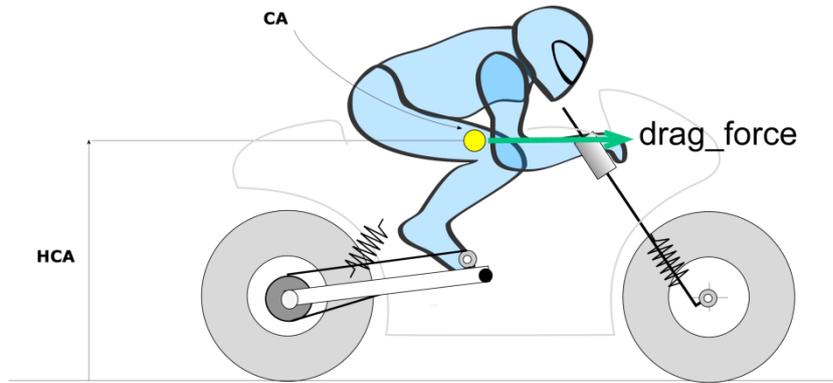


Figura 2 Rappresentazione grafica forza di resistenza aerodinamica

4.5.6 FORZE DELLE SOSPENSIONI

La forza data dalla sospensione anteriore è applicata alla terna T4 lungo l'asse z della stessa. Questa sospensione dunque è in grado di agire lungo l'asse dello sterzo.

La sospensione posteriore, invece è modellata attraverso una coppia applicata al punto coincidente col perno forcellone. Essa dunque è rappresentata da una coppia agente lungo l'asse y della terna T2.

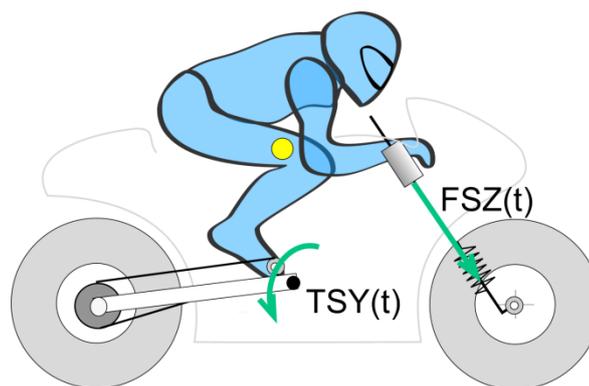


Figura 2 Rappresentazione grafica forza sospensione anteriore e coppia sospensione posteriore

4.5.6.1 Modello Delle Sospensioni

Entrambe le sospensioni anteriore e posteriore sono modellate come un gruppo molla-ammortizzatore con la possibilità di descrivere il comportamento lineare e non della parte elastica (andando quindi a considerare eventuali progressività o regressività della

molla). Lo smorzamento è distinto e diversamente descrivibile nella parte di estensione e compressione della forcella.

La sospensione anteriore è caratterizzata da molla e smorzatore lineari posti lungo l'asse dello sterzo, mentre quella posteriore è modellata attraverso molla e smorzatore torsionali equivalenti idealmente posti nel perno forcellone. Attraverso questa semplificazione è possibile utilizzare un modello analogo a quello dell'anteriore per descrivere quasi tutta la totalità delle sospensioni posteriori, svincolandosi pertanto dal particolare schema cinematico della sospensione stessa.

4.5.6.1.1 Descrizione Della Parte Elastica:

Il comportamento elastico della sospensione è descritto attraverso l'utilizzo di una funzione polinomiale di 5° grado che si è verificato essere sufficientemente complessa per la corretta descrizione del comportamento delle molle considerate e di cui si conosceva la curva caratteristica forza-deformazione.

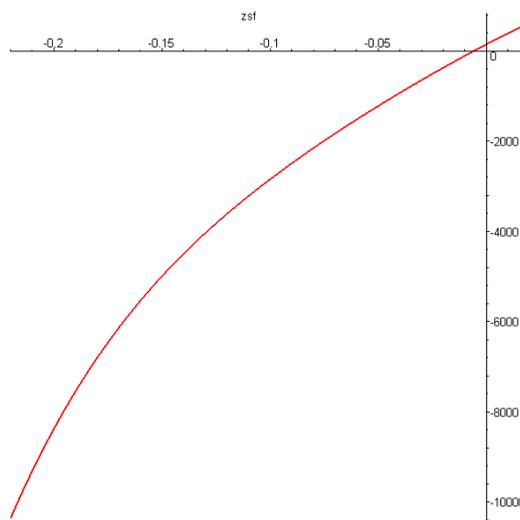
La molla anteriore pertanto restituirà una forza pari a:

$$front_spring_force = f_0 + f_1 \cdot zsf + f_2 \cdot zsf^2 + f_3 \cdot zsf^3 + f_4 \cdot zsf^4 + f_5 \cdot zsf^5$$

Dove i coefficienti a_0 e a_1 rappresentano rispettivamente precarico e rigidità della molla, mentre a_2 , a_3 , a_4 e a_5 regolano l'eventuale progressività/regressività.

zsf , come già accennato, rappresenta invece la deformazione lineare della sospensione anteriore lungo l'asse di sterzo.

Si riporta a titolo di esempio un grafico che rappresenti l'andamento non-lineare di una molla di rigidità 25000 N/m (si ricorda che generalmente le molle presenti all'anteriore sono 2 distinte che in questo caso avrebbero dunque una rigidità di 12500 N/m ciascuna), con un precarico di 150 N e con una certa progressività definita dai coefficienti di ordine superiore a 2.



$$f_0= 150, f_1=25000, f_2=-50000, f_3= -110000, f_4=-500000, f_5 =5000000$$

Figura 1: esempio di andamento non-lineare per una sospensione anteriore.

Si noti come $zsf=0$ rappresenti la condizione “tutto esteso” per la molla.

La molla (torsionale) posteriore invece restituisce una coppia applicata al perno forcellone la cui entità è regolata dall’espressione:

$$rear_spring_torque = r_0 + r_1 \cdot theta_s + r_2 \cdot theta_s^2 + r_3 \cdot theta_s^3 + r_4 \cdot theta_s^4 + r_5 \cdot theta_s^5$$

Analogamente all’anteriore i coefficienti b_0 e b_1 rappresentano rispettivamente precarico (in coppia) e rigidità (torsionale) della molla, mentre b_2, b_3, b_4 e b_5 regolano l’eventuale progressività/regressività.

$theta_s$ è la variabile di stato che descrive la deformazione angolare della sospensione posteriore.

Anche in questo caso la condizione $theta_s=0$ rappresenta la condizione nominale “tutto esteso”.

Per bloccare la corsa delle sospensioni entro i limiti fisici imposti dal loro range di deformazione che va dalla configurazione di tutto esteso a quella di completa compressione sono stati aggiunti i tamponi di fine corsa delle sospensioni.

I tamponi di fine corsa anteriori sono stati modellati attraverso delle rigidità molto elevate per valori di $z_{sf} > 0$ e per $z_{sf} < z_{travel}$, dove con z_{travel} s'intende la massima escursione (lineare) della sospensione anteriore che costringono quindi il software a far lavorare le sospensioni entro il range di deformazioni corretto.

L'equazione che regola la rigidità di un tampone anteriore è esprimibile attraverso un'equazione del tipo:

$$pad_force_front = pad_kf \left((z_{sf} - z_{sf_0}) \left(\frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{z_{sf} - z_{sf_0}}{z_{sf_0}}\right)}{\pi} \right) + \frac{z_{sf_0}}{\pi} \right)$$

Dove z_{sf_0} non è altro che un coefficiente che regola il raggio di curvatura della curva in corrispondenza del punto in cui si vuol far cominciare a operare il tampone. Di seguito si riporta il grafico per il tampone anteriore di fine corsa in estensione ($z_{sf}=0$) al variare del coefficiente z_{sf_0} .

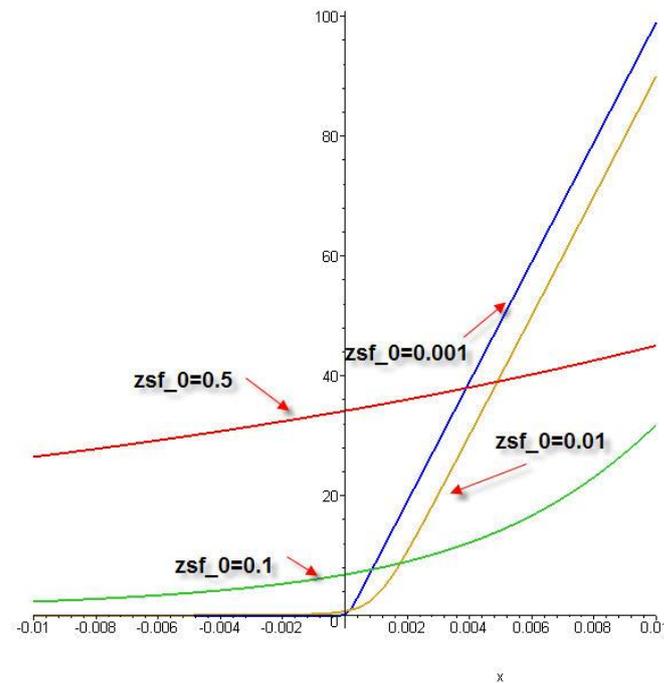


Figura 2: tampone di fine corsa al variare di z_{sf_0} .

Come si può notare un valore di $z_{sf_0} < 0.1$ risulta inaccettabile. Per questo motivo è stato imposto $z_{sf}=0.001$, valore che permette sia di riprodurre una variazione abbastanza

brusca della rigidità nel punto d'interesse ma al tempo stesso non introduce una discontinuità tale da mettere in difficoltà il solutore e rendere pertanto più difficoltosa la convergenza.

Introducendo entrambi i tamponi di fine corsa sia in estensione sia in compressione e assumendo una rigidità di 5 volte superiore a quella della molla otteniamo un grafico forza-deformazione (riferito all'esempio precedente):

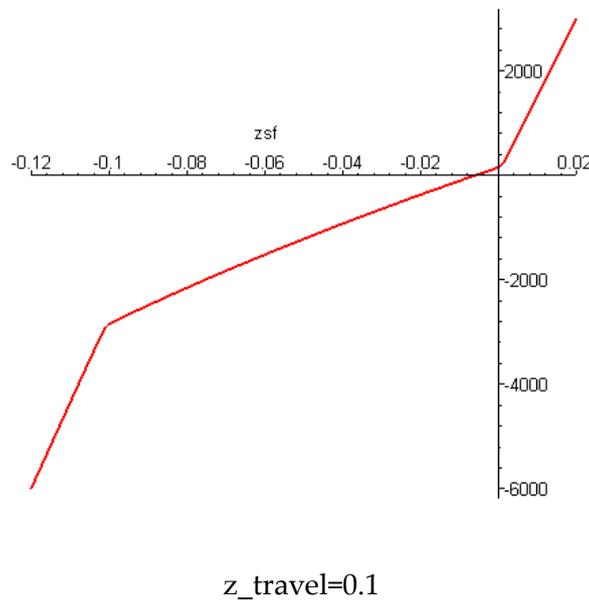


Figura 3: esempio di grafico forza-deformazione per una sospensione anteriore.

Ovviamente per la completa descrizione del gruppo molla-tamponi è necessario conoscere anche la massima deformazione possibile per la molla. Per questo s'introduce un ulteriore parametro chiamato (per l'anteriore) z_travel .

Analogamente tutto questo è riportabile anche per la sospensione posteriore con l'unica differenza che tutte le grandezze si riferiscono a una molla torsionale equivalente e che quindi restituisce una coppia elastica.

4.5.6.1.1 Descrizione Dello Smorzamento

Viene offerta la possibilità nel modello di definire due valori (lineari) di smorzamento diversi per la fase di estensione e compressione della forcella.

Per ottenere un comportamento di questo tipo si definisce una funzione che regola il valore del coefficiente di smorzamento come segue:

$$cf = \frac{1}{2} \frac{(2cfe - 2cfc) \cdot \arctan\left(\frac{zsf_dot}{v0}\right) + \pi(cfe + cfc)}{\pi}$$

L'equazione si riferisce alle grandezze concernenti l'anteriore, così cfe e cfc sono rispettivamente il coefficiente di smorzamento in estensione e in compressione dello smorzatore.

zsf_dot rappresenta la velocità di deformazione della forcella, mentre il coefficiente $v0$ regola la forma della funzione nel punto $zsf_dot=0$.

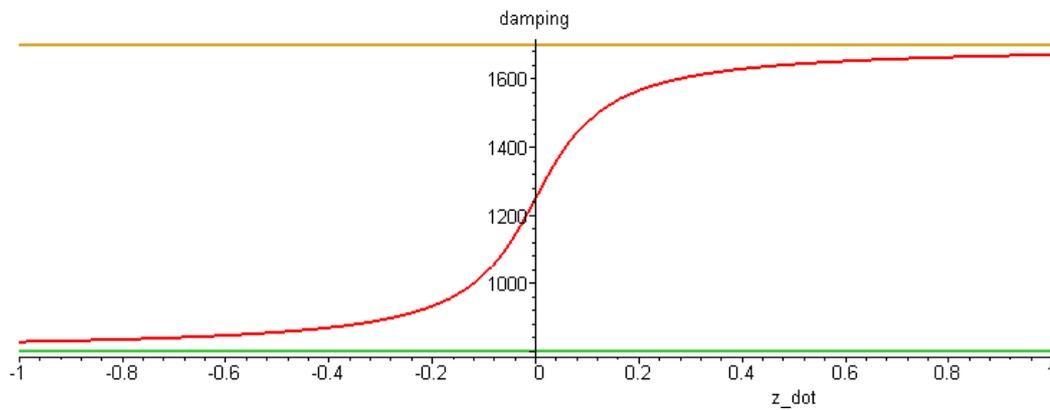


Figura 4: Smorzamento con $cfc=800$, $cfe=1700$, $v0=0.1$

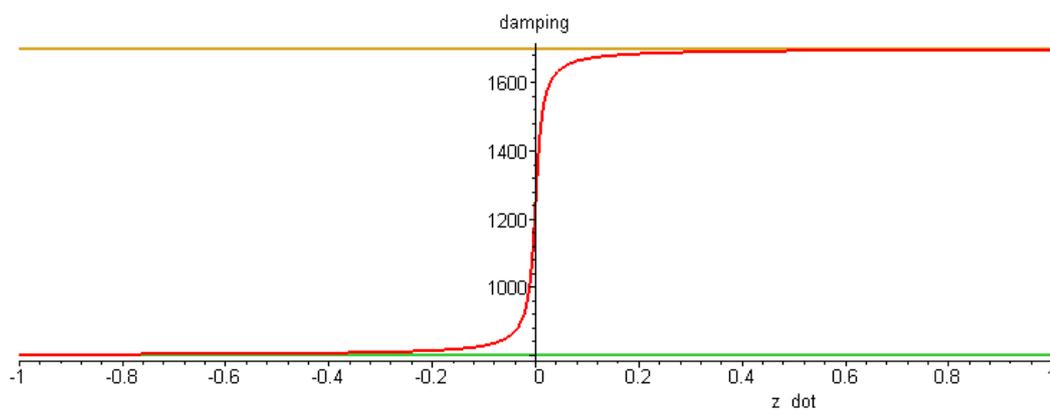


Figura 5: Smorzamento con $cfc=800$, $cfe=1700$, $v0=0.1$

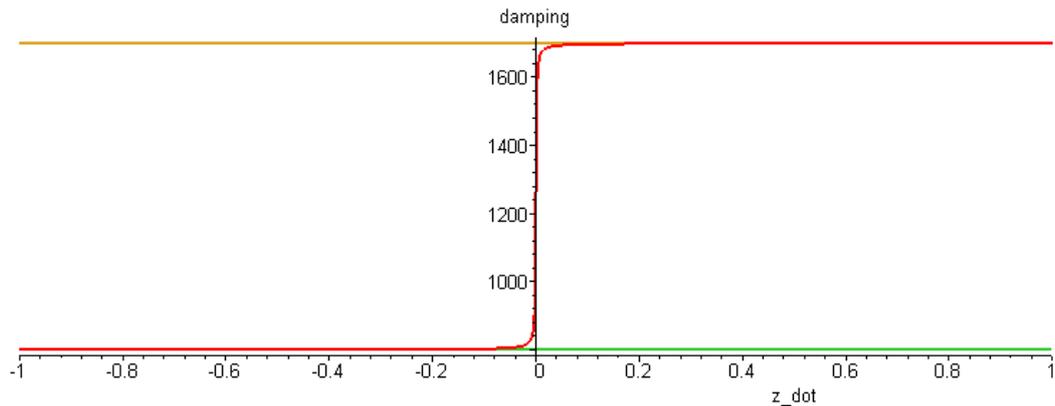


Figura 6 Smorzamento con $cfc=800$, $cfe=1700$, $v0=0.001$

Per evitare l'insorgere di rallentamenti eccessivi nel raggiungimento della convergenza da parte del solutore è stato necessario scegliere un coefficiente $v0$ non inferiore 0.01.

È stato comunque accertato che un valore di questo tipo è pienamente sufficiente per ottenere risultati sufficientemente accurati.

In definitiva la forza esercitata dalla sospensione risulta dalla somma dei tre contributi dati da molla, tamponi di fine corsa e smorzatore:

$$ZSF(t) = front_spring_force(zsf) + front_pad_force(zsf) + cf(zsf_dot) \cdot zsf_dot$$

Analogamente per la sospensione posteriore la coppia esercitata risulta:

$$TSY(t) = rear_spring_force(theta_s) + rear_pad_force(theta_s) + cr(theta_s_dot) \cdot theta_s_dot$$

4.5.7 FORZE E COPPIE AGENTI SUL PNEUMATICO POSTERIORE

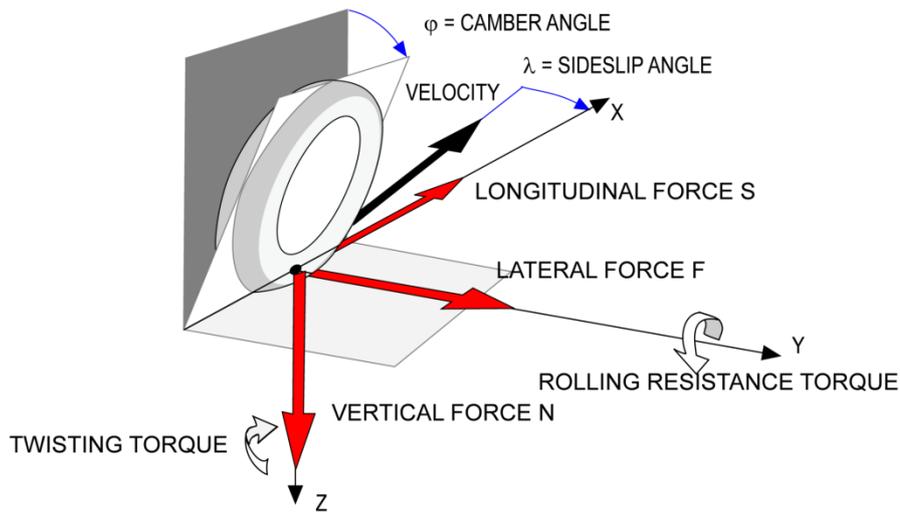


Figura 7: forze agenti sul pneumatico posteriore.

In terna TWR0, cioè con l'asse x sempre rivolto lungo l'orizzontale al terreno vengono applicate le seguenti forze e coppie:

$$FORCE = \begin{bmatrix} sr(t) M g \\ fr(t) M g \\ -Nr(t) \end{bmatrix} \quad TORQUE = \begin{bmatrix} 0 \\ uR Nr(t) \\ mrR \phi(t) Nr(t) (1 + twR \phi(t)^2) \end{bmatrix}$$

Le forze $sr(t)$ e $fr(t)$ sono adimensionalizzate rispetto al peso complessivo del veicolo + pilota (M^*g) e rappresentano rispettivamente la forza longitudinale e laterale.

$Nr(t)$, invece, rappresenta il carico normale sul pneumatico.

La coppia in direzione y, invece, rappresenta la resistenza al rotolamento espressa come funzione lineare del carico agente sul pneumatico in direzione verticale. uR rappresenta il coefficiente di resistenza al rotolamento.

La coppia applicata lungo l'asse z, invece, rappresenta il momento di twisting e mrR e twR sono rispettivamente i coefficienti lineare e non-lineare.

Il pneumatico ha una sezione toroidale e la sua forma pertanto è rappresentata da:

$$shape = \begin{bmatrix} 0 \\ YTI \\ ZTI \end{bmatrix}$$

$$YTI = rt1 \sin(\phi(t))$$
$$ZTI = \rho1 + rt1 \cos(\phi(t))$$

Dove $rt1$ rappresenta il raggio della sezione del toroide, $\rho1$ la distanza dal centro ruota al centro del toroide stesso.

4.5.8 MODELLO DEL PNEUMATICO

In letteratura esistono diversi modelli di pneumatico, e tra questi la maggior parte sono stati sviluppati per il settore automobilistico. Alcuni autori [16] hanno presentato un modello di pneumatico per motocicli che schematizza il pneumatico con un toroide e calcola il punto esatto in cui avviene il contatto con il terreno.

In questo punto vengono applicate le forze ed eventuali momenti utilizzando le formule ottenute a partire da quelle del Pacejka [17].

Il modello di pneumatico utilizzato in Xoptima si basa sulle ricerche effettuate da questi autori, ma si utilizza la sua formulazione più semplice. Per eventuali approfondimenti sul modello di pneumatico che può essere utilizzato in campo motociclistico, si rimanda al capitolo relativo ai pneumatici di Cossalter [18].

Tuttavia per comprendere il modello di pneumatico che è stato utilizzato sono doverose alcune premesse che spiegano i principi fisici che regolano l'interazione tra pneumatico e terreno quando questi vengono a contatto tra loro e mentre il veicolo rolla o percorre una curva.

Fondamentalmente le forze che si verificano tra pneumatico e piano stradale nascono dalla deformazione del pneumatico stesso. In particolare quando un pneumatico si trova in una traiettoria di curva, ci sono delle fibre nell'impronta di contatto che si

contraggono, altre che si estendono in direzione longitudinale (nel caso in cui al pneumatico sia applicata una forza di spinta o di frenata) e in direzione laterale.

Questo fenomeno implica che in questa zona complessivamente il pneumatico sia dotato di una certa velocità sia in direzione longitudinale sia in direzione laterale. In altre parole la velocità di avanzamento del pneumatico non sta nel piano di simmetria dello stesso.

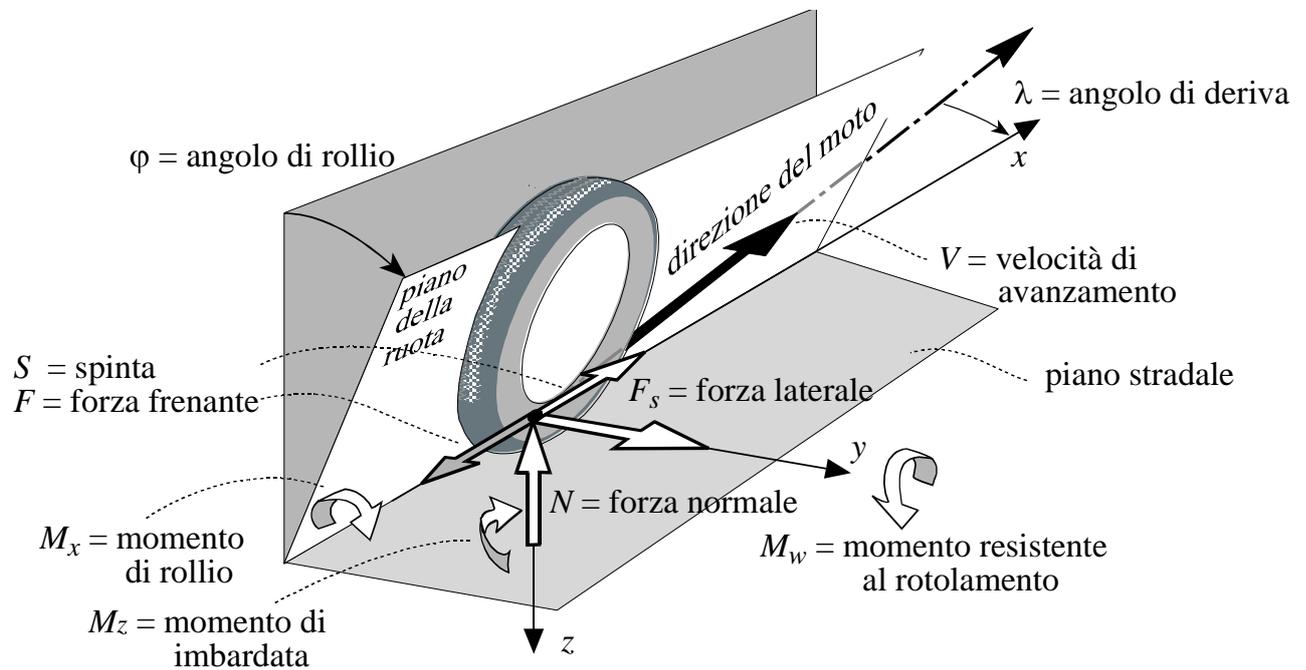


Figura 8 Forze e coppie di contatto tra pneumatico e piano stradale

Il rapporto tra la componente laterale e quella longitudinale della velocità di avanzamento descrive un angolo che viene definito come *angolo di deriva laterale* λ . La forza laterale risulta proporzionale all'angolo di deriva laterale, almeno entro certi valori dell'angolo, attraverso un coefficiente detto *rigidezza a deriva laterale* K_λ . La forza laterale è anche proporzionale all'angolo di rollio attraverso un altro coefficiente, detto *resistenza a rollio* K_ϕ . In quest'ultimo comportamento risiede la più grande differenza tra pneumatico motociclistico e automobilistico.

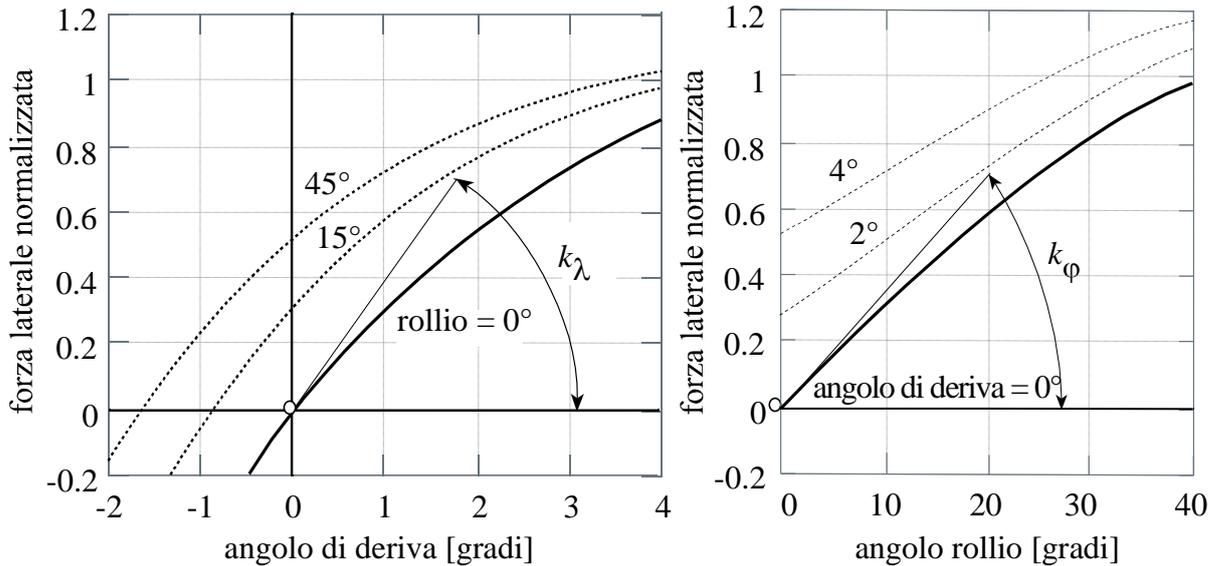


Figura 9: interpretazione geometrica della rigidezza a deriva laterale K_λ e resistenza a rollio K_ϕ

Infatti, il contributo dato dal rollio è molto importante e in alcuni casi, come si vedrà di seguito, è preponderante rispetto il contributo dato dalla deriva.

Inoltre, la forza laterale è proporzionale al carico verticale e non nasce istantaneamente con l'angolo di deriva, ma cresce in prima approssimazione con un certo ritardo. Si tiene in considerazione di tale ritardo attraverso un parametro detto lunghezza di rilassamento σ che rappresenta, da un punto di vista fisico, la distanza che il pneumatico deve percorrere prima che la forza laterale raggiunga il valore di regime.

$$\frac{\sigma}{V} \frac{\partial F}{\partial t} + F = (K_\lambda \cdot \lambda + K_\phi \cdot \phi)$$

La proporzionalità tra forza e angoli di deriva e angoli di rollio espressa dall'equazione precedente corrisponde a un comportamento vicino a quello reale entro certi valori di angoli di deriva e rollio. Al di là di questi limiti la forza raggiunge un massimo che viene mantenuto pressoché costante per angli superiori (in alcuni casi c'è addirittura un abbassamento).

Si può dunque tener conto di questo limite introducendo una disequazione esprimibile come:

$$-f_{lim} \cdot N \leq F \leq f_{lim} \cdot N$$

f_{lim} coefficiente di aderenza massimo, non dipende esclusivamente dalle caratteristiche del pneumatico, ma anche dalla sua interazione con la superficie stradale.

Pertanto, con un manto stradale bagnato il coefficiente di aderenza massimo sarà inferiore per lo stesso tipo di pneumatico ma che si trova a lavorare in condizioni di asciutto.

Di conseguenza se si vuole simulare le condizioni di strada bagnata è sufficiente modificare opportunamente il coefficiente di aderenza massimo.

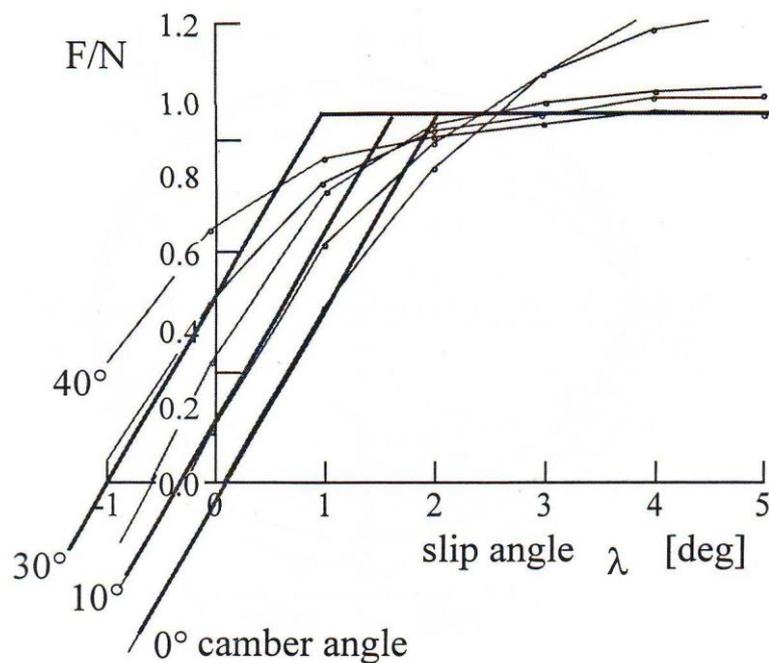


Figura 10: confronto modello pneumatico con curve reali.

La Figura 10 mostra un confronto tra i dati sperimentali e il modello dinamico del primo ordine che viene utilizzato in Xoptima e che è stato appena presentato al variare dell'angolo di deriva e per diversi angoli di rollio. Come si può notare i dati sperimentali (rappresentati da punti collegati tra loro da linee sottili) evidenziano una certa linearità per angoli piccoli vicini allo zero. Inoltre si può notare che per angoli di deriva nulli e angoli di rollio diversi da zero si registra comunque una forza laterale. Questo fatto prova come una motocicletta può essere inserita in una traiettoria curva semplicemente rollando il veicolo.

Infine il grafico testimonia come il modello che si è andato a utilizzare può essere considerato abbastanza accurato da riprodurre il comportamento reale considerando soprattutto il fatto che si sta indagando i moto in grande della motocicletta.

Allo stesso modo della forza laterale anche quella longitudinale (sia essa di spinta o di frenata) è proporzionale a una grandezza nota come *slip* o scorrimento longitudinale. Ci sono delle formulazioni che riproducono anche la dipendenza da questo fenomeno, ma in questo modello non sono state prese in considerazioni per questioni di semplicità.

Ciononostante l'interdipendenza tra forze longitudinali e laterali del pneumatico è considerata: la somma di queste forze, infatti, deve risiedere nel piano stradale all'interno di un'ellisse, detta ellisse *di trazione* o *ellisse di aderenza*. Gli assi di questa ellisse sono calcolati andando a valutare quali siano le forze massime esercitate sul pneumatico nelle condizioni indipendentemente in direzione longitudinale e laterale.

Normalizzando rispetto al carico verticale esercitato sul pneumatico stesso, i valori massimi sono dati dai coefficienti di aderenza massimi longitudinale e laterale.

$$F_{x_o} = \mu_{x_p} N \quad F_{y_o} = \mu_{y_p} N$$

La Figura 11 mostra l'ellisse di aderenza normalizzata rispetto al carico verticale e dal punto di vista matematico può essere espresso secondo la seguente equazione:

$$\left(\frac{F_x}{\mu_x N}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{\mu_y N}\right)^2 \leq 1$$

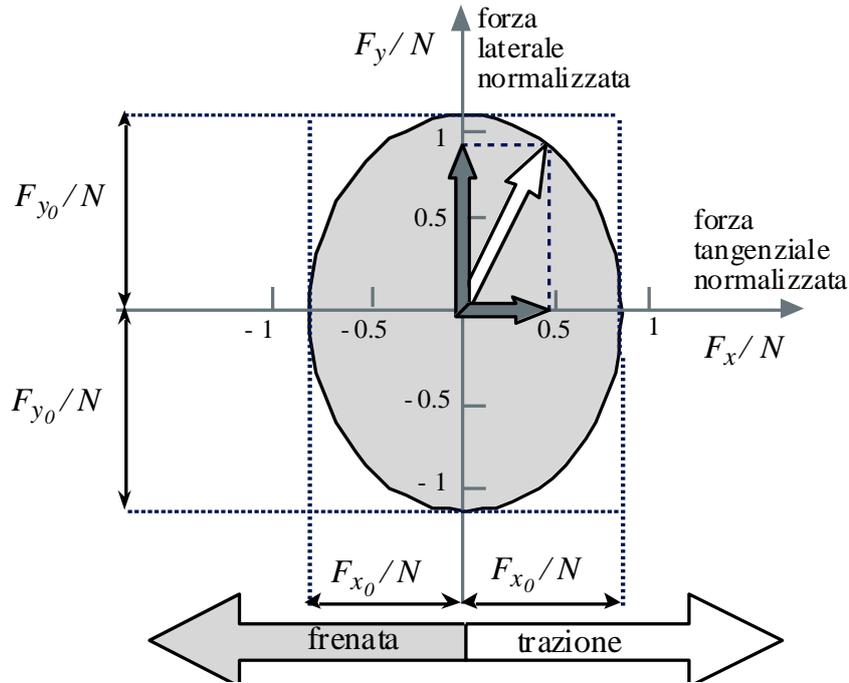


Figura 11 Ellisse di aderenza

4.5.9 DESCRIZIONE DEL TRACCIATO

Uno dei punti di forza di Xoptima è di avere la possibilità di calcolare la traiettoria ideale su un circuito definito dall'utente e che quindi può essere anche un tracciato reale. Per descrivere la pista si è reso necessario un passaggio delle coordinate da un sistema cartesiano a uno descritto in coordinate curvilinee. L'*ascissa curvilinea* ss rappresenta la distanza misurata lungo la mezzeria della pista a partire dal punto iniziale, mentre l'*ordinata curvilinea* sn misura in direzione ortogonale alla direzione della linea di mezzeria la posizione del centro di gravità complessivo della moto.

