



Department of Statistical Sciences  
University of Padua  
Italy

UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA  
DIPARTIMENTO  
DI SCIENZE  
STATISTICHE

## Interventi strategici e aspetti competitivi nel ciclo di vita di innovazioni

Strategic interventions and competitive aspects in innovation life cycle

**Renato Guseo**

Department of Statistical Sciences  
University of Padua  
Italy

**Abstract:** Technological innovations and new services may be considered as diffusion processes which are not stationary statistical time series due to life cycle effects. Riccati equation (1676–1754) may be thought as a foundation of the well-known Bass model (1969). The essay-paper is devoted to a discussion of this diffusion model with reference both to the univariate and multivariate extensions of the original one in order to cover the new relevant advances within strategic intervention, competition and space and time interaction.

**Keywords:** Generalized Bass model, Riccati equation, successive generations, competition, extended Lotka-Volterra equations, crude oil depletion models.

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>DIFFUSIONI TEMPORALI</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modelli di crescita e di diffusione</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>L'equazione di Riccati ed i modelli di Bass, BM e GBM</b>	<b>6</b>
3.1	L'equazione di Riccati a coefficienti costanti . . . . .	6
3.2	Il modello standard di Bass, BM . . . . .	7
3.2.1	BM: soluzione compatta . . . . .	9
3.2.2	Magdalene: ciclo di programmazione locale di un film . . . . .	10
3.3	BM con origine dei tempi parametrica . . . . .	12
3.3.1	Microgenerazione di energia elettrica e di calore . . . . .	14
3.4	Funzione integrale e tempo medio in BM . . . . .	16
3.5	Quantili e differenza interquantilica in BM . . . . .	16
3.6	Quote di BM e aspetti asintotici . . . . .	17
3.7	Il modello di Bass, Krishnan e Jain, GBM . . . . .	18
3.7.1	GBM: soluzione compatta . . . . .	19
3.7.2	GBM: origine parametrica dei tempi . . . . .	20
3.7.3	Scelta della funzione di intervento sulla "portante" . . . . .	21
3.7.4	Impulsi rettangolari . . . . .	22
3.7.5	Tempi di esaurimento del Gas Metano . . . . .	22
3.7.6	Impulsi esponenziali . . . . .	25
3.7.7	Crude Oil: le riserve U.S.A. . . . .	25
3.7.8	Impulsi misti . . . . .	28
3.7.9	Il crude oil del mare del nord: Gran Bretagna . . . . .	28
3.7.10	Impulsi armonici . . . . .	32
3.7.11	Impulsi di Riccati . . . . .	33
3.7.12	Diffusione univariata: Tavola riassuntiva . . . . .	34
3.8	Quote di GBM e aspetti asintotici . . . . .	34
3.9	GBM e BM nell'interpolazione di funzioni . . . . .	35
3.9.1	Interpolazione mediante BM o GBM successivi . . . . .	36
3.9.2	Curva di mortalità dei maschi italiani: anno 2000 . . . . .	36
3.9.3	Miscuglio di modelli BM o GBM . . . . .	39
3.10	Potenziale e interventi modulabili . . . . .	40
3.10.1	Un modello di Riccati con un potenziale variabile, RPV . . . . .	40
3.10.2	Modulazione degli interventi in presenza di un potenziale variabile: GRPV . . . . .	42
3.11	Modelli non lineari autoregressivi: identificazione statistica . . . . .	42
3.12	Tempi di esaurimento del Crude Oil . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Generazioni successive indipendenti con assorbimento totale</b>	<b>50</b>
4.1	Generazioni successive: BM indipendenti . . . . .	51
4.2	Aspetti di stima simultanea: BM indipendenti . . . . .	52
4.3	Generazioni successive: il parco automobilistico italiano . . . . .	52
4.4	Generazioni successive: GBM indipendenti . . . . .	56

<b>5</b>	<b>Generazioni successive indipendenti con assorbimento parziale</b>	<b>56</b>
5.1	Generazioni successive indipendenti con migrazione parziale: BM e GBM . . . . .	56
<b>6</b>	<b>La competizione tra generazioni dipendenti parzialmente coeve</b>	<b>57</b>
6.1	Modello di Guseo–Bonaldo, GB-M, per due competitori coevi . . . . .	57
6.1.1	Soluzione compatta dell’equazione GB-M . . . . .	59
6.1.2	GB-M per vari competitori coevi . . . . .	60
6.2	Competitori parzialmente coevi, GB-MS . . . . .	60
6.3	Interventi ambientali: GGB-M, GGB-MS . . . . .	62
6.4	Equazioni di Lotka–Volterra: predatore–preda . . . . .	64
6.5	Equazioni di Lotka–Volterra: competizione, sostituzione, coesistenza	65
6.6	Equazioni estese di contesa: LVBC e LVGBC . . . . .	65
6.7	Equazioni estese di contesa con interventi ambientali comuni: GL-VGBC . . . . .	66
<b>II</b>	<b>DIFFUSIONI SPAZIO – TEMPORALI</b>	<b>67</b>
<b>7</b>	<b>Ambiente spazio–temporale</b>	<b>67</b>
7.1	Modello spazio–temporale generalizzato di Bass: STGBM . . . . .	67
7.2	Modello spazio–temporale generalizzato di Guseo–Bonaldo: STGGB-M . . . . .	70

---

**Department of Statistical Sciences**  
Via Cesare Battisti, 241  
35121 Padova  
Italy

tel: +39 049 8274168  
fax: +39 049 8274170  
<http://www.stat.unipd.it>

**Corresponding author:**  
Renato Guseo  
tel: +39 049 827 4146  
[renato.guseo@unipd.it](mailto:renato.guseo@unipd.it)  
<http://homes.stat.unipd.it/guseo/>

# Interventi strategici e aspetti competitivi nel ciclo di vita di innovazioni

## Strategic interventions and competitive aspects in innovation life cycle

**Renato Guseo**

Department of Statistical Sciences

University of Padua

Italy

**Abstract:** Technological innovations and new services may be considered as diffusion processes which are not stationary statistical time series due to life cycle effects. Riccati equation (1676–1754) may be thought as a foundation of the well-known Bass model (1969). The essay-paper is devoted to a discussion of this diffusion model with reference both to the univariate and multivariate extensions of the original one in order to cover the new relevant advances within strategic intervention, competition and space and time interaction.

**Keywords:** Generalized Bass model, Riccati equation, successive generations, competition, extended Lotka-Volterra equations, crude oil depletion models.

## 1 Introduzione

La diffusione di una innovazione in un mercato o in un sistema sociale è un tema di notevole interesse nella gestione delle imprese o nel governo di istituzioni pubbliche. La conoscenza precoce delle dimensioni qualitative e quantitative di tali processi consente l'introduzione di opportune scelte strategiche il cui orizzonte operativo dipende molto dalla velocità di penetrazione e dall'ampiezza del mercato o dei gruppi di cittadini raggiungibili. I modelli analitici *parsimoniosi* che consentono la descrizione e la previsione per queste serie storiche debbono tener conto di alcuni aspetti cruciali, più precisamente,

- a) le serie storiche delle prime adozioni sono piuttosto corte sotto il profilo numerico;
- b) i processi di adozione presentano un ciclo di vita relativamente breve con evidenti *non-stazionarietà* dovute a meccanismi di *inizializzazione* nella fase di lancio e a vincoli di *saturatione* nella fase conclusiva;
- c) l'approccio statistico di taglio polinomiale basato sui processi ARIMA si rivela spesso inadeguato poiché è concettualmente pensato per processi stazionari-zabili mediante opportune differenziazioni.

Il presente saggio si configura come una discussione ragionata su una classe di modelli che ha un rilievo di spessore nel marketing strategico da cui trae origine ed ispirazione

primaria. L'analisi proposta si rende tuttavia disponibile per altri contesti applicativi sostanzialmente lontani da questo riferimento, si pensi, ad esempio, alla descrizione dei processi diffusivi di tipo epidemiologico o alla rappresentazione dei fenomeni di migrazione tecnologica.

Tale separazione nei contesti applicativi è solo apparente poiché è possibile riconoscere un punto di contatto tra queste tematiche proprio nel meccanismo fondamentale che opera con continuità all'interno dei sistemi socio-economici, biologici o fisici: il linguaggio interno o locale di comunicazione e controllo.

Il riferimento principale è rivolto al modello di Bass (1969), modello che ha ispirato un settore importante delle tecniche gestionali nelle imprese moderne, soprattutto negli U.S.A., e che ha fornito, in termini talvolta discutibili, uno strumento concreto e versatile. In tale modello si privilegia una rappresentazione fenomenologica comportamentista e non cognitivista come scelta culturale di fondo. Si è interessati alla definizione della dinamica del sistema mediante una struttura ridotta a livello parametrico in modo tale che il modello risulti identificabile e significativo sul piano del controllo statistico. Una scelta di tipo comportamentista oltre ad apparire spesso non necessaria, implica una disponibilità di risorse investigative e di controllo sperimentale che sono lungi dall'essere così comuni.

L'idea di fondo del modello di Bass si basa sul completamento del modello logistico di Verhulst – in cui l'inizializzazione del processo diffusivo coincide con una semplice condizione iniziale di tipo statico – mediante un processo monomolecolare che descrive in modo più realistico tale inizializzazione in un contesto sociale. Contesto in cui i linguaggi di comunicazione e di controllo regolano implicitamente le velocità e le *carrying capacity* concretamente implementate o disponibili.

Il modello di Bass non è tuttavia un'acquisizione recente. Si possono far risalire al Conte Jacopo Riccati (1676–1754), nato a Venezia e vissuto prevalentemente a Castelfranco Veneto (Treviso), i primi studi su una classe di equazioni differenziali scalari che portano ora il suo nome. Una interessante e ricca ricostruzione storica della vita dello studioso, che ebbe ottimi rapporti con il mondo accademico locale ed internazionale, è dovuta a Bittanti (1991), curatore di una collettanea di lavori dedicati a “The Riccati Equation” nel contesto del *Calcolo delle Variazioni* e della *Teoria del Controllo*. In tale contesto l'equazione, anche in forma matriciale, ha un ruolo indiretto di grande rilievo nella caratterizzazione dei controlli ottimi per processi a *loop-chiuso*; si veda, ad esempio, Zelikin (2000).

La raccolta di idee qui di seguito presentata evidenzia, a differenza del caso precedente, un ruolo più diretto di tale equazione nei processi di diffusione. Le applicazioni non sono circoscrivibili, come si è detto, alle sole tematiche tipiche del marketing dei prodotti. Alcune recenti applicazioni evidenziano un suo ruolo anche in contesti largamente differenti come lo studio dei processi di immatricolazione ai nuovi corsi di laurea; lo studio dei tempi di esaurimento delle riserve petrolifere mondiali in funzione delle serie del petrolio già estratto; l'analisi parallela del processo mondiale di estrazione del gas metano; lo studio dei processi di estrazio-

ne del petrolio in siti più circoscritti, come ad esempio nel mare del Nord (Gran Bretagna e Norvegia), in Alaska, negli U.S.A. ecc.; la diffusione di particolari servizi di *home-banking* e di *trading-on-line*; la taratura delle procedure di controllo amministrativo-contabile nell'erogazione di speciali servizi bancari per le *pmi*; l'analisi delle prospettive di sviluppo del mercato automobilistico italiano e cinese; lo studio delle tavole di mortalità e, in particolare, dei decessi distinti per genere in Italia; lo studio delle dinamiche di commercializzazione di particolari trasmissioni meccaniche per differenti segmenti nel settore motonautico; l'analisi della velocità di diffusione in Italia dei nuovi sistemi di cogenerazione di calore e di energia elettrica.