Per la completa definizione di un punto nella pista è quindi sufficiente definire le sue coordinate curvilinee (ss, sn).

La pista è descritta per mezzo di una curva parametrica che ne descrive la mezzeria e la sua direzione:

$x_c(ss)$ -> ascissa x del centro pista;

$y_c(ss)$ -> ordinata y del centro pista;

$\theta(ss)$ -> tangente alla linea media del centro pista.

le precedenti si ottengono integrando rispetto all'ascissa curvilinea le seguenti:

$$\frac{\delta x_c}{\delta s_s} = \cos(\theta(ss))$$

$$\frac{\delta y_c}{\delta s_s} = \sin(\theta(ss))$$

$$\frac{\delta \theta(ss)}{\delta s_s} = k(ss)$$

Dove $k(ss)$ è la curvatura della linea di mezzeria. In particolare la terza equazione rappresenta la definizione della curvatura come derivata rispetto l'ascissa curvilinea della tangente alla linea di mezzeria. La posizione di un veicolo in pista può essere individuato conoscendo la posizione del punto di contatto con il terreno del pneumatico posteriore e l'orientazione del veicolo per mezzo dell'imbardata.

Il legame tra la posizione assoluta del veicolo e la sua posizione in coordinate curvilinee è dato dalle seguenti:

$$x = x_c(ss) - \sin(\theta(ss))$$

$$y = y_c(ss) + \cos(\theta(ss))$$

$$\Psi = \theta(ss) + \alpha$$

Dove si prende come punto del veicolo, il punto di contatto del pneumatico posteriore e α rappresenta l'imbardata relativa rispetto la linea di mezzeria, mentre Ψ rappresenta l'imbardata assoluta rispetto all'asse x del sistema di riferimento assoluto.

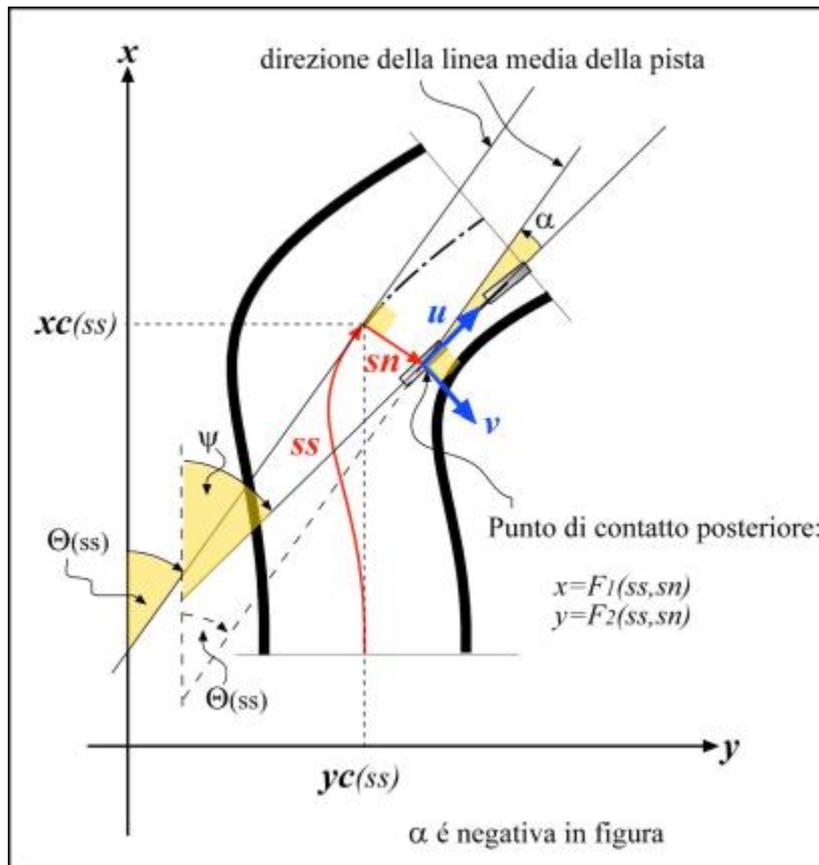


Figura 12 Schematizzazione della pista e della posizione in pista del veicolo

In Fig. 12 s'illustrano i significati delle precedenti relazioni.

La posizione del veicolo in pista si può ottenere integrando le velocità nel sistema di coordinate curvilinee (sn, ss, α) . Le equazioni che si ottengono sono le seguenti:

$$\dot{\Psi} = \frac{\delta\theta(ss)}{\delta ss} \dot{ss} - \dot{\alpha}$$

$$\dot{sn} = v \cdot \cos(\alpha) + u \cdot \sin(\alpha)$$

$$\dot{ss} = (v \cdot \cos(\alpha) + u \cdot \sin(\alpha)) \cdot \frac{1}{1 - sn \cdot \sin(\theta(ss))}$$

Le nuove coordinate (ss, sn, α) andranno ad aggiungersi alle variabili di stato per individuare la posizione del veicolo in pista e quelle appena descritte saranno le equazioni corrispondenti.

Riassumendo la descrizione della pista avviene quindi fissando per ogni valore dell'ascissa curvilinea ss la corrispondente curvatura $k(ss)$ e la semilarghezza della pista l_{sn} .

Dall'integrazione di quest'ultime equazioni si ottengono x_c , y_c e θ .

La semi larghezza della pista in questa versione di Xoptima è definita come una costante del tracciato, ma non sarebbe per nulla complicato introdurre una larghezza della pista variabile come funzione dell'ascissa curvilinea.

Sarebbe allo stesso modo abbastanza semplice introdurre la terza dimensione della pista, considerando quindi anche eventuali cambi di pendenze del tracciato, utilizzando ad esempio la superficie di Berzier o di NURBS. Si tratta, infatti, di definire solo il tipo di superficie che descrive la pista e quindi fornire le equazioni che calcolano il piano tangente e normale e la curvatura in ogni punto ed eventuali derivate.

Infine è importante e sottolineare che nella descrizione della pista è fondamentale mantenere la continuità fino alla derivata seconda, perché questo favorisce la convergenza numerica della soluzione.

Questo significa che la curvatura della pista deve essere continua e quindi derivabile.

4.5.10 CURVA DI COPPIA DEL MOTORE

La spinta massima che un veicolo è in grado di produrre dipende fondamentalmente da due fattori concomitanti: la curva di coppia del motore e il rapporto del cambio utilizzato e l'aderenza massima che si sviluppa tra pneumatico e terreno.

Questi vincoli devono essere imposti alla spinta S che è applicata nel punto di contatto posteriore tra pneumatico e terreno al fine di ottenere risultati soddisfacenti.

A questo proposito, in particolare per quanto riguarda l'aderenza, la spinta è limitata dall'ellisse di aderenza che sarà considerata all'interno delle funzioni di *penalty*.

Per quanto riguarda, invece, la curva di coppia del motore la spinta massima erogabile da parte del propulsore può essere pensata in questi termini:

$$S \leq S_{max}$$

Questo vincolo può essere introdotto, come per quanto fatto per l'aderenza, con una funzione penalità che vincola, appunto, la spinta S ad assumere valori inferiori a S_{max} .

La definizione di S_{max} , d'altronde, non è per niente costante, ma, come facilmente intuibile, è funzione della curva di coppia del motore (e quindi della velocità di rotazione del motore) e dal rapporto di trasmissione utilizzato.

Si riporta a titolo d'esempio la curva di coppia di una motocicletta sportiva di 1000cc di cilindrata:

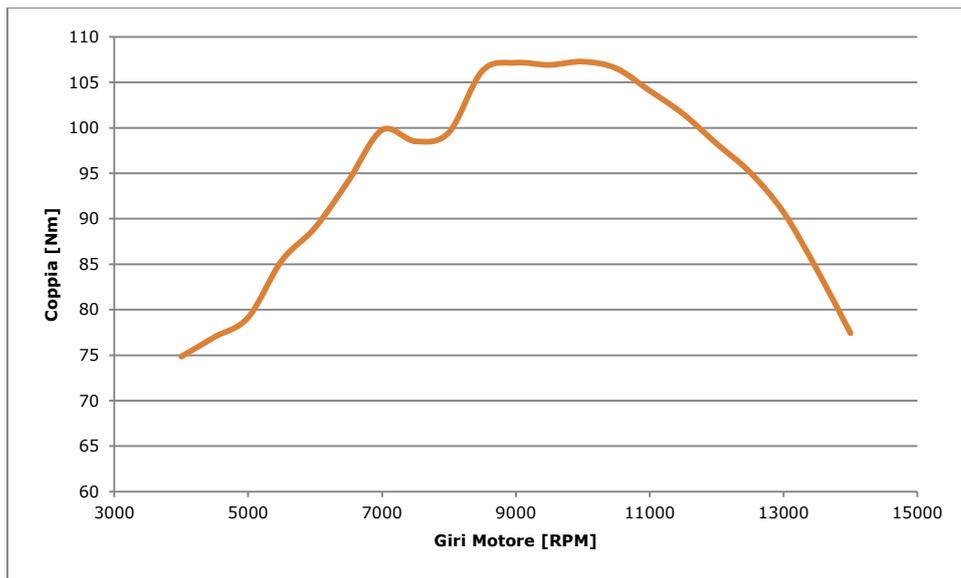


Figura 13: esempio di curva di coppia di una motocicletta supersportiva SUPERBIKE di 1000cc di cilindrata.

Com'è noto attraverso i rapporti di trasmissione del cambio è possibile variare la coppia del motore disponibile alla ruota motrice. Infatti, la velocità di rotazione della ruota posteriore, che è legata alla velocità di avanzamento del veicolo per mezzo del raggio di rotolamento del pneumatico, dipende dal numero di giri del motore e dal rapporto di trasmissione usato secondo la seguente relazione:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \cdot \frac{1}{\tau_0 \cdot \tau}$$

Dove n è il numero di giri del motore, τ_0 il rapporto di velocità primario, e τ il rapporto di velocità selezionato.

Dunque la curva di coppia cambia in funzione delle marce selezionate com'è mostrato nella figura seguente, dove è presa in considerazione la stessa motocicletta della figura precedente:

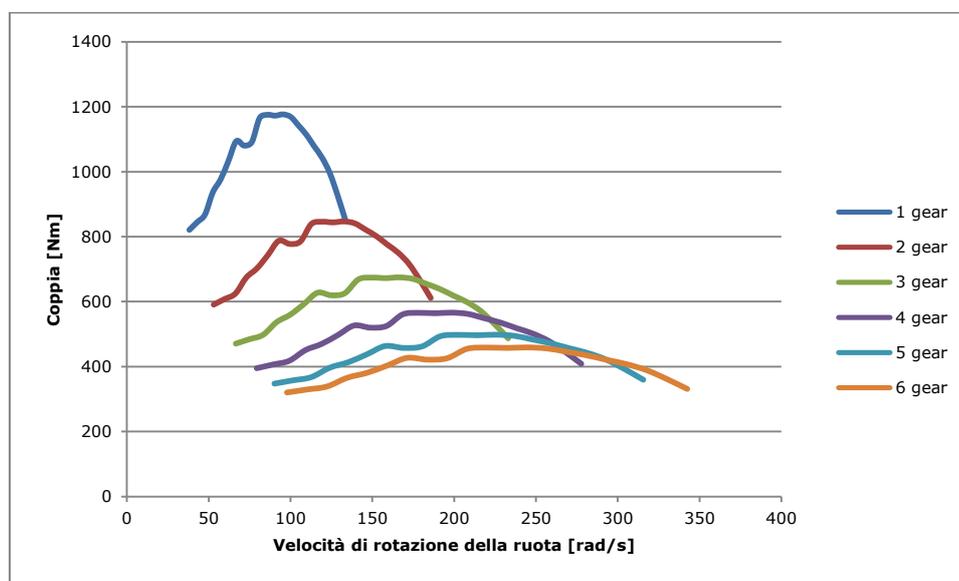


Figura 14: Coppia erogabile dal motore in funzione della velocità di rotazione della ruota e al rapporto innestato

4.6 - EQUAZIONI

Come già detto in precedenza il modello di motocicletta appena descritto presenta 12 gradi di libertà.

Grazie alla definizione dei corpi e delle relative terne di riferimento e ai modelli per i pneumatici e delle sospensioni, è stato possibile, attraverso l'utilizzo di *Maple*, ottenere le equazioni necessarie alla definizione del comportamento dinamico in grande della motocicletta.

In ingresso al solutore è ammesso un sistema composto esclusivamente di funzioni al primo ordine.

Per quanto riguarda le equazioni che presentavano quindi derivate della variabile di stato oltre il primo grado, si è resa necessaria la riduzione dell'equazione stessa al primo ordine attraverso l'introduzione di un'altra variabile di stato (e quindi di un'altra equazione corrispondente).

Se per esempio un'equazione si presentasse nella forma:

$$f(\ddot{x}, \dot{x}, x, u) = 0$$

Non sarebbe risolvibile dal solutore. Si rende pertanto necessaria l'introduzione di una nuova variabile di stato *ausiliaria* che rappresenti la derivata prima della variabile x e che è denominata x_{dot} .

Pertanto l'equazione precedente è sostituita da:

$$f(\dot{x}_{dot}, x_{dot}, x, u) = 0$$

Ma si rende necessaria l'introduzione anche di un'altra equazione di riduzione al primo ordine per compensare il numero delle variabili di stato:

$$x_{dot} - \dot{x} = 0$$

Il nostro sistema in definitiva presenta le seguenti variabili di stato:

- $VX(t), VY(t), VZ(t)$: velocità longitudinale, laterale e verticale del centro di massa complessivo della motocicletta (3);
- $\phi(t), \mu(t)$: angolo di rollio e angolo di beccheggio (2);
- $z(t)$: scuotimento verticale del centro di massa complessivo (1);
- $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$: velocità di rotazione della motocicletta attorno ai 3 assi in corrispondenza del centro di massa complessivo (3);
- $\delta(t), \delta\dot{(t)}$: angolo di sterzo e velocità di rotazione dello sterzo (2);
- $\theta_s(t), \theta_{s_dot}(t)$: angolo di rotazione del forcellone e velocità di rotazione del forcellone rispetto al telaio (2);
- $z_{sf}(t), z_{sf_dot}(t)$: deformazione lineare della sospensione anteriore e velocità di deformazione della sospensione anteriore (2);
- $f_r(t), f_f(t)$: forze laterali sui punti di contatto tra pneumatico e terreno posteriore e anteriore (2);

- $s_n(t)$, $s_s(t)$ e $\alpha(t)$: coordinate curvilinee del centro di massa complessivo per la determinazione della posizione della motocicletta lungo la traiettoria (3).

Il computo registra dunque 20 variabili di stato alle quali devono essere associate altrettante equazioni per permettere la risoluzione del sistema.

- Equazioni di Newton per l'equilibrio alla traslazione dell'intero veicolo (3);
- Equazioni di Eulero per l'equilibrio alla rotazione dell'intero veicolo (3);
- Equazioni per la riduzione al primo ordine delle equazioni di Newton-Eulero (3);
- Equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse di sterzo ed equazione di riduzione al primo ordine (2);
- Equazione di equilibrio alla traslazione per la sospensione anteriore ed equazione di riduzione al primo ordine (2);
- Equazione di equilibrio alla rotazione del forcellone attorno al perno forcellone ed equazione di riduzione al primo ordine (2);
- Equazioni caratteristiche dei pneumatici anteriore e posteriore (2);
- Equazioni per la determinazione della traiettoria (3);

4.7 - DEFINIZIONE DEGLI INGRESSI

Un pilota controlla la dinamica laterale della motocicletta attraverso la forza laterale anteriore F_f e il movimento laterale del corpo.

Per quanto riguarda il controllo della dinamica longitudinale, il pilota ha a disposizione la forza longitudinale S che può essere scomposta in quella anteriore e quella posteriore. Esiste anche in questo caso un movimento del corpo che serve a controllare il veicolo nella sua dinamica longitudinale. Ad ogni modo in entrambi i casi (dinamica laterale e longitudinale) non si considera il controllo attraverso i movimenti del corpo, in quanto avvengono con frequenza inferiore rispetto a quella delle forze³. Quindi gli ingressi che saranno considerati sono la forza laterale anteriore e le due forze longitudinali posteriore

³ Non sarebbe difficile aggiungere la possibilità di controllare lo spostamento nel piano di simmetria del veicolo e lo spostamento in direzione ortogonale al stesso piano di una massa (pari a quella del pilota) a partire da una posizione iniziale (configurazione di moto rettilineo uniforme).

S_r e anteriore S_f che possono essere positive se di spinta (e in tal caso come detto $S_f = 0$) o di frenata se negative. Di seguito si descrive uno per uno gli ingressi utilizzati:

1- Coppia applicata allo sterzo

La coppia applicata al manubrio del veicolo è l'ingresso che serve a controllare il veicolo. In realtà come ingresso sarà usata la sua accelerazione di variazione. Quindi, è necessario aggiungere due equazioni costitutive dell'ingresso, cioè:

$$\frac{d}{dt}\tau(t) - v\tau(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}v\tau(t) - a\tau(t) = 0$$

L'ingresso $a\tau(t)$ va penalizzato in riferimento ad un valore massimo ammissibile con un termine aggiuntivo nelle funzioni penalità. In questo caso è stata aggiunta un'altra variabile di stato $v\tau(t)$ e la corrispondente equazione.

2- Velocità di variazione della forza longitudinale posteriore:

Anche per quanto riguarda la forza longitudinale è necessario penalizzare la sua velocità di variazione per mantenerla all'interno di limiti realizzabili. Il nuovo ingresso definito dalla seguente equazione differenziale è indicato con $vS_r(t)$:

$$\frac{d}{dt}sr(t) - vS_r(t) = 0$$

La velocità di variazione della forza longitudinale $sr(t)$, è la stessa sia per le fasi di trazione (forza positiva) sia per le fasi di frenata (forza negativa). I dati sperimentali dimostrano che i valori massimi di variazione della forza longitudinale sono differenti in fase di frenata e di spinta. Infatti, l'azionamento del freno è quasi istantaneo, mentre la crescita della forza di trazione dipende dal motore. Tuttavia, per le scelte fatte questa è risultata la soluzione più semplice.

1- Velocità di variazione della forza longitudinale anteriore:

Anche per quanto riguarda la forza longitudinale anteriore si procede in maniera analoga a quella posteriore. Il nuovo ingresso definito dalla seguente equazione differenziale è indicato con $vS_f(t)$:

$$\frac{d}{dt}sf(t) - vS_f(t) = 0$$

Riassumendo gli ingressi al modello matematico risultano 3: $a\tau$, vS_r e vS_f .

4.7 – CONDIZIONI AL CONTORNO

Il sistema di equazioni differenziali che si ottiene è formato da un numero di variabili di stato pari al numero di equazioni corrispondenti. È necessario imporre per ciascuna delle variabili di stato delle condizioni al contorno iniziali e finali.

Alcune condizioni risultano imposte, in altre parole il valore della variabile è fissato, mentre alcune sono lasciate libere, ovvero s'impongono "condizioni al contorno naturali", in quanto non si conoscono i loro valori a priori.

Boundary Conditions

Initial Conditions

initial_t	= SET	t_i	= 0	--initial time
initial_sn	= SET	sn_i	= 0	--initial lateral position
initial_alpha	= SET	alpha_i	= 0	-- initial relative yaw
initial_zeta_dot	= SET	zeta_dot_i	= INITIAL_SPEED	
initial_VX	= SET	VX_i	= INITIAL_SPEED	--initial X velocity
initial_VY	= SET	VY_i	= 0	--initial Y velocity
initial_VZ	= SET	VZ_i	= 0	--initial Z velocity
initial_z	= FREE	z_i	= 0.01	--initial z position
initial_mu	= FREE	mu_i	= 0	--initial pitch
initial_phi	= FREE	phi_i	= 0	--initial roll angle
initial_omega_X	= SET	omega_X_i	= 0	--initial angular velocity X component
initial_omega_Y	= SET	omega_Y_i	= 0	--initial angular velocity Y component
initial_omega_Z	= SET	omega_Z_i	= 0	--initial angular velocity Z component
initial_delta	= SET	delta_i	= 0	--initial steering angle
initial_delta_dot	= SET	delta_dot_i	= 0	--initial steering velocity
initial_delta_dot_LP	= SET	delta_dot_LP_i	= 0	--initial steering velocity
initial_fr	= SET	fr_i	= 0	--initial rear lateral force
initial_ff	= SET	ff_i	= 0	--initial front lateral force
initial_sr	= SET	sr_i	= 0	--initial rear traction force
initial_sf	= SET	sf_i	= -0.01	--initial rear force
initial_tau	= SET	tau_i	= 0	--initial steering torque
initial_vtau	= SET	vtau_i	= 0	--initial steering torque
initial_vtau_LP	= SET	vtau_LP_i	= 0	--initial steering torque
initial_zsf	= SET	zsf_i	= -0.01	--initial front suspension deflexion
initial_zsf_dot	= SET	zsf_dot_i	= 0	--initial front suspension deflexion rate
initial_theta_s	= SET	theta_s_i	= 0.01	--initial rear suspension deflexion
initial_theta_s_dot	= SET	theta_s_dot_i	= 0	--initial rear suspension deflexion rate

Final Conditions

final_t	= FREE	t_f	= 0	--final time
final_sn	= FREE	sn_f	= 0	--final lateral position
final_alpha	= FREE	alpha_f	= 0	--final relative yaw
final_zeta_dot	= FREE	zeta_dot_f	= 0	
final_VX	= FREE	VX_f	= 0	--final X velocity
final_VY	= FREE	VY_f	= 0	--final Y velocity
final_VZ	= FREE	VZ_f	= 0	--final Z velocity
final_z	= FREE	z_f	= 0	--final z position
final_mu	= FREE	mu_f	= 0	--final pitch

final_phi	= FREE	phi_f	= 0	--final roll angle
final_omega_X	= FREE	omega_X_f	= 0	--final angular velocity X component
final_omega_Y	= FREE	omega_Y_f	= 0	--final angular velocity Y component
final_omega_Z	= FREE	omega_Z_f	= 0	--final angular velocity Z component
final_delta	= FREE	delta_f	= 0	--final steering angle
final_delta_dot	= SET	delta_dot_f	= 0	--final steering velocity
final_delta_dot_LP	= FREE	delta_dot_LP_f	= 0	--final steering velocity
final_fr	= FREE	fr_f	= 0	--final rear lateral force
final_ff	= FREE	ff_f	= 0	--final front lateral force
final_sr	= FREE	sr_f	= 0	--final rear traction force
final_sf	= FREE	sf_f	= -0.01	--final front force
final_tau	= FREE	tau_f	= 0	--final steering torque
final_vtau	= SET	vtau_f	= 0	--final steering torque
final_vtau_LP	= FREE	vtau_LP_f	= 0	--final steering torque
final_zsr	= FREE	zsr_f	= 0	--final rear suspension deflexion
final_zsr_dot	= FREE	zsr_dot_f	= 0	--final rear suspension deflexion rate
final_zsf	= FREE	zsf_f	= 0	--final front suspension deflexion
final_zsf_dot	= FREE	zsf_dot_f	= 0	--final front suspension deflexion rate
final_theta_s	= FREE	theta_s_f	= 0	--final rear suspension deflexion
final_theta_s_dot	= FREE	theta_s_dot_f	= 0	--final rear suspension deflexion rate

Tabella 1 Condizioni al contorno

La Tabella 1 contiene tutte le condizioni al contorno usate per questo modello. Nelle simulazioni presentate in questa ricerca, si parte da una condizione iniziale di moto rettilineo uniforme alla linea di mezzzeria della pista.

La scelta delle esatte condizioni al contorno è importante qualora si vada ad analizzare simulazioni su tratti di circuiti, in altre parole tracciati aperti. In questo caso la manovra uscente da Xoptima sarà fortemente influenzata dalle condizioni iniziali e finali scelte.

Qualora invece si proceda all'analisi di tempi sul giro, le condizioni al contorno risultano meno influenti perché nella simulazione sono lasciate prima della linea di partenza alcune curve "di lancio" per permettere alla motocicletta di raggiungere una condizione dinamica ottimale. Allo stesso modo lasciando alcune curve dopo la linea di arrivo si può rendere i risultati delle simulazioni poco influenzati dalle scelte delle condizioni al contorno finali.

CAPITOLO 5

XOPTIMA GUI SOFTWARE

5.1 - INTRODUZIONE

Il limite principale, fino ad oggi, delle versioni del software della Manovra Ottima che erano state realizzate all'interno del gruppo MDRG (Motorcycle Dynamics Research Group) era la difficoltà di utilizzo da parte dell'utente finale dello strumento stesso.

In particolare risultava poco chiaro e soprattutto di difficile comprensione la corretta compilazione dei file di input del programma, nonché era di difficile decifrazione il file di output.

Avendo a disposizione un strumento così importante e decisamente utile al fine di comprendere l'importanza dei principali parametri di progettazione di una motocicletta sulle prestazioni finali del veicolo stesso, si è proceduto con la realizzazione di una interfaccia grafica che risultasse di facile interpretazione anche da parte di chi non avesse mai avuto particolare esperienza con le versioni precedenti. Il completamento del software della Manovra Ottima con una GUI (Graphical User Interface) creata ad hoc ha dato alla luce a *Xoptima – Optimal Maneuver Software*.

La GUI è stata scritta e compilata in ambiente Matlab® 2007b in quanto lo si è ritenuto lo strumento adatto grazie alla sua semplicità nella creazione di feature grafiche come quella che verrà presentata in questo capitolo e soprattutto la possibilità di creare, gestire e personalizzare i grafici utili all'interpretazione dei risultati in uscita a Xoptima.

Nel corso del capitolo verranno illustrate le modalità per il corretto utilizzo del software della manovra ottima da parte di qualsiasi utente, ma di tanto in tanto si farà riferimento anche a quelle azioni che richiedono particolari "attenzioni" e che possono essere utili ad

un utente più esperto per raggiungere particolari obiettivi o gradi di precisione con le proprie simulazioni.

5.2 - INSTALLAZIONE ED AVVIO DEL PROGRAMMA

Xoptima è compatibile e utilizzabile in qualsiasi ambiente Windows XP/Vista/Seven, a non risulta strettamente necessaria la presenza di Matlab installato nel calcolatore.

Tutte le funzioni di Xoptima sono liberamente utilizzabili da parte di qualsiasi utente. È richiesto il possesso di regolare licenza solo per l'esecuzione di una nuova simulazione.

Per l'utilizzo di Xoptima si consiglia di seguire i semplici passi descritti in seguito che spiegano le azioni necessarie per una corretta installazione:

Copiare tutto il contenuto della cartella "Xoptima GUI Manovra Ottima" in locale.



SOLO per gli utenti che hanno Matlab installato sul proprio PC è necessaria l'esecuzione di "MCRInstaller.exe" che si trova all'interno della cartella principale del programma che è stata appena copiata.



L'avvio di Xoptima avviene attraverso l'esecuzione di "Xoptima.exe" presente all'interno della cartella principale del programma.



5.3 - DESCRIZIONE DEL PROGRAMMA

Nella cartella principale del programma sono presenti i seguenti file e cartelle:

BC & Penalties		Cartella
Circuit		Cartella
Code		Cartella
Motorcycle		Cartella
Results		Cartella
XOptima_mcr		Cartella
batch.bat	1 KB	File batch MS-DOS
colormap.mat	1 KB	Matlab Audio Format
input.jpg	69 KB	Immagine JPEG
MCRInstaller.exe	175,542 KB	Applicazione
MyColormaps.mat	1 KB	Matlab Audio Format
Readme.txt	1 KB	Documento di testo
XOptima.ctf	717 KB	File CTF
XOptima.exe	12 KB	Applicazione
XOptima.jpg	434 KB	Immagine JPEG

Nella cartella **BC & Penalties** sono raccolti i files relativi alle condizioni al contorno (Boundary Conditions), nella cartella **Circuit** i files relativi ai tracciati e circuiti, mentre nella cartella **Motorcycle** sono presenti i files di input con i parametri necessari alla definizione della motocicletta.

La cartella **Code** comprende gli eseguibili ed i file necessari all'esecuzione delle simulazioni, mentre la cartella **Results** comprende gli output delle simulazioni stesse.

Gli altri files e cartelle presenti sono ausiliari.

L'esecuzione del programma avviene attraverso **Xoptima.exe** e permette l'accesso alla finestra principale di **Xoptima** mostrata in Figura 1.

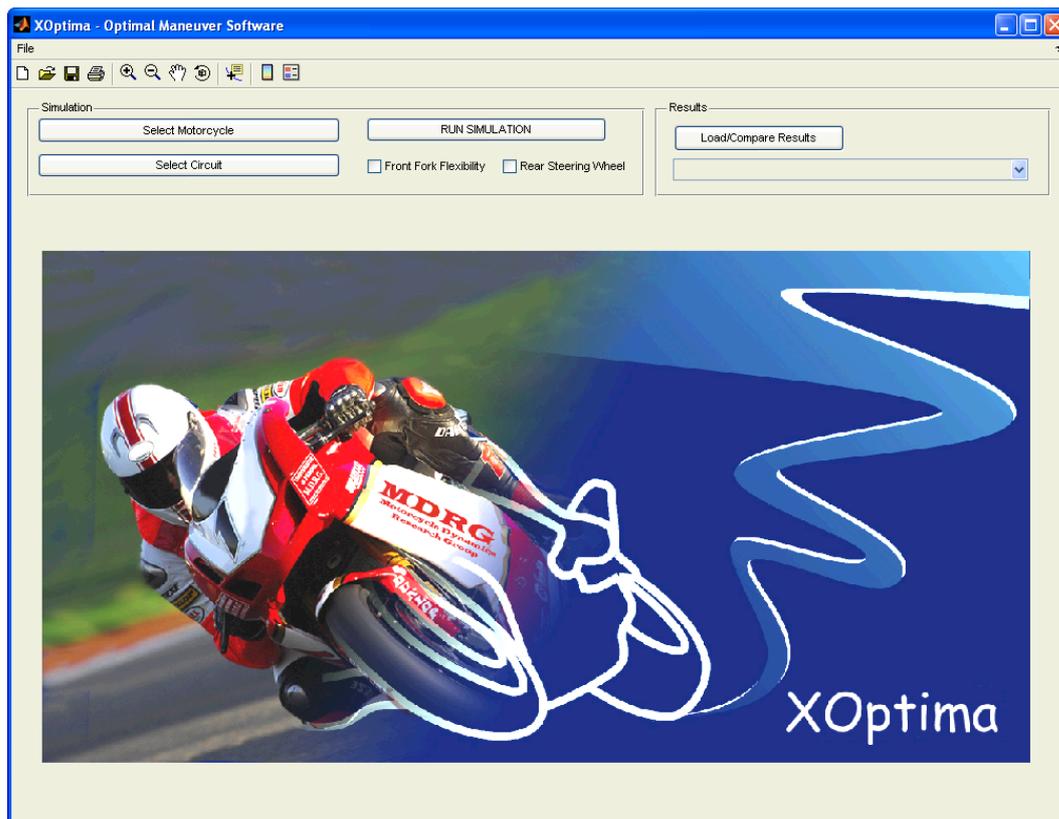


Figura 1: finestra principale di Xoptima

La finestra iniziale di Xoptima si presenta con le diverse opzioni suddivise in due gruppi:

1. SIMULATION;
2. RESULTS

Il primo gruppo racchiude le opzioni necessarie all'esecuzione di una nuova simulazione, il secondo, invece, permette di caricare, analizzare e comparare i risultati di simulazioni già effettuate.

In SIMULATION si trovano quindi i seguenti pulsanti e flag:

1. **Select Motorcycle:** scelta della motocicletta che si vuole utilizzare per la simulazione.
2. **Select Circuit:** scelta del tracciato su cui si vuole realizzare per la simulazione.
3. **Front Fork Flexibility FLAG:** se attivato introduce un ulteriore grado di libertà alla motocicletta, ovvero la capacità della forcella anteriore di flettersi lateralmente.
4. **Front Fork Flexibility FLAG:** se attivato introduce un ulteriore grado di libertà alla motocicletta, ovvero la possibilità della ruota posteriore di sterzare attorno all'asse z.
5. **RUN SIMULATION:** esegue la simulazione con i parametri scelti.

Nel gruppo RESULTS, invece, è presente un solo pulsante ovvero **Load/Compare Results** che serve a caricare i file di risultati ottenuti con simulazioni già effettuati in un altro momento.

5.3.1 SCELTA DEL FILE INPUT DELLA MOTOCICLETTA

Premendo il pulsante **Select Motorcycle** dalla finestra principale si entra nella sezione dedicata alla definizione dei parametri della motocicletta.

Viene chiesto in prima istanza di scegliere quale file caricare. Questa operazione è utile anche in fase di definizione di una nuova motocicletta.