Il lavoro si compone di due parti principali. Nella prima si sviluppano gli strumenti univariati e multivariati in un contesto dedicato alle diffusioni temporali. Nella seconda parte si trattano anche gli aspetti spaziali delle diffusioni che fanno perno sulla modellazione di Bass-Riccati e Guseo-Bonaldo.

Il secondo paragrafo introduce le tematiche dei modelli di crescita e di diffusione e pone un'enfasi particolare sul ruolo dei linguaggi di comunicazione e delle relazioni in un sistema.

Nel terzo paragrafo si propone un'analisi dell'equazione scalare di Riccati seguita dalla presentazione del modello di Bass standard (1969), BM, e dalla successiva descrizione del modello di Bass generalizzato, GBM, dovuta a Bass, Krishnan e Jain (1994). In questo contesto vengono affinate alcune strumentazioni di base per la modellazione degli impulsi rari associati a formule di intervento nel processo evolutivo naturale dell'innovazione.

Una particolare attenzione è dedicata alla modellazione del potenziale o della *carrying capacity* in ambienti in cui sono modulabili gli interventi. Ulteriori aspetti sono associati allo studio di particolari meccanismi interpolatori o mediante miscugli, nell'ipotesi di compresenza di vari impulsi evolutivi.

I paragrafi 4 e 5 affrontano il problema delle generazioni successive di innovazioni sotto le ipotesi di migrazione totale o parziale.

Il paragrafo 6 tratta in termini multivariati la problematica della competizione tra generazioni dipendenti parzialmente coeve. Il punto di partenza è il modello di Guseo-Bonaldo proposto nel (1991) e riproposto di recente, in modo indipendente, da Krishnan, Bass e Kumar (2000). In questo stesso paragrafo si trattano le equazioni affini di Lotka-Volterra e si propone un modello più generale che comprende i due precedenti come casi particolari. Si valorizzano poi gli aspetti collegati alle azioni di intervento sui processi congiunti.

Il paragrafo 7 tratta le dinamiche associate agli aspetti spaziali in modo separato e congiunto rispetto alla componente temporale.

## Parte I

# DIFFUSIONI TEMPORALI

## 2 Modelli di crescita e di diffusione

Nella rappresentazione astratta dei fenomeni fisici, biologici o sociali gioca un ruolo centrale la definizione di un sistema semplificato che possa tener conto degli aspetti evolutivi di componenti variabili *in ingresso*, di meccanismi di controllo o di autoregolazione e, infine, di segnali di caratterizzazione degli effetti *in uscita*. I livelli fisico, biologico e sociale stabiliscono in modo relativamente autonomo le dimensioni della gerarchia organizzativa tipica di ciascun ambiente.

Il livello fisico tratta popolazioni che occupano differenti gradi di organizzazione della materia: si va dalla dinamica delle componenti elementari e dalla struttura delle *forze* che collegano tali componenti o stringhe, alla rappresentazione, su scala più ampia, di moti e forme aggregate di larghe masse quali i pianeti, le stelle, le galassie, ecc.. Tali forze costituiscono, in un certo senso, un linguaggio primario.

Il livello biologico si fonda sul precedente ed innesta i meccanismi della comunicazione intracellulare e intercellulare, i meccanismi della riproduzione, della differenziazione e della selezione che garantiscono forme di sopravvivenza (dei geni) basate sull'acquisizione di entropia negativa entro un orizzonte temporale finito. Cellule, organi e organismi controllano parzialmente ed in modo selettivo il proprio orizzonte vitale, il proprio ciclo di vita. I meccanismi funzionali alla base di questi processi risiedono principalmente nel DNA-RNA e in altre componenti analogiche della comunicazione chimico-biologica.

Il livello sociale, in senso esteso, dà luogo a forme organizzate di popolazioni o di gruppi di organismi tra i quali vengono istituiti meccanismi di innovazione, specializzazione e selezione ampiamente fondati sulla presenza di forme naturali, tecnologiche e astratte di linguaggi di comunicazione e di controllo. I linguaggi di questo livello presentano, in prevalenza, una connotazione sintattica e rispondono a regole di coerenza, di non contraddittorietà e di consistenza in larga parte comuni e con distinti gradi di rigidità.

Il linguaggio definisce il "limite geografico" che caratterizza lo specifico sistema sociale così come le membrane separano le cellule tra di loro ed i sistemi immunitari degli organismi dettano i confini di identificazione del sistema vivente.

È perciò interessante osservare come, alla base di queste strutture di controllo e di rappresentazione, si trovino spesso degli archetipi matematici comuni. Uno di questi è il concetto di *funzione* che consente la valorizzazione di corrispondenze sufficientemente sistematiche atte a garantire la stabilità delle relazioni causali. Un altro esempio è la nozione di *rumore* (*noise*). Quest'ultimo è associato ai processi casuali di differenziazione e di selezione ottimizzante che implicitamente legittimano la stabilità del meccanismo funzionale di trasferimento o di trasformazione dell'in-

formazione. Come è noto, l'entropia si riduce in conseguenza di trasformazioni.

Si trasferiscono, vita, energia, conoscenza, ecc.. Le regole temporali di trasferimento e di controllo sono rappresentabili in modi piuttosto semplici e probabilmente comuni. I meccanismi di nascita, crescita, maturità, declino e morte appaiono in molti di questi sistemi. Li differenzia sicuramente l'ampiezza temporale entro la quale si realizzano, tuttavia, un carattere piuttosto comune è la presenza di principi e di tecniche di regolazione dello scambio che governano o meglio auto-governano la popolazione, l'organismo o il processo fisico di riferimento. In questo dominio i linguaggi realizzano sicuramente una mediazione di rilievo.

Le forme funzionali disponibili sul piano matematico per tali rappresentazioni temporali sono molteplici. Qui si cercherà di sottolineare e di valutare, in termini comparativi, una serie di modelli non lineari che appaiono adatti a descrivere in modo *flessibile e parsimonioso* tali processi di trasferimento, processi che caratterizzano i cicli di vita e l'eventuale competizione tra questi in un *dominio temporale*.

Si tratta di esprimere quindi, in modo rigoroso, il comportamento dei processi non stazionari a ciclo di vita limitato sia in termini univariati sia in termini multivariati. In questo secondo caso insorge il problema dell'interazione sostitutiva, competitiva o predatoria che richiede particolari attenzioni.

È necessario però ricordare che non è sufficiente predisporre un modello parsimonioso astratto. Non bastano le caratterizzazioni analitiche dello strumento. Nei comportamenti reali, come si è detto più sopra, intervengono micro fattori di disturbo o di differenziazione accidentale che modificano, in modo non prevedibile, il comportamento locale.

Al modello di trasferimento puro deve essere quindi associata anche una struttura che rappresenti il meccanismo parzialmente aleatorio di realizzazione. La modellazione statistica prende le mosse da realizzazioni parziali di tali processi e su questa base fornisce strumenti di stima o di identificazione delle strutture latenti attraverso gli osservabili, consentendo così i controlli di ipotesi sui regimi correnti e, soprattutto, previsioni in termini temporali supportate da criteri di stabilità, di significatività o di tolleranza.

Il tema delle previsioni è tuttavia a spettro piuttosto ampio: comprende sia la parte stocastica che ammette una rappresentazione stazionaria sia la componente "più deterministica" di carattere regolatore che può essere ascritta ad "interventi" non casuali in senso stretto ma frutto di scelte che consentono il libero controllo. La componente inferenziale è spesso un terreno insicuro e deve essere affrontata con le metodologie più appropriate fornite dalla statistica. A nulla vale conoscere la storia se questa è già pienamente compiuta. L'analisi predittiva può incorporare al meglio le componenti sistematiche già osservate parzialmente e le componenti stazionarie del processo aleatorio residuale. Restano ovviamente spazi interpretativi per la simulazione condizionata a scenari che esplicitano, per questa via, il ruolo del libero arbitrio la cui ampiezza relativa dipende dal contesto. La caratterizzazione

anticipatrice della forma dei cicli di vita consente la regolazione, il controllo, la sostituzione programmata e quindi – entro certi limiti – l'intervento.

### 3 L'equazione di Riccati ed i modelli di Bass, BM e GBM

#### 3.1 L'equazione di Riccati a coefficienti costanti

Si consideri innanzitutto l'equazione di Riccati a coefficienti costanti

$$y' + ay^2 + by + c = 0, \quad (1)$$

ove  $a, b$  e  $c \in R$ . Siano  $r_1$  e  $r_2$  le soluzioni dell'equazione caratteristica di secondo grado (si assume  $a \neq 0$ ),  $ap^2 + bp + c = 0$ . La (1) si può rappresentare quindi come funzione delle radici (eventualmente complesse)  $r_1, r_2$ ,

$$y' + a(y - r_1)(y - r_2) = 0. \quad (2)$$

Nell'ipotesi in cui le radici  $r_1$  e  $r_2$  siano *reali* e *distinte*  $r_i = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ ,  $i = 1, 2$ , con  $b^2 - 4ac > 0$ , posto convenzionalmente  $r_2 > r_1$ , si ha

$$a(r_2 - r_1) = (b^2 - 4ac)^{1/2}. \quad (3)$$

Se si ipotizza  $y \neq r_2$ , la (2) può essere scritta come un rapporto opportuno,

$$-\frac{y'}{(y - r_2)^2} = \frac{a(y - r_1)}{(y - r_2)}. \quad (4)$$

Si derivi ora il secondo membro della (4),

$$\left(\frac{a(y - r_1)}{(y - r_2)}\right)' = \frac{ay'(y - r_2) - y'(y - r_1)a}{(y - r_2)^2} = \frac{-y'a(r_2 - r_1)}{(y - r_2)^2}. \quad (5)$$

Si consegue una forma che coincide, a meno della costante moltiplicativa  $a(r_2 - r_1)$ , con il primo membro della (4). L'unica funzione  $y(x)$  che soddisfa tale proprietà è l'esponenziale,  $z = \alpha e^{\beta x}$ , cui corrisponde,  $z' = \beta \alpha e^{\beta x} = \beta z$ .

Compattando quindi il parametro  $a$  nella costante indeterminata  $C_0$  si può scrivere la soluzione generale della (2). Precisamente, si ottiene

$$\frac{y - r_1}{y - r_2} = C_0 e^{a(r_2 - r_1)t} \quad (6)$$

ovvero, in forma esplicita,

$$y = \frac{r_1 - r_2 C_0 e^{a(r_2 - r_1)t}}{1 - C_0 e^{a(r_2 - r_1)t}}. \quad (7)$$

La derivata prima rispetto a  $t$  della (7) porge

$$y' = \frac{-a C_0 e^{a(r_2 - r_1)t} (r_2^2 - 2r_1 r_2 + r_1^2)}{(C_0 e^{a(r_2 - r_1)t} - 1)^2}, \quad (8)$$

ove il limite di  $y'(t)$ , per  $t \rightarrow \pm\infty$ , è sempre nullo,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y' = 0$ . Per  $a > 0$  la soluzione (7) è dotata di due asintoti, precisamente,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = r_1$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = r_2$ . Si ha il viceversa per  $a < 0$ .

Se si impone il passaggio per l'origine,  $y(0) = 0$ , si ha  $C_0 = \frac{r_1}{r_2}$ , per cui, posto  $r_2 \neq 0$  e  $r_1 \neq 0$ , e moltiplicando il numeratore ed il denominatore della (7) per  $-e^{-a(r_2-r_1)t}$  si ottiene una forma più comoda per il prosieguo

$$y = \frac{1 - e^{-a(r_2-r_1)t}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}e^{-a(r_2-r_1)t}}. \quad (9)$$

La funzione (9) ha quindi come asintoti  $r_2$  e  $r_1$  e passa per l'origine. Naturalmente, se  $r_1 r_2 > 0$ , la funzione (9) non può essere monotona. Se invece  $r_1 r_2 < 0$ , si ha la monotonia crescente (curva non spezzata). Si osservi che la funzione ha una discontinuità laddove il denominatore della (9) si annulla. Ciò avviene solo se  $r_1$  e  $r_2$  sono dello stesso segno.

### 3.2 Il modello standard di Bass, BM

L'equazione di base del modello di Bass standard (1969), BM, si ottiene come caso particolare dell'equazione di Riccati a coefficienti costanti e assume la forma,

$$y' = (p + qy)(1 - y), \quad p, q > 0, \quad (10)$$

ove  $y$  è una funzione di ripartizione e  $y'$  è la corrispondente densità. La ripartizione è usualmente riferita all'indice temporale  $t$  ed esprime quindi la probabilità che l'evento si sia verificato non oltre  $t$ . Una veste equivalente alla (10) è la seguente che definisce il modello di Bass come un *hazard rate* particolare, precisamente,

$$\frac{y'}{1 - y} = (p + qy), \quad p, q > 0. \quad (11)$$

Se si fa riferimento ad un conteggio in termini assoluti degli eventi di interesse allora si pone

$$z = ym, \quad (12)$$

con  $m$  costante positiva detta anche capacità portante o *carrying capacity*. In un fenomeno cumulato in termini assoluti  $m$  rappresenta il totale della numerosità degli eventi nel dominio di riferimento, in questo caso il tempo  $t$ . Nel caso del lancio di un prodotto industriale  $m$  rappresenta il mercato totale raggiungibile.

L'analogo dell'equazione (10) è allora

$$z' = m \left( p + q \frac{z}{m} \right) \left( 1 - \frac{z}{m} \right) = \left( p + q \frac{z}{m} \right) (m - z). \quad (13)$$

In altre parole, la variazione istantanea del processo di accumulo delle vendite è governato dalla somma di due componenti: il primo addendo  $p(m - z)$  esprime, con il parametro  $p$ , l'effetto *innovativo* del processo dovuto principalmente all'azione esterna (comunicazione d'impresa, azione pubblicitaria) ed è direttamente proporzionale

al mercato residuo. Tale effetto, come è ovvio, si riduce temporalmente ma ha il pregio di rendere evidente il meccanismo di inizializzazione dell'intero processo diffusivo evidenziando il ruolo di promotore svolto da una sottopopolazione leader. Il secondo addendo,  $q\frac{z}{m}(m-z)$ , esprime, con il parametro  $q$  controllato da una componente inerziale o di penalizzazione variabile,  $q\frac{z}{m}$ , l'effetto *imitativo* del processo, dovuto in larga misura al cosiddetto passaparola (*word-of-mouth*), ed è ancora direttamente proporzionale al mercato residuo corretto con una penalizzazione decrescente. Si noti, pertanto, che il modello di Bass è la somma di due sottomodelli: il modello monomolecolare per la componente innovativa e il modello logistico di Verhulst (1838) per l'imitativa.

L'equazione (10) diventa quindi esprimibile come segue:

$$y' + qy^2 + (p - q)y - p = 0. \quad (14)$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono  $r_1 = -\frac{p}{q}$  e  $r_2 = 1$ , per cui,  $a(r_2 - r_1) = p + q$ . Nelle applicazioni più tipiche del modello,  $1 - y$  e  $y'$  sono termini positivi, per cui necessariamente  $p$  e  $q$  risultano definiti positivi. In questo caso quindi  $a = q$  e  $r_1 < 0 < r_2$ . La soluzione passante per l'origine,  $y(0) = 0$ , ha come asintoti  $-\frac{p}{q}$  e 1 ed è monotona crescente.

Per sostituzione si ottiene pertanto

$$y(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}, \quad (15)$$

ovvero, poiché  $z = ym$ ,

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}, \quad t > 0; \quad p, q > 0. \quad (16)$$

Il modello di Bass è parzialmente lineare nel parametro  $m$  e, in particolare, il controllo dell'asintoto superiore è dovuto ad  $m$  poiché  $r_2 = 1$ .

Il punto di flesso di  $z(t)$  si ottiene per

$$t^+ = \frac{\ln(q/p)}{(p+q)} \quad (17)$$

ed ivi la funzione assume il valore

$$z(t^+) = m(1/2 - p/2q), \quad (18)$$

a cui corrisponde il tasso massimo di crescita prima della saturazione,

$$w_M = m \left( \frac{p^2}{4q} + \frac{q}{4} + \frac{p}{2} \right) = m \frac{(p+q)^2}{4q}. \quad (19)$$

Si dimostra che  $y'(t)$  è simmetrica limitatamente all'intervallo  $(0, 2t^+)$  con asse in  $t^+$ ,

$$y'(t) = \frac{p(p+q)^2 e^{-(p+q)t}}{(p + qe^{-(p+q)t})^2}. \quad (20)$$

### 3.2.1 BM: soluzione compatta

L'equazione differenziale alla base del modello di Bass è

$$y' = (p + qy)(1 - y), \quad (21)$$

con condizione iniziale  $y(0) = 0$ , ove  $y' = dy/dt$  e  $y = y(t) = z(t)/m(t)$ . La funzione associata alla *carrying capacity*,  $m(t)$ , può essere variabile in  $t$ . Il problema rientra nella classe delle equazioni di Riccati e può essere ridotto ad un'equazione lineare del primo ordine con due sostituzioni.

Si definisca la trasformazione

$$\dot{y} = 1 - y, \quad (22)$$

cui corrisponde  $\dot{y}' = d\dot{y}/dt = -y'$ .

Se si sostituisce  $\dot{y}$  in (21) si consegue

$$-\dot{y}' = (p + q)\dot{y} - q\dot{y}^2, \quad (23)$$

con condizione iniziale  $\dot{y}(0) = 1$ , ovvero, dividendo entrambi i membri per  $\dot{y}^2 \neq 0$  si ha la forma equivalente

$$-\frac{\dot{y}'}{\dot{y}^2} = (p + q)\frac{1}{\dot{y}} - q.$$

Si definisca ora un'altra sostituzione per  $\dot{y} \neq 0$ , precisamente,

$$\hat{y} = 1/\dot{y},$$

per cui  $\hat{y}' = d\hat{y}/dt = -\dot{y}'/\dot{y}^2$ .

Sostituendo ora nella (23) si consegue l'equazione

$$\hat{y}' = (p + q)\hat{y} - q,$$

con condizione iniziale  $\hat{y}(0) = 1$ , equazione che è nella forma  $y'(x) = P(x)y(x) + Q(x)$  soggetta al vincolo  $y(a) = b$  ed ha come soluzione, utilizzando il metodo della variazione dei parametri, Apostol (1978, p. 31),

$$y(x) = be^{\int_a^x P(\xi)d\xi} + e^{\int_a^x P(\xi)d\xi} \int_a^x Q(\tau)e^{-\int_a^\tau P(\xi)d\xi} d\tau. \quad (24)$$

La soluzione in  $\hat{y}$  è quindi,

$$\begin{aligned} \hat{y} &= e^{(p+q)t} - qe^{(p+q)t} \int_0^t e^{-(p+q)\tau} d\tau \\ &= e^{(p+q)t} \left[ 1 - \frac{q}{p+q} (1 - e^{-(p+q)t}) \right] \\ &= \frac{q + pe^{(p+q)t}}{p+q}. \end{aligned}$$

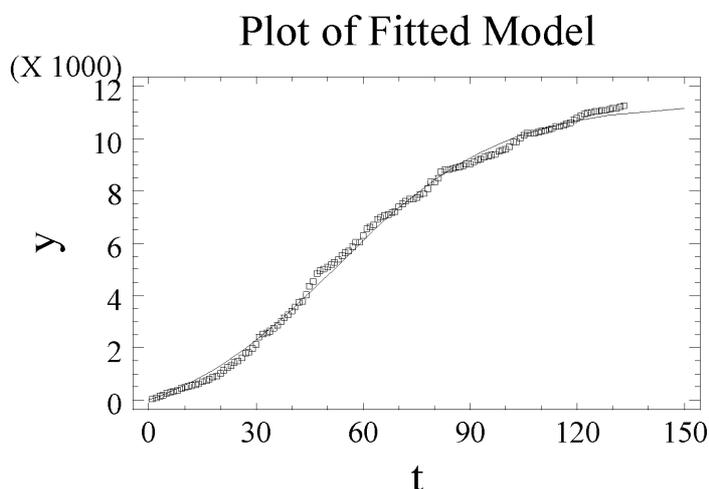
Se si ritorna alle variabili  $y'$  e  $y$  si ha

$$\begin{aligned}
y &= 1 - \frac{p+q}{q+pe^{(p+q)t}} \\
&= \frac{e^{(p+q)t} - 1}{\frac{q}{p} + pe^{(p+q)t}} \\
&= \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}.
\end{aligned} \tag{25}$$

### 3.2.2 Magdalene: ciclo di programmazione locale di un film

La programmazione locale di un film dipende, come è noto, dalle indicazioni che provengono dai distributori dello specifico prodotto ma anche dalla natura del film. Nell'ambito dei cosiddetti *film d'essai* si distinguono naturalmente sottocategorie più commerciali, rivolte ad un pubblico più ampio, e film d'essai in senso stretto, rivolti ad un pubblico particolare o di nicchia. La differenziazione è di estremo interesse poiché chiaramente si associa alle varie modalità di comunicazione che possono essere intraprese per raggiungere il potenziale cliente e, soprattutto, per convincerlo a vedere il film proposto.

I canali di comunicazione sono molto differenti e comprendono la pubblicità televisiva, la pubblicità a mezzo stampa o con affissioni pubbliche ed il canale autonomo, spesso di gran lunga il più importante, fondato sul passaparola (*word-of-mouth*).



**Figura 1:** Magdalene: Affluenza cumulata degli spettatori presso un cinema multisala di Padova: stima con BM .

Il film che si considera in questa sede è stato oggetto, fra gli altri, di una prima analisi in Conte (2004). Si è scelto questo esempio poiché il ciclo descritto, a meno di affinamenti autoregressivi che saranno trattati nel prosieguo, è essenzialmente concluso. Questo non deve trarre in inganno: l'uso più proprio della modellazione dei cicli di vita ha senso pieno in un contesto anticipativo. Qui ci si limita naturalmente

all'analisi del ciclo completo potendosi produrre *ex post*, in modo del tutto analogo, un'analisi *in itinere* che simula differenti orizzonti conoscitivi.

Il film *Magdalene* qui proposto ha potuto avvalersi di un forte sostegno sui *media*, in quanto vincitore di importanti premi del settore. Le caratteristiche evolutive del processo di distribuzione del film dipendono naturalmente dal periodo in cui questo viene lanciato e dalla specifica concorrenza che deve affrontare. In questo senso i gestori possono utilizzare un'ampia esperienza che facilita la progettazione dei tempi di programmazione. È tuttavia importante notare come possa essere talvolta estremamente utile, anche ai fini di un controllo anticipativo, poter disporre di uno strumento utile per la previsione precoce dell'andamento temporale dei possibili fruitori sia pur con dei margini di incertezza.

Nel caso specifico di *Magdalene* i dati a disposizione riguardano l'affluenza degli spettatori in 133 spettacoli consecutivi relativi ad un periodo di due mesi di proiezione presso un cinema multisala di Padova. Gli spettatori complessivi nel periodo ammontano a 11274 unità.