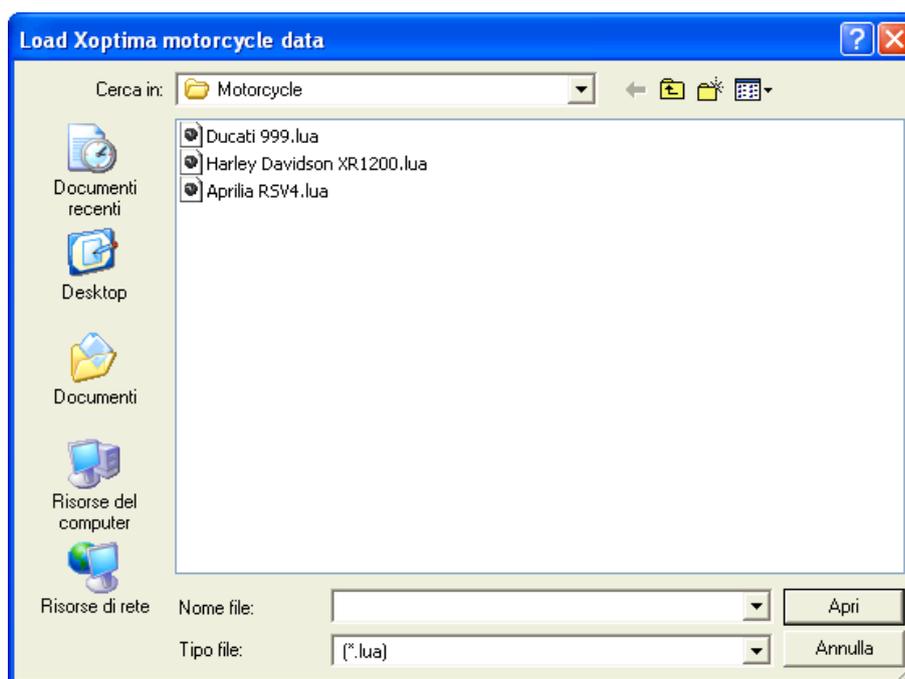


Figura 2: scelta del file input della motocicletta

I files di definizione delle motociclette sono compilati in linguaggio LUA e sono editabili con un qualsiasi programma per file di testo, ad esempio "Blocco Note" di Windows. Si

consiglia per questa operazione di utilizzare il software **RScite** scaricabile liberamente dalla rete.

Una volta scelta la motocicletta che si desidera utilizzare per la simulazione viene visualizzato il contenuto del file relativo.

Da questa finestra è possibile la modifica dei valori dei parametri della motocicletta ed è possibile aprire un altro file (con il pulsante **Open Motorcycle**) oppure salvare le modifiche apportate (attraverso il pulsante **Save Motorcycle**).

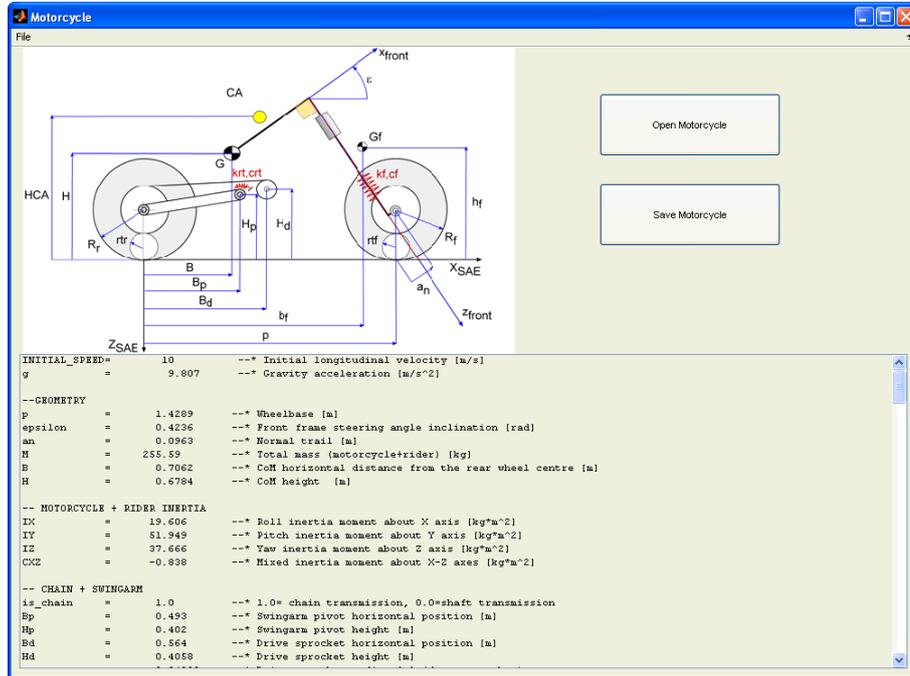


Figura 3: file input della motocicletta

Una volta concluse le operazioni relative alla scelta e/o modifica del file di input della motocicletta è possibile chiudere tale finestra ed il programma considererà automaticamente selezionata l'ultima motocicletta aperta.

La verifica di quale file per la motocicletta attiva può essere effettuata dalla schermata principale alla voce **Motorcycle** all'interno del gruppo **Informations**.

5.3.2 COMPILAZIONE DEL FILE INPUT DELLA MOTOCICLETТА

La scelta e la modifica di alcuni parametri di una motocicletta già esistente all'interno del programma è molto semplice attraverso l'uso dell'interfaccia grafica come appena descritto, mentre per la compilazione di un nuovo file di input è consigliabile la compilazione direttamente dal file di testo presente all'interno della cartella **Motorcycle** presente nella directory principale.

Di seguito sono presentati i diversi parametri necessari alla definizione della motocicletta con relativa spiegazione.

Tutti i parametri geometrici devono essere considerati in configurazione NOMINAL TRIM, ovvero in condizioni statiche con forcelle tutte estese.

```
--GEOMETRY
p = 1.4289--* wheelbase [m]
epsilon = 0.4236--* Front frame steering angle inclination [rad]
an = 0.0963--* Normal trail [m]
M = 255.59 --* Total mass (motorcycle+rider) [kg]
B = 0.7062--* CoM horizontal distance from the rear wheel centre [m]
H = 0.6784--* CoM height [m]
-- MOTORCYCLE + RIDER INERTIA
IX = 19.606 --* Roll inertia moment about X axis [kg*m^2]
IY = 51.949 --* Pitch inertia moment about Y axis [kg*m^2]
IZ = 37.666 --* Yaw inertia moment about Z axis [kg*m^2]
CXZ = -0.838 --* Mixed inertia moment about X-Z axes [kg*m^2]
-- CHAIN + SWINGARM
is_chain = 1.0 --* 1.0= chain transmission, 0.0=shaft transmission
Bp = 0.493 --* Swingarm pivot horizontal position [m]
Hp = 0.402 --* Swingarm pivot height [m]
Bd = 0.564 --* Drive sprocket horizontal position [m]
Hd = 0.4058--* Drive sprocket height [m]
rp = 0.0409--* Drive sprocket radius [m] (front sprocket)
rc = 0.0910--* Rear sprocket radius [m]
-- FRONT ASSEMBLY (front_frame+front_unsprung+front_wheel)
mf = 34.630 --* Front assembly mass [kg]
bf = 1.324 --* Front ass CoG hor distance from the rear wheel centre [m]
hf = 0.500 --* Front assembly CoG height [m]
Ifx = 2.396 --* Front assembly inertia moment about X front axis [kg*m^2]
Ify = 2.452 --* Front assembly inertia moment about Y front axis [kg*m^2]
Ifz = 0.508 --* Front assembly inertia moment about Z front axis [kg*m^2]
-- REAR WHEEL AND TYRE
Rr = 0.326 --* Rear wheel Radius [m]
rt1 = 0.094 --* Tyre cross section radius [m]
umr = 25.26 --* Unsprung masses [kg] (wheel mass + unsprung mass)
Iwr = 0.5350 --* Rear wheel inertia moment about Y rotating axis [kg*m^2]
Klambdar = 10.02 --* Tyre side stiffness coeff lat force [rad-1]
KphiR = 1.217 --* Tyre roll stiffness coefficient lateral force [rad-1]
Rear_DX = 1.3 --* Adherence limit in longitudinal forces
Rear_DY = 1.3 --* Adherence limit in lateral forces
sigmaR = 0.1054 --* Relaxation length of lateral force [m]
kpr = 135000 --* Rear vertical tire stiffness [N/m]
mrR = 0.021 --* Twisting torque linear coefficient of the rear tyre
twR = 0.5 --* Twisting torque non-linear coefficient of the rear tyre
ur = 0.011 --* Rolling resistance coefficient of the rear tyre
--FRONT WHEEL AND TYRE
Rf = 0.3 --* Front wheel Radius [m]
rt4 = 0.06 --* Tyre cross section radius [m]
umf = 18.5 --* Unsprung masses [kg] (wheel mass + unsprung mass)
Iwf = 0.4560 --* Front wheel inertia moment about Y rot axis [kg*m^2]
Klambdaf = 12.88 --* Tyre sideslip stiffness coeff lateral force [rad-1]
KphiF = 1.039 --* Tyre roll stiffness coefficient lateral force [rad-1]
Front_DX = 1.3 --* Adherence limit in longitudinal forces
Front_DY = 1.3 --* Adherence limit in lateral forces
sigmaF = 0.1068 --* Relaxation length of lateral force [m]
kpf = 140000 --* Front vertical tire stiffness
mrF = 0.021 --* Twisting torque linear coefficient of the front tyre
twF = 0.5530 --* Twisting torque non-linear coefficient of the front tyre
uf = 0.011 --* Rolling resistance coefficient of the front tyre

-- SUSPENSIONS
--- The springs' forces are defined with a 5th degree polynomial function:
--- [c]0+ [c]1* x + [c]2* x ^2 +[c]3* x^3 + [c]4* x^4 +[c]5* x^5
--- where [c] is "f" for front and "r" for rear
--- "x" is the torsional deformation [rad] of the swingarm for the rear spring
--- "x" is the linear deformation [m] of the fork for the front spring
-- REAR SPRING
r0 = -824*0.227 --* PRELOAD [c]0 rear spring coefficient
r1 = 100000*0.227^2 --* STIFFNESS [c]1 rear spring coefficient
r2 = 0.0 --* [c]2 rear spring coefficient
r3 = 0.0 --* [c]3 rear spring coefficient
r4 = 0.0 --* [c]4 rear spring coefficient
r5 = 0.0 --* [c]5 rear spring coefficient
theta_travel = 0.06/0.227 --* Total torsional stroke [rad]
-- REAR PAD
pad_kr = 5*r1 --* Rear pad torsional stiffness [Nm/rad]
-- REAR DAMPER
Cret = 4209*0.227^2 --* Rear torsional extension damping coefficient
crct = 2321*0.227^2 --* Rear torsional compression damping coefficient
-- FRONT SPRING
f0 = -111 --* [c]0 front spring coefficient
```

```

f1 = 18500 --* [c]1 front spring coefficient
f2 = 0.0 --* [c]2 front spring coefficient
f3 = 0.0 --* [c]3 front spring coefficient
f4 = 0.0 --* [c]4 front spring coefficient
f5 = 0.0 --* [c]5 front spring coefficient
z_travel = 0.125 --* Total stroke [m]
-- FRONT PAD
pad_kf = 100000 --* Front pad stiffness [Nm]
-- FRONT DAMPER
cfe = 974.7 --* Front extension damping coefficient [kg/s]
cfc = 525.3 --* Front compression damping coefficient [kg/s]

-- DRAG FORCE
HCA = 0.8776 --* Centre of pressure height [m]
kD = 0.3000 --* Aerodynamic drag coefficient [kg/m] 1/2*rho*Cd*A

-- STEERING DAMPER
Cdelta = 7 --* Steering damper [Nms/rad]

--ENGINE AND GEARBOX
primary_ratio= (75/36) --* Reduction ratio due to the primary
-- chain ratio: automatically calculated with the ratio rc/rp
gear_1 = (2)--* Reduction ratio due to 1st gear
gear_2 = (1.611) --* Reduction ratio due to 2nd gear
gear_3 = (1.35) --* Reduction ratio due to 3th gear
gear_4 = (1.19) --* Reduction ratio due to 4th gear
gear_5 = (1.091) --* Reduction ratio due to 5th gear
gear_6 = (1)--* Reduction ratio due to 6th gear
-- crankshaft inertia
cs_inertia = 0.00893 --* Crankshaft inertia [kgm^2]

torque_curve = {
{ 0 , 1 },
{ 6000 , 85.0607712 },
{ 7000 , 91.3056598 },
{ 8000 , 99.0139488 },
{ 9000 , 106.3979982 },
{ 10000 , 111.67 },
{ 11000 , 113.0420022 },
{ 12000 , 108.7260768 },
{ 13000 , 96.9346318 },
{ 13500 , 1 },
nil}

```

4.3.3 SCELTA DEL FILE INPUT DEL CIRCUITO

Premendo il pulsante **Select Circuit** dalla finestra principale si entra nella sezione dedicata alla scelta del tracciato su cui si vuole eseguire la simulazione.

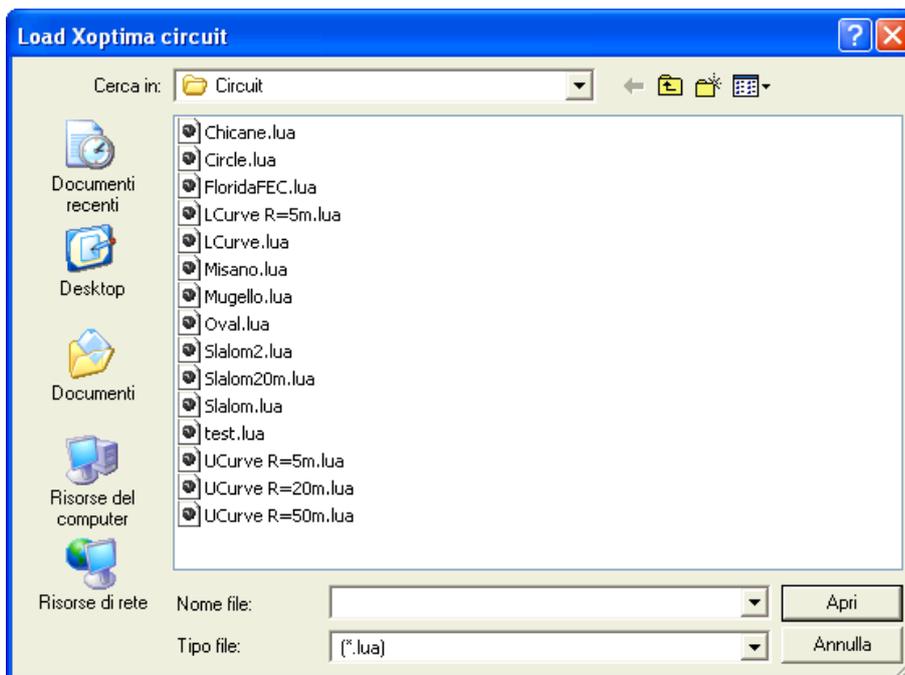


Figura 4: Scelta del circuito

Anche i files relativi ai circuiti sono scritti in linguaggio LUA. Una volta scelto il tracciato se nella cartella **Circuit** è presente l'immagine o la foto relativa questa viene mostrata in una finestra separata ciò avviene se *nome_tracciato.jpg* corrisponde a *nome_tracciato.lua*).

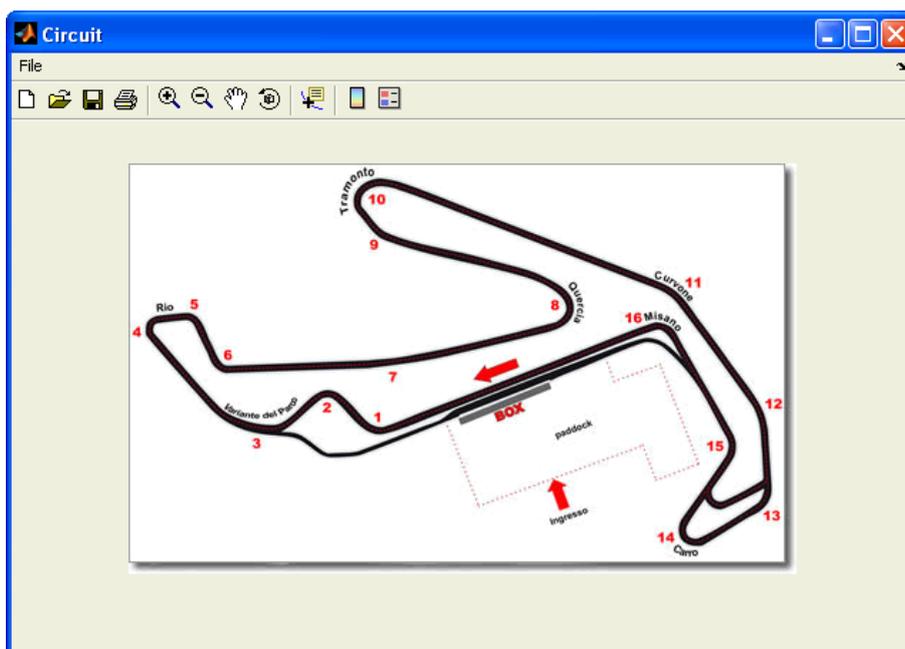


Figura 5: immagine del circuito selezionato

Anche per la compilazione di un nuovo tracciato si consiglia l'utilizzo di un editor di testo RScite secondo le regole esplicitate al paragrafo seguente.

5.3.4 COMPILAZIONE DEL FILE INPUT DI UN TRACCIATO

Il circuito in Xoptima è definito da un insieme di tratti rettilinei e tratti curvilinei a curvatura costante.

I tracciati possono essere suddivisi in due categorie, a seconda essi siano **tracciati chiusi** (circuiti) oppure **tracciati aperti**.

Per andare a valutare correttamente le massime prestazioni lungo un giro di un circuito, proprio come nella realtà, si deve andare a compiere un cosiddetto “giro di lancio”, per fare in modo che al momento del passaggio attraverso la linea di partenza la moto si trovi già nelle condizioni ottimali.

Così come prima della linea del traguardo, anche dopo la stessa linea al termine del giro è necessario “prolungare” il circuito per fare in modo di non considerare il tratto finale della simulazione che, in particolari circostanze, non risulta pienamente attendibile perché fortemente influenzato delle condizioni al contorno finali che si sono poste e che possono non essere pienamente corrette.

Come regola generale per tutti i circuiti si è scelto di prolungare il giro aggiungendo 1km prima della linea di partenza ed 1km dopo la linea d’arrivo.

In fase di analisi dei risultati Xoptima considererà automaticamente solamente il giro completo, troncando i tratti iniziale e finale della simulazione.

Per quanto riguarda, invece, i tracciati aperti questa operazione ovviamente non è possibile, quindi verrà considerato da Xoptima il tracciato esattamente come descritto dall’utente.

Le regole di sintassi per la corretta compilazione del file del tracciato sono le seguenti:

- ISTRUZIONE OBBLIGATORIA ALL’INIZIO DEL FILE:

```
newCircuit({mesh_grid_size = 1,road_width = 14})
```

dove con `mesh_grid_size` si definisce la risoluzione spaziale (in metri) di default per la mesh del tracciato, con `road_width` la larghezza della carreggiata.

- DESCRIZIONE DI UN TRATTO RETTILINEO:

```
newSegment{length= 100}
```

dove con `length` si definisce la lunghezza (in metri) del tratto. Si può definire per il tratto considerato una mesh diversa da quella di default specificandola con il campo `grid_size`, ad esempio:

```
newSegment{length=5, grid_size=0.1}
```

- DESCRIZIONE DI UN TRATTO CURVO:

```
newSegment{angle = 1,radius = 50}
```

dove con angle si definisce l'angolo (in radianti) spazzato dalla curva e con radius il raggio (in metri). Anche in questo caso si può definire per il tratto considerato una mesh diversa da quella di default specificandola con il campo grid_size, ad esempio:

```
newSegment{angle = 1,radius = 50, grid_size=0.1}
```

Un altro importante suggerimento per facilitare la convergenza è di infittire al mesh nei primi e negli ultimi metri del tracciato.

5.4 - ESECUZIONE DELLA SIMULAZIONE

Dopo aver effettuato la compilazione e/o la scelta della motocicletta che si vuole utilizzare e avere selezionato il circuito su cui effettuare la simulazione si può lanciare il solutore che produrrà il file dei risultati contenente la manovra ottimale.

Prima di lanciare la simulazione, però, è possibile scegliere l'attivazione o meno della flessibilità della forcella anteriore e la presenza o meno della seconda ruota sterzante (al posteriore) attraverso i FLAG appositi contenuti nella finestra SIMULATION.

La flessibilità della forcella anteriore non è stata descritta nel capitolo dedicato al modello matematico della motocicletta e qui di seguito si darà una breve spiegazione.

5.4.1 FORCELLA ANTERIORE FLESSIBILE

La flessibilità della forcella anteriore può essere attivata attivando il FLAG relativo. in questa situazione il modello matematico della motocicletta che verrà utilizzato nella simulazione è modificato rispetto quello presentato precedentemente. In particolare viene aggiunto un ulteriore grado di libertà alla motocicletta, ovvero lo spostamento laterale della forcella rispetto la sua posizione naturale.

Lo schema mostrato nella figura seguente rappresenta la modellazione della flessibilità laterale della forcella che è stata eseguita pensando di introdurre un sistema ammortizzante in corrispondenza del canotto di sterzo, caratterizzato quindi da una costante elastica K_b e da uno smorzamento C_b .

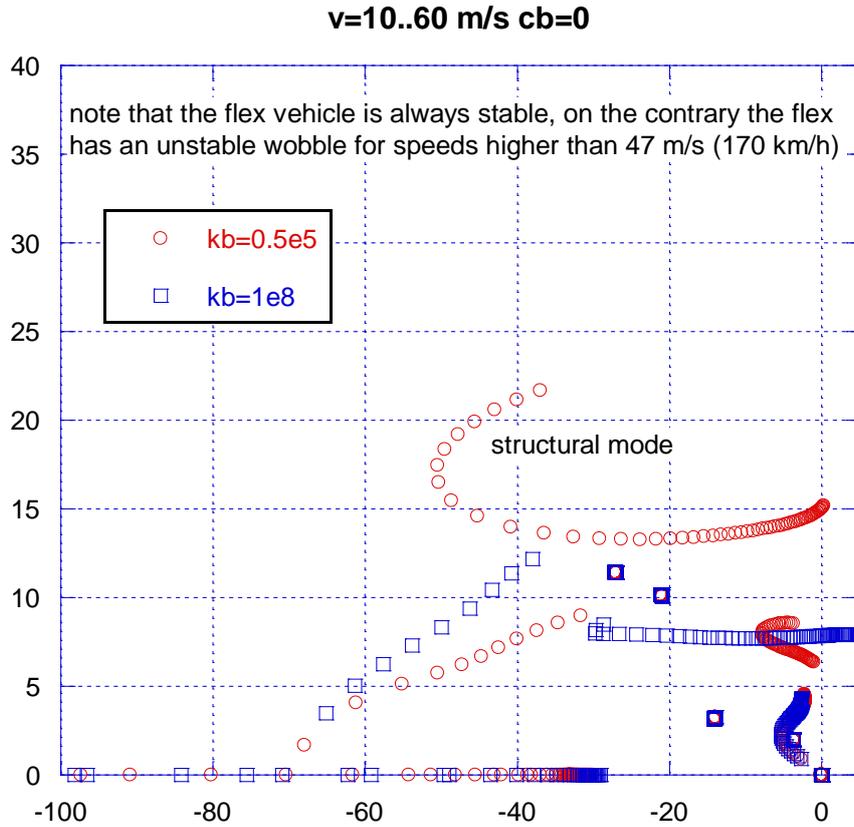


Figura 7: modi di vibrare per una motocicletta con forcella rigida VS forcella flessibile

Sono state eseguite delle simulazioni per andare a valutare come la flessibilità laterale della forcella possa rendere più performante la motocicletta.

In effetti eseguendo le simulazioni con forcella infinitamente rigida e forcella invece flessibile si nota un miglioramento nel tempo sul giro.

Questo significa che la motocicletta “flessibile” è in grado di eseguire manovre diverse rispetto alla motocicletta “normale”, in particolare le manovre che renderebbero instabile (al Wobble in questo caso) la motocicletta e che per tale ragione, quindi non sono prese in considerazione dal software.

Di contro al miglioramento del tempo sul giro si verifica un aumento del tempo computazionale perché al modello è necessario aggiungere ulteriori equazioni e quindi variabili.

Si consiglia l’utilizzo di questa feature, pertanto, esclusivamente per andare a valutare l’influenza della flessibilità laterale della forcella, mentre per effettuare simulazioni con altri scopi, incluso la valutazione delle performance assolute del mezzo, si consiglia di non utilizzare questa flessibilità strutturale.

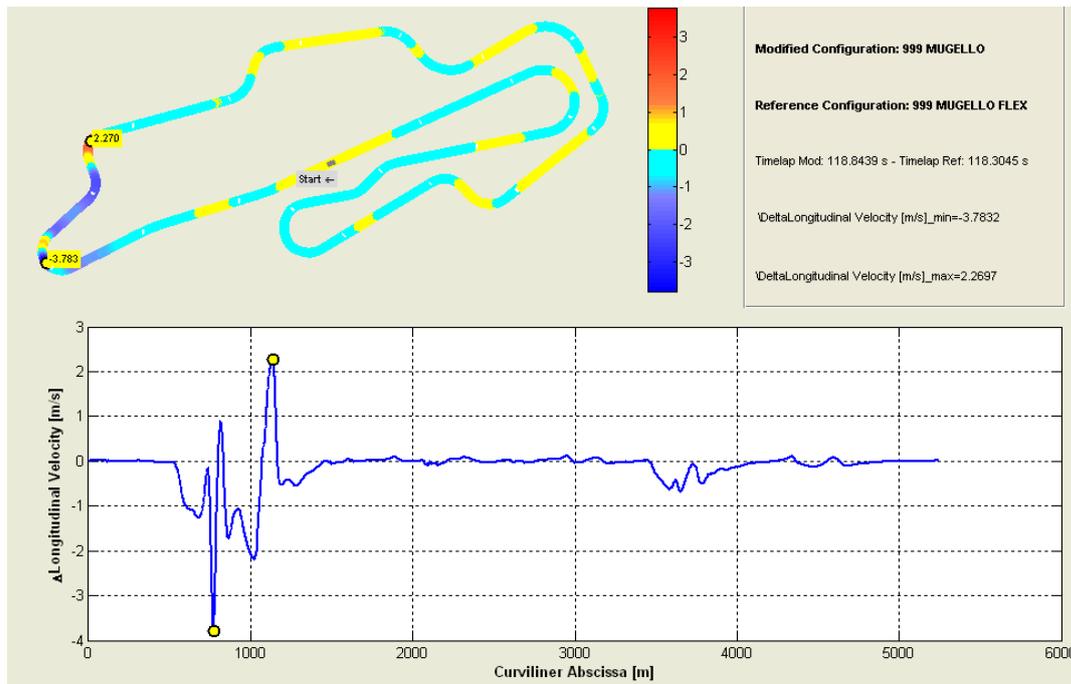


Figura 8: confronto velocità longitudinale lungo il Mugello: motocicletta con forcella rigida VS forcella flessibile

5.4.2 STERZO AL POSTERIORE

Uno dei tanti vantaggi che accompagnano il software Xoptima è la possibilità di modificare il modello della motocicletta, inclusa l'opportunità di introdurre altre equazioni (e le corrispondenti variabili di stato) per valutare l'influenza di feature e/o ulteriori gradi di libertà nel modello stesso.

Seguendo questa linea si è introdotto un ulteriore grado di libertà della motocicletta corrispondente ad un ipotetico sterzo alla ruota posteriore e lasciando al software la guida in termini di velocità di angolo dello sterzo così come è fatto per quello anteriore.

In questo modo il software Xoptima è in grado di scegliere quale sia la migliore manovra per compiere il tracciato fornendogli guidando la motocicletta non solo attraverso gas, freni e sterzo anteriore, ma anche attraverso lo sterzo posteriore.

Si illustra di seguito i risultati ottenuti eseguendo le simulazioni con e senza sterzo posteriore lungo il tracciato del Mugello con una motocicletta supersportiva di 1000cc di cilindrata:

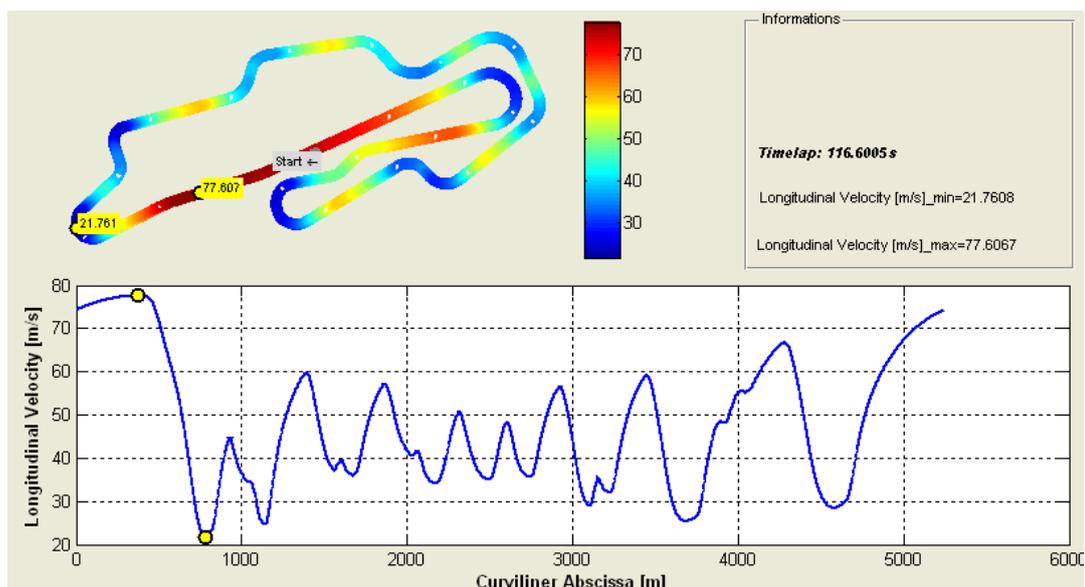


Figura 9: Mugello, velocità di avanzamento per una motocicletta “classica” con 1 ruota sterzante

Se si va ad effettuare la stessa simulazione, ma liberando anche il grado di libertà allo sterzo posteriore si ottengono ottimi miglioramenti in termini di tempo sul giro:

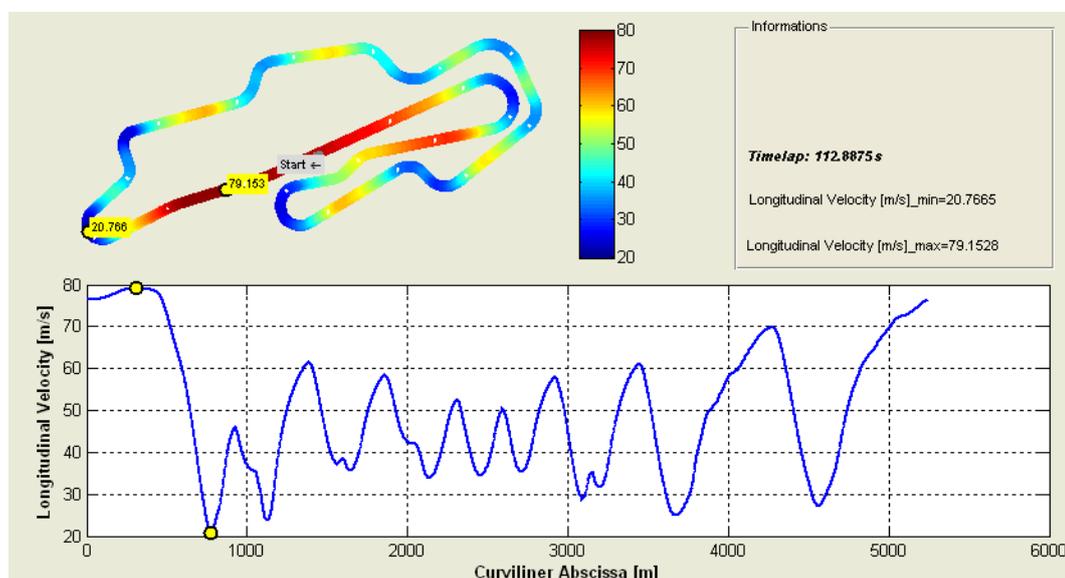


Figura 10: Mugello, velocità di avanzamento per una motocicletta con 2 ruote sterzante

Come si è detto l’unica differenza tra le due simulazioni consiste nell’aver lasciato la possibilità al software di “guidare” anche lo sterzo posteriore, che comunque è stato limitato nella sua massima corsa angolare a $\pm 10^\circ$.

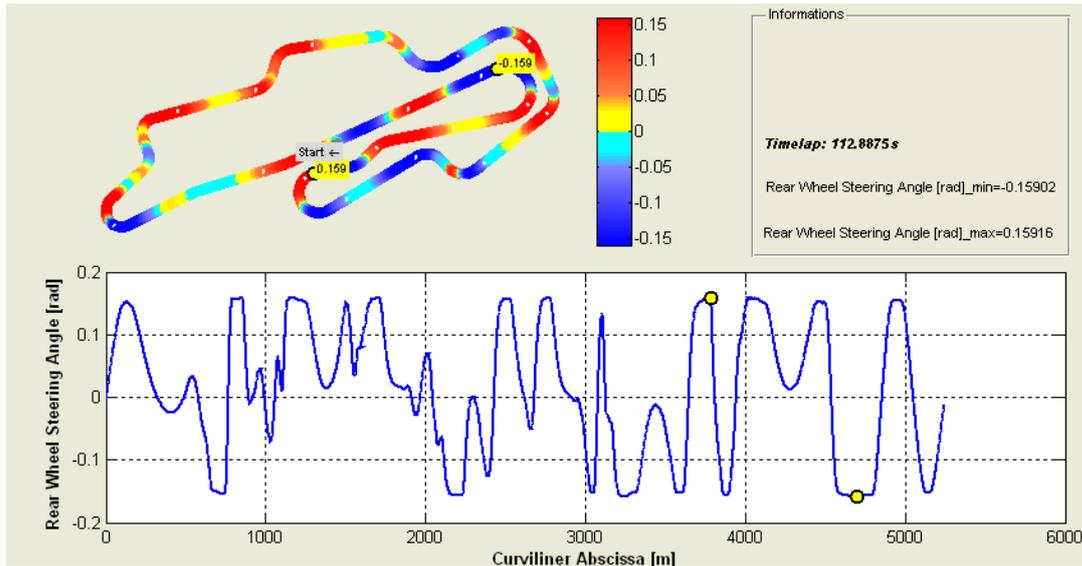


Figura 11: Mugello angolo di sterzo posteriore

Si vuole ora andare a valutare quali siano i tratti del circuito in cui lo sterzo posteriore è in grado di offrire (se opportunamente guidato) vantaggi in termini di velocità di percorrenza. Si va pertanto a visualizzare la differenza di velocità di avanzamento per le due simulazioni:

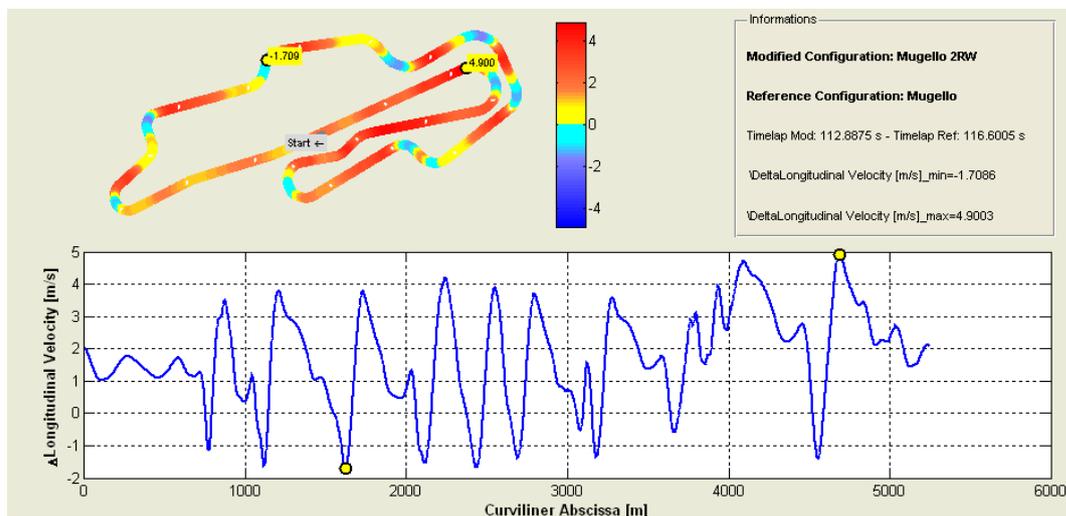


Figura 12: confronto velocità longitudinale lungo il Mugello: motocicletta con 1 ruota sterzante VS 2 ruote sterzanti

I tratti rossi nel circuito sopra rappresentato indicano le porzioni di circuito in cui la motocicletta con 2 ruote sterzanti risulta più veloce rispetto alla motocicletta "classica".