1	26	28	1811	55	5616	82	8735	109	10235
2	84	29	1961	56	5725	83	8802	110	10277
3	150	30	2111	57	5858	84	8814	111	10329
4	186	31	2410	58	6021	85	8851	112	10344
5	266	32	2515	59	6051	86	8910	113	10411
6	294	33	2574	60	6278	87	8923	114	10466
7	343	34	2630	61	6549	88	8971	115	10474
8	380	35	2732	62	6605	89	9026	116	10516
9	442	36	2839	63	6705	90	9046	117	10566
10	469	37	2989	64	6899	91	9127	118	10610
11	500	38	3128	65	6996	92	9193	119	10712
12	528	39	3271	66	7049	93	9207	120	10800
13	567	40	3400	67	7102	94	9281	121	10885
14	617	41	3546	68	7165	95	9348	122	10934
15	683	42	3736	69	7224	96	9352	123	10993
16	743	43	3781	70	7386	97	9420	124	11029
17	798	44	4035	71	7505	98	9516	125	11036
18	869	45	4355	72	7600	99	9563	126	11060
19	917	46	4520	73	7671	100	9594	127	11086
20	1018	47	4840	74	7685	101	9714	128	11087
21	1121	48	4930	75	7748	102	9864	129	11134
22	1234	49	5004	76	7883	103	9897	130	11164
23	1321	50	5085	77	7905	104	10012	131	11167
24	1421	51	5202	78	8076	105	10128	132	11229
25	1503	52	5259	79	8326	106	10193	133	11274
26	1603	53	5374	80	8356	107	10200		
27	1773	54	5514	81	8494	108	10227		

L'analisi viene condotta mediante il modello standard di Bass, BM, in un contesto regressivo non lineare. In questo caso l'origine della serie è nota ed il ciclo, come già ricordato, è essenzialmente completo.

I risultati principali sono i seguenti.

#### Nonlinear Regression

-----  
Dependent variable: y

Independent variables: t

Function to be estimated:  $m \cdot (1 - \text{EXP}(-(p+q) \cdot t)) / (1 + (q/p) \cdot \text{EXP}(-(p+q) \cdot t))$

Initial parameter estimates:

```

m = 12000,0
p = 0,01
q = 0,1
Estimation method: Marquardt
Estimation stopped due to convergence of parameter estimates.
Number of iterations: 6
Number of function calls: 31
Estimation Results

```

Parameter	Estimate	Asymptotic Standard Error	Asymptotic 95,0% Confidence Interval	
			Lower	Upper
m	11341,8	66,92	11209,4	11474,2
p	0,00415297	0,000114005	0,00392742	0,00437851
q	0,0386758	0,000992331	0,0367126	0,040639

---

```

Analysis of Variance
Source          Sum of Squares    Df  Mean Square
Model           7,11807E9         3   2,37269E9
Residual       4,77829E6        130  36756,1

```

---

```

Total           7,12285E9        133
Total (Corr.)  1,87279E9        132
R-Squared = 99,7449 percent
R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,7409 percent
Standard Error of Est. = 191,719
Mean absolute error = 158,039
Durbin-Watson statistic = 0,0854816

```

Il modello presenta un buon adattamento con  $R^2 = 0,99745$  e le stime dei parametri sono molto stabili con intervalli di confidenza asintotici linearizzati piuttosto contenuti. Il rapporto  $q/p = 9,26$ , come si evince dal paragrafo (3.6), indica una componente cumulata asintotica degli innovatori piuttosto ampia, intorno al 26% del totale. Questo è un elemento di caratterizzazione indiretta del ruolo esercitato dai media nella promozione della pellicola. Si può notare che l'interruzione delle proiezioni sul livello di 11274 unità viene a coincidere, in modo quasi esatto, con il *mercato potenziale* stimato:  $m = 11348$ . Il ciclo è stato quindi interrotto in condizioni di saturazione avanzata, 0,99347. Tale evento è in genere piuttosto raro. L'affluenza osservata e quella stimata dal modello BM sono rappresentate nella figura (1) ove si evidenziano dei residui strutturati che possono essere trattati in modo più specifico con tecniche autoregressive.

### 3.3 BM con origine dei tempi parametrica

Se nella soluzione della (1) si tiene conto che l'origine dei tempi è parametrica, nel senso che il tempo è definito a meno di una costante  $c$  ignota, allora la costante di integrazione  $C_0$  può essere aggiustata in modo tale che la (6) assuma la forma

$$\frac{y - r_1}{y - r_2} = C e^{a(r_2 - r_1)(t - c)}, \quad (26)$$

e valga la condizione iniziale  $y(c) = 0$  per cui  $C = r_1/r_2$ .

Il modello di Bass standard *traslato*, o con origine parametrica, è quindi,

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)(t-c)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)(t-c)}}, \quad t \geq c; \quad p, q > 0. \quad (27)$$

È opportuno notare subito che nelle applicazioni basate su serie storiche la quantità cumulata  $z(t)$  deve essere nota in una finestra temporale assegnata  $[a, b]$ ,  $c < a < b$ . La non conoscenza di  $z'(t)$  nell'intervallo  $[c, a)$  non è un ostacolo grave. Si può applicare, ad esempio, il criterio dei minimi quadrati con una modellazione basata sulla (27). È tuttavia doveroso segnalare che l'eccessiva ampiezza dell'intervallo  $[c, a)$  in relazione al punto di picco massimo  $t^+ = \frac{\ln(q/p)}{(p+q)} + c$  può dar luogo a notevoli instabilità in fase di identificazione.

In assenza della disponibilità del valore cumulato  $z(a)$ , la conoscenza della sola  $z'(t)$ ,  $t \in [a, b]$  con  $c < a < b$  suggerisce la stima diretta, secondo i minimi quadrati, mediante la derivata prima della (27), precisamente,

$$z'(t) = m \frac{p(p+q)^2 e^{-(p+q)(t-c)}}{(p+q e^{-(p+q)(t-c)})^2}. \quad (28)$$

Le procedure di stima indicate non sono equivalenti: cambia il meccanismo di ponderazione. Con il riferimento cumulato le osservazioni più vecchie pesano maggiormente rispetto a quelle più recenti. Nel secondo caso le osservazioni sono trattate alla pari.

#### Condizione intermedia

È opportuno individuare talvolta una soluzione particolare della (7) imponendo il passaggio, al tempo  $t = d$ , per un valore assegnato di  $y$ , precisamente,  $y(d)$ . Posto

$$A = e^{a(r_2-r_1)d}, \quad (29)$$

si ottiene immediatamente il valore della costante  $C_0$  mediante la (7),

$$C_0 = \frac{(y(d) - r_1)}{A(y(d) - r_2)}. \quad (30)$$

Questa scelta è necessaria se il processo di accrescimento è vincolato a passare per il punto  $(d, y(d))$ .

Nel caso del modello di Bass,  $r_1 = -p/q$ ,  $r_2 = 1$ ,  $a = q$  e la costante  $m$  è solo un parametro di scala.

Se si pone la capacità portante  $m = 1$ , si ha

$$A = e^{q(1+\frac{p}{q})d}, \quad (31)$$

e

$$C_0 = \frac{(y(d) + \frac{p}{q})}{A(y(d) - 1)}, \quad (32)$$

per cui la (7) assume la forma che segue,

$$y(t) = \frac{p e^{(p+q)d}(y(d) - 1) + (p + qy(d))e^{(p+q)t}}{-q e^{(p+q)d}(y(d) - 1) + (p + qy(d))e^{(p+q)t}}. \quad (33)$$

Si può mostrare che la soluzione (33) può essere rappresentata con un modello di Bass traslato di  $c$  sull'asse dei tempi. Il valore di tale traslazione è

$$c = \frac{d(p+q) - \ln\left(\frac{p+qy(d)}{p(1-y(d))}\right)}{p+q}. \quad (34)$$

Si noti che per  $d = 0$  e  $y(d) = 0$  si consegue  $c = 0$ . Se si imposta invece il vincolo sulla scala assoluta,  $(d, z(d))$ , è necessario introdurre nella (33) e nella (34) l'usuale posizione  $z(t) = my(t)$ .

### 3.3.1 Microgenerazione di energia elettrica e di calore

La microgenerazione di energia elettrica e di calore può essere pensata come una *tecnologia di transito* tra i motori a olio combustibile e le tecnologie a celle di combustibile (idrogeno) o altro (concentrazione solare, eolico, nucleare, ecc.). Tali tecnologie di generazione distribuita sono molto diffuse in alcuni paesi dell'UE mentre in Italia si è solo agli inizi e le condizioni di competitività delle attuali tariffe del gas metano per tali utilizzi sono del tutto sfavorevoli.

Si sono studiate di recente in Vanin (2004) le dinamiche, su base mensile, dei tempi di installazione dei primi impianti. Per imperfezioni nella contabilizzazione delle date effettive di installazione si è reso necessario rendere più flessibile l'origine dei tempi di installazione mediante un modello di Bass standard, BM, con origine traslata o parametrica.

I risultati sono qui di seguito rappresentati.

#### Nonlinear Regression

```
-----
Dependent variable: cc
Independent variables: t
Function to be estimated:
m*(1-EXP(-(p+q)*(t+c)))/(1+(q/p)*EXP(-(p+q)*(t+c)))
Initial parameter estimates:
  m = 30,0
  p = 0,0041
  q = 0,0611
  c = 15,0
```

```
Estimation method: Marquardt
Estimation stopped after maximum iterations reached.
Number of iterations: 31
Number of function calls: 181
Estimation Results
```

Parameter	Estimate	Asymptotic Standard Error	Asymptotic 95,0% Confidence Interval	
			Lower	Upper
m	24,6519	3,87987	16,007	33,2968
p	0,0023016	0,00454545	-0,00782631	0,0124295
q	0,0972543	0,0278751	0,0351445	0,159364
c	10,9074	15,6015	-23,8549	45,6697

#### Analysis of Variance

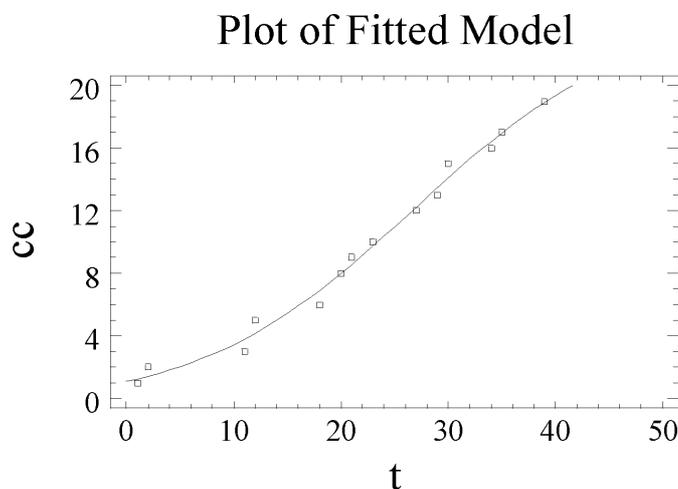
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square
Model	1759,91	4	439,977
Residual	4,09154	10	0,409154

```

-----
Total                1764,0    14
Total (Corr.)        442,857   13
R-Squared = 99,0761 percent
R-Squared (adjusted for d.f.) = 98,7989 percent
Standard Error of Est. = 0,639651
Mean absolute error = 0,444541
Durbin-Watson statistic = 3,30111

```

Nella specificazione del modello si noti l'introduzione della costante  $c$  la cui stima, sostanzialmente significativa e pari a 11 (mesi), indica un processo effettivo di diffusione decollato di fatto un anno prima, anche se l'intervallo di confidenza corrispondente risulta piuttosto ampio. L'adattamento del modello è discreto,  $R^2 = 0,99076$ , tuttavia la prospettiva di espansione della tecnologia sembra essere destinata al fallimento quasi certo se si confronta il mercato potenziale,  $m = 25$ , con la numerosità degli impianti già attivati, 19. Questo fatto conferma la scarsa convenienza economica – alle attuali condizioni di commercializzazione collegate con i costi principali dovuti al gas – ad una transizione delle aziende o degli enti di dimensione media o medio-grande verso la nuova opportunità tecnologicamente più avanzata.