Si può quindi apprezzare come il secondo sterzo renda più performante la motocicletta lungo tutto il tracciato ad eccezione dei tratti centrali delle curve.

Si conclude quindi come lo sterzo alla ruota posteriore aiuti l'ingresso e l'uscita di curva, peggiorandone la velocità di percorrenza, ma risultando nel complesso un miglioramento alle performance complessive.

Ma come potrebbero essere utili queste considerazioni nella realtà? Ovviamente per un pilota "umano" sarebbe praticamente impossibile guidare in maniera distinta i due sterzi in maniera ottimale, o comunque risulterebbe estremamente scomodo e difficilmente praticabile. Non si nascondono, oltretutto, le difficoltà che ne possono derivare anche da un punto di vista progettuale/costruttivo se vuol introdurre quest'altro grado di libertà.

Se si pensasse invece di introdurre un attuatore che guidasse in maniera autonoma lo sterzo al posteriore la maggior parte delle difficoltà, soprattutto quelle legate alla guida, verrebbero risolte.

A questo proposito si è andati ad analizzare l'andamento dei valori assunti dall'angolo dello sterzo posteriore analizzandoli in rapporto all'angolo dello sterzo anteriore.

Lo scopo era quello di identificare, qualora risultasse possibile, una certa correlazione tra i due angoli di sterzata.

Si è quindi proceduto con un'analisi attraverso l'utilizzo del software Matlab dei file di risultati derivanti dalle due simulazioni. In particolare si è andato a trattare l'angolo di sterzo anteriore come se fosse un segnale in ingresso, l'angolo di sterzo posteriore come un segnale d'uscita.

Attraverso le routine di identificazione si è cercato di andare a valutare quale potesse essere una funzione di trasferimento che legasse questi due segnali.

Innanzitutto è necessario individuare il tipo ed il grado di funzione di trasferimento più adatta al nostro scopo. Sulla base di lavori precedentemente fatti all'interno di MDRG [20] si è visto come una funzione di trasferimento lineare del primo ordine sia pienamente sufficiente allo scopo prefissato.

Si è quindi proceduto con l'identificazione di tale funzione di trasferimento ma ci si è subito resi conto che non è possibile individuare un'unica funzione di trasferimento che sia in grado di riprodurre in maniera abbastanza fedele il comportamento dello sterzo posteriore.

Si è quindi pensato di associare 2 diverse funzioni di trasferimento, una per basse velocità (sotto i 40 m/s) ed una per le alte velocità (sopra i 40 m/s).

Anche in questo caso, però, il livello di corrispondenza del segnale d'uscita dell'angolo di sterzo posteriore calcolato attraverso la funzione di trasferimento e quello invece calcolato come l'ottimale dalla manovra ottima non era sufficientemente elevato.

Si è quindi proceduto ad un'ulteriore upgrade, ovvero considerare più step di velocità e molto più ristretto (fino a 10 m/s).

Anche in questo caso per molti segmenti non si è raggiunto un fitting abbastanza buono, ma si è provato ugualmente ad inserire tutte le varie funzioni di trasferimento per i vari step di velocità.

Il software quindi in questo caso guida solamente con lo sterzo anteriore (oltre che con gas e freni), mentre lo sterzo posteriore si muove di un angolo funzione di quello anteriore e legato allo stesso attraverso la funzione di trasferimento corrispondente alla velocità di avanzamento considerata.

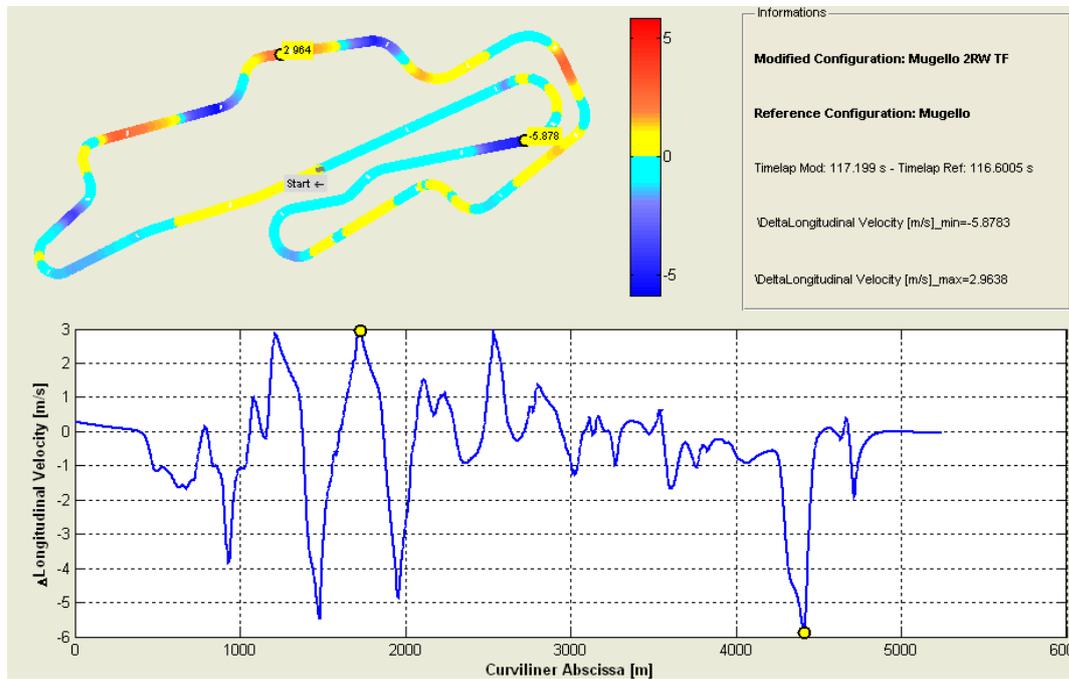


Figura 13: confronto velocità longitudinale lungo il Mugello: motocicletta con 1 ruota sterzante VS 2 ruote sterzanti (posteriore "guidato" dalla funzione di trasferimento calcolata)

Come si evince dai risultati della simulazione con le varie funzioni di trasferimento non si sono ottenuti risultati simili ai precedenti, anzi, si è andati a peggiorare il tempo di percorrenza anche rispetto alla configurazione con solo lo sterzo anteriore.

5.5 - VISUALIZZAZIONE DEI RISULTATI

Dopo aver effettuato la simulazione si può procedere con la visualizzazione e l'analisi dei risultati. Appena conclusa la simulazione il software caricherà automaticamente l'ultimo file risultati appena creato, altrimenti sarà sufficiente premere sul pulsante LOAD/COMPARE RESULTS ed effettuare la scelta del file che si desidera caricare.

Successivamente la celta del file e il caricamento dello stesso appariranno nella finestra principale l'informazione del tempo sul giro e si completerà nel menù a tendina l'insieme dei parametri visualizzabili:

- Dynamic Parameters -
- Longitudinal Velocity [m/s]-
- Longitudinal Acceleration [m/s²]-
- Lateral Velocity [m/s]-
- Lateral Acceleration [m/s²]-
- Vertical Velocity [m/s]-

- Roll Angle [rad]-
- Roll Rate [rad/s]-
- Pitch Angle [rad]-
- Pitch Rate [rad/s]-
- Yaw Rate [rad/s]-
- Steer Angle [rad]-
- Kinematic Steer Angle [rad]-
- Steer Rate [rad/s]-
- Steer Torque [Nm]-
- Steer Torque Rate [Nm/s]-
- CoG Vertical Position SAE [m]-
- CoG Horizontal Position SAE [m]-
- CoG Vertical Displacement [m]-
- Front Spring Linear Deformation [m]-
- Front Spring Linear Deformation Rate [m/s]-
- Rear Spring Torsional Deformation [rad]-
- Rear Spring Torsional Deformation Rate [rad/s]-
- WheelBase [m]-
- Swingarm Angle SAE [rad]-
- Load Transfer Angle [rad]-
- Squat Angle [rad]-
- Chain Angle [rad]-
- Front Wheel Spin Velocity [rad/s]-
- Rear Wheel Spin Velocity [rad/s]-
- Front Fork Deformation Angle [rad]-
- Rear Wheel Steering Angle [rad]-
- Forces ---
- Max Available Torque at Rear Wheel [Nm]-
- Used Torque at Rear Wheel [Nm]-
- Max Available Force at Rear Wheel [N]-
- Front Longitudinal Force [N]-
- Front Lateral Force [N]-
- Front Vertical Force [N]-
- Rear Longitudinal Force [N]-
- Rear Lateral Force [N]-
- Rear Vertical Force [N]-
- Front Suspension Force [N]-
- Rear Suspension Torque [Nm]-
- Tyres ---
- Front Sideslip Angle [rad]-
- Rear Sideslip Angle [rad]-
- Front Rolling Radius [m]-
- Rear Rolling Radius [m]-
- Front Tyre Engagement-
- Rear Tyre Engagement-
- Front Friction Ellipse-
- Rear Friction Ellipse-
- Track ---
- X Optimal Trajectory [m]-
- Y Optimal Trajectory [m]-
- Optimal Trajectory Curvature [1/m]-
- Longitudinal Curvilinear Coordinate [m]-
- Lateral Curvilinear Coordinate [m]-
- Track Curvature [1/m]-
- Left Width [m]-
- Right Width [m]-
- X Middle Lane [m]-
- Y Middle Lane [m]-
- X Left Border [m]-
- Y Left Border [m]-
- X Right Border [m]-

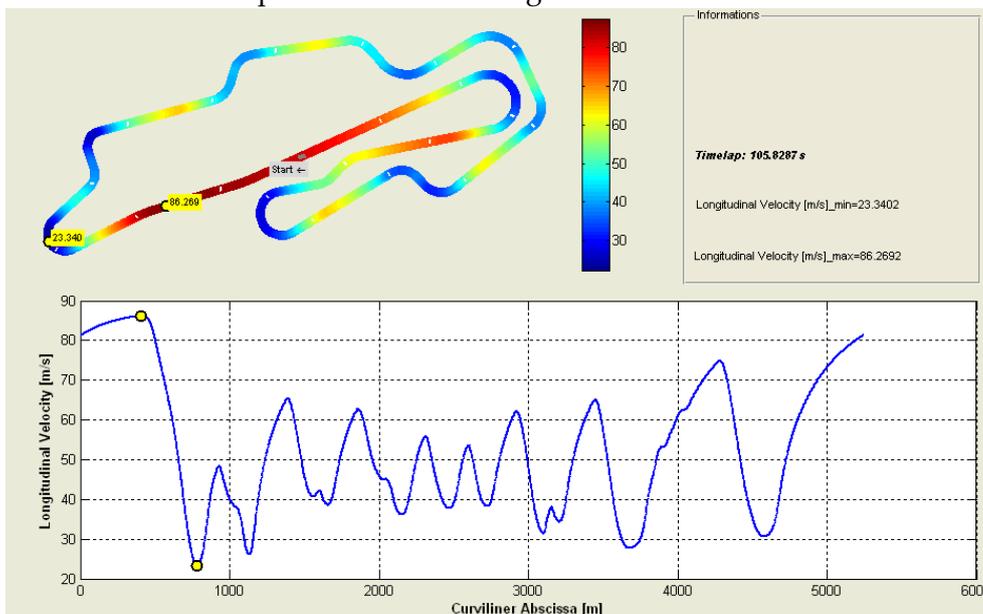
-Y Right Border [m]-
 -Absolute Yaw Angle [rad]-
 --- Performances & Others ---
 -Time [s]-
 -Steering Factor [rad]-
 -Used Gear-
 -Engine Reduced Inertia-
 -Squat Ratio-
 -SquatPoint Vertical Position SAE-
 -SquatPoint Horizontal Position SAE-

A questo punto è possibile effettuare una scelta tra tutti questi parametri/grandezze e una volta selezionato ciò che si vuole andare a valutare nella finestra principale del programma appariranno due grafici distinti:

- il primo rappresenta l'andamento del parametro in scala colorimetrica lungo tutto il tracciato.
- Il secondo, in un classico grafico x-y rappresenta l'andamento dello stesso parametro in funzione dell'ascissa curvilinea.

Nel tab INFORMATIONS sono riportate le informazioni principali che possono essere utili all'utilizzatore in fase di analisi dei risultati:

- Nome del file caricato;
- TIMELAP
- Valore massimo del parametro scelto lungo tutta la simulazione;
- Valore minimo del parametro scelto lungo tutta la simulazione.



- Figura 14: esempio visualizzazione risultati

I valori massimi e minimi del parametro rappresentato sono indicati anche nei due grafici in modo tale che risulti chiaro anche in che posizione del tracciato si siano raggiunti tali valori massimi/minimi.

Oltre alla rappresentazione dei parametri della manovra cliccando sul pulsante OPTIMAL TRAJECTORY si può verificare quali sia stata la traiettoria ideale calcolata dal software con indicato il punto del traguardo e le indicazioni ogni 250m lungo il tracciato.

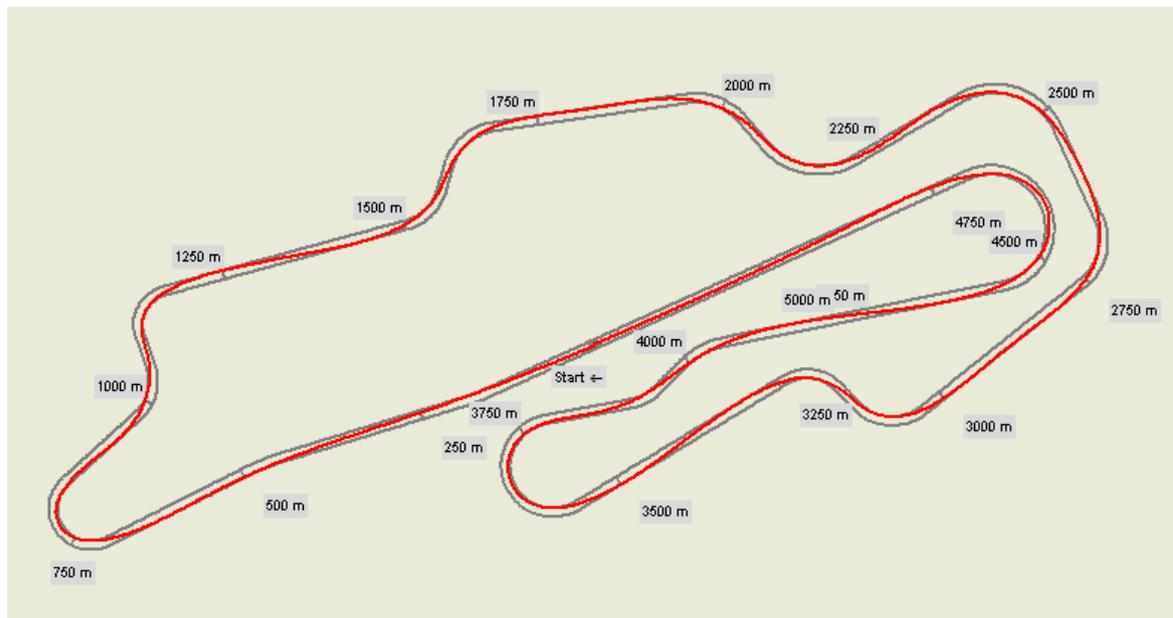


Figura 15: esempio visualizzazione traiettoria ottima

5.5.1 CONFRONTO DI RISULTATI

Xoptima è stato principalmente pensato per valutare l'influenza dei parametri geometrici sulle prestazioni delle motociclette da corsa. A tal scopo si è pensato di andare ad introdurre la possibilità di confrontare risultati di simulazioni diverse, ovviamente svolte lungo lo stesso tracciato. In questo modo per valutare l'influenza di una certa grandezza (che essa sia geometrica oppure che si riferisca a qualsiasi altro parametro del modello matematico) sarà sufficiente effettuare un'altra simulazione oltre quella con la motocicletta in assetto "nominale" e poi confrontare i 2 file risultati.

Una volta cliccato sul pulsante LOAD/COMPARE RESULTS sarà sufficiente scegliere 2 file (attraverso l'utilizzo del tasto CTRL) e nel menù a tendina sarà ancora disponibile una lista di parametri rappresentabili, nella forma, questa volta, di differenza tra la configurazione modificata (la prima che è stata scelta) e quella di default (la seconda).

In questo modo sarà possibile andare a valutare l'impatto in termini di prestazioni della modifica effettuata sulla geometria o sul parametro della motocicletta che è stato cambiato.

Come per l'analisi semplice di un solo file risultati anche per l'analisi comparata vengono rappresentati due grafici distinti, uno in scala colorimetrica che rappresenta lungo il tracciato il valore differenziale della grandezza selezionata, ed un altro che rappresenta in un classico grafico x-y il valore della [grandezza caso modificato - grandezza caso default] in funzione dell'ascissa curvilinea.

Cliccando sul pulsante OPTIMAL TRAJECTORY si può verificare quali sia stata la traiettoria ideale calcolata dal software con indicato il punto del traguardo e le indicazioni ogni 250m lungo il tracciato per entrambe le simulazioni, con la possibilità di verificare se la modifica effettuata alla motocicletta abbia comportato anche la modifica della traiettoria ideale per il massimo sfruttamento delle prestazioni del veicolo.

5.5.1.1 ESEMPIO DI ANALISI DELLE PRESTAZIONI DI UN VEICOLO SUPERBIKE

A titolo esemplificativo verrà di seguito presentato un lavoro svolto grazie al software Xoptima per conto di una famosa casa costruttrice di motoveicoli da competizione.

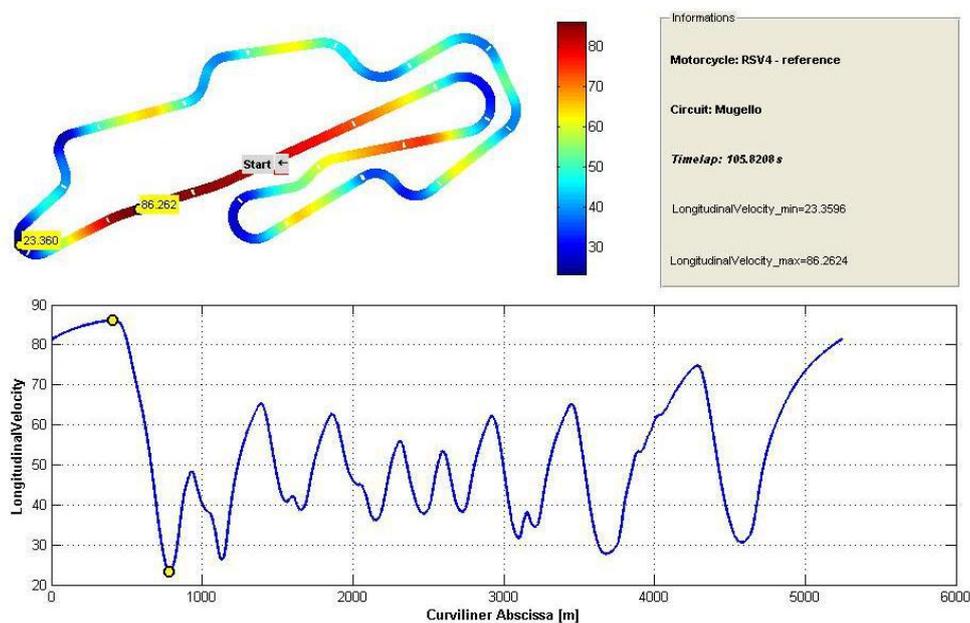
Lo scopo di tale lavoro era andare a valutare quali fossero le modifiche da applicare ad alcuni parametri scelti della motocicletta per avere il massimo miglioramento di prestazioni in termini di tempo sul giro sul circuito del Mugello.

La motocicletta in questione è una supersportiva classe SUPERBIKE di 1000cc di cilindrata.

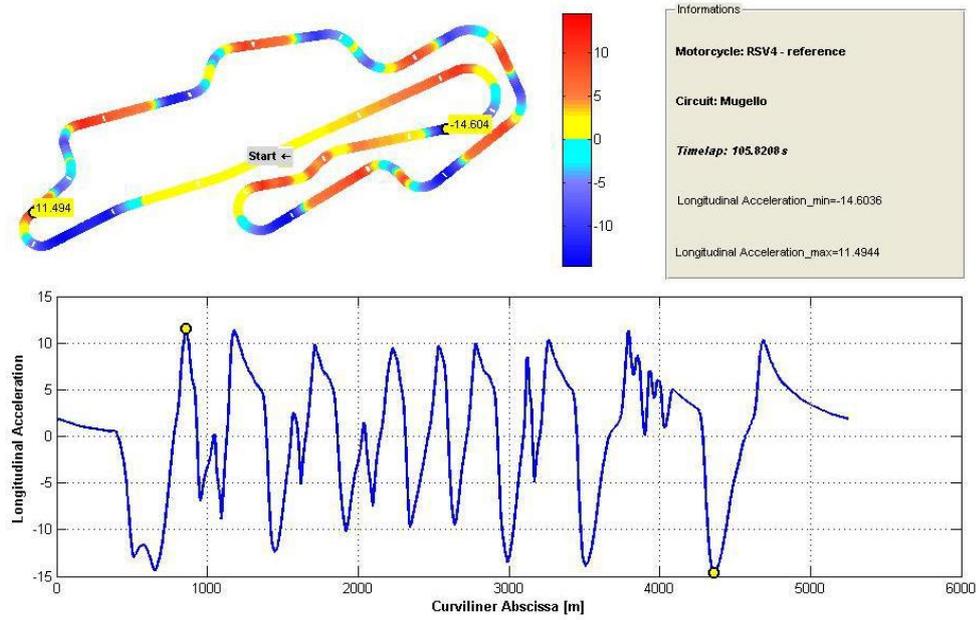
PERFORMANCE OF NOMINAL MOTORCYCLE

Verranno di seguito presentati gli andamenti delle principali grandezze in output della simulazione per la configurazione nominale.

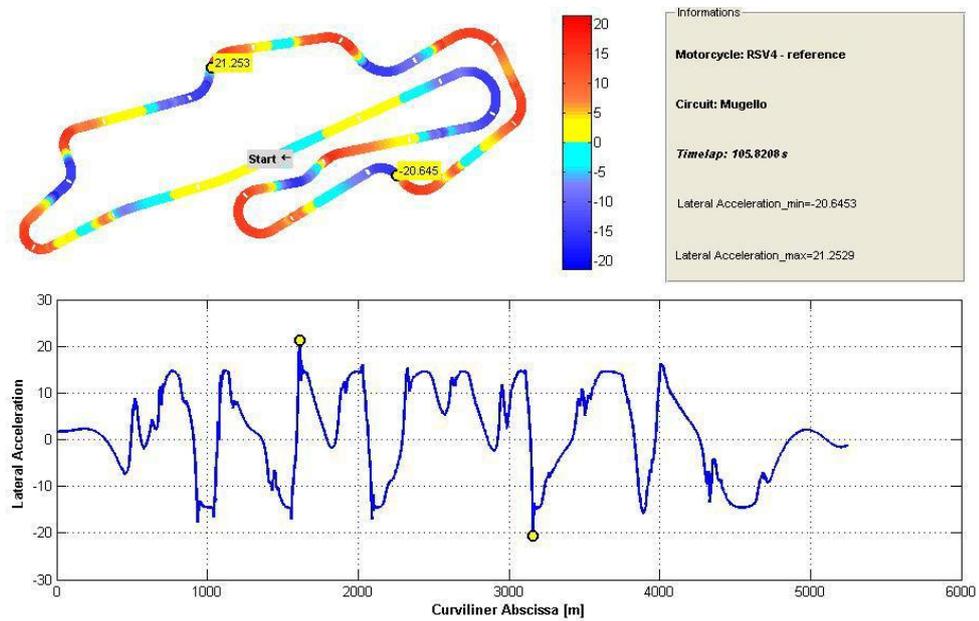
Velocità longitudinale [m/s]



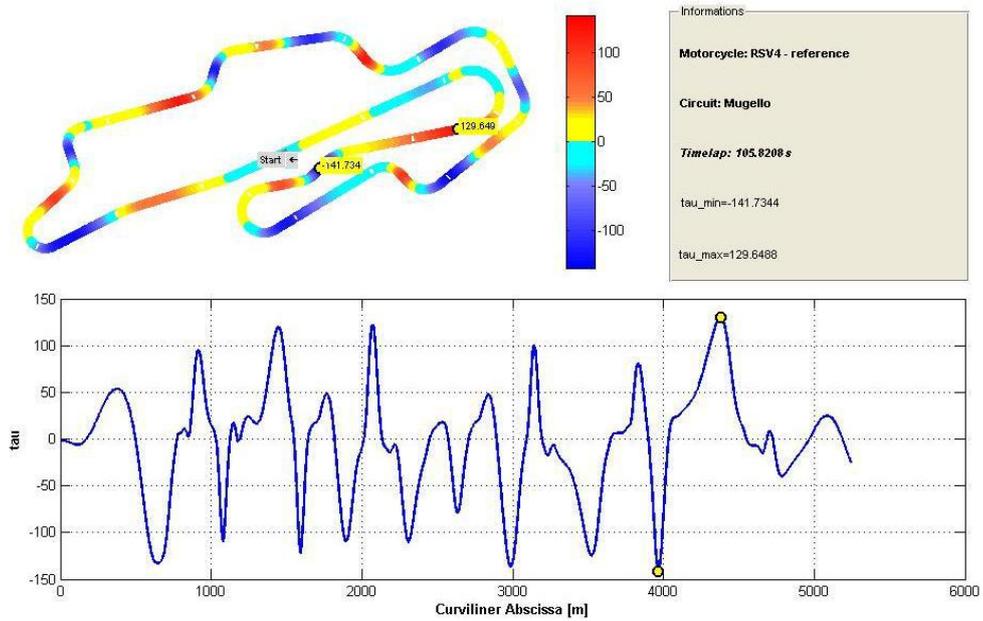
Accelerazione longitudinale [m/s²]



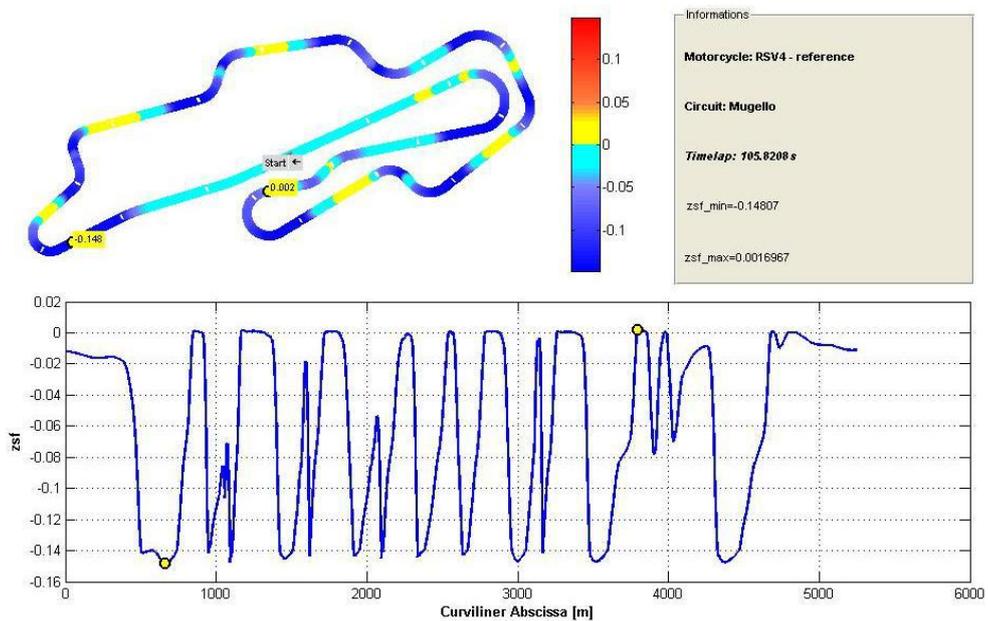
Accelerazione Laterale [m/s²]



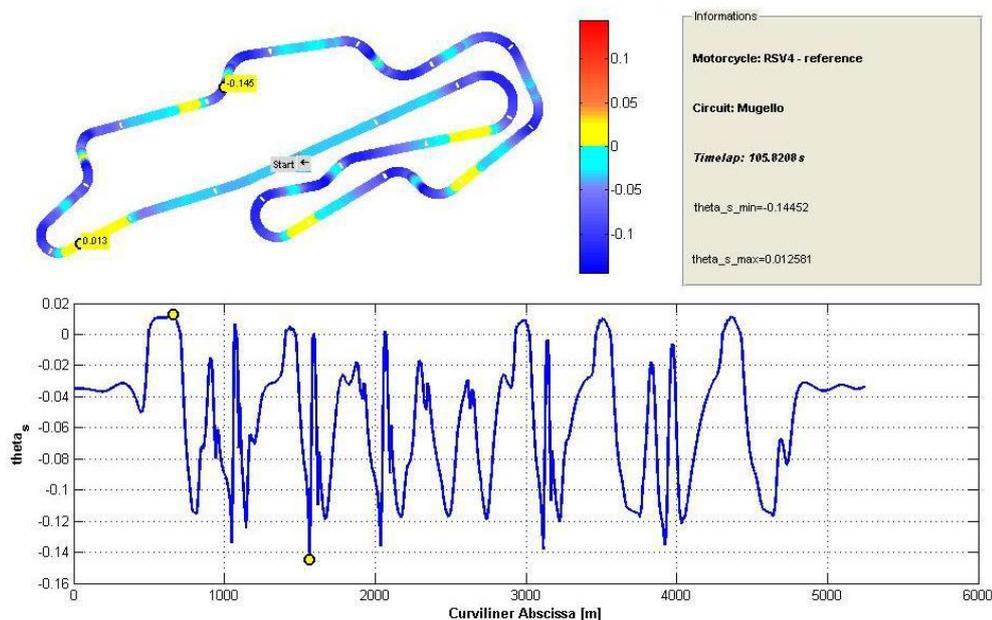
Coppia applicata allo sterzo [Nm]



Compressione lineare del forcellone [m]



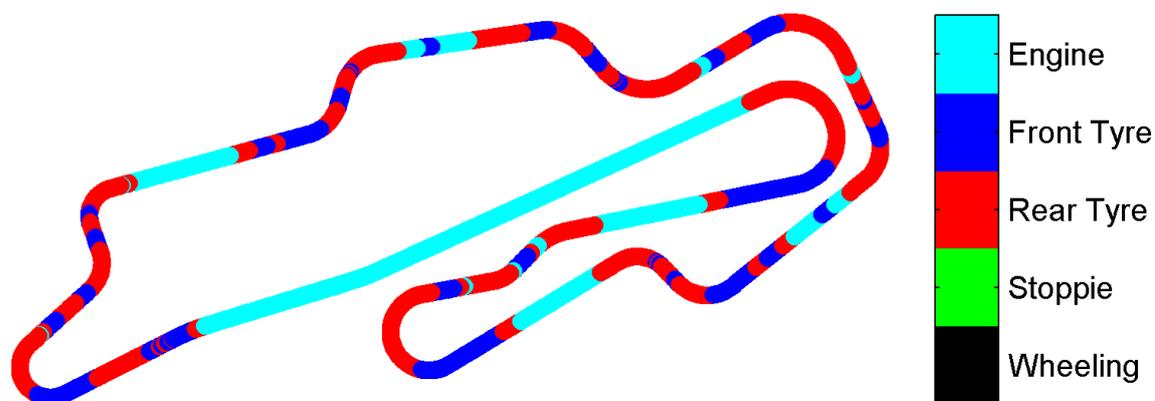
Deformazione angolare della molla equivalente torsionale al forcellone [rad]



Un interessante grafico rappresentabile con Xoptima riguarda il cosiddetto PERFORMANCE LIMITATIONS.

Partendo dal presupposto che la manovra ottima fornisce sempre la manovra migliore percorribile con una data motocicletta lungo il tracciato si può pensare che in ogni tratto del circuito stesso sia raggiunto un limite fisico e/o dinamico che impedisce al solutore di trovare una manovra migliore. Dall'analisi delle funzioni di penalità, in particolare dai valori che esse assumono lungo il circuito si è in grado di definire quale sia il "limite" raggiunto dalla motocicletta per ciascun punto della mesh.

A tale scopo il grafico PERFORMANCE LIMITATIONS esprime con diversi colori lungo il tracciato quale sia il limite raggiunto dalla motocicletta.



Nel caso di riferimento della motocicletta analizzata e simulata lungo il tracciato del Mugello è possibile notare come le performance massime siano principalmente limitate dai pneumatici e dalla potenza massima erogata del motore.

In particolare è possibile apprezzare come il pneumatico anteriore limiti le fasi di entrata in curva a causa del possibile scivolamento del pneumatico stesso durante la massima frenata.

In modo analogo il pneumatico posteriore entra in crisi e limita le prestazioni del veicolo principalmente nelle fasi di uscita alle curve, dove la potenza del motore deve essere trasmessa a terra.