**Figura 2:** Microcogenazione energia elettrica e calore: diffusione cumulata dei primi impianti in Italia.

Il grafico nella figura (2) illustra il comportamento saturativo delle adozioni. Il rapporto  $q/p = 50$ , interpretabile sulla base dei risultati del paragrafo (3.6), indica un contributo asintotico cumulato piuttosto circoscritto da parte degli innovatori, circa pari all'8%, e questo conferma, soprattutto in questa fase, che i convincimenti dei decisori aziendali dal lato delle utenze appaiono ben ponderati e condivisi sull'astensione da una massiccia adesione.

### 3.4 Funzione integrale e tempo medio in BM

La funzione integrale (primitiva) della funzione di ripartizione normalizzata del modello di Bass,  $\Psi(t) = \int F(t)dt$ , ove

$$y = y(t) = F(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}},$$

assume la forma

$$\Psi(t) = \int \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}} dt = \frac{1}{q} \ln \left[ q + pe^{(p+q)t} \right] - \frac{p}{q}t + k, \quad (35)$$

con  $k$  costante reale. La verifica è immediata

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{1}{q} \frac{pe^{(p+q)t}(p+q)}{q + pe^{(p+q)t}} - \frac{p}{q} \\ &= \frac{1}{q} \frac{(p+q)}{\frac{q}{p}e^{-(p+q)t} + 1} - \frac{p}{q} \\ &= \frac{1}{q} \frac{(p+q) - p(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t})}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}} \\ &= \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}} = F(t) = y. \end{aligned} \quad (36)$$

In base alla (35) è immediato determinare il valor medio  $E(T)$  dei tempi (durata o attesa prima dell'evento di adozione) nella distribuzione di Bass associata alla ripartizione  $F(t)$ .

$$\begin{aligned} \bar{t} &= E(T) = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt \\ &= \left[ \left(1 + \frac{p}{q}\right)t - \frac{1}{q} \ln \left( q + pe^{(p+q)t} \right) \right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{p}{q}\right)t - \frac{1}{q} (\ln p + (p+q)t) \right] + \frac{1}{q} \ln(p+q) \\ &= -\frac{1}{q} \ln p + \frac{1}{q} \ln(p+q) = \frac{1}{q} \ln \left( 1 + \frac{q}{p} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

### 3.5 Quantili e differenza interquantilica in BM

Il generico quantile  $t_F$  di ordine  $F$ ,  $0 < F < 1$ , relativo ad un modello di Bass è determinato per inversione della ripartizione (27). Posto, per semplicità,

$$F = y = F(t) = \frac{z(t)}{m} = \frac{1 - E}{1 + bE} \quad (38)$$

con  $E = e^{-a(t-c)}$ ,  $a = p + q$  e  $b = q/p$ , si ha subito

$$E = \frac{1 - F}{1 + bF},$$

ovvero,

$$t_F = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{1 + bF}{1 - F} \right) + c. \quad (39)$$

In particolare, il tempo mediano  $t_{0,5}$  è pari a

$$t_{0,5} = \frac{1}{p + q} \ln \left( 2 + \frac{q}{p} \right) + c \quad (40)$$

e tale valore è superiore al punto modale  $t^+ = \frac{1}{p+q} \ln \left( \frac{q}{p} \right) + c$ .

La differenza interquantilica di ordine  $F > 1/2$  del modello di Bass,  ${}_B\Delta_F$ , è quindi pari a

$$\begin{aligned} {}_B\Delta_F &= t_F - t_{1-F} = \frac{1}{a} \ln \frac{(1 + bF)F}{(1 - F)(1 + b - bF)} \\ &= \frac{1}{(p + q)} \ln \frac{(1 + \frac{q}{p}F)F}{(1 - F)(1 + \frac{q}{p}(1 - F))}. \end{aligned} \quad (41)$$

Nel caso puramente logistico,  $p \rightarrow 0$ , si ha

$${}_L\Delta_F = \frac{2}{q} \ln \left( \frac{F}{1 - F} \right), \quad F > 1/2. \quad (42)$$

Nel caso puramente monomolecolare,  $q \rightarrow 0$ , si ottiene

$${}_M\Delta_F = \frac{1}{p} \ln \left( \frac{F}{1 - F} \right), \quad F > 1/2. \quad (43)$$

### 3.6 Quote di BM e aspetti asintotici

Poiché l'equazione di Bass,  $y' = p(1 - y) + qy(1 - y)$ , è costituita da due addendi in cui il primo misura il contributo istantaneo degli innovatori, è naturale definire anche il contributo cumulato degli innovatori mediante il suo integrale indefinito, nell'ipotesi in cui vale la condizione iniziale  $y(0) = 0$ ,

$$\hat{F}_p(t) = \int p(1 - y) dt = p \left[ t + \frac{p}{q} t - \frac{1}{q} \ln \left( q + pe^{(p+q)t} \right) - \hat{k} \right]. \quad (44)$$

Analogo è il riferimento per la parte complementare associata agli imitatori. Naturalmente tale separazione è in parte astratta e convenzionale: non si tratta di processi autonomi ed indipendenti. Dalla (44) si può ricavare immediatamente l'integrale

definito,

$$\begin{aligned}
 F_p(t) &= \int_0^t p(1-y)d\tau \\
 &= p \left\{ \left[ \frac{(q+p)}{q}t - \frac{1}{q} \ln \left( q + pe^{(p+q)t} \right) - \hat{k} \right] + \frac{1}{q} \ln(q+p) + \hat{k} \right\} \\
 &= \frac{p}{q} \left\{ t(p+q) - \ln \left[ \frac{q + pe^{(p+q)t}}{p+q} \right] \right\}. \tag{45}
 \end{aligned}$$

Si può ora valutare il contributo cumulato normalizzato degli innovatori,  $F_p(t)$ , in relazione al cumulo globale  $y = F(t)$ , precisamente,  $Q_p = F_p(t)/F(t)$ . Analogo è il rapporto complementare normalizzato associato agli imitatori,  $Q_q = (F(t) - F_p(t))/F(t)$ .

Vista la convergenza di  $F(t)$  verso l'unità per  $t \rightarrow \infty$ , può essere di interesse lo studio del limite della (45) per  $t \rightarrow \infty$ . Sotto questo profilo è del tutto equivalente studiare il limite

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{F}_p(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p}{q} \left\{ t(p+q) - \ln \left[ \frac{pe^{(p+q)t}}{p+q} \right] \right\} \\
 &= \frac{p}{q} \ln \left( 1 + \frac{q}{p} \right) = p E(T) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} F_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_p. \tag{46}
 \end{aligned}$$

In definitiva, la quota asintotica degli innovatori dipende solo dal rapporto  $q/p$ . Si veda a titolo esemplificativo la tabella che segue

$q/p$	0,5	1	2	3	5	10	20	50	100	500
$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{F}_p(t) * 100$	81	69	55	46	36	24	15	8	4,6	1,2

tenendo conto che nelle applicazioni più comuni il rapporto  $q/p$  è compreso tra 5 e 50 cosicché la quota asintotica degli innovatori è compresa ordinatamente tra il 36 % e l'8 %.

Il grafico (3) evidenzia il comportamento locale ed asintotico delle quote normalizzate degli innovatori,  $Q_p$ , e rispettivamente, degli imitatori,  $Q_q$ .

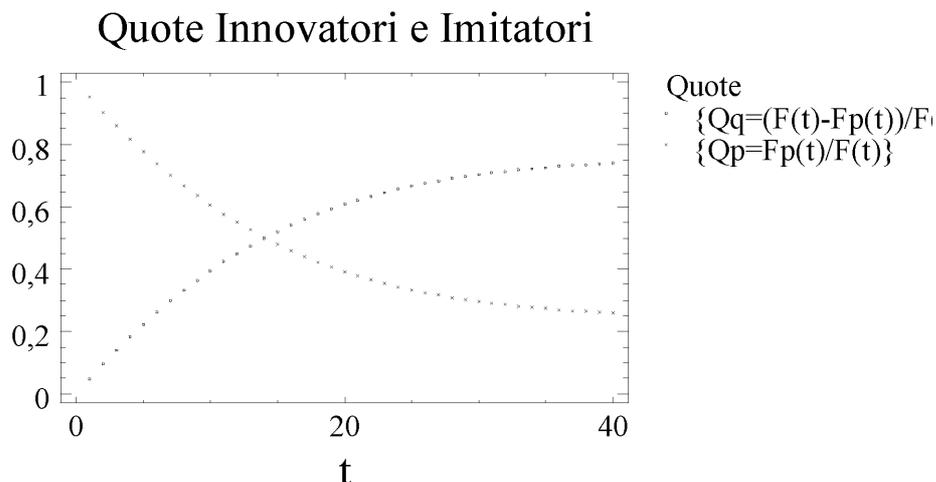
### 3.7 Il modello di Bass, Krishnan e Jain, GBM

Nel modello di Bass generalizzato, GBM, (si veda Bass, Krishnan e Jain 1994) si introduce una funzione "portante"  $x(t)$  che consente di modificare la velocità di scorrimento del tempo.

L'equazione del GBM è

$$z' = m(p + q \frac{z}{m})(1 - \frac{z}{m})x(t) \tag{47}$$

ove  $x(t)$  è una funzione integrabile in domini limitati e non negativa. Nel modello di Bass standard tale funzione è uniformemente unitaria,  $x(t) = 1$ . Un posizionamento



**Figura 3:** Quote degli innovatori ed degli imitatori: aspetti asitotici.

di  $x(t)$  nel dominio  $0 < x(t) < 1$  denota un rallentamento nella diffusione ovvero una dilatazione del tempo, mentre un valore  $x(t) > 1$  indica una contrazione nei tempi ed una corrispondente sollecitazione del processo diffusivo.

La soluzione generale del GBM è

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}, \quad t > 0, \quad p, q > 0, \quad (48)$$

con l'ovvia particolarizzazione, per il caso in cui  $x(\tau) = 1$ , che conferma la soluzione (16). A meno della costante moltiplicativa  $m$ , la (48) è una funzione di ripartizione nel dominio temporale  $[0, +\infty)$ . La funzione portante  $x(t)$  può accelerare o rallentare il processo di adozione. Tuttavia, la forma dell'equazione non consente di modificare  $m$  mediante  $x(t)$ . In altre parole, le variazioni di  $x(t)$  alterano la densità  $z'(t)/m$  conservando l'integrale.

Può essere intesa questa invarianza analitica come un'irrelevanza complessiva delle azioni di intervento e, in particolare, delle azioni di Marketing? Una risposta a tale quesito sarà segnalata nella parte conclusiva del paragrafo (3.8).

### 3.7.1 GBM: soluzione compatta

L'integrazione diretta dell'equazione GBM segue la via alternativa già proposta per il caso standard, BM. Se si esclude il parametro  $m$ , l'equazione del modello è

$$y' = (p + qy)(1 - y)x(t) \quad (49)$$

con  $y$  e  $y'$  definite come nel modello base (21) e  $x(t)$  una qualsivoglia funzione integrabile in domini limitati non negativa. Come in precedenza, si consideri come condizione iniziale  $y(0) = 0$  e si risolva l'equazione seguendo la formulazione compatta già adottata per il caso standard, mediante le sostituzioni (22) e successive. Si perviene facilmente alla forma equivalente

$$\hat{y}'(t) = \{(p + q)\hat{y} - q\}x(t), \quad (50)$$

con condizione iniziale  $\hat{y}(0) = 1$ .