La massima potenza del motore, invece, limita principalmente le prestazioni solo nei lunghi rettilinei ed in altri pochi segmenti del circuito.

Lo scopo dell'analisi era di determinare quali fossero le modifiche necessarie al raggiungimento delle massime prestazioni della motocicletta andando ad agire su:

- Passo;
- Posizione verticale del baricentro;
- Posizione verticale del centro aerodinamico di pressione;
- Coefficiente di drag aerodinamico;
- Potenza del motore.

Di seguito sono riportati i risultati dell'analisi condotta in termini di miglioramenti sul tempo sul giro:

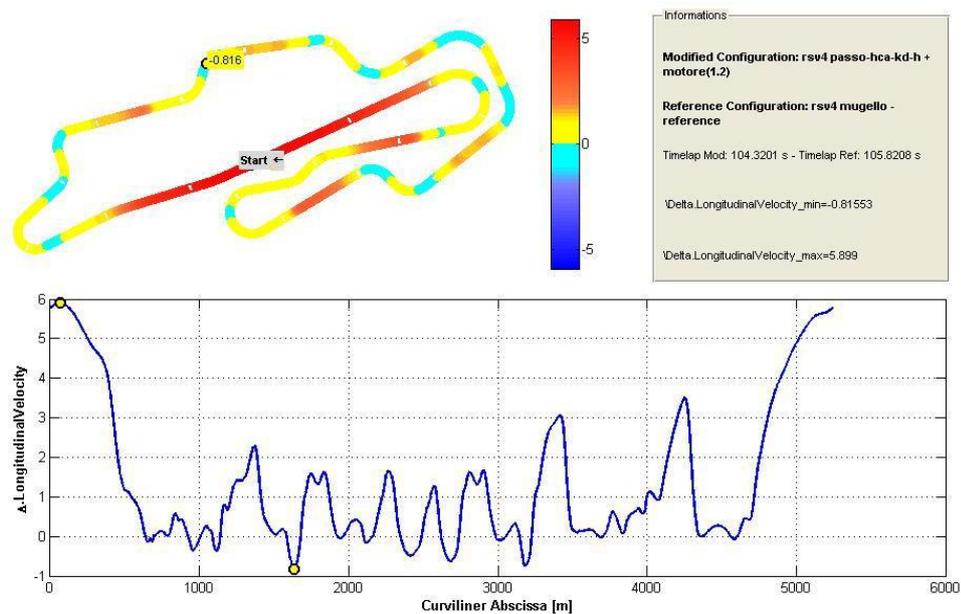
MODIFICHE AL CASO NOMINALE	TIMELAP
Passo (p) + 10%	105.5247s -> 0.2961s
Altezza centro di massa(H) + 4 cm	105.7663s -> 0.0545s
Altezza centro aerodinamico (HCA) -10%	105.8121s -> 0.0087s
Coefficiente drag aerodinamico (kd) -10%	105.5723s -> 0.2485s
Coppia del motore +10%	105.2049s -> 0.6159s
Tutte le modifiche con motore originale	105.1749s -> 0.6459s
Tutte le modifiche con coppia motore +10%	104.6338s -> 1.1870s
Tutte le modifiche con coppia motore +20% (MOD CASE)	104.3201s -> 1.5007s

Come migliore prestazione si può registrare un abbassamento del tempo sul giro di circa 1.5s (pari a circa il 10%) agendo appunto su:

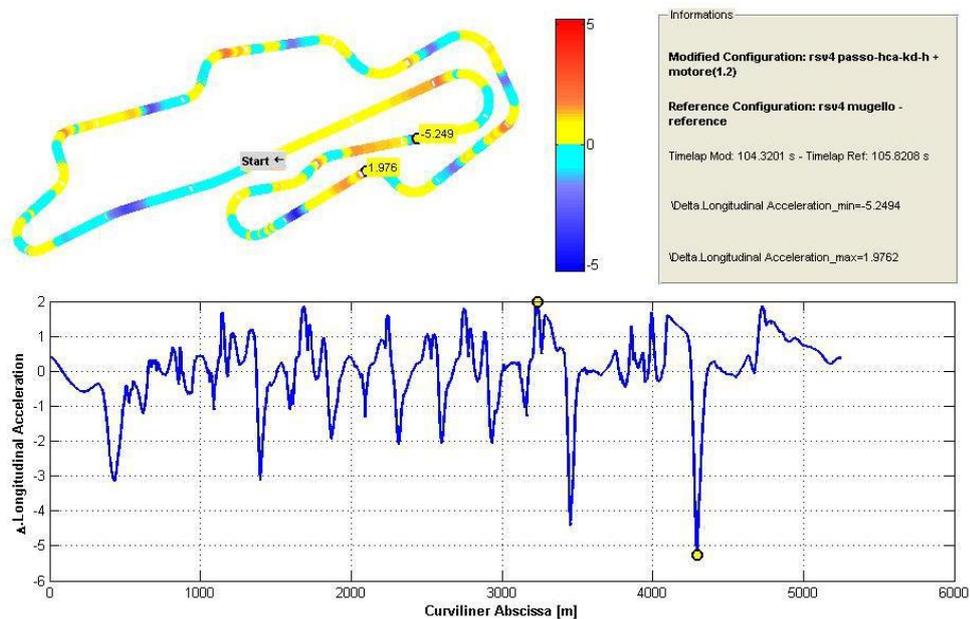
- avanzamento e innalzamento del centro di massa del sistema;
- Abbassamento del centro aerodinamico e abbassamento del coefficiente di drag aerodinamico;
- Aumento della coppia del motore del 20% (valori superiori risultano influenti).

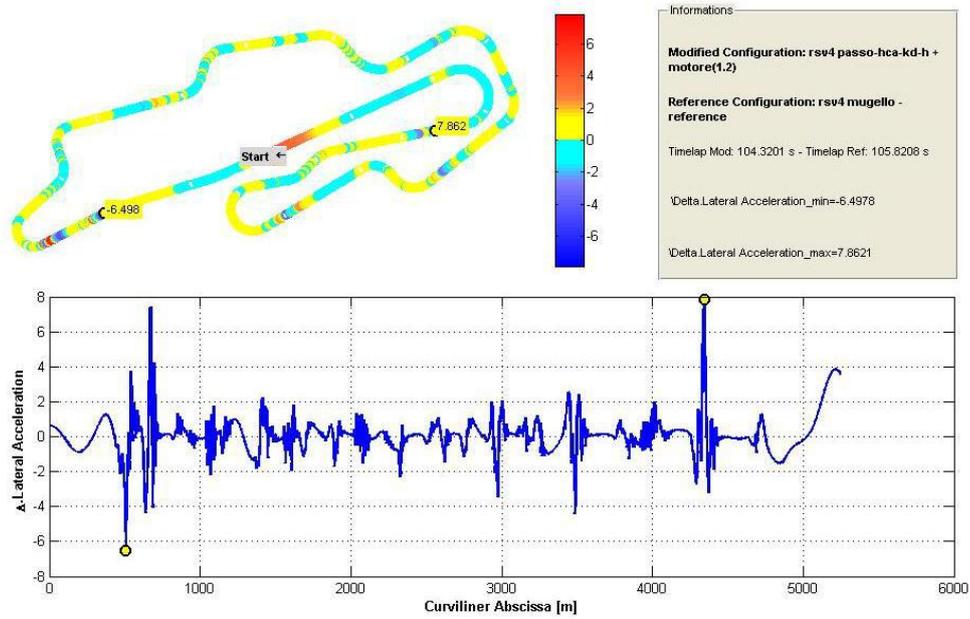
I grafici di confronto tra il caso nominale e il caso dove si registra il miglioramento più significativo (MOD. CASE) sono riportati in seguito. Valori positivi della grandezza significano un guadagno rispetto la configurazione nominale, valori negativi significano altresì una perdita.

Velocità longitudinale [m/s]

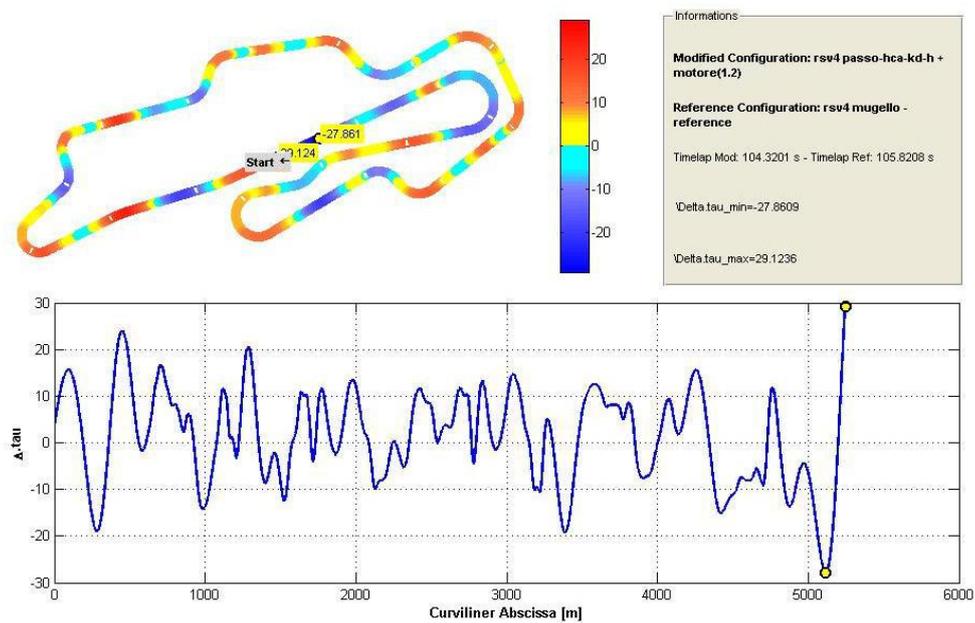


Accelerazione longitudinale [m/s²]

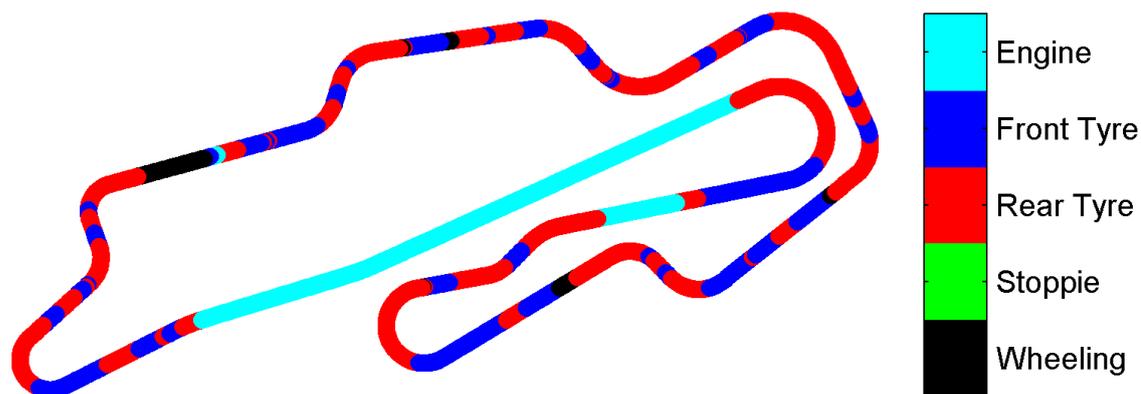


Accelerazione laterale [m/s²]

Coppia di sterzo [Nm]



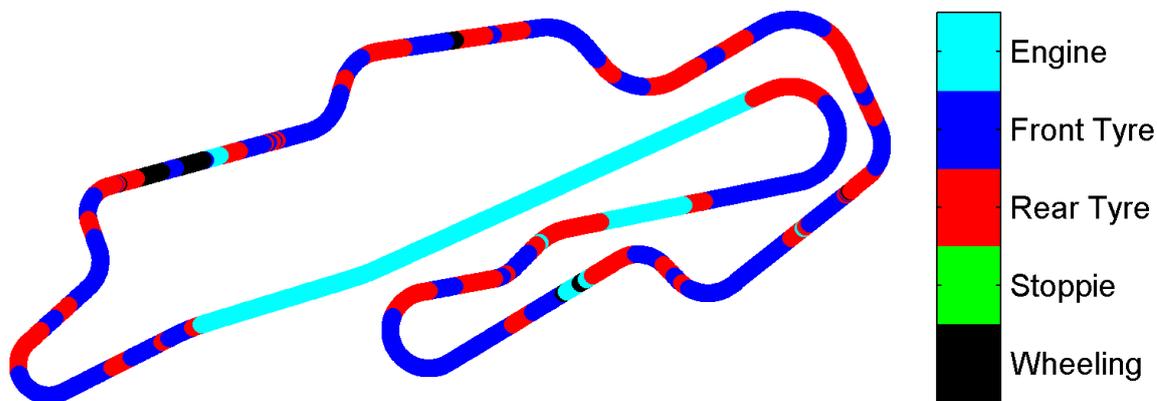
Per quanto riguarda il grafico relativo alle PERFORMANCE LIMITATIONS:



I pneumatici anteriori e posteriori sono ancora una volta i responsabili del limite alle massime prestazioni per quanto riguarda le fasi rispettivamente di entrata ed uscita dalle curve, così come accadeva per il caso nominale.

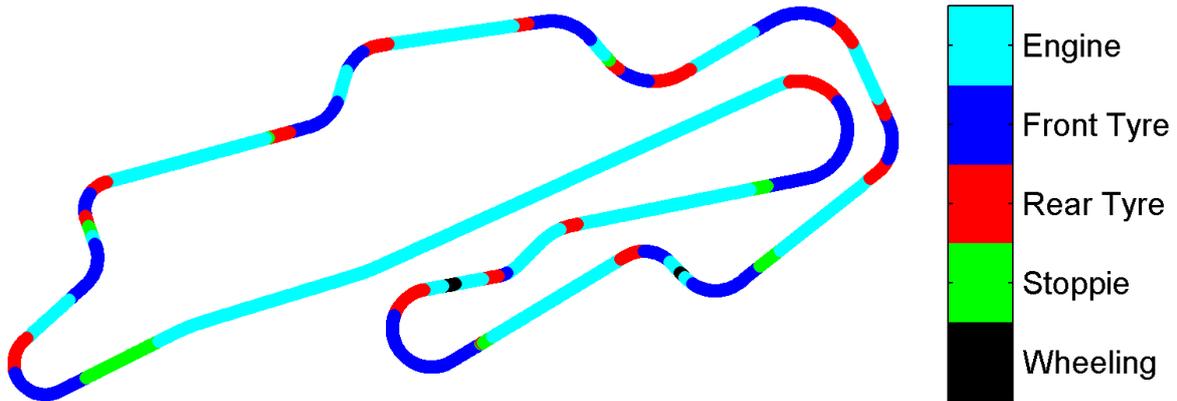
In questa configurazione, però, la massima potenza del motore interviene come fattore limitante principale solamente lungo i tratti più lunghi rettilinei.

L'aver aumentato la potenza del motore, però crea l'insorgere del fenomeno del *Wheeling* (impennamento) in alcuni tratti del circuito.

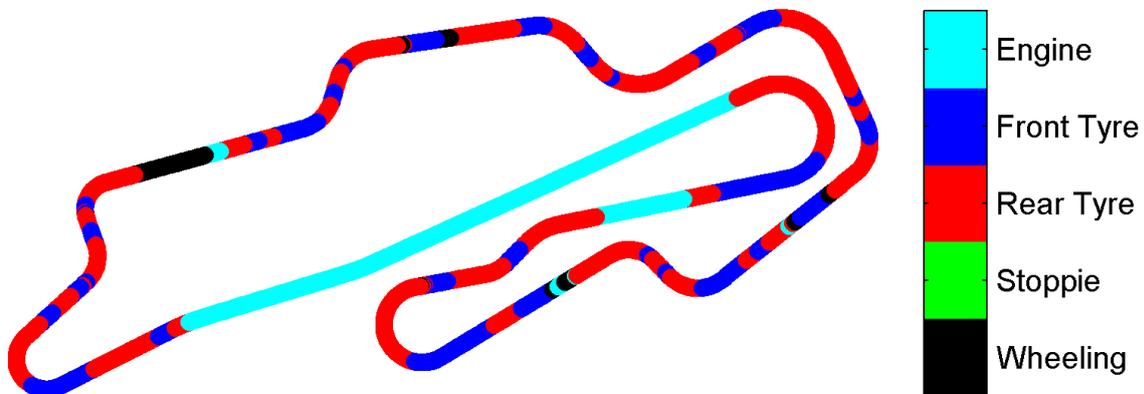


In questa simulazione si è provato ad andare a aumentare il coefficiente di aderenza laterale del pneumatico posteriore, passando da un valore di 1.6 ad un valore di 1.9.

La motocicletta in questo caso nelle fasi di uscita dalle curve è in grado di accelerare in un modo più efficiente, infatti è possibile notare come ora sia il pneumatico anteriore a limitare il veicolo nelle fasi di percorrenza delle curve.

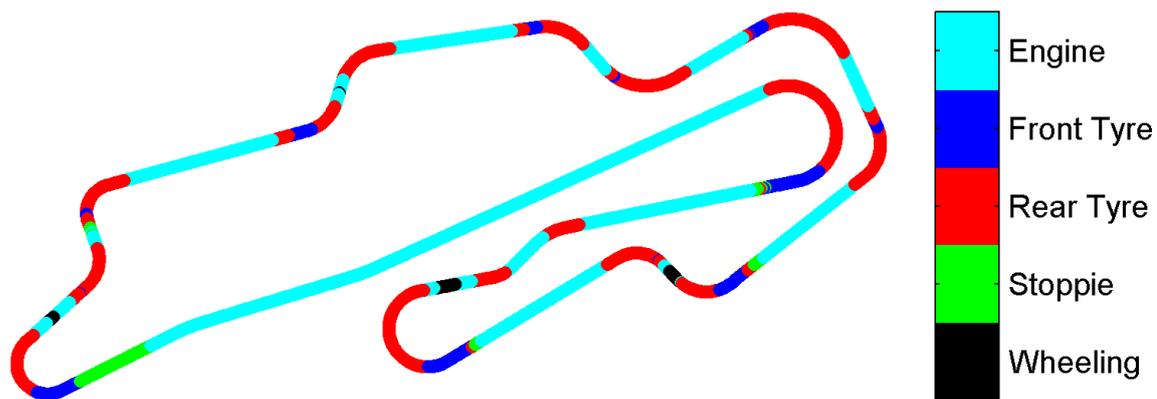


In quest'altra simulazione si è andati ad aumentare i coefficienti longitudinale e laterale di aderenza del pneumatico posteriore passando ancora una volta da un valore di 1.6 ad un valore di 1.9. Il veicolo ora è in grado di accelerare molto efficientemente nelle fasi di uscita alle curve e infatti si manifesta il fenomeno dello *Stoppie* ovvero il fenomeno del rovesciamento in corrispondenza delle frenate più brusche, a causa delle maggiori velocità che sono raggiunte lungo i rettilinei.



In questa simulazione si è andati ad aumentare i coefficienti di aderenza longitudinale e laterale del pneumatico anteriore passando da un valore di 1.6 ad un valore di 1.9.

La motocicletta nelle fasi entrata in curva, *ra*, è in grado di frenare con più efficacia e ciò è visibile dal fatto che *ra* il pneumatico posteriore è il maggiore fattore limitante alle prestazioni della nostra motocicletta.



In questa simulazione entrambi i pneumatici sono stati migliorati in termini di coefficiente di aderenza sia in direzione longitudinale che in direzione laterale, passando ancora una volta, da un coefficiente di 1.6 ad un coefficiente di 1.9.

È possibile notare come appaiano al contempo i fenomeni di *Stoppie* in corrispondenza alle frenate più importanti e di *Wheeling* in uscita dalle curve più lente.

CAPITOLO 6

APPLICAZIONE DELLA MANOVRA OTTIMA PER L'OTTIMIZZAZIONE DEL GEARBOX

Lo scopo di quest'analisi è di migliorare le prestazioni di un motoveicolo da competizione attraverso l'ottimizzazione del GEARBOX, in altre parole i rapporti di velocità offerti dalla scatola del cambio.

Si vuole andare a dimostrare come la Manovra Ottima, e in particolare il software Xoptima, sia un utile strumento per l'ottimizzazione dei motocicli anche in ambito racing e direttamente utilizzabile anche nei box.

Si è preso in considerazione un motoveicolo Superbike di 1000cc di cilindrata e due piste molto diverse per le loro caratteristiche, vale a dire un circuito molto veloce e uno prevalentemente lento.

È stata operata un'analisi di confronto tra i dati telemetrici derivanti dalla strumentazione montata a bordo della motocicletta e i risultati numerici offerti dalle simulazioni con Xoptima, giustificandone, ancora una volta, la sua piena applicazione.

Infine si è proceduto con un'ottimizzazione dei rapporti del cambio, tenendo sempre come obiettivo la minimizzazione del tempo sul giro, ovvero il *Timelap*.

6.1 - INTRODUZIONE

La progettazione di una nuova motocicletta da corsa e la ricerca delle massime prestazioni è un processo lungo che inizia con la definizione di specifiche tecniche che possono riguardare la massima velocità, la ricerca di valori ottimali per quanto riguarda specifici indici prestazionali, il tempo sul giro, ecc. e finisce con la prova del veicolo reale.

Il processo di progettazione procede attraverso molte fasi diverse ma il test su strada di un prototipo funzionante è tra le più importanti. Molti parametri cinematici e dinamici sono monitorati e controllati per verificarne l'effettivo valore rispetto alle specifiche iniziali, e il LapTime è un indice di efficienza comune. Saranno necessarie ulteriori modifiche al prototipo e prove successive, e al fine di orientare lo sviluppo del veicolo sono di fondamentale importanza le opinioni e le considerazioni offerte dai collaudatori grazie alla loro esperienza. Tuttavia, test su strada sono molto costosi in termini di tempo e di risorse.

Risulta chiara la convenienza di utilizzare simulazioni numeriche per identificare un sottoinsieme di parametri critici e pianificarne il corretto modo per apportarne le modifiche su cui lavorare. Le simulazioni numeriche sono riconosciute come uno strumento molto utile, a condizione che il modello matematico del veicolo sia ben convalidato e sia disponibile un modello di pilota.

D'altronde, come nei test reali dove l'abilità di guida del pilota e soprattutto la sensibilità del collaudatore influenzano le decisioni dell'ingegnere progettista, anche il pilota virtuale e il grado di accuratezza del modello della motocicletta nelle simulazioni possono alterare i risultati dell'ottimizzazione. In questo senso un "pilota ideale" dovrebbe essere sempre in grado di guidare il veicolo alle sue massime prestazioni, adattando il suo stile di guida sia alla diversa dinamica del veicolo (componenti diversi, impostazioni diverse, ecc.) e alle diverse situazioni ambientali (geometria variabile, aderenza, ecc.).

6.2 - ANALISI DEL GEARBOX

Si andrà ora ad analizzare l'importanza dei rapporti del cambio e la loro dipendenza dalle caratteristiche specifiche del circuito, in particolare sul numero e sul tipo di curve e di rettilinei. I vari LapTime nelle simulazioni della moto presa in esame sono calcolati e successivamente messi a confronto con i dati della telemetria, al fine di dimostrare la fedeltà delle manovre simulate. Tutti i parametri della moto che sono specificati nel modello sono stati oggetto di precise misure in laboratorio e documentazione tecnica. Ad esempio sono state esaminate le proprietà del motore, le caratteristiche inerziali e geometriche della moto, le curve caratteristiche e le proprietà dei pneumatici.

6.3 - CARATTERIZZAZIONE DEL PROPULSORE

All'interno di Xoptima il motore è caratterizzato attraverso la definizione della curva di coppia in funzione del numero di giri RPM a piena farfalla e i rapporti di velocità della trasmissione sono definiti come:

$$R = \frac{z_{condotto}}{z_{conduttore}}$$

Dove:

$z_{condotto}$ rappresenta il numero di denti dell'ingranaggio condotto, $z_{conduttore}$ rappresenta il numero di denti dell'ingranaggio conduttore.

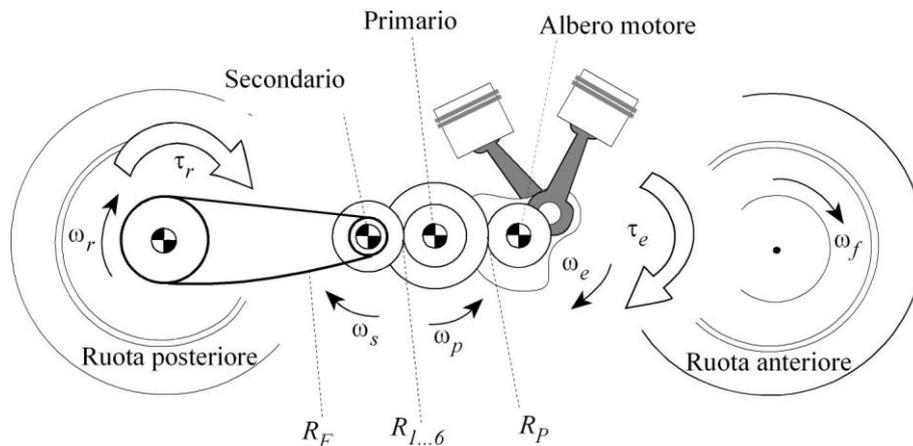


Figura 1: schema di trasmissione (albero motore - albero primario - dell'albero secondario - ruota posteriore)

Nella tabella che segue, sono elencati i rapporti di velocità della trasmissione in termini di rapporto primario (R_P tra albero a gomiti del motore e albero primario del cambio), rapporti del cambio (R_1, R_2, \dots, R_6) e del rapporto finale (R_F tra l'albero secondario del cambio e la ruota posteriore).

Rapporti del cambio sono riportati nella loro configurazione di riferimento. È pratica comune regolare i rapporti di trasmissione per un dato circuito basandosi sui giri di prova e sui feedback forniti dal pilota.

Velocity Ratio	$R = \frac{Z_{driven}}{Z_{drive}}$
R_p (Primary)	73/47 (1.553:1)
R_1 (1 st gear)	41/18 (2.278:1)
R_2 (2 nd gear)	40/19 (2.105:1)
R_3 (3 rd gear)	39/20 (1.950:1)
R_4 (4 th gear)	37/22 (1.682:1)
R_5 (5 th gear)	36/23 (1.565:1)
R_6 (6 th gear)	34/25 (1.360:1)
R_F (Final)	42/17 (2.471:1)

Tabella 1: rapporti di velocità di riferimento

La Figura 2 mostra la guida della coppia massima disponibile alla ruota posteriore del veicolo a velocità diverse per ogni rapporto di trasmissione, secondo le espressioni:

$$\begin{cases} \tau_r = \tau_e \cdot (R_p R_i R_F) \\ \omega_r = \frac{\omega_e}{(R_p R_i R_F)} \end{cases} \quad i = 1 \dots 6$$

La linea grigia rappresenta l'involuppo della spinta massima in termini di coppia (cioè a tutto gas), disponibili presso la ruota posteriore in qualsiasi velocità di avanzamento.

Selezionando il rapporto di trasmissione della corretta Xoptima calcola il massimo valore di coppia propulsiva disponibile alla ruota posteriore in base alla velocità di avanzamento della moto e le caratteristiche del motore.

Naturalmente la massima della forza di spinta disponibile non è sempre utilizzata dal pilota virtuale perché si può verificare qualche limitazione.

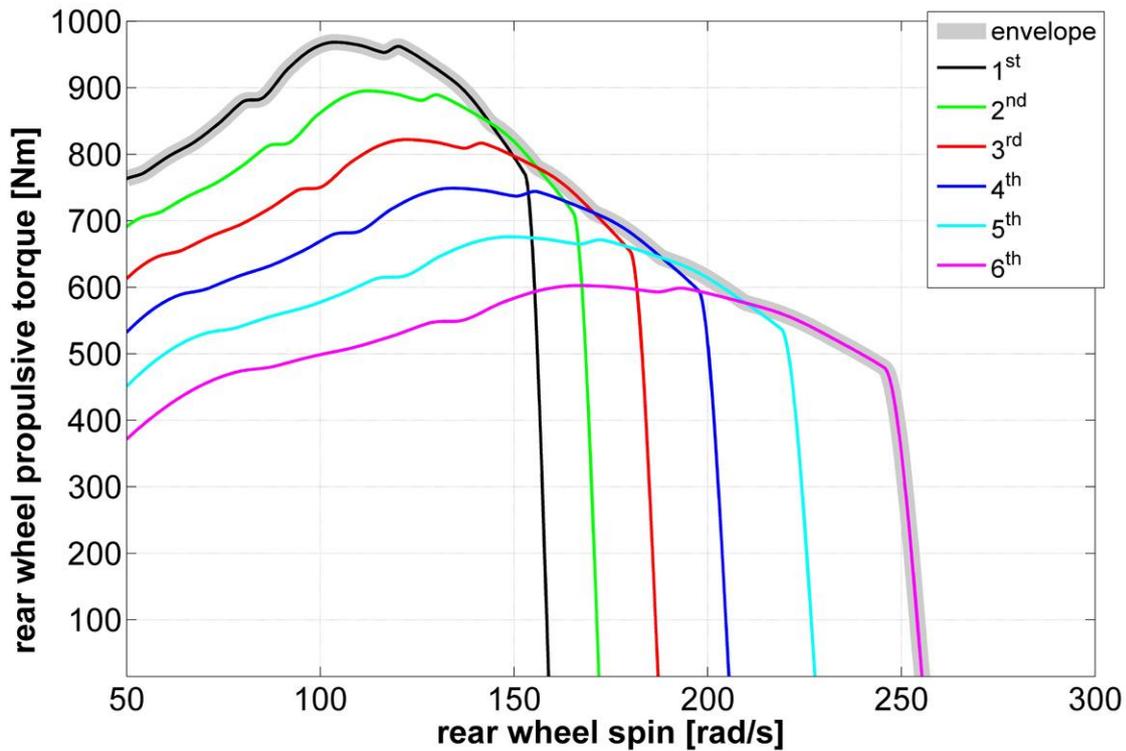


Figura 2: la coppia massima disponibile a spinta della ruota posteriore ("Cambio di riferimento").

Nei prossimi due paragrafi è esaminato il comportamento del pilota virtuale sul cambio attraverso la simulazione di un intero giro di pista.

L'analisi è effettuata in due circuiti molto diversi, al fine di indagare il rapporto tra le caratteristiche del tracciato e la messa a punto del cambio.

6.4 - TRACCIATO VELOCE

Verrà qui analizzato il circuito del Mugello (Scarperia, Firenze, Italia) il quale rappresenta uno dei più lunghi circuiti moderni (5,245 km), caratterizzato da chicanes ad alta velocità, un mix curve veloci e lente, e un lunghissimo rettilineo (1,141 km). Il Mugello è una pista molto tecnica, ma un corretto set-up della trasmissione è fondamentale al fine di sfruttare al massimo le prestazioni del motore lungo il rettilineo, dal momento che vengono percorsi circa 950 m a tutto gas. La Figura 3 mostra il risultato della simulazione su questo circuito evidenziando la traiettoria ottimale e corrispondente a un Laptime di 116,169 s.

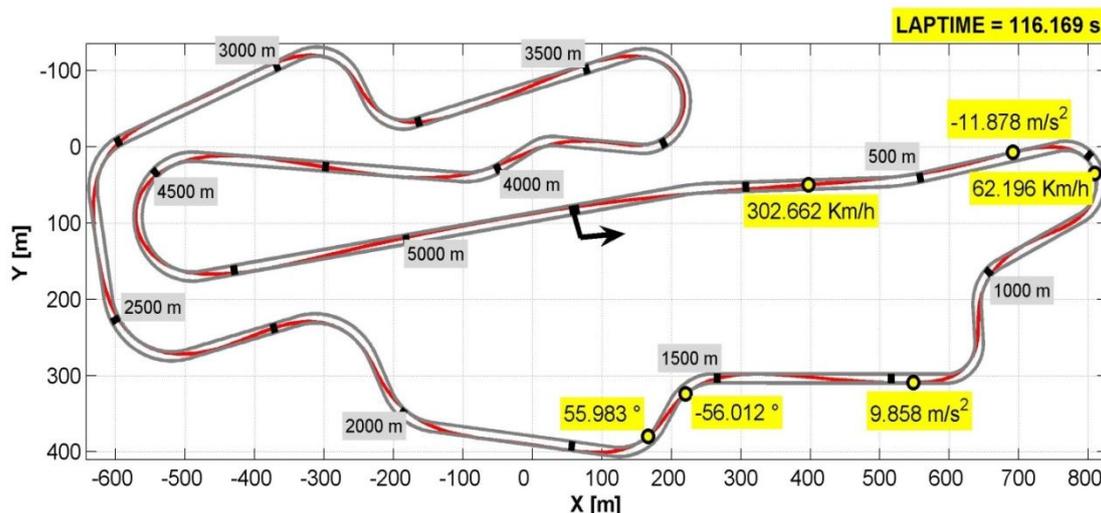


Figura 3: Tempo sul giro sul circuito del Mugello.

La velocità massima (302,662 km / h) è raggiunta al termine del rettilineo ed è seguita dalla frenata massima ($-11,878 \text{ m} / \text{s}^2$) e dalla curva dove si raggiunge la velocità minima (62,196 km / h).

La massima accelerazione registrata è invece di $9,858 \text{ m} / \text{s}^2$ si è registrata all'uscita della successiva curva lenta, mentre gli angoli di rollio massimi (circa 56 gradi) si verificano nella chicane ad alta velocità che segue.

6.4.1 - CONFRONTO CON LA TELEMETRIA

In questa sezione, al fine di verificare le basi teoriche e sui risultati del Metodo della Manovra Ottima, è illustrato il confronto con telemetria. I dati sono stati acquisiti da un'unità di misura inerziale (tre accelerometri e tre girometri, con integrato un localizzatore GPS).

Figura 4 mette a confronto la velocità di avanzamento, l'accelerazione longitudinale e l'angolo di rollio per i canali sperimentali con quelli calcolati. L'accordo tra i due è abbastanza buono, e dimostra che Xoptima è in grado di riprodurre manovre racing realistiche in una delle piste veloci più rappresentative.

È pertanto utilizzabile questo metodo per l'analisi che segue sull'ottimizzazione del cambio.

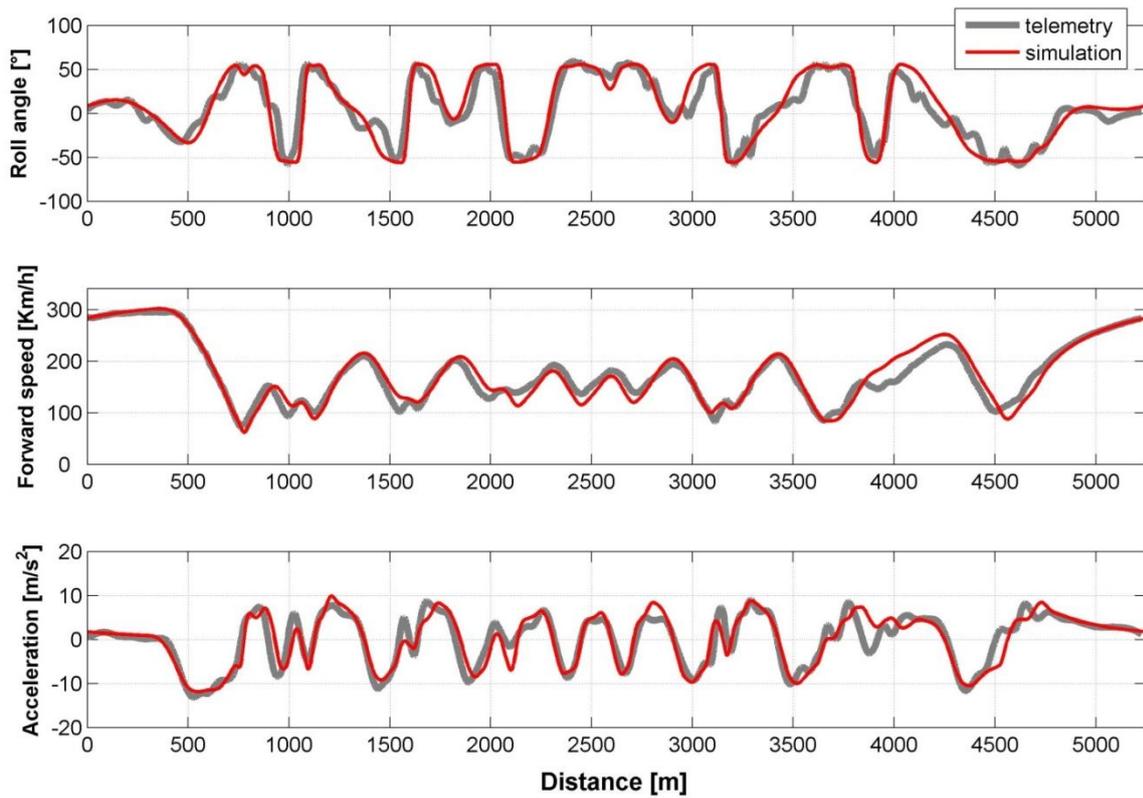


Figura 4: Confronto tra simulazione e telemetria per il circuito del Mugello.

6.4.2 - ANALISI DEI RISULTATI DELLA SIMULAZIONE

Figura 5 sovrappone la coppia di spinta effettivamente utilizzata dal pilota virtuale lungo il tracciato del Mugello alla coppia di spinta massima erogabile dal motore già rappresentata nella Figura 2.

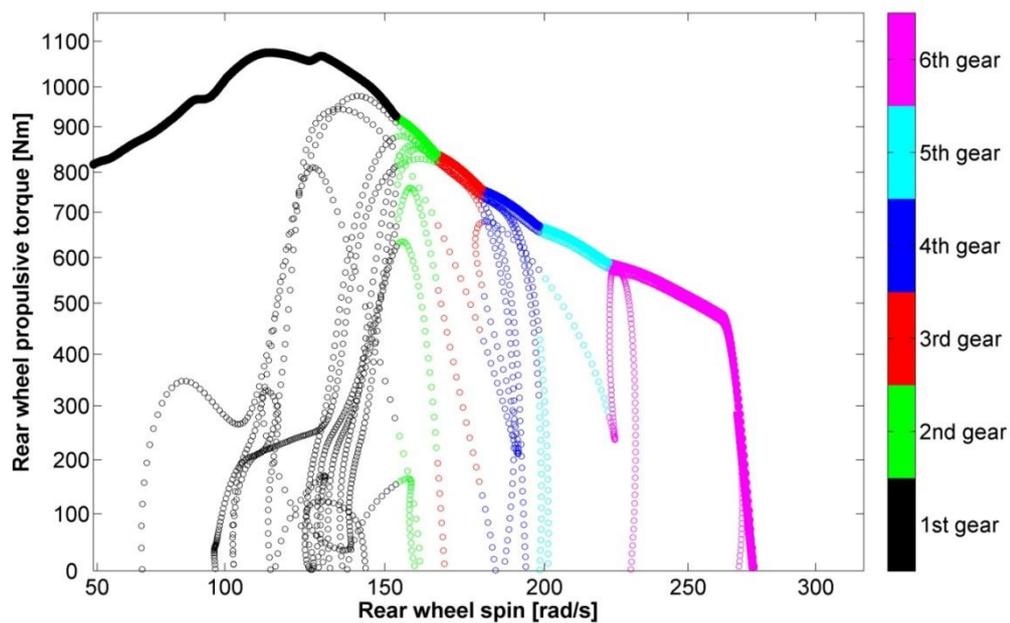


Figura 5: Coppia di spinta utilizzata a confronto con la massima disponibile.

Confrontando la coppia effettivamente utilizzata (Cerchi) con la coppia massima disponibile (linea continua), è possibile distinguere due diverse fasce di velocità. Quella inferiore, che comprende fondamentalmente la prima marcia, e caratterizzata dal fatto che la coppia di spinta disponibile supera notevolmente quella utilizzata. La fascia di velocità più elevata, invece, coinvolge le altre marce dalla seconda alla sesta, ed è caratterizzata dal fatto che la coppia raggiunge la massima disponibile in diverse fasi.

Se questo limite fosse stato più alto, ci sarebbe potuto essere potenzialmente un vantaggio di prestazioni in termini di tempo sul giro.

Si noti inoltre che ci potrebbe essere un vantaggio tangibile sulla velocità massima se la sesta marcia fosse più alta, a causa del lungo rettilineo che caratterizza il circuito del Mugello.

6.5 - CIRCUITO LENTO

A differenza del Mugello, il circuito di Adria (Adria, Rovigo, Italia) è uno dei circuiti moderni più brevi (2,702 km). È caratterizzato da molti brevi rettilinei (circa 0,5 km), seguiti da una sequenza di curve lente a raggio variabile.

Ad una motocicletta in questo tracciato sono richiesti rapidi cambi di direzione, brusche frenate e una buona maneggevolezza per eseguire le manovre. Il giusto set-up del gearbox è fondamentale al fine di massimizzare le prestazioni del motore in fase di accelerazione in uscita dalle numerose curve.

Figura 6 illustra i risultati della simulazione, compresa la traiettoria ottimale corrispondente a un tempo sul giro di 82,986 s.

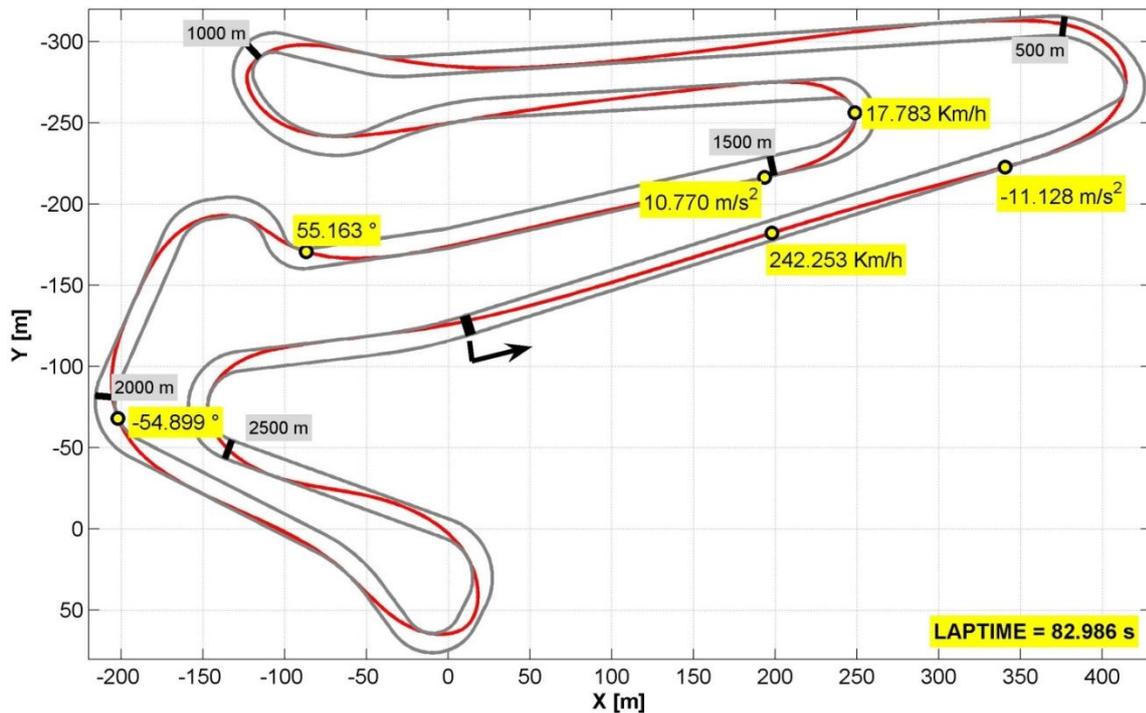


Figura 6: Simulazione sul circuito di Adria.

La massima velocità raggiunta è di 242,253 km/h, ed è notevolmente inferiore a quella registrata al Mugello. Questa è seguita dalla massima decelerazione ($-11,128 \text{ m/s}^2$), mentre l'accelerazione massima è di $10,770 \text{ m/s}^2$ registrata all'uscita della curva più lenta (17,783 km/h, molto più lenta rispetto al Mugello). Gli angoli di rollio massimo (circa 55 gradi) si verificano in una chicane ad alta velocità e in una curva ad alta velocità.

6.5.1 CONFRONTO CON LA TELEMETRIA

Il confronto tra la velocità di avanzamento, l'accelerazione longitudinale e l'angolo di rollio per i canali sperimentali e i risultati della simulazione è illustrato in Figura 7. L'accordo è buono, e dimostra che il metodo della manovra ottima offra risultati pienamente attendibili anche in uno dei circuiti più lenti e tecnicamente impegnativi come quello di Adria.

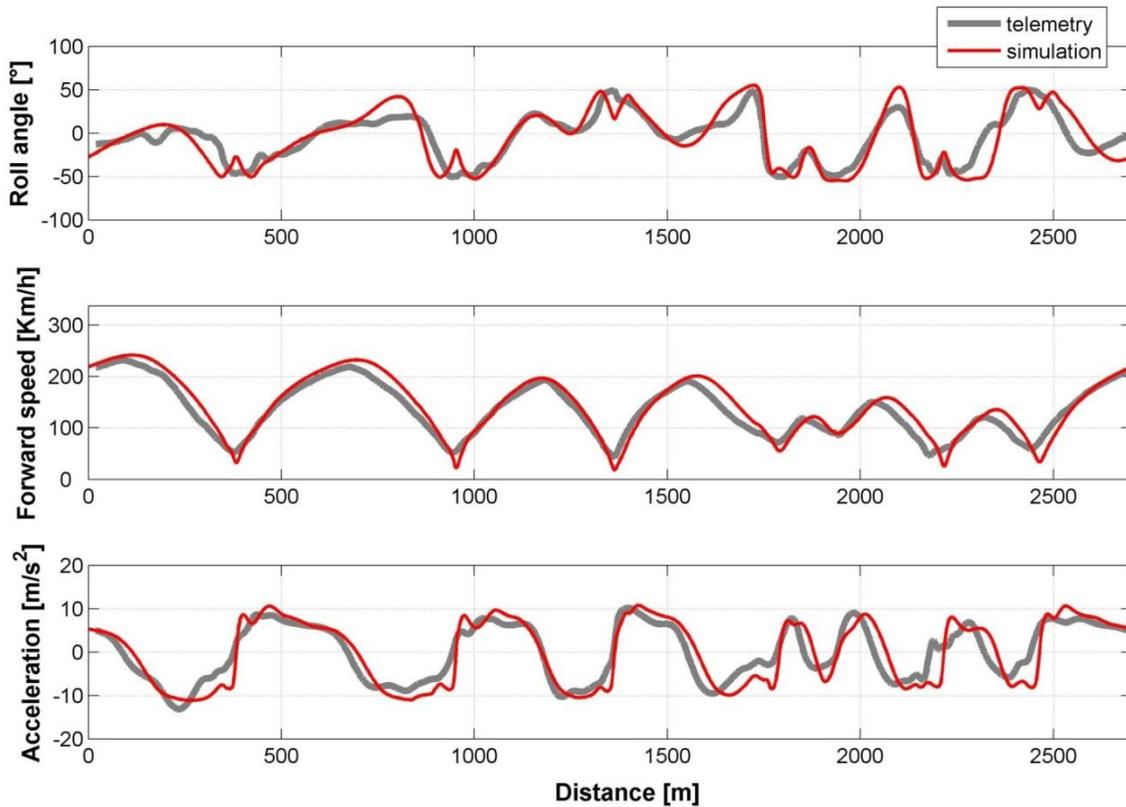


Figura 7: Confronto tra simulazione e telemetria per il circuito di Adria.

6.5.2 ANALISI DEI RISULTATI DELLA SIMULAZIONE

La figura seguente sovrappone la coppia di spinta utilizzata dal pilota virtuale con quella massima disponibile di Fig2.

Confrontando la coppia impiegata (cerchi) con la coppia massima disponibile (linea continua), è possibile distinguere tre diverse fasce di velocità.

La più bassa, che coinvolge la prima marcia, è caratterizzata dal fatto che la coppia di spinta disponibile supera leggermente quella utilizzata. La fascia intermedia, che coinvolge la 2^a, 3^a, 4^a e 5^a marcia, è caratterizzata dal fatto che in alcune fasi della coppia di spinta utilizzata raggiunge il limite massimo disponibile. Se questo limite fosse stato superiore, ci sarebbe stato probabilmente un vantaggio tangibile in termini di prestazioni in tempo sul giro, a causa della maggiore capacità di accelerazione.

Infine, l'intervallo massimo di velocità, che coinvolge la sesta marcia, è appena raggiunto a causa del brevissimo rettilineo che caratterizza il circuito.

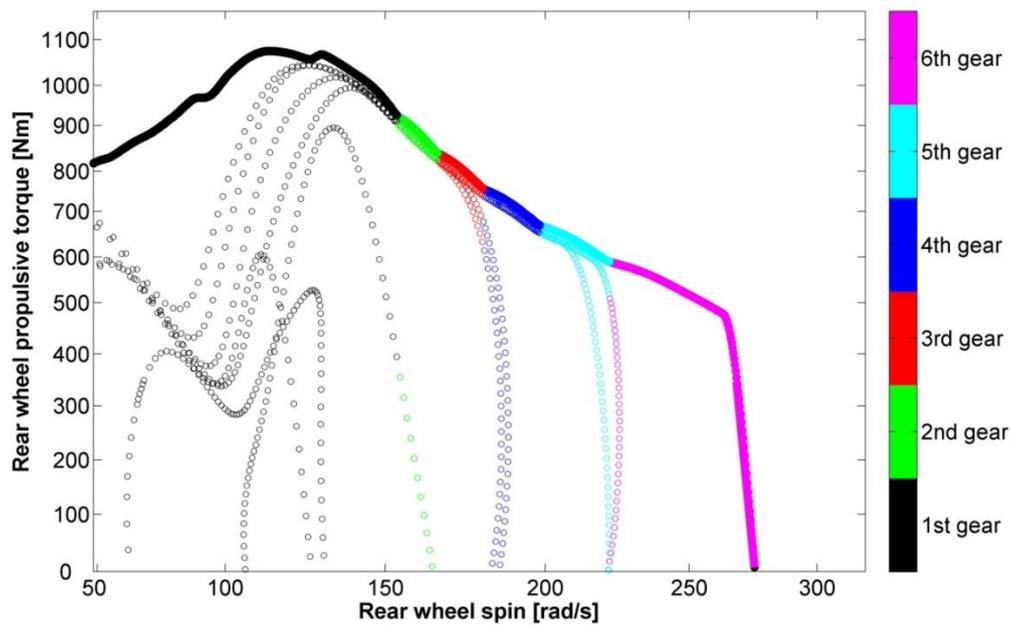


Figura 8: coppia di spinta utilizzata in relazione alla massima disponibile per il circuito di Adria.

6.6 - OTTIMIZZAZIONE DEI RAPPROTI DI VELOCITA' DEL CAMBIO (GEARBOX)

In questo paragrafo sarà affrontata l'ottimizzazione del cambio applicando il metodo della Manovra Ottima. A partire dal caso di riferimento simulato in precedenza, si cercherà di ottenere una nuova configurazione per il gearbox che riduca al minimo il Laptime. Inoltre si procederà con ulteriori analisi per dimostrare gli effettivi miglioramenti sulle prestazioni.

6.6.1 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO

Da un punto di vista matematico, la messa a punto del cambio è formulata come un problema di minimizzazione. I termini sono costituiti da:

- 1) Il risultato da ridurre al minimo, vale a dire il tempo sul giro su un circuito (variabile dipendente);
- 2) Il variare dei parametri, vale a dire i rapporti del cambio R_1, R_2, \dots, R_6 (Variabili indipendenti);
- 3) la funzione f relativa che lega la variabile dipendente alle variabili indipendenti, cioè il tempo sul giro calcolato dalla simulazione con la manovra ottima:

$$\text{Lap Time} = f(R_1, R_2, \dots, R_6)$$
- 4) Il metodo matematico adottato per ridurre al minimo la funzione f .

Per quanto riguarda i parametri da variare, cioè i rapporti del cambio R_1, R_2, \dots, R_6 sono state prese in considerazione le seguenti linee guida.

La distanza (I) tra gli alberi della scatola del cambio (Figura 9) è correlato al numero di denti z di ogni coppia d'ingranaggi che interagiscono attraverso:

$$I = \frac{D_{drive} + D_{driven}}{2} = \frac{m}{2} (z_{drive} + z_{driven})$$

Dove m è il modulo del cambio.

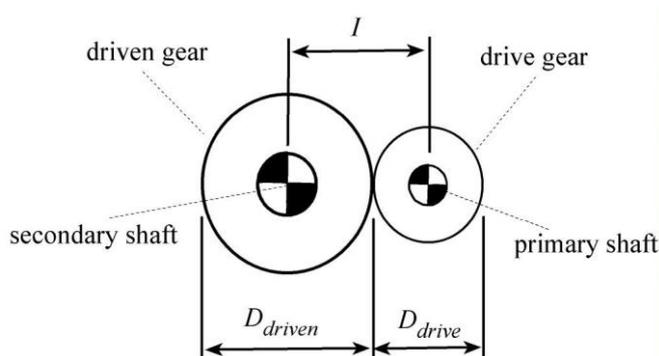


Figura 9: schema geometrico di due ingranaggi interagenti.

Il primo rapporto di trasmissione non è incluso nell'ottimizzazione, perché la simulazione riguarda un "giro lanciato", mentre la moto nella realtà parte a velocità zero, effettua una "partenza da fermo". Pertanto il primo rapporto del cambio è mantenuto uguale a quella della moto attuale. Inoltre il modulo è stato assunto lo stesso per ogni coppia d'ingranaggi interagenti. Di conseguenza, secondo la Tabella 1, la precedente equazione può essere trasformata in

$$z_{drive} + z_{driven} = \frac{2I}{m} = 59$$

che limita il numero dei denti di ciascuna coppia d'ingranaggi interagenti tra loro dalla seconda alla sesta marcia come visibile nella seguente Figura:

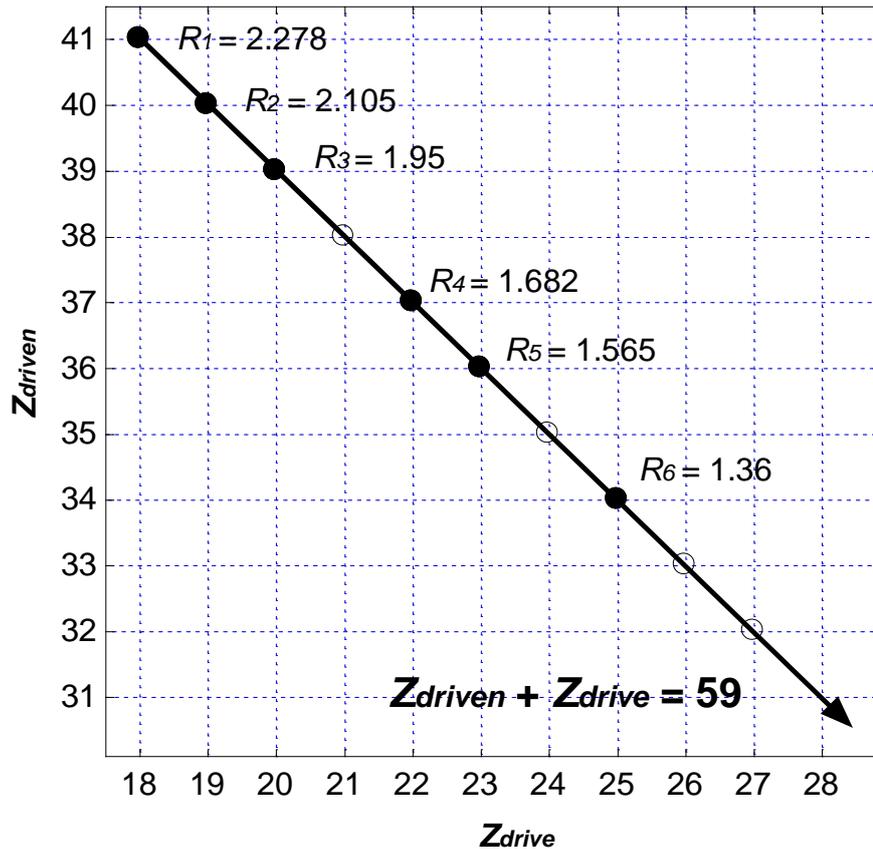


Figura 10: Campo di variazione dalla 2° alla 6° marcia.

Considerando il limite di potenza del motore, il rapporto del cambio più veloce è stato assunto pari a

$$R = \frac{32}{27}$$

Poiché il numero di combinazioni è finito (circa un centinaio), ciascuna di esse è stata calcolata (ricerca estensiva), anche se sarebbe stata possibile anche l'applicazione di un'ottimizzazione vincolata.

6.6.2 GARA SU CIRCUITO VELOCE

Le precedenti considerazioni per quanto riguarda L'Autodromo del Mugello suggeriscono di aumentare sia la velocità massima (per ottenere una performance superiore lungo il rettilineo), sia la capacità di spinta (per migliorare le fasi di accelerazione).

6.6.2.1 CAMBIO OTTIMIZZATO

La figura seguente sintetizza i risultati dell'ottimizzazione dei tempi sul giro.

La seconda, terza e quarta marcia non sono modificate la quinta e la sesta marcia sono "più alte" (per migliorare la velocità massima). Il miglioramento sulle prestazioni in termini di tempo sul giro è stato simulato essere 0,312 s.

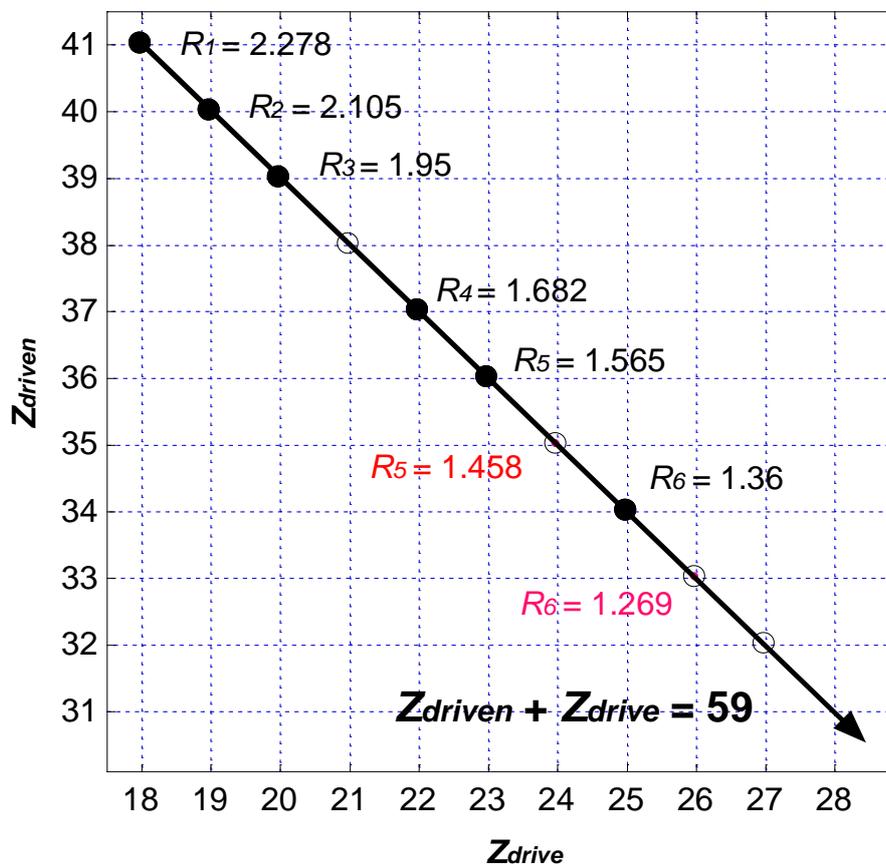


Figura 11: rapporti di velocità ottimizzati per il circuito del Mugello.

6.6.2.2 ANALISI DELLE PERFORMANCE DI MIGLIORAMENTO

Lo schema con la coppia propulsiva utilizzata alla ruota posteriore di coppia è mostrato nuovamente nella seguente figura: il caso rosso corrisponde al cambio ottimizzato, il caso nero al caso di riferimento.

È visibile come sia ottenibile una più ampia fascia di velocità con la riduzione di R_5 ed R_6 .

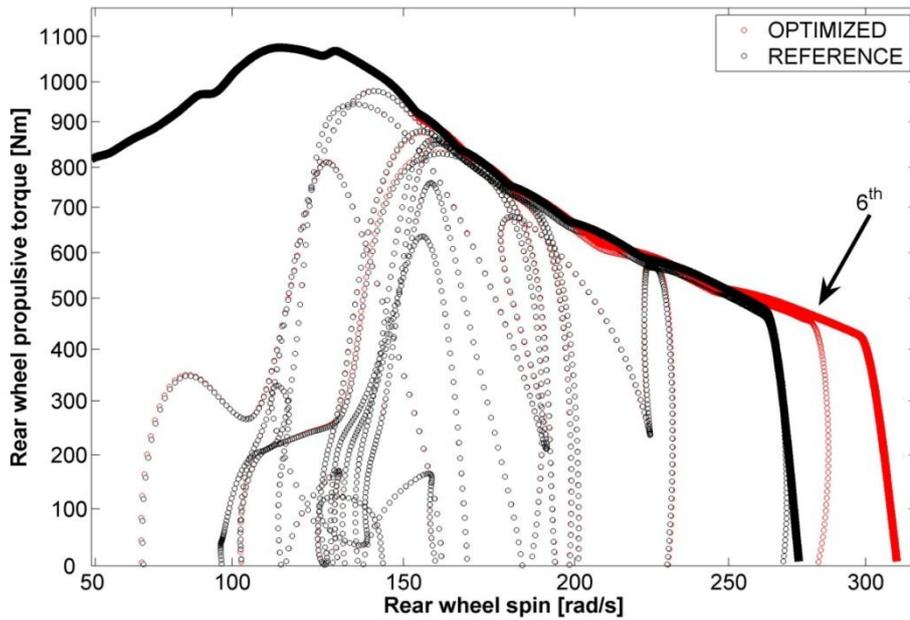


Figura 12: coppia di spinta utilizzata in relazione alla massima disponibile per il circuito del Mugello.

La figura seguente mostra il miglioramento della velocità di avanzamento con l'utilizzo del gearbox ottimizzato rispetto al caso di riferimento. E' evidente che il maggior guadagno (10,75 km / h, 6° rapporto di trasmissione) si verifica lungo il rettilineo.

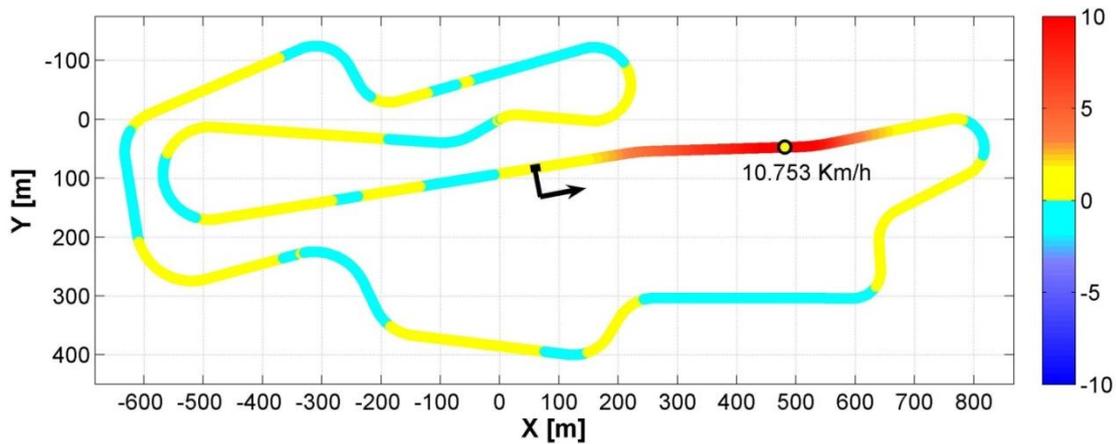


Figura 13: l'aumento di velocità per il circuito del Mugello con il gearbox ottimizzato.

6.6.3 GARA SU CIRCUITO LENTO

Le considerazioni precedenti per quanto riguarda la pista di Adria suggeriscono di aumentare la capacità di spinta per ottenere una maggiore efficienza nella fase di accelerazione in uscita dalle numerose curve lente.

6.6.3.1 CAMBIO OTTIMIZZATO

La figura seguente sintetizza i risultati dell'ottimizzazione dei tempi sul giro.

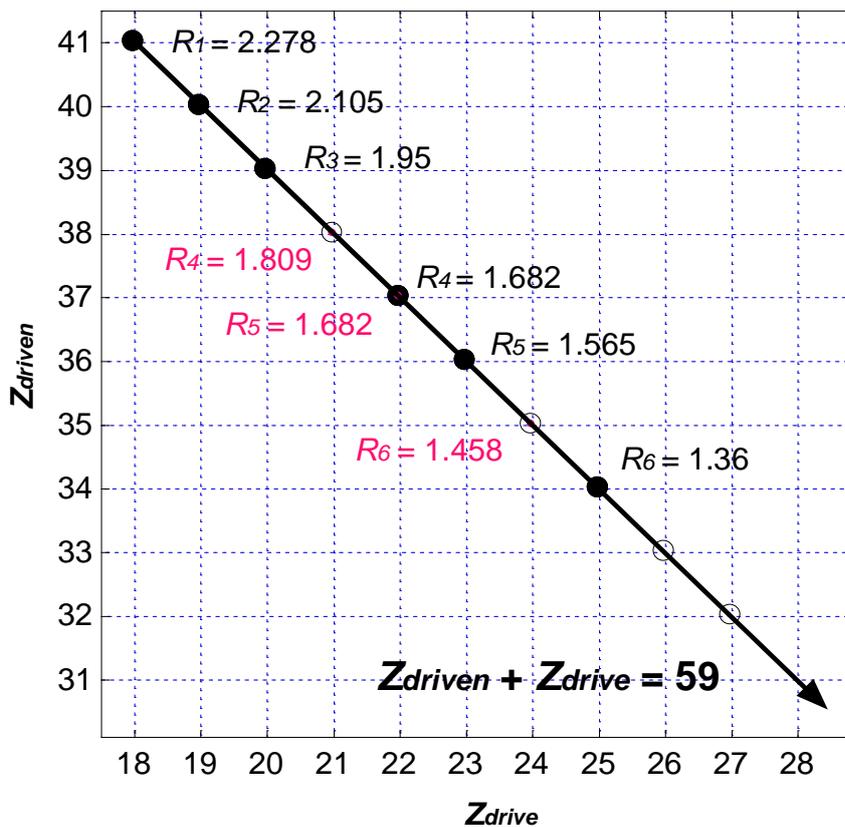


Figura 14: rapporti di velocità ottimizzati per il circuito di Adria.

Seconda e terza marcia non sono cambiate, la quarta, quinta e sesta invece sono più corte.

Il miglioramento delle prestazioni in termini di tempo sul giro è stato simulato di 0,113 s.

6.6.3.2 ANALISI DELLE PERFORMANCE DI MIGLIORAMENTO

La figura seguente mostra la coppia propulsiva alla ruota posteriore. La linea rossa corrisponde a quella del cambio ottimizzato, mentre la linea nera rappresenta il cambio di riferimento. La capacità di spinta disponibile è aumentata da valori più alti di R_4 , R_5 ed R_6 .

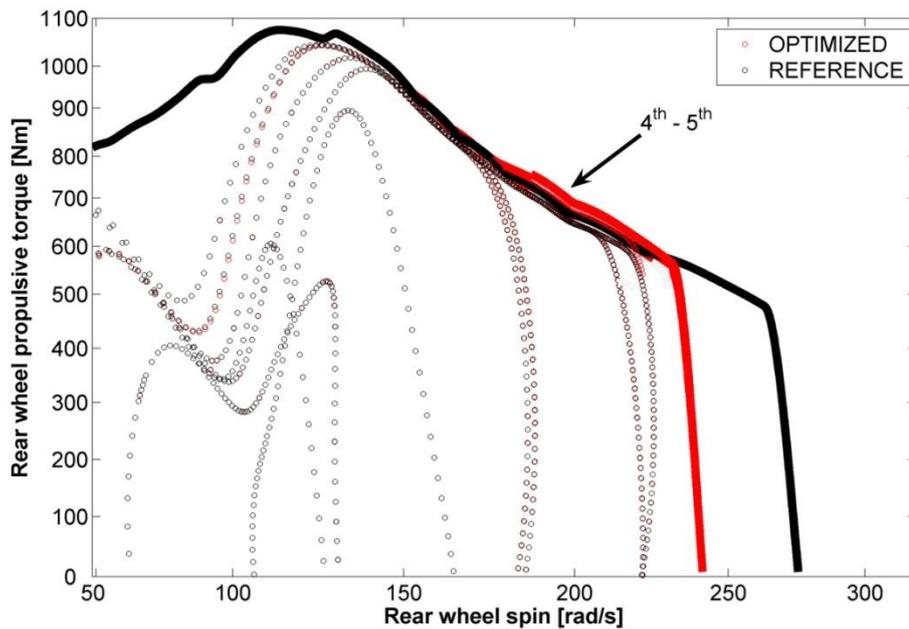


Figura 15: coppia di spinta utilizzata in relazione alla massima disponibile per il circuito di Adria.