Si può utilizzare la formula (24) per cui si ottiene

$$\begin{aligned}\hat{y} &= e^{G(t)} - qe^{G(t)} \int_0^t x(\xi)e^{-G(\xi)} d\xi \\ &= e^{G(t)} \left[ 1 - \frac{q}{p+q} (e^{-G(0)} - e^{-G(t)}) \right] \\ &= e^{G(t)} \left[ 1 - \frac{q}{p+q} (1 - e^{-G(t)}) \right] \\ &= \frac{q + pe^{G(t)}}{p+q}.\end{aligned}$$

ove  $G(t) = (p+q) \int_0^t x(\xi)d\xi$  e quindi, ricorrendo alle posizioni fatte si ha

$$\begin{aligned}y &= 1 - \frac{1}{\hat{y}(t)} = 1 - \frac{p+q}{q + pe^{G(t)}} \\ &= \frac{pe^{G(t)} - p}{q + pe^{G(t)}} = \frac{1 - e^{-G(t)}}{1 + \frac{q}{p}e^{-G(t)}} \\ &= \frac{1 - e^{-(p+q) \int_0^t x(\xi)d\xi}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q) \int_0^t x(\xi)d\xi}}.\end{aligned}\tag{51}$$

### 3.7.2 GBM: origine parametrica dei tempi

Naturalmente anche in questo caso si può esprimere l'origine parametrica dei tempi cosicché il modello generalizzato può assumere la veste *traslata* che segue

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q) \left( \int_c^t x(\tau) d\tau \right)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q) \left( \int_c^t x(\tau) d\tau \right)}}, \quad t \geq c, \quad p, q > 0,\tag{52}$$

e  $z(t) = 0$  per  $0 < t \leq c$ .

La derivata prima della (48) è pari a

$$z'(t) = m \frac{p(p+q)^2 x(t) e^{(p+q) \int_c^t x(\tau) d\tau}}{\left( pe^{(p+q) \int_c^t x(\tau) d\tau} + q \right)^2}.\tag{53}$$

Il quantile di ordine  $F$ ,  $t_F$ , per il caso GBM, è soluzione in  $t$  dell'equazione

$$X(t) = \frac{1}{p+q} \ln \left( \frac{1 + \frac{q}{p} F}{1 - F} \right) + X(c),\tag{54}$$

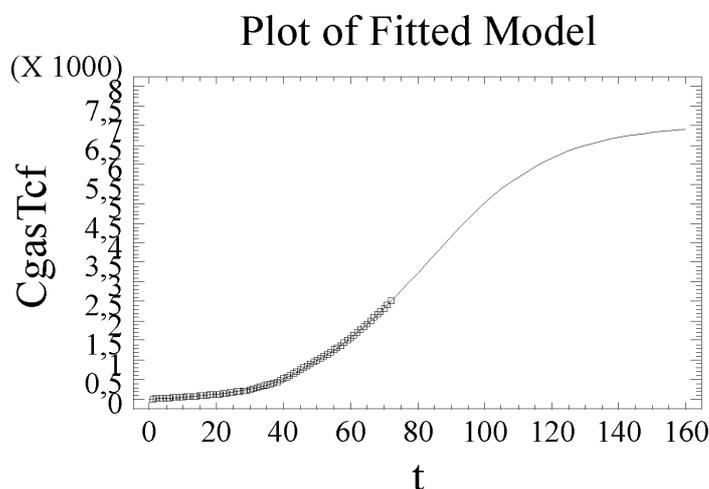
ove  $X(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$  e  $F = z(t)/m$ . Tale quantile è modificabile mediante  $x(t)$  se il tempo corrente è inferiore a  $t_F$ ,  $t < t_F$ .

La differenza interquantilica di ordine  $F$  è quindi

$$GBM \Delta_F = t_F - t_{1-F}, \quad F > 1/2.\tag{55}$$

### 3.7.3 Scelta della funzione di intervento sulla “portante”

La determinazione della funzione  $x(t)$  che consente di incorporare interventi esogeni nell'evoluzione del processo di evoluzione–accumulo può essere realizzata tenendo conto di opportune covariate che controllano la pressione esercitata dal livello dei prezzi, dal livello della comunicazione d'impresa, dal mutamento dei regimi contattuali o di contesto legale, ecc.. Se da un lato tale strada consente di individuare variabili dirette sulle quali si esercita il controllo, dall'altro può generare una notevole “pesantezza parametrica” che comporta una forte debolezza del sistema inferenziale introducendo forme di instabilità che si traducono, nel transitorio, in regioni di confidenza troppo vaste.



**Figura 4:** Consumi annui cumulati mondiali di Gas Metano in Trillion cubic feet, origine 1930: GBM .

La pregevolezza dell'equazione di Riccati e del parallelo modello di Bass, BM, riposa essenzialmente sulla rara caratteristica di parsimoniosità parametrica a fronte di una buona flessibilità di rappresentazione. La correzione realizzata attraverso la funzione di intervento  $x(t)$  non deve descrivere un eccessivo dettaglio, pena la non identificabilità complessiva e la perdita di efficacia.

Una proposta possibile può essere fondata su una descrizione locale di impulsi di tipo strutturato associati solo indirettamente a variabili esogene. In fondo, spesso lo scopo primario consiste nella separazione di tali interventi rispetto allo sviluppo normale del processo di accrescimento–accumulo evidenziando, per questa via, i parametri principali della funzione. Il pregio del modello generalizzato, GBM, è dovuto al fatto che, a meno del disturbo stocastico, il *futuro* è incorporato, mediante  $x(t)$ , nel modello stesso e può essere esercitata comunque una scelta libera attraverso questo “canale”, per cui è possibile una simulazione retta da speciali ipotesi di scenario.

Questa particolare flessibilità controllata del modello generalizzato consente di comprendere meglio il senso condizionale delle previsioni di contesto ed evidenzia congiuntamente l'indipendenza strutturale dei parametri naturali di evoluzione della diffusione,  $(m, p, q)$ , rispetto a quelli che caratterizzano la funzione di intervento,  $x(t)$ .

Si propongono ora alcuni tipi speciali di intervento utili soprattutto nei casi in cui gli interventi regolatori sono rari e circoscritti. Tali scelte particolari nulla tolgono alla completa generalità di  $x(t)$ .

### 3.7.4 Impulsi rettangolari

Una rappresentazione piuttosto semplice della funzione  $x(t)$  si basa sulla sovrapposizione di opportuni impulsi localmente stabili rispetto ad una *baseline* costante unitaria, precisamente, nel caso di tre impulsi rettangolari si ha

$$x(t) = 1 + c_1 I_{t \geq a_1} I_{t \leq b_1} + c_2 I_{t \geq a_2} I_{t \leq b_2} + c_3 I_{t \geq a_3} I_{t \leq b_3}. \quad (56)$$

ove i parametri  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2, 3$  descrivono gli estremi di un intervallo chiuso con  $a_i < b_i$  e il parametro  $c_i$  identifica, se significativamente diverso da zero, lo spessore del contributo locale sia esso positivo che negativo. Una tale formalizzazione traduce un comportamento transitorio stazionario. Le funzioni indicatrici  $I$  assumono il valore 1 se l'evento indicato a deponente è verificato e 0 altrimenti. Queste svolgono un ruolo essenziale poiché consentono l'attivazione selettiva dell'impulso in funzione dell'appartenenza di  $t$  al dominio descritto. Ad esempio, nel caso in cui il tempo  $t$  è compreso nell'intervallo  $[a_1, b_1]$  la funzione  $x(t)$  assume il valore  $1 + c_1$  se gli altri intervalli presentano intersezione nulla con  $[a_1, b_1]$ .

L'integrale definito corrispondente alla funzione  $x(t)$  assume la forma

$$\begin{aligned} \int_0^t x(\tau) d\tau &= t + c_1(t - a_1) I_{t \geq a_1} I_{t \leq b_1} + c_1(b_1 - a_1) I_{t > b_1} + \\ &+ c_2(t - a_2) I_{t \geq a_2} I_{t \leq b_2} + c_2(b_2 - a_2) I_{t > b_2} + \\ &+ c_3(t - a_3) I_{t \geq a_3} I_{t \leq b_3} + c_3(b_3 - a_3) I_{t > b_3}. \end{aligned} \quad (57)$$

### 3.7.5 Tempi di esaurimento del Gas Metano

I consumi di energia da fonti non rinnovabili costituiscono un tema particolarmente scottante in questo periodo di transizione. Nel paragrafo (3.12) si affronta in modo esplicito la modellazione della fonte energetica che ha avuto un ruolo centrale in questi ultimi decenni: il *crude oil* o petrolio greggio di buona qualità. Tale fonte mostra ora i segni evidenti del raggiungimento del tempo di emivita,  $t_{0,5}$ .

Il gas metano pare invece avere un orizzonte temporale di possibile utilizzo sicuramente più ampio, si veda a questo proposito Roncato (2003), da cui sono tratti alcuni dei punti che seguono.

In questa sede si analizzano le potenzialità del modello di Bass generalizzato, GBM, con riferimento ad una serie storica della produzione annuale globale di gas

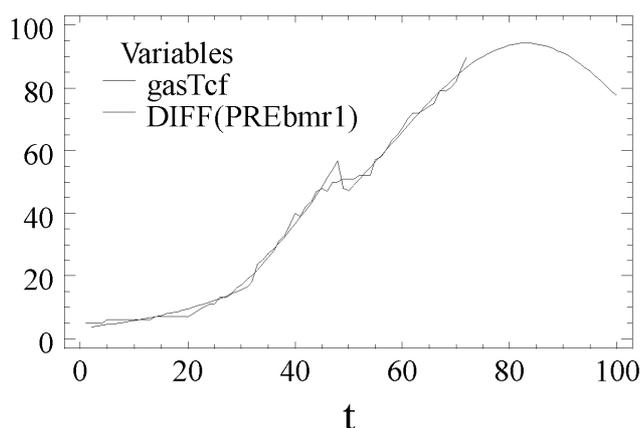
naturale. I dati provengono da uno studio di Campbell (2002) e sono stati adeguatamente controllati e testati. Tali informazioni provengono dalle pubblicazioni della rivista Oil and Gas Journal dal 1930 al 2001 ed in questa serie sono esclusi i gas non convenzionali: a) gas che si trova a profondità marine superiori ai 500 m; b) gas polare; c) gas vari quali ad esempio coalbed methane, tight gas, ecc.. I dati di Campbell sono stati confrontati, dal 1970 in poi, con i corrispondenti dati BP (British Petroleum) dopo opportune conversioni metriche. Le serie differiscono di poco.

I dati qui sotto riportati sono espressi in Tcf (Trillion of cubic feet).

1930	5	1948	116	1966	415	1984	1257
1931	10	1949	123	1967	448	1985	1315
1932	15	1950	131	1968	484	1986	1375
1933	20	1951	140	1969	524	1987	1438
1934	26	1952	150	1970	563	1988	1503
1935	32	1953	161	1971	605	1989	1570
1936	38	1954	172	1972	649	1990	1640
1937	44	1955	185	1973	696	1991	1712
1938	50	1956	198	1974	744	1992	1784
1939	56	1957	212	1975	791	1993	1857
1940	62	1958	228	1976	841	1994	1931
1941	68	1959	245	1977	891	1995	2006
1942	74	1960	264	1978	942	1996	2085
1943	81	1961	284	1979	993	1997	2164
1944	88	1962	306	1980	1044	1998	2244
1945	95	1963	330	1981	1096	1999	2326
1946	102	1964	356	1982	1148	2000	2412
1947	109	1965	384	1983	1200	2001	2502

Il modello proposto si basa su un GBM dotato di un solo shock rettangolare. Questo approccio semplificato ha permesso di raggiungere, in questo contesto, una configurazione sufficientemente significativa e stabile.

### Multiple X-Y Plot



**Figura 5:** Consumi annuali mondiali di Gas Metano in Tcf, origine 1930: stime mediante GBM.

Nonlinear Regression  
Dependent variable: CgasTcf

```

Independent variables: t
Function to be estimated:
m*(1-EXP(-(p+q)*(t+c1*(t-a1)*(a1<=t)*(t<=b1)+
c1*(b1-a1)*(b1<t))))/
(1+(q/p)*EXP(-(p+q)*(t+c1*(t-a1)*(a1<=t)*(t<=b1)+
c1*(b1-a1)*(b1<t))))
Initial parameter estimates:
m = 4000,0
p = 0,00066
q = 0,068
c1 = 1,0
a1 = 30,0
b1 = 50,0
Estimation method: Marquardt
Estimation stopped due to convergence of parameter estimates.
Number of iterations: 11
Number of function calls: 79
Estimation Results

```

Parameter	Estimate	Asymptotic Standard Error	Asymptotic 95,0% Confidence Interval	
			Lower	Upper
m	7011,88	293,793	6425,3	7598,45
p	0,000496002	0,0000155798	0,000464896	0,000527108
q	0,0527589	0,000789347	0,0511829	0,0543349
c1	0,309535	0,0145742	0,280437	0,338633
a1	31,8472	0,552126	30,7448	32,9495
b1	48,1769	0,276465	47,6249	48,7288

```

-----
Analysis of Variance
Source          Sum of Squares    Df  Mean Square
-----
Model           7,66931E7         6   1,27822E7
Residual       1774,83          66   26,8914
-----
Total           7,66948E7         72
Total (Corr.)  3,89151E7         71
R-Squared = 99,9954 percent
R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,9951 percent
Standard Error of Est. = 5,18569
Mean absolute error = 4,01212
Durbin-Watson statistic = 0,129873

```

L'adattamento del modello è piuttosto rilevante,  $R^2 = 0,999954$ , e, aspetto più importante, i singoli parametri coinvolti presentano intervalli di confidenza relativamente stretti. Questo autorizza alcune interpretazioni di interesse.

Il periodo che va dal 1962 al 1978 evidenzia, col tramite dello shock rettangolare significativamente positivo, un fenomeno di ampliamento eccessivo delle estrazioni, fenomeno comune anche al crude oil. Si vedano a questo proposito nel paragrafo (3.12) i riferimenti espliciti evidenziati nel lavoro di Guidolin (2004). Lo shock petrolifero che ha avuto inizio nel 1979 ha naturalmente prodotto effetti analoghi e non opposti di tipo sostitutivo sul gas metano come era non immediato attendersi. Il rapporto  $q/p = 106$ , come si evidenzia nel paragrafo (3.8), corrisponde ad una quota asintotica cumulata attribuibile agli innovatori pari al 4,5%. Come è chiarito in quella sede tale conclusione non è alterata dalla presenza dello shock e questo rende più evidente il fatto che il processo di diffusione del gas presenta una forte natura imitativa.

Sotto l'ipotesi di uno scenario non perturbato dal 2001 in avanti,  $x(t) = 1$ , si perviene ad una stima del picco di produzione massima previsto per il 2013 e, in

parallelo, ad una stima del tempo di esaurimento al 90% per l'anno 2055. Naturalmente sono esclusi da queste valutazioni i contraccolpi che possono derivare da una contrazione eccessiva della disponibilità di crude oil in tempi ravvicinati.

Nelle figure (4) e (5) si possono evidenziare gli aspetti di coerenza grafica delle stime sia in termini cumulati sia in termini annuali.

### 3.7.6 Impulsi esponenziali

In certe condizioni il comportamento stazionario (unitario) della funzione portante  $x(t)$  può essere alterato da shock istantanei molto intensi seguiti da un effetto di assorbimento che riporta alla stazionarietà con velocità differenti. Nel caso particolare di tre impulsi esponenziali si ha

$$x(t) = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} I_{t \geq a_1} + c_2 e^{b_2(t-a_2)} I_{t \geq a_2} + c_3 e^{b_3(t-a_3)} I_{t \geq a_3}. \quad (58)$$

ove i parametri  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  descrivono i tempi di insorgenza degli shock, i parametri  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  assumono valori negativi per garantire la monotonia crescente della ripartizione e rappresentano, in termini assoluti, la velocità di decadimento dell'intervento. Infine, i parametri  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  rappresentano l'ampiezza iniziale degli shock ed assumono segno positivo o negativo a seconda del tipo di intervento. Le funzioni indicatrici  $I$  sono definite come in precedenza. L'integrale definito corrispondente alla funzione  $x(t)$  assume la forma

$$\begin{aligned} \int_0^t x(\tau) d\tau &= t + c_1 \frac{1}{b_1} \left( e^{b_1(t-a_1)} - 1 \right) I_{t \geq a_1} \\ &+ c_2 \frac{1}{b_2} \left( e^{b_2(t-a_2)} - 1 \right) I_{t \geq a_2} \\ &+ c_3 \frac{1}{b_3} \left( e^{b_3(t-a_3)} - 1 \right) I_{t \geq a_3}. \end{aligned} \quad (59)$$

### 3.7.7 Crude Oil: le riserve U.S.A.

Nell'applicazione seguente si sono considerati i volumi di estrazione del crude oil degli U.S.A. (compresa l'Alaska e con l'esclusione degli NGL, *Natural Gas Liquids*). I dati sono espressi in miliardi di barili annui. La fonte indiretta è Industriedatenbank con una serie che copre il periodo che va dall'anno 1900 fino al 2000. Per ulteriori approfondimenti si veda Morreale (2004). L'obiettivo preliminare in questo caso è concentrato sul riconoscimento dei risultati già noti da tempo.

Il geologo Hubbert nel lontano 1956 aveva avanzato l'ipotesi che il picco di estrazione massima degli U.S.A. si sarebbe dovuto collocare intorno al 1970. La storia ha confermato questa previsione anche se la strumentazione teorica utilizzata da Hubbert era piuttosto semplice. Il processo di estrazione statunitense presenta una buona regolarità. L'inserimento dovuto all'Alaska ha consentito di contenere ragionevolmente bene la caduta di produzione.

1900	0,0636195	1926	0,7708727	1952	2,28782	1978	3,1609
1901	0,06939015	1927	0,90113025	1953	2,37688	1979	3,15725
1902	0,088768	1928	0,90147335	1954	2,3141	1980	3,15725
1903	0,1004626	1929	1,00732335	1955	2,468495	1981	3,13462
1904	0,11708105	1930	0,8980095	1956	2,60975	1982	3,159075
1905	0,13471785	1931	0,85108145	1957	2,6134	1983	3,164185
1906	0,1264944	1932	0,7851588	1958	2,357535	1984	3,19375
1907	0,16609325	1933	0,90565625	1959	2,570695	1985	3,255435
1908	0,1785288	1934	0,90806525	1960	2,561935	1986	3,20835
1909	0,1831716	1935	1,100475	1961	2,621065	1987	3,002855
1910	0,20955745	1936	1,15048	1962	2,678005	1988	2,98059
1911	0,22044905	1937	1,200485	1963	2,751005	1989	2,80174
1912	0,2229347	1938	1,214355	1964	2,7886	1990	2,684575
1913	0,24844455	1939	1,26509	1965	2,829845	1991	2,70611
1914	0,2657638	1940	1,349405	1966	3,029865	1992	2,617415
1915	0,28110475	1941	1,40233	1967	3,212365	1993	2,499155
1916	0,3007673	1942	1,386635	1968	3,340845	1994	2,4309
1917	0,33531455	1943	1,505625	1969	3,34997	1995	2,3944
1918	0,35592975	1944	1,67316	1970	3,470055	1996	2,359725
1919	0,3783663	1945	1,713675	1971	3,52225	1997	2,35425
1920	0,4429275	1946	1,734115	1972	3,4675	1998	2,28198
1921	0,47218225	1947	1,85712	1973	3,367125	1999	2,146565
1922	0,5575302	1948	2,0148	1974	3,264925	2000	2,120285
1923	0,73240535	1949	1,84179	1975	3,05505		
1924	0,71394	1950	1,97173	1976	2,958325		
1925	0,76374425	1951	2,244385	1977	3,0076		

Il modello proposto in questo caso utilizza un GBM con un semplice shock iniziale di tipo esponenziale. I risultati ottenuti sono soddisfacenti. L'adattamento globale è notevole:  $R^2 = 0,999979$  con ottimi intervalli di confidenza per i parametri coinvolti.

#### Nonlinear Regression

Dependent variable: cum

Independent variables: t

Function to be estimated:

$$m * (1 - \text{EXP}(- (p+q) * (t + (c1/b1) * (\text{EXP}(b1 * (t-a1)) - 1) * (a1 \leq t)))) / (1 + (q/p) * \text{EXP}(- (p+q) * (t + (c1/b1) * (\text{EXP}(b1 * (t-a1)) - 1) * (a1 \leq t))))$$

Initial parameter estimates:

m = 223,0

p = 0,000471

q = 0,0581

c1 = 0,74

b1 = -0,11

a1 = 20,5

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of parameter estimates.

Number of iterations: 16

Number of function calls: 123

Estimation Results

Parameter	Estimate	Asymptotic Standard Error	Asymptotic 95,0% Confidence Interval	
			Lower	Upper
m	224,885	0,784401	223,328	226,442
p	0,000445866	0,0000177788	0,000410571	0,000481162
q	0,0571941	0,000403937	0,0563922	0,057996
c1	0,682617	0,0735348	0,536632	0,828602
b1	-0,0852885	0,00948373	-0,104116	-0,0664609
a1	18,0477	0,981086	16,1	19,9954

#### Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square
Model	735809,0	6	122635,0
Residual	7,39124	95	0,0778026

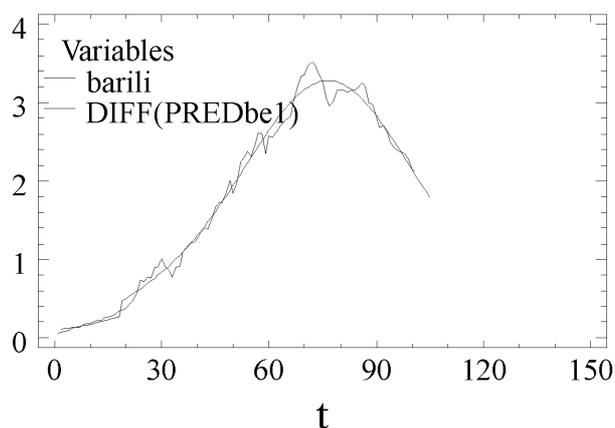
```

-----
Total                735817,0   101
Total (Corr.)        352880,0   100
R-Squared = 99,9979 percent
R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,9978 percent
Standard Error of Est. = 0,278931
Mean absolute error = 0,207909
Durbin-Watson statistic = 0,173839

```

Il picco massimo osservato si colloca, come si può vedere dai dati osservati, nel 1971, mentre il massimo del modello medio perequato si colloca intorno al 1977, verosimilmente per il contributo incrementale dell'Alaska. In condizioni di regolarità il tempo di esaurimento al 90% della risorsa si colloca nell'anno 2015. Il rapporto  $q/p = 128$  si mostra in linea con i valori del settore confermando la forte natura imitativa del processo.

### Multiple X-Y Plot



**Figura 6:** Crude Oil: produzione annua USA in miliardi di barili, origine 1930: GBM.

Il grafico della figura (6) evidenzia una ciclicità di comportamento dei residui che può essere assorbita eventualmente con tecniche ARMA. È però doveroso far osservare quanto sia limitato lo spazio di manovra per l'affinamento.