Nella figura seguente è invece illustrato il miglioramento della velocità di avanzamento per il cambio ottimizzato rispetto a quello di riferimento. È evidente che il maggior guadagno (7,36 Km/h, 4^a marcia) si verifica lungo il rettilineo principale.

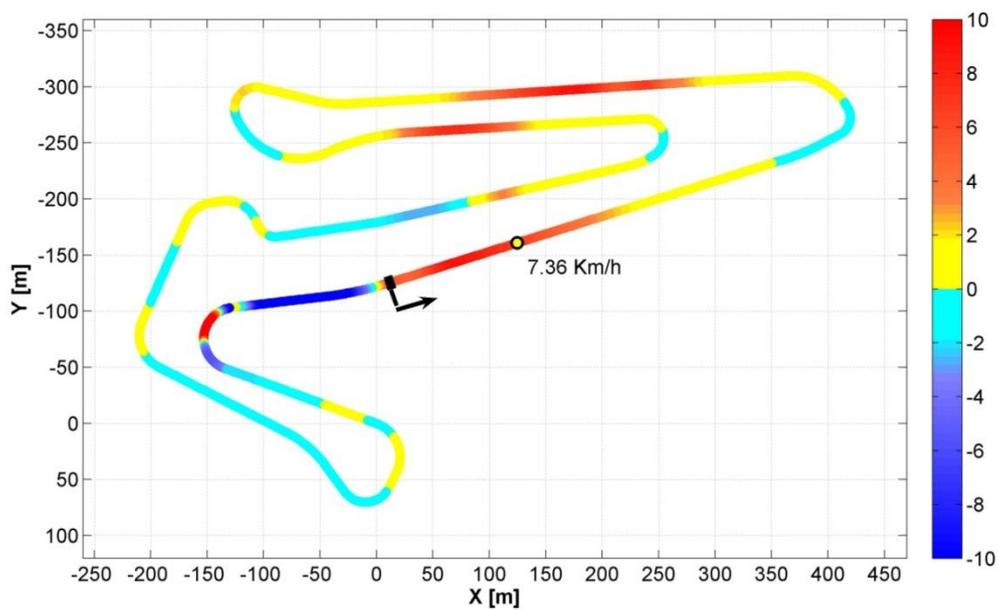


Figura 16: guadagno di velocità per il circuito di Adria con il gearbox ottimizzato.

CAPITOLO 7

INFLUENZA DELL'ADERENZA E DELLA POTENZA DEL MOTORE SULLA TRAIETTORIA IDEALE

Sarà considerata qui di seguito una manovra elementare che ci permetterà di capire quali siano i parametri fondamentali che regolano la scelta della traiettoria ideale.

La motocicletta considerata è equipaggiata un motore con una potenza massima di 180CV e viene considerato un coefficiente di aderenza pari a 1.4 in condizioni di asfalto asciutto.

7.1 - CURVA AD L

La pista considerata è costituita da una semplice curva di 90° con un raggio di curvatura costante di 33 m che collega tra di loro 2 tratti rettilinei ciascuno lungo 200 m. La larghezza della pista è mantenuta costante e pari a 13 m.

Il tracciato è stato deliberatamente scelto molto semplice e con una lunghezza limitata per permettere di analizzare nel modo migliore possibile la manovra eseguita dal pilota virtuale e per comprendere quali sono le ragioni principali che guidano la scelta delle varie traiettorie in base alla modifica della curva di coppia erogabile da parte del propulsore e le condizioni di aderenza che si verificano tra asfalto e pneumatici.

La motocicletta ha una velocità iniziale pari a 30 m/s e parte in una condizione rettilinea e dal centro della pista.

Tutte le condizioni iniziali come angolo di rollio, velocità di rotazioni attorno al centro di massa complessivo, coppia applicata allo sterzo sono nulle, mentre le condizioni finali non sono settate e sono state lasciate libere così che il software Xoptima abbia la libertà di sceglierle in base alla migliore manovra.

7.1.1 DESCRIZIONE DELLE FASI DI MANOVRA

Sulla base del tracciato scelto per condurre l'analisi, la manovra eseguita dalla *Manovra Ottima* può essere suddivisa in 3 fasi principali:

1. FASE DI ENTRATA IN CURVA: la motocicletta, in base alle condizioni di aderenza e alla potenza del propulsore, ha raggiunto una velocità massima u_{max} prima della curva e successivamente mediante una brusca frenata raggiunge la velocità tale da potergli permettere di poter effettuare la curva. In questa fase la grandezza caratteristica che andremo ad analizzare è rappresentata dalla minima accelerazione (ovvero la massima decelerazione a_{Xmin}) raggiunta dal veicolo. Questo parametro dipenderà in modo preponderante dal grado di aderenza presente nel tracciato.
2. FASE DI PERCORRENZA DELLA CURVA: la motocicletta esegue la curva raggiungendo gradi di rollio massimo φ_{max} dipendenti prevalentemente dall'aderenza media tra circuito e pneumatici. In questa fase sarà preso in esame proprio il valore massimo del rollio, oltre che al valore minimo del raggio di curvatura $((dc/ds)_{max})$ che, presumibilmente, si troverà proprio in corrispondenza della curva. Il raggio di curvatura minimo della traiettoria è un fattore discriminante per capire quando la traiettoria ottima compiuta dal pilota virtuale è più larga oppure più "appuntita".
3. FASE DI USCITA DALLA CURVA: la motocicletta, dopo aver superato il tratto curvo raggiunge il secondo tratto rettilineo lungo il quale cercherà di raggiungere la massima velocità possibile grazie al miglior sfruttamento possibile di pneumatici e motore in accelerazione. Pertanto la grandezza che sarà presa in esame in questo tratto è la massima accelerazione a_{Xmax} raggiunta dal veicolo, la quale, come si può facilmente comprendere, dipende in maniera prevalente non solo dall'aderenza ma anche dalla potenza massima che può essere fornita dal motore.

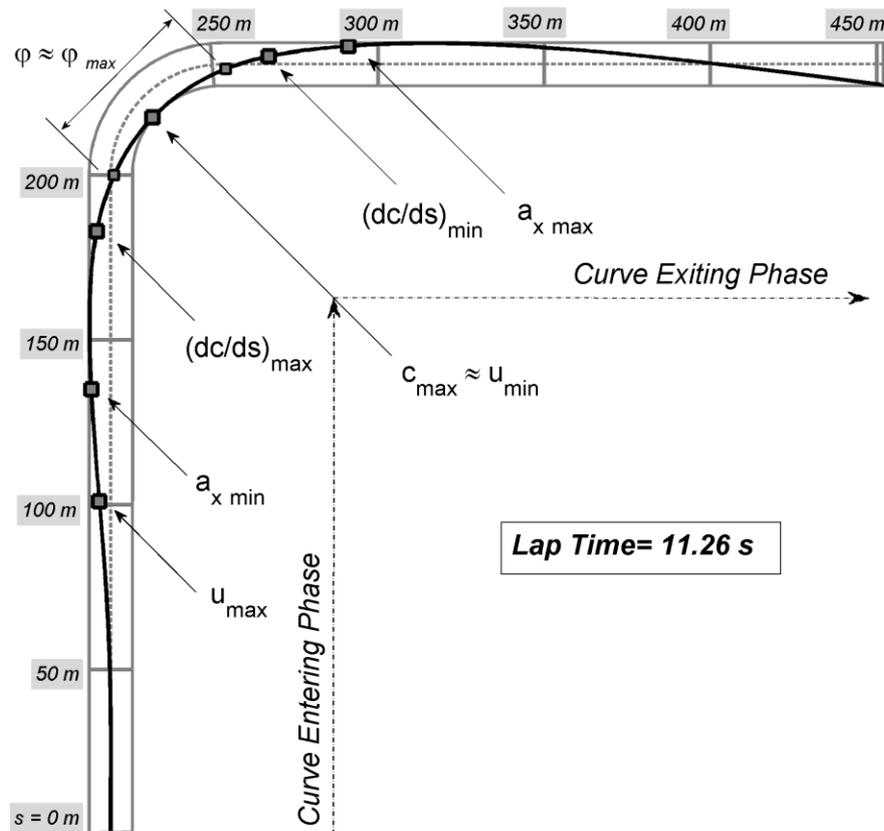


Figura 1: Curva ad L

- u_{max} : massima velocità raggiunta durante il primo rettilineo;
- $a_{x\ min}$: massima decelerazione raggiunta durante il primo rettilineo;
- $(dc/ds)_{max}$ massima variazione della curvatura della traiettoria durante il primo rettilineo;
- φ_{max} : massimo valore di angolo di rollio;
- c_{max} : massimo valore della curvatura della traiettoria;
- u_{min} : velocità minima;
- $(dc/ds)_{min}$: massima variazione della curvatura della traiettoria durante il secondo rettilineo;
- $a_{x\ max}$: massima accelerazione raggiunta durante il rettilineo in uscita.

La manovra calcolata lungo la curva ad L e che è rappresentata in Figura 1 mostra quale sia la migliore traiettoria scelta da Xoptima e quale sia la migliore performance in termini di tempo. Di seguito sono riportati i grafici relativi alle grandezze fondamentali calcolate, in particolare gli andamenti di velocità longitudinale, angolo di rollio e curvatura della traiettoria.

Si noti come il punto di massima curvatura coincida con il punto di velocità minima e divida chiaramente la fase di entrata in curva (caratterizzata da un'accelerazione longitudinale negativa) dalla fase di uscita dalla curva (accelerazione longitudinale positiva).

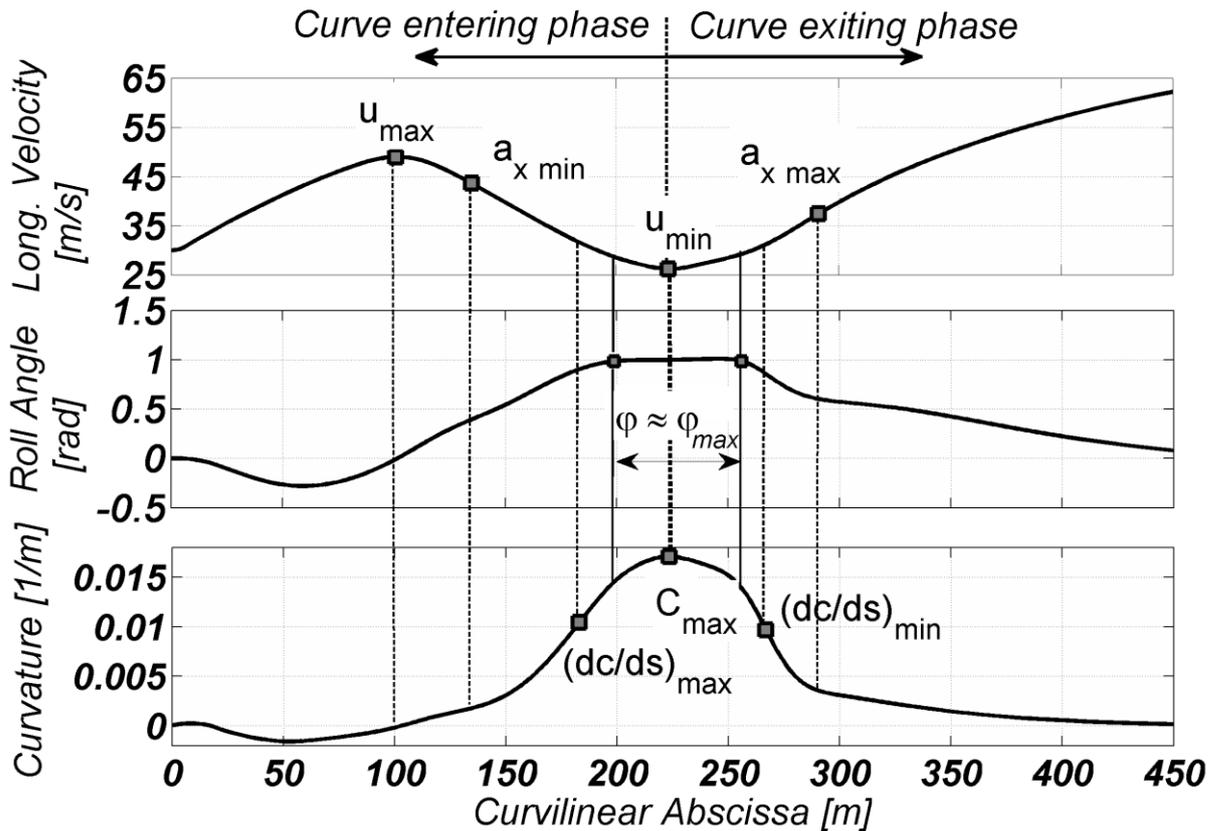


Figura 2: valori assunti da velocità, angolo di rollio e curvatura lungo la curva ad L

7.1.2 FASE DI INGRESSO IN CURVA

La fase d'ingresso in curva è caratterizzata dalla diminuzione della velocità longitudinale dal massimo valore raggiunto nel primo tratto del primo rettilineo (u_{max}) fino al valore minimo (u_{min}) richiesto per la corretta esecuzione della curva che segue.

La decelerazione massima ($a_{x\ min}$) è un indice della capacità della motocicletta di diminuire la propria velocità di avanzamento. Questa capacità è evidentemente governata e limitata da due diversi limiti che la condizionano: lo scivolamento dei pneumatici anteriore e/o posteriore e il fenomeno del rovesciamento in avanti, ovvero la perdita di carico al posteriore e il conseguente sollevamento della ruota.

Il fenomeno dello scivolamento avviene quando la forza che si sviluppa tra terreno e pneumatico è superata la massima aderenza limite. In particolare le caratteristiche di aderenza sono determinate dall'interazione tra terreno e pneumatico e sono generalmente rappresentate da un'ellisse, cioè l'ellisse di trazione. Come visto in precedenza, l'ellisse di trazione regola il limite dell'aderenza nelle condizioni in cui si trova il veicolo. Come ben noto, la sua forma dipende dal comportamento del pneumatico quando esso si trova impegnato simultaneamente in direzione longitudinale e laterale ed i massimi valori che può raggiungere (in corrispondenza delle condizioni di

esclusiva trazione/frenata oppure di percorrenza di una curva) rappresentano i coefficienti di massima trazione longitudinale e laterale.

In questo modo può essere pertanto espresso l'impegno del pneumatico (anteriore e posteriore) in rapporto alla massima aderenza disponibile data dall'interazione pneumatico-terreno.

$$E_f = \left[\frac{(S_f/N_f)}{\mu_{xf}} \right]^2 + \left[\frac{(F_f/N_f)}{\mu_{yf}} \right]^2 \quad (1)$$

$$E_r = \left[\frac{(S_r/N_r)}{\mu_{xr}} \right]^2 + \left[\frac{(F_r/N_r)}{\mu_{yr}} \right]^2 \quad (2)$$

dove S, F, N sono le forze longitudinali, laterali e verticali sui pneumatici, μ_x, μ_y sono i coefficienti di massima aderenza longitudinale e laterale. L'indice r indica il pneumatico posteriore, l'indice f quello anteriore. Ne deriva quindi che l'aderenza limite anteriori e posteriori sono espresse rispettivamente da:

$$E_f \leq 1 \quad (3)$$

$$E_r \leq 1 \quad (4)$$

La decelerazione da parte della motocicletta comporta un trasferimento di carico dalla ruota posteriore verso quella anteriore rispetto la condizione statica. Il trasferimento di carico dipende fondamentalmente dalle proprietà inerziali e geometriche del veicolo, in particolar modo dalla posizione verticale del centro di massa complessivo e dalla lunghezza del passo.

La condizione limite per il ribaltamento è espressa dalla seguente equazione:

$$\frac{\ddot{x}_{\max}}{g} \leq -\frac{p-b}{h \cos \varphi} - \frac{\frac{1}{2} \rho A C_D V^2}{mg}$$

p : passo;

b : distanza tra il centro di gravità e il punto di contatto nella ruota anteriore;

h : altezza baricentro;

φ : angolo di rollio;

$\frac{1}{2} \rho A C_D = k_D$: coefficiente aerodinamico;

V : velocità di avanzamento

m : massa del veicolo.

Il fenomeno dello *Stoppie* quindi comporta lo scaricamento della ruota posteriore, in altre parole il carico verticale sul pneumatico posteriore si annulla. Di conseguenza la condizione limite per il carico è espressa semplicemente da:

$$N_r \geq 0 \tag{5}$$

La figura seguente riporta il carico verticale e il grado di sfruttamento (*Exploitation*) del pneumatico durante la fase d'ingresso in curva.

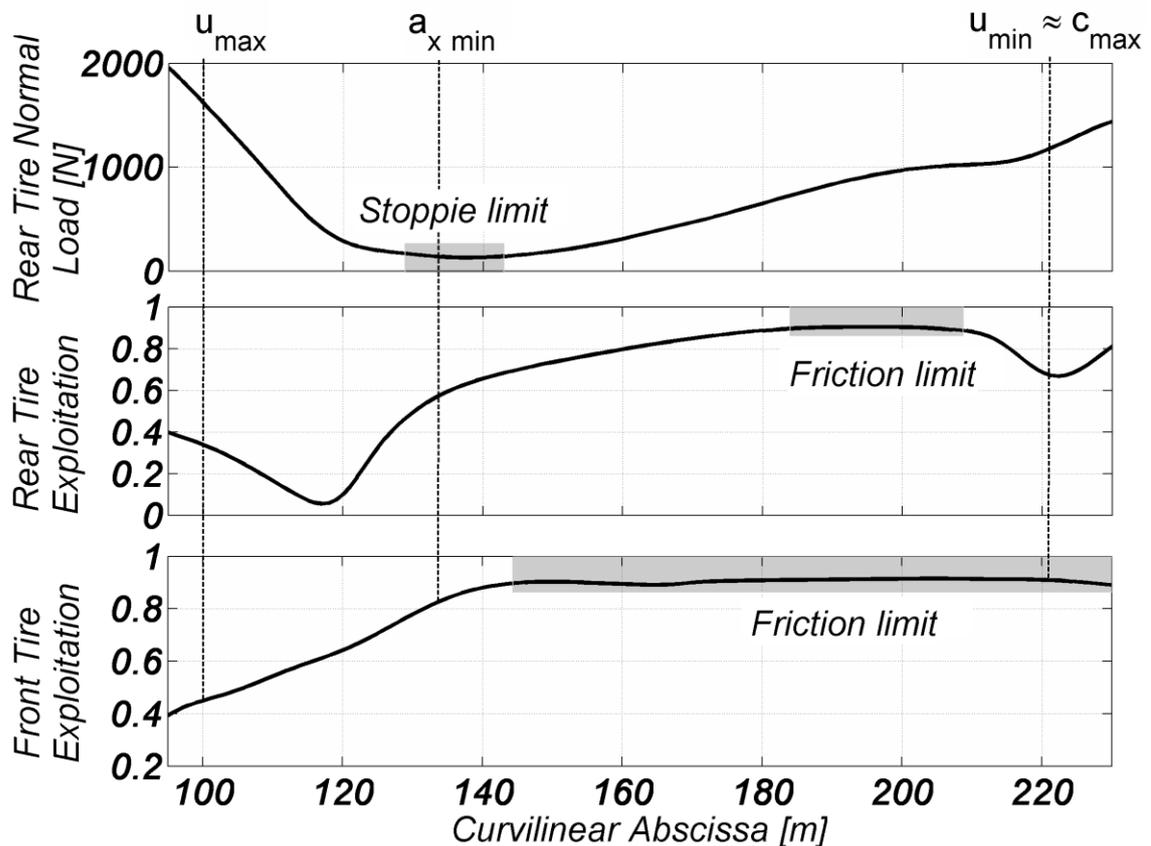


Figura 3: fase d'ingresso in curva

Durante la prima fase della manovra il carico verticale posteriore decresce rapidamente e raggiunge il suo valore minimo in corrispondenza della massima decelerazione ($a_{x \min}$) mentre il grado di sfruttamento del pneumatico anteriore cresce fino a quasi il suo valore massimo.

Successivamente il carico verticale posteriore cresce progressivamente, mentre il livello d'impegno del pneumatico rimane pressoché al suo massimo livello.

La manovra ottima in fase di frenata appare quindi caratterizzata dalla presenza sia del fenomeno di ribaltamento sia dello scivolamento, ovvero del raggiungimento del massimo impegno del pneumatico. La transizione tra i due fenomeni avviene approssimativamente nella zona dove si verifica la massima decelerazione ($a_{x\ min}$).

7.1.3 FASE DI USCITA DALLA CURVA

Durante la fase di accelerazione si verifica dapprima un progressivo aumento della velocità longitudinale a partire dal suo valore minimo (u_{min}) che si registra in corrispondenza del punto di massima curvatura.

La massima accelerazione longitudinale ($a_{x\ max}$) indica la capacità della motocicletta di aumentare la sua velocità al fine di percorrere il più velocemente possibile il seguente tratto rettilineo in uscita alla curva.

Anche la massima accelerazione, analogamente a quanto già visto per la massima decelerazione, dipende fundamentalmente dallo scivolamento del pneumatico posteriore e dal fenomeno dell'impennamento (*Weelie*).

Lo scivolamento del posteriore avviene quando viene superato il limite di aderenza tra pneumatico e terreno e la sua condizione limite è dettata da:

$$E_r \leq 1 \quad (6)$$

In modo analogo a quanto visto per la fase di frenata, un'accelerazione longitudinale della motocicletta comporta un trasferimento di carico dall'anteriore verso il posteriore rispetto le condizioni statiche. Il fenomeno dell'impennamento, *Wheelie*, avviene quando il carico normale sul pneumatico anteriore raggiunge lo zero, cioè viene interrotto il contatto tra terreno e pneumatico stesso. Detto ciò la condizione limite corrispondente a questo fenomeno può essere espressa attraverso:

$$N_f \geq 0 \quad (7)$$

L'accelerazione massima raggiungibile dalla motocicletta è inoltre limitata dalla potenza del motore disponibile. Infatti, quando la potenza propulsiva raggiunge valori prossimi alla massima potenza effettivamente erogabile dal motore in quelle condizioni, viene raggiunto il limite cosiddetto di potenza. L'espressione che regola tale limite può essere tradotta con la seguente disuguaglianza:

$$P_{used} \leq P_{max} \quad (8)$$

Dove con P_{max} viene indicata la massima potenza del motore, P_{used} la potenza effettivamente applicata durante la fase di spinta. La potenza disponibile dal motore è

calcolata seguendo la seguente espressione ed è funzione della spinta applicata alla ruota posteriore, la velocità longitudinale e il rendimento meccanico del sistema di trasmissione η_t :

$$P_{used} = \frac{S_r u}{\eta_t} \tag{9}$$

La seguente figura riporta l'impegno del pneumatico posteriore, il carico normale sulla ruota anteriore e la potenza del motore utilizzata durante la fase di uscita dalla curva. Nella prima fase della manovra l'impegno del pneumatico posteriore è sostanzialmente costante e pari al valore massimo che esso è obbligato ad assumere fintantoché non viene raggiunto il valore massimo per quanto riguarda l'accelerazione longitudinale ($a_{x\ max}$), mentre il carico normale sul pneumatico anteriore si attesta a valori minimi tali da garantire un minimo di guidabilità della motocicletta. Successivamente l'impegno del pneumatico posteriore decresce progressivamente, mentre il carico normale anteriore continua a mantenersi su valori minimi.

La potenza utilizzata cresce gradualmente partendo dal punto di velocità minima (u_{min}): in ogni modo si mantiene sempre ad un valore inferiore a quello massimo durante la fase di raggiungimento dell'accelerazione massima.

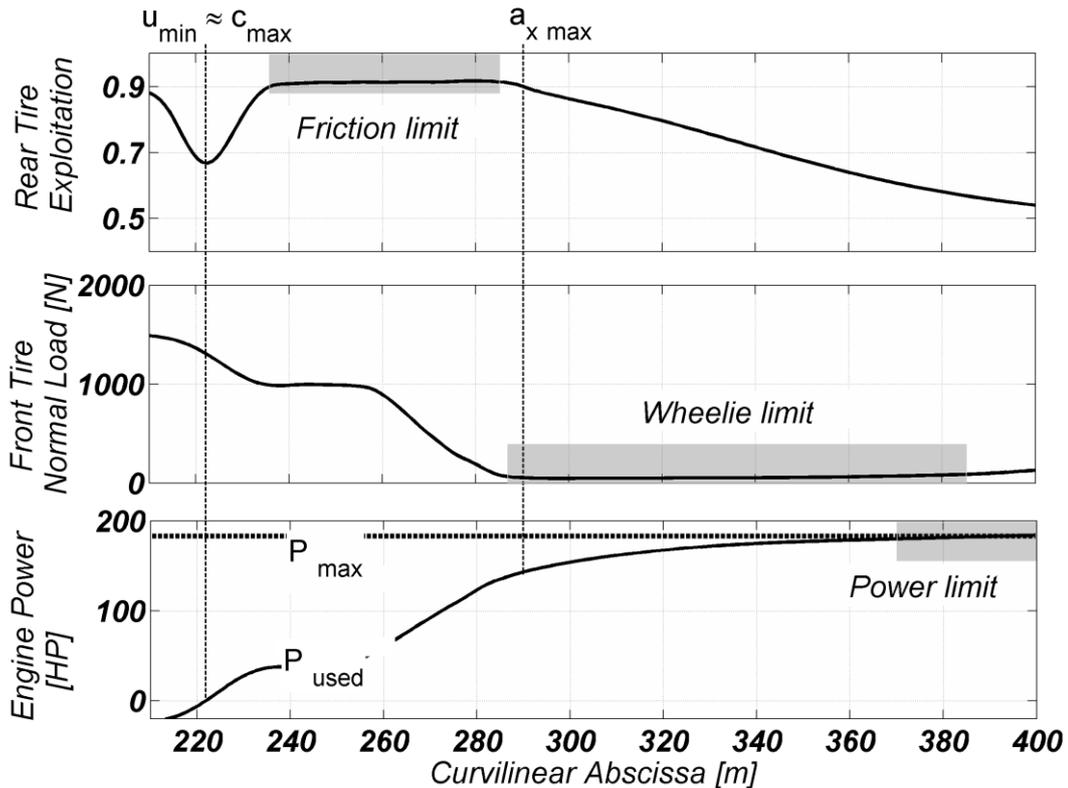


Figura 4: Fase di uscita dalla curva

La manovra di accelerazione ottimale, dunque, risulta caratterizzata fondamentalmente sia dalla presenza del fenomeno del *Wheelie* che dal raggiungimento delle condizioni di

aderenza limite. Come per la fase di frenata, la transizione tra le due fasi limite avviene approssimativamente in corrispondenza del raggiungimento dell'accelerazione massima ($a_{x\ max}$).

La potenza erogabile dal motore risulta invece in questo caso limitante le fasi successive a quelle caratterizzate da valori massimi dell'accelerazione, e risulta invece preponderante come fattore limite solo nella fase conclusiva della manovra cioè quando la motocicletta è lanciata lungo il rettilineo.

7.2 - ANALISI PARAMETRICA

È stata precedentemente illustrata e analizzata la manovra lungo la curva ad L in relazione alle fasi d'ingresso ed uscita della curva. Sono state inoltre analizzate le condizioni limite raggiunte dalla motocicletta nella sua condizione nominale di aderenza e potenza del motore.

Verrà di seguito analizzato il comportamento di diverse grandezze lungo la stessa manovra al variare del coefficiente massimo di aderenza e della curva di coppia caratteristica del motore.

7.2.1 PERFORMANCE ASSOLUTA

Il *Lap Time*, ovvero il tempo sul giro, è l'indice più importante per valutare le performance di una motocicletta destinata all'ambito racing cui è stata assegnata una certa manovra da effettuare.

In questo contesto in cui si va ad analizzare quali siano gli effetti delle modifiche sull'aderenza e sulla forma della curva di coppia del motore sempre sulla curva ad L ed i risultati sono evidenziati nella mappa seguente.

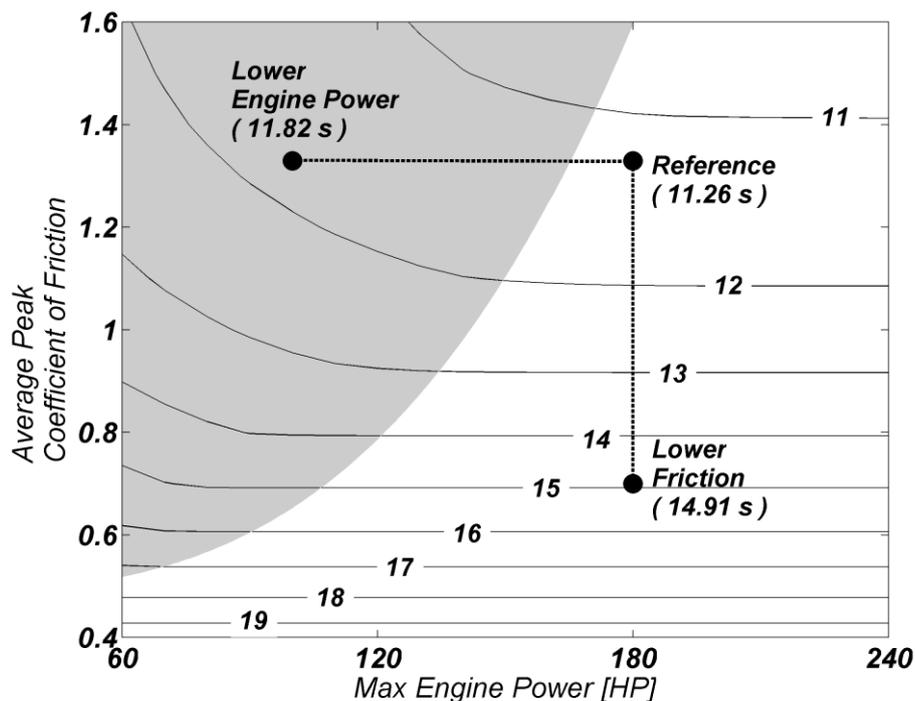


Figura 5: Lap Time al variare di Potenza e coefficiente di aderenza

L'andamento della mappa isolivello relativa al *Lap Time* risulta chiaramente divisibile in due zone distinte. La prima zona, (quella in bianco) è caratterizzata da alte potenze massime del motore e da basse aderenze e le curve isolivello mostrano un andamento orizzontale. In questo caso, quindi, il fattore che influenza univocamente le prestazioni della motocicletta è l'aderenza che si sviluppa tra pneumatico e terreno, mentre la presenza di maggiore potenza erogabile da parte del motore non sembra influenzare in alcun modo il *Lap Time*.

L'altra zona che è possibile individuare, invece, è rappresentata da un colore grigio nella mappa e corrisponde a valori alti di aderenza e basse potenze massime del motore. L'andamento delle curve mostra come aumentando le prestazioni del propulsore si verificano in questi casi anche dei miglioramenti delle performance, cioè la riduzione del *Lap Time*.

In sostanza la linea di demarcazione delle due zone assume il significato seguente:

- a parità di aderenza, identifica il livello di potenza minima per poter "sfruttare" l'aderenza a disposizione nell'effettuare la manovra: oltre questo livello la prestazione assoluta non migliora, e la potenza in più è inutile;
- a parità di potenza, identifica un livello di aderenza minima per poter "sfruttare" la potenza a disposizione: oltre questo livello, infatti, la prestazione migliora in modo sempre meno significativo aumentando l'aderenza.

Risulta pertanto evidente, data la corrispondenza degli andamenti delle curve isolivello, come la prestazione assoluta sia correlata alla massima frenata in fase d'ingresso della

curva ed alla massima accelerazione in fase di uscita dalla curva, ossia come i limiti di frenata ed accelerazione sono, di fatto, limiti di prestazione assoluta.

Per dimostrare ciò son state prese in considerazione due configurazioni modificate rispetto la motocicletta “nominale” denominata come *Reference Case*:

1. *Lower Friction*: il coefficiente di aderenza massimo è stato abbassato fino ad un valore $\mu=0.7$ che rappresenta una condizione di asfalto bagnato;
2. *Lower Power*: la potenza massima del motore è stata abbassata fino a $P_{max}=100HP$.

Di seguito saranno analizzate in dettaglio le manovre ottenute con queste due configurazioni opposte.

7.2.2 ANALISI SEMPLIFICATA

Come già affermato in precedenza, la massima decelerazione determina la capacità della motocicletta di ridurre la propria velocità in ingresso in curva, mentre la massima accelerazione determina la potenzialità di aumentare la velocità in uscita alla curva stessa. Tutto ciò è molto più determinante nei tracciati che presentano curve strette e rettilinei corti.

Nel caso più generale i limiti del veicolo (i.e. potenza del motore, aderenza, impennamento, ribaltamento) sono presenti e si combinano in maniera diversa a seconda della configurazione potenza-aderenza, determinando di conseguenza la necessità di differenti ed adeguate strategie di guida per ottimizzare le prestazioni.

In tal senso le mappe precedenti di accelerazione massima e di frenata massima vengono successivamente interpretate con riferimento ad un'analisi dinamica semplificata, identificando nel piano potenza-aderenza una serie di limit zones ciascuna caratterizzata da una differente combinazione di limiti del veicolo.

7.2.2.1 MODELLO DINAMICO SEMPLIFICATO

La figura mostra il modello dinamico semplificato di motocicletta che verrà descritto di seguito. Il sistema moto-pilota è considerato come un unico corpo rigido, inoltre non è considerato il movimento delle sospensioni ritenute pertanto infinitamente rigide.

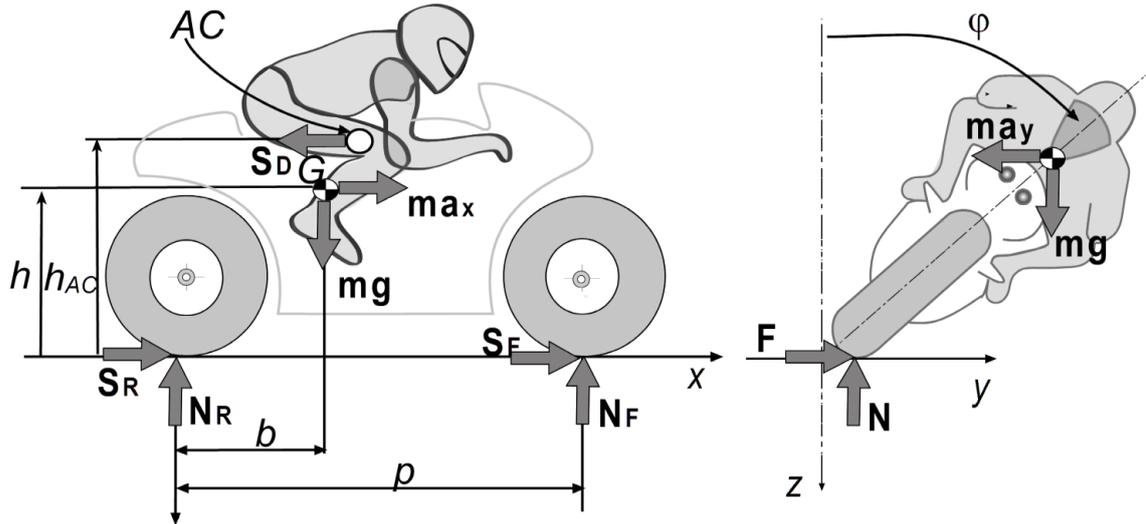


Figura 6: Rappresentazione grafica del modello matematico

L'imbardata della motocicletta è direttamente dipendente dall'accelerazione laterale e dalla velocità di avanzamento, cioè la velocità laterale è considerata trascurabile. Le forze longitudinali, laterali e verticali sui pneumatici sono considerate applicate in corrispondenza dei punti di contatto anteriore e posteriore.

Si può pertanto dire che il modello preso in esame sia provvisto di solamente tre gradi di libertà, tutti descritti in terna SAE:

1. Traslazione longitudinale;
2. Traslazione laterale;
3. Rotazione di rollio.

Si assume che il pilota controlli l'accelerazione longitudinale agendo sia sui freni anteriore e posteriore sia sull'acceleratore per ottenere la corretta spinta longitudinale sui pneumatici. In modo analogo l'accelerazione laterale richiesta è imposta attraverso l'azione sul manubrio che a sua volta genera le forze laterali necessarie. In definitiva le accelerazioni longitudinali e laterali sono sottoposte al controllo del pilota.

Le equazioni sono formulate attraverso il metodo di Newton-Eulero, dal quale si ottiene il seguente set di 6 equazioni del moto:

$$\left\{ \begin{array}{l} ma_x = S_F + S_R - S_D \\ ma_y = F_F + F_R \\ mg = N_f + N_r \\ ma_y h \cos(\varphi) = mgh \sin(\varphi) \\ ma_x h \cos(\varphi) + S_D h_{AC} \cos(\varphi) + N_f (p - b) - N_r b = 0 \\ ma_x h \sin(\varphi) + S_D h_{AC} \sin(\varphi) + F_f (p - b) - F_r b = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

Dove:

- m : massa ;
- p : passo;
- b, h : coordinate del baricentro;
- h_{AC} : altezza da terra del centro di pressione aerodinamico;
- a_x e a_y : accelerazioni longitudinale e laterale;
- ϕ : angolo di rollio;
- S, F, N : forze longitudinali, laterali e verticali sui pneumatici;
- S_D : forza di resistenza aerodinamica.

I pedici r e f identificano rispettivamente il pneumatico posteriore ed anteriore.

Inoltre si considera la seguente espressione che definisce la ripartizione della forza longitudinale complessiva sui due pneumatici:

$$R = S_R / (S_F + S_R) \quad (11)$$

In questo modo si ottiene che la forza propulsiva sia una prerogativa del pneumatico posteriore (cioè $R=1$), mentre la forza frenante è distribuita in modo appropriato tra anteriore e posteriore (cioè $0 \leq R \leq 1$).

Dall'ipotesi che entrambe le accelerazioni (longitudinale e laterale) siano costanti, ovvero che il loro rispettivo valore massimo possa essere generato in ogni condizione, le forze sui pneumatici $S_f, S_r, F_f, F_r, N_f, N_r$ possono essere espresse in funzione dell'accelerazione longitudinale a_x e dell'angolo di rollio mediante le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 S_f &= (ma_x + S_D)(1 - R) \\
 S_r &= (ma_x + S_D)R \\
 F_f &= \left(mg \frac{b}{p} \right) \tan(\varphi) - \left(ma_x \frac{h}{p} + S_D \frac{h_{AC}}{p} \right) \sin(\varphi) \\
 F_r &= \left[mg \left(1 - \frac{b}{p} \right) \right] \tan(\varphi) + \left(ma_x \frac{h}{p} + S_D \frac{h_{AC}}{p} \right) \sin(\varphi) \\
 N_f &= \left(mg \frac{b}{p} \right) - \left(ma_x \frac{h}{p} + S_D \frac{h_{AC}}{p} \right) \cos(\varphi) \\
 N_r &= \left[mg \left(1 - \frac{b}{p} \right) \right] + \left(ma_x \frac{h}{p} + S_D \frac{h_{AC}}{p} \right) \cos(\varphi)
 \end{aligned} \quad (12)$$

La capacità di accelerazione e frenata della motocicletta verrà di seguito espressa attraverso l'utilizzo di queste espressioni. A questo scopo, c'è da dire che il contributo della spinta aerodinamica S_D sarà non considerato per evitare complicazioni dovute alla sua dipendenza con il quadrato della velocità.

7.2.2.2 MASSIMA FRENATA

Come già mostrato precedentemente, durante la fase di frenata possono essere raggiunte due situazioni limite:

1. Lo scivolamento del pneumatico anteriore/posteriore;
2. Il ribaltamento in avanti (*Stoppie*).

Nel caso specifico di Xoptima viene adottato il metodo della ripartizione ottimale della frenata [18] imponendo che il pneumatico posteriore sia impegnato tanto quanto quello anteriore e utilizzando pertanto un valore ottimale del coefficiente di ripartizione $R=R_{opt}$.

Pertanto le precedenti equazioni (1), (2), (3), (4) sono espresse nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} E_f \leq 1 \\ E_r = E_f \end{array} \right. \Rightarrow a_x(\varphi) \leq a_x(\varphi)_{SKIDDING} \\ N_r \geq 0 \Rightarrow a_x(\varphi) \leq a_x(\varphi)_{STOPPIE} \end{array} \right. \quad (13)$$

Le curve corrispondenti a queste equazioni sono mostrate nella Fig. 7 in grigio (*skidding* ($\mu=1.33$), *skidding* ($\mu=0.7$) e *Stoppie*) e limitano il massimo valore della decelerazione durante la fase di entrata in curva in funzione dell'angolo di rollio che può variare da 0 fino al suo massimo valore.

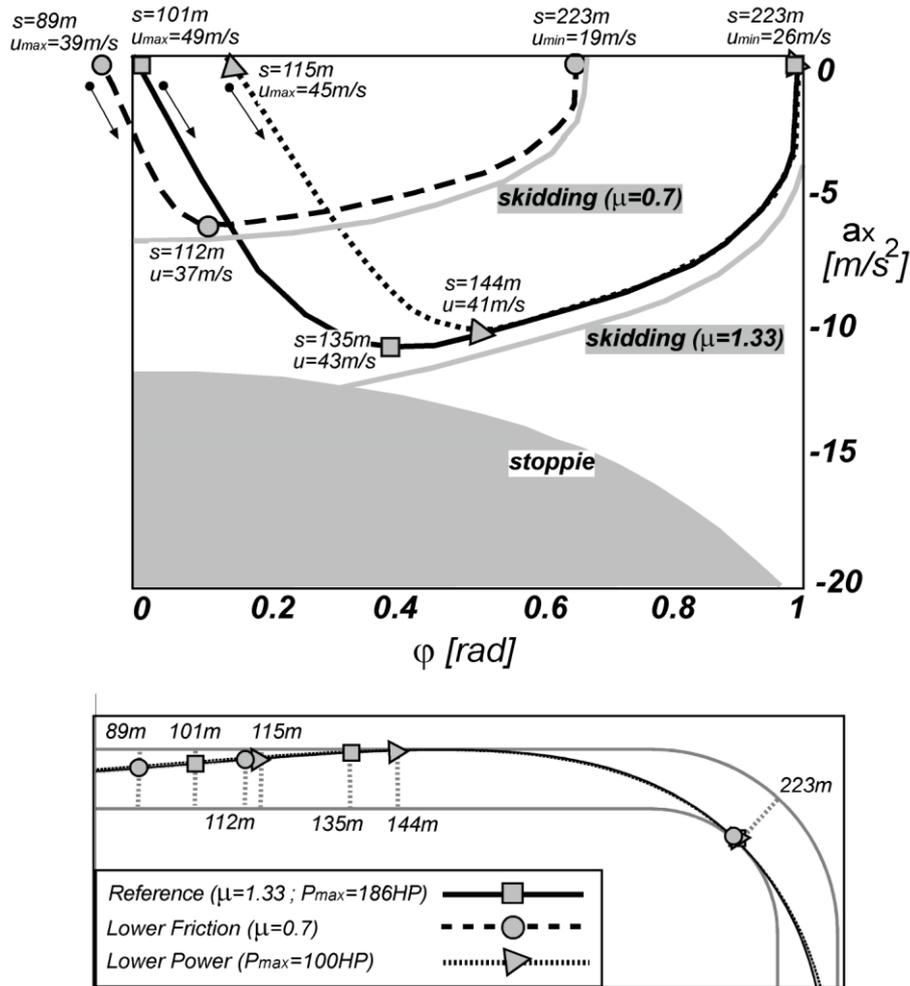


Figura 7: fase d'ingresso in curva; manovra ottima (line scure) con le corrispondenti linee limite date dall'analisi semplificata (curve grigie)

Nella configurazione con il coefficiente massimo di aderenza più alto ($\mu=1.33$) l'intersezione tra curva di *stoppie* e di *skidding* determina il massimo valore di decelerazione di cui è in grado la motocicletta. La massima frenata pertanto è raggiungibile come si può notare per un certo angolo di rollio "ottimo": per angoli di piega più bassi, infatti, il fenomeno del ribaltamento impedisce decelerazioni maggiori, mentre per angoli di piega più alti l'impegno del pneumatico è eccessivo e il pneumatico scivola sul terreno. In questo caso pertanto si può notare come l'angolo di rollio abbassando l'altezza del centro di massa e quindi riducendo il trasferimento di carico tra posteriore e anteriore permetta di raggiungere le migliori performance di frenata con la moto leggermente piegata quando essa è già entrata in curva.

Al contrario, invece, nel caso di basso coefficiente di aderenza massimo ($\mu=0.7$) la massima decelerazione raggiungibile si trova in corrispondenza di angoli di rollio nulli, quindi la nostra motocicletta frena al massimo prima di entrare in curva, quando è ancora dritta.

7.2.2.3 MASSIMA ACCELERAZIONE

Come discusso nei precedenti paragrafi quando una motocicletta accelera, deve sottostare a due eventi limite: lo scivolamento *skidding* della ruota posteriore e l'impennamento *Wheelie*. In accordo con le equazioni (2), (4), (5) e (12) le restrizioni imposte alla massima accelerazione possibile possono essere espresse attraverso:

$$\begin{cases} E_r \leq 1 & \Rightarrow a_x(\varphi) \leq a_x(\varphi)_{SKIDDING} \\ N_f \geq 0 & \Rightarrow a_x(\varphi) \leq a_x(\varphi)_{WHEELING} \end{cases} \quad (26)$$

Le curve corrispondenti a tali equazioni sono riportate nella figura seguente in grigio (*skidding* ($\mu=1.33$), *skidding* ($\mu=0.7$) and *wheelie*) e limitano al massima accelerazione durante la fase di uscita dalla curva per valori di angolo di rollio che vanno da 0 al valore massimo.

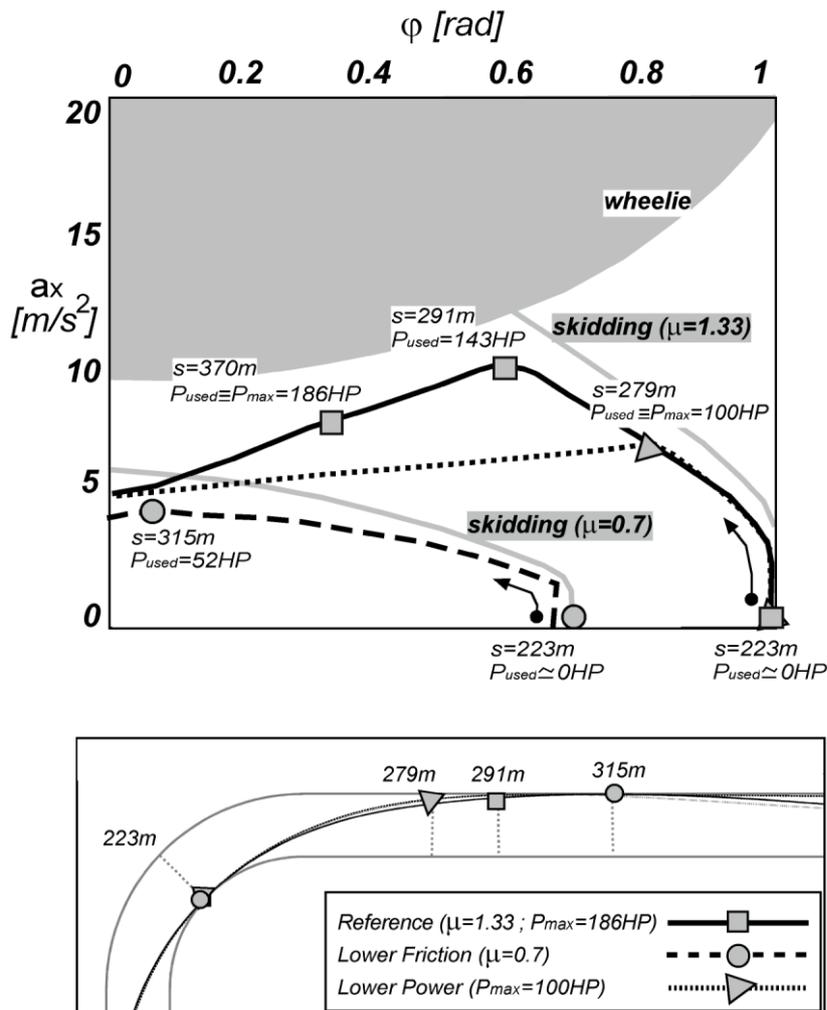


Figura 8: fase di uscita dalla curva; manovra ottima (line scure) con le corrispondenti linee limite date dall'analisi semplificata (curve grigie)

Nel caso di alto coefficiente di aderenza massimo ($\mu=1.33$) l'intersezione tra le curve di *Stoppie* e *Skidding* determina la massima accelerazione raggiungibile. Così come mostrato per la massima decelerazione, anche in questo caso il valore massimo dell'accelerazione è raggiunto con la motocicletta leggermente piegata, ovvero con un angolo di rollio diverso da zero a causa del minor trasferimento di carico che si verifica in questa condizione. La massima accelerazione sarà quindi possibile già in uscita di curva e non in una condizione di pura trazione da parte del pneumatico.

Al contrario per il caso con minore coefficiente di aderenza ($\mu=0.7$) le migliori performance in fatto di trazione corrispondono per angoli di rollio nulli, cioè in una situazione di pure trazione, quando la motocicletta è oramai uscita dalla curva e sta percorrendo il rettilineo.

7.3 - ENTRATA IN CURVA

La Figura 7 riporta l'andamento della decelerazione in funzione dell'angolo di rollio durante la fase d'ingresso in curva. La manovra con la configurazione di riferimento ($P_{max}=186HP; \mu=1.33$) è inserita nel grafico assieme alle manovre corrispondenti alle condizioni modificate *Lower Friction* (cioè $\mu=0.7$) e *Lower Power* (cioè $P_{max}=100HP$) e alle curve limite disegnate in grigio scuro (*skidding* ($\mu=1.33$), *skidding* ($\mu=0.7$) e *stoppie*). Questo diagramma mostra pertanto come le condizioni limite influenzino la strategia per effettuare in modo ottimale l'ingresso in curva.

Per quanto riguarda la manovra di riferimento, la massima velocità di avanzamento $u_{max}=49m/s$ è raggiunta dopo $s=101m$ di accelerazione dopo la linea di partenza. A questo punto la motocicletta comincia a frenare (assumendo pertanto valori di accelerazioni negative) ed a rollare. Il valore di massima decelerazione si raggiunge a $s=135m$ per un angolo di rollio abbastanza consistente. La fase d'ingresso in curva quindi continua fino alla cosiddetta fase "stazionaria" caratterizzata da un angolo di rollio massimo e che si mantiene pressoché costante per poi concludersi in corrispondenza di $s=223m$, punto in cui è raggiunta la velocità minima.

Pertanto la manovra d'ingresso in curva è caratterizzata dall'intersezione delle linee limite proprie dei fenomeni di *stoppie* e *skidding* e dal raggiungimento del massimo valore di decelerazione longitudinale per una posizione della motocicletta leggermente rollata. La seconda manovra, invece, cioè quella di uscita dalla curva è descritta esclusivamente dalla curva limite data dallo *skidding* che appare il fenomeno più limitante fin dal punto di minima velocità.

Rispetto alla manovra concernente la configurazione di riferimento, nel caso *Lower Friction*, la frenata è notevolmente anticipata e sono raggiunti valori di decelerazione, angoli di rollio e velocità di avanzamento longitudinale decisamente inferiori. La motocicletta, infatti, comincia a frenare a $s=89m$ raggiunta la velocità massima di $u_{max}=39m/s$, mentre la massima decelerazione avviene per $s=112m$.

Le principali differenze quindi sono dovute alle due condizioni limite di *skidding*, che sono le più restrittive su tutta l'intera manovra. La massima decelerazione avviene per un angolo di rollio nullo e la manovra è completamente dettata dalla curva di *skidding*, mentre la condizione limite di *stoppie* non interviene per nulla.

Viceversa la fase di frenata nel caso *Lower Power* è notevolmente ritardata fino al punto di massima decelerazione, e risulta caratterizzata da valori più alti per quanto riguarda l'angolo di rollio e valori, invece, più bassi di velocità di avanzamento rispetto la manovra di riferimento. Com'è possibile vedere dalla Fig. 7 la motocicletta comincia a frenare per $s=115m$ con una velocità massima di $u_{max}=45m/s$, la massima decelerazione avviene a $s=144m$ ad un angolo di rollio considerevolmente più alto. Queste differenze sono da attribuire sostanzialmente alla ridotta potenza erogabile dal motore che limita la massima velocità che è possibile raggiungere lungo il primo rettilineo. Di conseguenza la manovra di frenata è ritardata e caratterizzata da angoli di piega maggiori e la massima decelerazione avviene quando lo *skidding* risulta la limitazione più stretta per lo spazio di manovra. Dopo il punto di massima decelerazione fino al punto di minima velocità la manovra di frenata coincide con quella relativa al *reference case* ed è descritta dalla curva di *skidding*.

7.4 - USCITA DALLA CURVA

La figura 8 riporta l'accelerazione del veicolo motocicletta in funzione dell'angolo di rollio nella fase di uscita dalla curva. Come per il caso precedente la manovra relativa al *Reference Case* è inserita all'interno dello stesso grafico con le altre due configurazioni modificate. Le curve relative alle condizioni limite sono riportate ancora una volta in grigio scuro (*skidding* ($\mu=1.33$), *skidding* ($\mu=0.7$) e *wheelie*). Questo diagramma vuole andare ad evidenziare come le condizioni limite vadano ad influenzare la scelta della strategia ottimale da seguire per la manovra di uscita da una curva.

Analizzando il comportamento della motocicletta in configurazione nominale di riferimento, questa comincia ad accelerare dopo il punto di minima velocità a $s=223m$. una volta conclusa la fase di rollio costante la massima spinta avviene in corrispondenza di $s=291m$ per un angolo di rollio abbastanza elevato. In seguito la manovra di accelerazione prosegue con valori via via decrescenti di accelerazione e rollio.

La potenza del motore utilizzata dal pilota virtuale cresce da un valore di approssimativamente 100CV in corrispondenza del punto di minima velocità, fino a $P_{used}=143CV$ in corrispondenza del punto di accelerazione massima. Come si può notare la potenza massima erogabile dal propulsore $P_{max}=186HP$ è utilizzata solamente al termine della manovra per $s=370m$ quando oramai la motocicletta è quasi dritta e sta percorrendo il rettilineo.

Pertanto la manovra di accelerazione viene regolata esclusivamente dalla curva limite di *Skidding* la quale risulta essere la più restrittiva fino all'intersezione della curva limite del *Wheelie* ed è caratterizzata inoltre dal raggiungimento della massima accelerazione con

un consistente angolo di rollio senza sfruttare appieno la massima potenza del motore. La seconda fase, invece, è regolata dalla curva limite del *wheelie* fino all'utilizzo della massima coppia motore. Da questo punto è proprio la massima potenza del motore a regolare l'accelerazione raggiungibile dalla motocicletta, impedendo anche di raggiungere la curva relativa al *Wheelie*, distanza dalla quale cresce progressivamente proprio a causa della limitazione relativa alla spinta propulsiva utilizzabile alla ruota posteriore.

Analizzando ora la manovra relativa al caso *Lower Friction*, l'uscita dalla curva risulta notevolmente ritardata e caratterizzata da valori inferiori di accelerazione, angolo di rollio e potenza utilizzata. La massima accelerazione, infatti, si registra a $s=315m$ e si verifica una condizione di quasi pura trazione, cioè con angoli di rollio modesti. Inoltre la potenza utilizzata per la trazione è di appena $P_{used}=52HP$. Queste differenze sono da attribuire al limite dello *skidding* che è il più restrittivo per tutta la durata della manovra. Succede pertanto che il massimo valore di accelerazione si verifichi per un angolo di rollio praticamente nullo e il limite di *Wheeling* e di massima potenza non influiscano per nulla la manovra.

Nel caso *Lower Power*, invece, si nota come la fase di uscita di curva sia nettamente anticipata e caratterizzata da basse accelerazioni rispetto alla manovra effettuata nella condizione di riferimento.

Infatti, la spinta massima si verifica a $s=279m$ ed l'angolo di rollio corrispondente è considerevolmente più alto; inoltre la potenza alla ruota utilizzata ha già raggiunto il suo valore massimo pari alla potenza erogabile cioè $P_{used}=P_{max}=100CV$.

Queste differenze sono dovute principalmente alla ridotta potenza erogabile dal propulsore che limita la capacità di trazione e previene il raggiungimento da parte della motocicletta della massima accelerazione possibile, data dall'intersezione della curva di *skidding* e quella di *wheelie*.

Quindi la manovra viene descritta dalla curva di *skidding* fino alla massima accelerazione poi si sovrappone alla curva relativa alla manovra di riferimento; la potenza del motore è il fattore più limitante mentre il fenomeno del *wheelie* non lo è per nulla.

7.5 - CONCLUSIONI

In questo capitolo si è applicato il metodo della manovra ottima per simulare una semplice manovra lungo una curva ad L ed andando ad analizzare in dettaglio le fasi di frenata e di accelerazione. Sono stati quindi individuati i principali fattori limitanti le massime prestazioni lungo tutta la manovra.

Successivamente si è proceduto con un'analisi di tipo parametrico andando a variare nel contempo la massima potenza erogabile dal motore e i coefficienti di aderenza col terreno.

I risultati mostrano come una migliore aderenza migliori sempre la performance sul Time Lap. Al contrario, invece, i benefici che derivano dall'aumento della potenza del motore scompaiono oltre certi limiti. Ciò significa che un aumento della Potenza del motore comporta un miglioramento delle prestazioni se e solo se ci si trova in condizioni adeguate di aderenza pneumatico-terreno.

Sono stati quindi trovati 2 differenti tendenze: ad alte potenze e condizioni di scarsa aderenza, il Time Lap è funzione esclusivamente dall'aderenza, mentre le variazioni di potenza massima non influiscono sulle prestazioni. A basse potenze del propulsore e coefficienti di aderenza alti, invece, anche la potenza è influente.

Il confine tra le due zone definisce la potenza massima necessaria e sufficiente per eseguire la manovra della curva ad L con le massime prestazioni sfruttando al meglio l'aderenza disponibile.

A titolo d'esempio sono state analizzate 2 diverse configurazioni che rappresentano ciascuna delle 2 zone. In particolare, sono state interpretate le manovre ottimali calcolate con Xoptima attraverso l'uso di un modello semplificato di motocicletta.

La manovra con la motocicletta di riferimento è caratterizzata sostanzialmente dall'intersezione delle curve di *Stoppie* o di *Wheeling* e le curve di *skidding* che limitano i valori massimi di accelerazione o decelerazione con la motocicletta inclinata. La coppia massima erogabile dal motore è utilizzata solamente nella parte finale della fase di uscita dalla curva, cioè quando la motocicletta si trova quasi in condizioni di rollio nullo e ad alte velocità, senza limitare il raggiungimento della massima accelerazione.

La manovra dotata di un basso coefficiente di aderenza è principalmente caratterizzata da condizioni di pura accelerazione e di pura frenata cioè per angoli di rollio praticamente nulli. La manovra è quasi completamente descritta dalla curva di *skidding* mentre non è per nulla influenzata da *stoppie*, *wheelie* o dalla massima potenza del motore.

La frenata in caso di bassa potenza è notevolmente ritardata e la motocicletta è rollata per conseguenza della bassa velocità longitudinale raggiunta lungo il rettilineo di partenza. In questo modo la manovra di frenata è interamente descritta dalla curva limite dello *skidding* e non è influenzata dal fenomeno dello *stoppie*.

In maniera analoga la massima accelerazione è notevolmente anticipata, la motocicletta è rollata e la potenza disponibile è pienamente sfruttata senza raggiungere il limite della massima accelerazione raggiungibile. Oltre questo punto la potenza del motore diventa il fattore limitante principale, mentre *skidding* e *wheelie*, non limitano più l'accelerazione.

Concludendo, l'applicazione di un modello semplificato di motocicletta ha permesso lo studio dei limiti fisici della motocicletta stessa e ha permesso la corretta interpretazione dei risultati derivanti da Xoptima.

Inoltre l'analisi della curva ad L ha dimostrato come Xoptima sia uno strumento efficace e utile per investigare l'influenza combinata tra la massima potenza del motore e l'effettiva aderenza tra pneumatico e terreno.

CONCLUSIONI

Il *metodo della Manovra Ottima*, ma soprattutto il software Xoptima, è uno strumento in grado di aiutare un progettista di motociclette ad individuare quali sono i parametri che rendono la motocicletta manovrabile e maneggevole secondo le caratteristiche desiderate. Inoltre tale metodo è utile per far capire i fenomeni fisici che stanno alla base della dinamica della motocicletta.

Come dimostrato in questo lavoro, Xoptima è uno strumento affidabile e che produce risultati attendibili non solo nelle configurazioni "nominali" delle motociclette, ma attraverso la variazione dei parametri desiderati e l'esecuzione di nuove simulazioni è anche possibile verificare quali siano le manovre ottimali in diverse situazioni.

Nel corso del Capitolo 1 si è affrontato il tema della maneggevolezza legata in particolare alla misura della coppia di sterzo (grandezza d'ingresso) e confrontata con altre grandezze da controllare (l'uscita) come l'angolo di rollio, la velocità di rollio o d'imbardata. Con riferimento a questo si sono evidenziati molti parametri di progetto che influenzano queste grandezze.

Nel secondo capitolo, invece, si sono definiti i concetti di "*manovrabilità*" e "*maneggevolezza*" e sono stati legati "*all'insieme dei moti ammissibili*" di un veicolo e ci si è chiesto come sarebbe possibile misurarli con un criterio oggettivo. Il "*Metodo della Manovra Ottima*" fornisce una soluzione a questo problema e misura la prestazione di un veicolo attraverso un indice, detto "*indice di prestazione*"

Nel terzo capitolo si è affrontato in maniera più rigorosa il problema della manovra ottima da un punto di vista matematico-numerico, ponendo l'attenzione sull'applicazione pratica di questo metodo all'interno del software Xoptima.

Nel quarto capitolo sono ottenute le equazioni del Metodo della Manovra Ottima che riproducono il comportamento dinamico della motocicletta in grande. Il modello matematico è descritto nella sua interezza.

Il Capitolo 5 illustra da un punto di vista operativo il software Xoptima, in particolare come utilizzare la GUI e le varie possibilità per l'analisi dei risultati.

Nel Capitolo 6 si è presentata un'applicazione pratica di Xoptima: l'analisi ha lo scopo di migliorare le prestazioni di un motoveicolo da competizione attraverso l'ottimizzazione del gearbox.

Nel Capitolo 7 si è applicato il metodo della manovra ottima per simulare una semplice manovra lungo una curva ad L variando nel contempo l'aderenza tra pneumatici/fondo stradale e la massima potenza erogata dal motore del veicolo. I risultati mostrano come una migliore aderenza migliori sempre la performance sul Time Lap. Al contrario, invece, i benefici che derivano dall'aumento della potenza del motore scompaiono oltre certi limiti. Ciò significa che un aumento della Potenza del motore comporta un miglioramento delle prestazioni se e solo se ci si trova in condizioni adeguate di aderenza pneumatico-terreno.

Si è quindi dimostrato come le simulazioni al calcolatore possano essere un potente strumento a disposizione dei progettisti e degli ingegneri di pista per concepire e rendere più performanti le motociclette, pur confermando e difendendo il principio secondo cui la sensibilità dei piloti reali e dei collaudatori non sono sostituibili con alcun programma o modello matematico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.P. Pauwelessen R.S. Sharp, "Vehicle Dynamics and the judgment of quality Vehicle Performance," *Vehicle Performance*, pp. 87-96.
- [2] Kerry Spackman, "The future of formula one driver training," 2000.
- [3] J. Zellner D. Weir, "Development of handling test procedures for motorcycles," no. 780313, 1978.
- [4] J.Zellner D.Weir, "Lateral directional motorcycle dynamics and rider control," no. SP-428, 1978.
- [5] R.Lot, A.Doria V.Cossalter, "Steady turning of two wheels vehicles," vol. 31, no. 3, 1999.
- [6] I.H.Hsiao T.S.Liu, "Taguchi method applied to motorcycle handling," vol. 12, no. 3, 1991.
- [7] A.Hasegawa M. Sugizaki, "Experimental analysis of transient response in motorcycle rider systems," no. 881783, 1988.
- [8] D.Remde T.Schweers, "Objective assessment of motorcycle manoeuvrability," no. 93-1551, 1990.
- [9] Da Lio, Bortoluzzi Cossalter, "Experimental and theoretical study of motorcycle transfer functions for evaluating handling".
- [10] T. Nishimi, T. Okayama, A. Aoki T. Katayama, "Control behaviour of motorcycle riders," vol. I7, no. 211-229, 1988.
- [11] Y.Owada I. Kageyama, "An analysis of a riding control algorithm for two wheeled

- vehicles with a neural network modeling," vol. 25, no. 317-326, 1996.
- [12] D. Casanova, P. Symods R. Sharp, "A mathematical model for driver steering control, with design, tuning and performance results," vol. 23(5), no. 289-326, 2000.
- [13] T., Agrawal, S.K. Veeraklaew, "New computational framework for trajectory optimization of high-order," vol. 24(2), no. 228-236, 2001.
- [14] L., Cervantes, A.M., Wachter, A. Biegler,,: Chem. Eng. Sci., 2002, vol. 57(4).
- [15] F. Biral, M. Da Lio E. Bertolazzi, "Real-time motion planning for multibody systems," vol. DOI 10.1007/s11044-007-9037-7, 2007.
- [16] Cossalter, Doria, Lot Berritta, "Implementation of a motorcycle tyre model in a multi-body code," 1999.
- [17] Hans B. Pacejka, *Tyre and Vehicle Dynamics*.: Butterworth-Heinemann Ltd.
- [18] V. Cossalter, *Motorcycle Dynamics*, 2nd ed.: Lulu.com, Raleigh, North Carolina, 2006.
- [19] R. Lot, M. Massaro V. Cossalter, "The influence of Frame Compliance and Rider Mobility on the Scooter Stability," *Vehicle System Dynamics*, vol. 45, no. 4, pp. 313–326, Apri 2007.
- [20] F. Maggio, *Analisi di una motocicletta a due ruote sterzanti*.: Tesi di dottorato in Ingegneria Motociclistica.
- [21] M.Da Lio F. Biral, "Modelling drivers with the optimal manoeuvre method," in *Seventh International Conference and Exhibition*, Florence, 2001, p. 01A1029.
- [22] M. Da Lio, "Analisi della manovrabilita` dei veicoli. Un approccio basato sul controllo ottimo.," *ATA G. Assoc. Tec. Auto.*, vol. 50(1), pp. 35-42, 1997.
- [23] V., Da Lio, M., Lot, R., and Fabbri, L. Cossalter, "A general method for the evaluation of vehicle manoeuvrability with special emphasis on motorcycles," *Veh. Syst. Dyn.*, vol. 31(2), pp. 113-135, 1999.
- [24] M., Cossalter, V., Biral, F., and Fabbri, L. Da Lio, "Evaluation of motorcycle manoeuvrability with the optimal maneuver method.," *SAE paper*, no. 983022, 1998.
- [25] E., Biral, F., and Da Lio, M. Bertolazzi, "Symbolic- numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems," *J. Comput. Appl. Math.*, no. 185 (2), pp. 404–421, 2006.
- [26] S., Lot, R., and Biral, F. Garbin, "Enhancing the performance of high-powered motorcycles by a proper definition of geometry and mass distribution," *SAE paper*,

no. 01-3345, 2002.

- [27] V., Da Lio, M., Lot, R., and Fabbri, L. Cossalter, "Simulation and performance evaluation of race motorcycle dynamics based on parts of real circuit.," in *Proceedings of the ATA International Conference Atti*, Orbassano, 1998, pp. 99–112.
- [28] F., Lot, R., and Peretto, M. Biral, "Optimization of the layout of a racing motorcycle using the optimal maneuver method," in *Proceedings of the 20th International Symposium on The dynamics of vehicles on roads and tracks (IAVSD 2007)*, Berkeley (California), 2007.
- [29] F. and Da Lio, M. Biral, "Metodo della manovra ottima e le sue applicazioni," in *15th AIMETA Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Taormina, 26–29 September 2001.
- [30] V., Massaro, M., Bobbo, S., and Peretto, M Cossalter, "Application of the 'optimal maneuver method' for enhancing racing motorcycle performance," *SAE Int. J. Passeng. Cars – Mech. Syst.*, no. 1(1), pp. 1311–1318, 2001.
- [31] F. and Lot, R. Biral, "An interpretative model of g-g diagrams of racing motorcycle," in *In Proceedings of the Third International Conference on Mechanical Engineering and Mechanics (ICMEM 2009)*, Beijing, People's Republic of China, 21–23 October 2009, pp. 1700–1706, vol.2.
- [32] M Peretto, and S Bobbo V Cossalter, "Investigation of the influences of tyre–road friction and engine power on motorcycle racing performance by means of the optimal manoeuvre method," *Proc. IMechE J. Automobile Engineering*, vol. 224 Part D, no. 1312, pp. 503-519, 2009.