È interessante osservare che lo shock con struttura esponenziale, riconosciuto in modo significativo sul piano statistico, si colloca subito dopo la prima guerra mondiale. Questo è un segnale totalmente differente da quello che emerge, a livello mondiale, sia con riferimento al crude oil sia in relazione alla produzione di gas metano. Gli U.S.A. hanno promosso con largo anticipo lo sviluppo economico chiaramente a spese di una programmazione energetica non particolarmente attenta in quegli anni.

I primi contraccolpi evidenti e di segno opposto, si sono fatti vedere. Si va dalle forme di protezionismo doganale e blocco delle immigrazioni degli anni 1921-23 alla ripresa economica trainata dallo sviluppo industriale in un contesto fortemente liberista degli anni della presidenza Coolidge 1923-29. A questa repentina trasformazione è seguito il ben noto tracollo finanziario del 1929 che segna l'inizio di una crisi economica mondiale. Ma il processo di diffusione capillare su base imitativa segue apparentemente una sua regola interna la cui governabilità è di fatto limitata.

### 3.7.8 Impulsi misti

In determinati casi la funzione portante  $x(t)$  può ospitare al suo interno interventi di natura differente che descrivono localmente shock strutturalmente imputabili a cause molto diverse. Il caso più semplice è costituito da una coppia di impulsi, il primo esponenziale, il secondo rettangolare. Naturalmente l'ordine è solo lessicografico,

$$x(t) = 1 + c_1 e^{b_1(t-a_1)} I_{t \geq a_1} + c_2 I_{t \geq a_2} I_{t \leq b_2}, \quad (60)$$

ove i parametri coinvolti hanno il medesimo significato già descritto nei casi precedenti. L'integrale definito corrispondente alla funzione  $x(t)$  assume la forma

$$\begin{aligned} \int_0^t x(\tau) d\tau &= t + c_1 \frac{1}{b_1} \left( e^{b_1(t-a_1)} - 1 \right) I_{t \geq a_1} \\ &+ c_2(t - a_2) I_{t \geq a_2} I_{t \leq b_2} + c_2(b_2 - a_2) I_{t > b_2}. \end{aligned} \quad (61)$$

Un'applicazione molto efficiente si è prodotta nel caso della stima delle produzioni di crude oil della Gran Bretagna con un affinamento residuale basato su un ARMA. Si veda a questo proposito il paragrafo (3.7.9).

### 3.7.9 Il crude oil del mare del nord: Gran Bretagna

L'interesse per le potenzialità proprie dei giacimenti del mare del Nord è un fatto relativamente recente. Si può far risalire al 1959 la scoperta del giacimento di gas naturale supergigante *Groeningen* da parte dell'Olanda e questo segna l'avvio della ricerca in tutta l'area. Parallelamente, con una serie di accordi bilaterali tra i paesi rivieraschi si è pervenuti alla definizione delle giurisdizioni minerarie delle aree marine, figura (7). I primi interventi di estrazione sono riferibili agli anni 1964 per la Gran Bretagna, 1965 per la Norvegia e il 1968 per l'Olanda. Si scoprirono circa 90 giacimenti principali, tra questi il famoso *Ekofisk* (Norvegia) nel 1969, ed un centinaio di livello minore. In questo periodo sono migliorate notevolmente le tecnologie di prospezione e di trivellazione *offshore* sospinte dal cogente effetto dovuto ai ben noti shock petroliferi degli anni '70 (1973 e 1979) indotti da specifiche tensioni in medio-oriente e da interventi regolatori ad opera dell'OPEC.

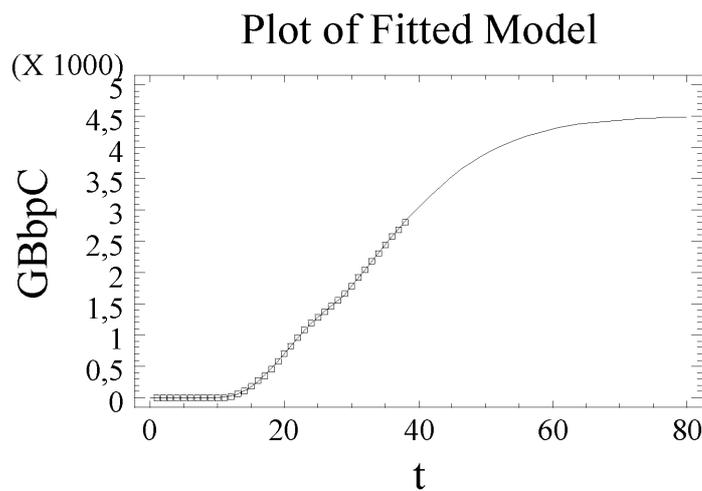
Il caso qui considerato in termini essenziali è tratto da Brusaferrò (2004) ed è circoscritto, per ragioni di spazio, alla Gran Bretagna.

I dati delle estrazioni si riferiscono alla produzione annua, espressa in tonnellate, e sono stati ottenuti dopo opportune conversioni dei dati BP. La serie copre il periodo che va dall'anno 1965 al 2002.

1965	0,1	1975	1,6	1985	127,6	1995	129,9
1966	0,1	1976	12,2	1986	127,1	1996	129,7
1967	0,1	1977	38,3	1987	123,4	1997	128,2
1968	0,1	1978	54,0	1988	114,5	1998	132,5
1969	0,1	1979	77,9	1989	91,7	1999	137,1
1970	0,2	1980	80,5	1990	91,6	2000	126,2
1971	0,2	1981	89,5	1991	91,3	2001	117,9
1972	0,3	1982	103,2	1992	94,3	2002	116,1
1973	0,4	1983	115,0	1993	100,2		
1974	0,4	1984	126,1	1994	126,5		

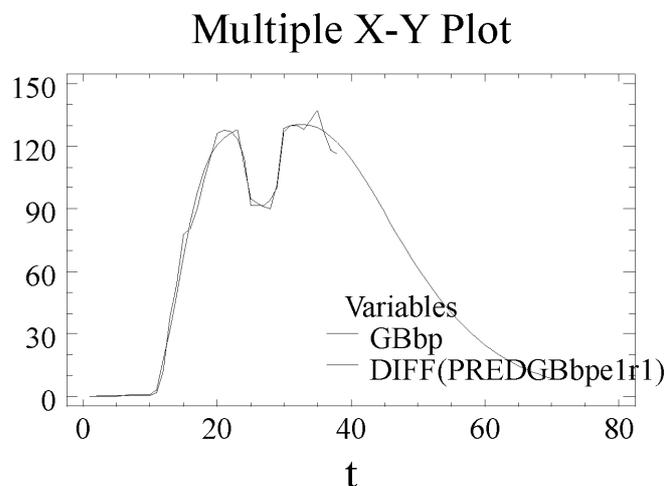


**Figura 7:** Giurisdizione mineraria delle aree marine del Mare del Nord.



**Figura 8:** Crude Oil: produzione annuale cumulata UK in tonn., origine 1965: GBM misto.

Il modello proposto è un GBM con due shock misti, un primo shock esponenziale intorno al 1977 che esprime il cambiamento di regime estrattivo imposto dal primo shock petrolifero mondiale più sopra menzionato ed il successivo shock di tipo rettangolare che trova origine in varie motivazioni. Tra queste le più importanti sono le seguenti: a) le compagnie petrolifere si erano concentrate dapprima, come è naturale, sui giacimenti più ampi passando solo successivamente ai giacimenti minori presenti nelle immediate vicinanze questo per poter sfruttare a fondo le piattaforme esistenti e le *pipeline* in buona parte già disponibili; b) molte delle piattaforme furono chiuse per un lungo periodo a seguito dei noti incidenti sulle linee di trasporto che indussero alla formulazione ed all'applicazione di norme di sicurezza più stringenti;



**Figura 9:** Crude Oil: produzione annuale UK in tonn., origine 1965: GBM misto.

c) un cambiamento della politica di successivo sostegno all'iperattività estrattiva con una più favorevole politica fiscale a favore delle compagnie ivi operanti (*Petroleum Reven Tax*).

#### Nonlinear Regression

Dependent variable: GBbpC

Independent variables: t

Function to be estimated:

$$m * (1 - \text{EXP}(-(p+q) * (t + (c1/b1) * (\text{EXP}(b1 * (t-a1)) - 1) * (a1 <= t) + c2 * (t-a2) * (a2 <= t) * (t <= b2) + c2 * (b2-a2) * (b2 < t)))) / (1 + (q/p) * \text{EXP}(-(p+q) * (t + (c1/b1) * (\text{EXP}(b1 * (t-a1)) - 1) * (a1 <= t) + c2 * (t-a2) * (a2 <= t) * (t <= b2) + c2 * (b2-a2) * (b2 < t))))$$

Initial parameter estimates:

m = 4800,0  
 p = 0,0001081  
 q = 0,105  
 c1 = 8,98  
 b1 = -0,288  
 a1 = 11,65  
 c2 = -0,7  
 a2 = 20,0  
 b2 = 25,0

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped after maximum iterations reached.

Number of iterations: 31

Number of function calls: 330

Estimation Results

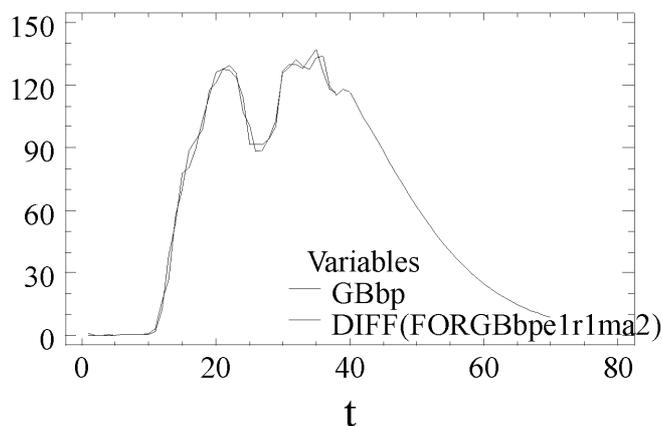
Parameter	Estimate	Asymptotic Standard Error	Asymptotic 95,0% Confidence Interval	
			Lower	Upper
m	4513,39	154,806	4196,77	4830,0
p	0,0000708436	0,0000324773	0,00000441993	0,000137267
q	0,111872	0,00516425	0,10131	0,122434
c1	8,54019	1,02935	6,43493	10,6454
b1	-0,250721	0,0114596	-0,274159	-0,227284
a1	10,7677	0,458356	9,83028	11,7052
c2	-0,331417	0,0175489	-0,367309	-0,295526
a2	23,4341	0,190843	23,0438	23,8245
b2	28,6819	0,164258	28,3459	29,0178

Analysis of Variance			
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square
Model	6,52091E7	9	7,24545E6
Residual	657,546	29	22,674
-----			
Total	6,52097E7	38	
Total (Corr.)	3,31712E7	37	
R-Squared = 99,998 percent			
R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,9975 percent			
Standard Error of Est. = 4,76172			
Mean absolute error = 3,10566			
Durbin-Watson statistic = 0,889298			

I risultati dell'applicazione di questo semplice modello GBM misto sono di qualità insperata. Si pensi che l'indice di adattamento è praticamente prossimo alla saturazione:  $R^2 = 0,99998$ . Gli intervalli di confidenza asintotici per le varie componenti parametriche sono molto efficienti e stabili. Si vedano a tale proposito i grafici delle produzioni cumulate e, rispettivamente, istantanee nelle figure (8) e (9)

È quindi ragionevole passare alla fase di identificazione del picco di produzione massima che si è posizionato intorno all'anno 1999 mentre il tempo di esaurimento della risorsa al 90% è situato intorno all'anno 2019. È opportuno ricordare qui che Campbell C.J. ha confermato, in una comunicazione personale, che tale previsione coincide con quella formulata da specialisti del governo Blair.

### Multiple X-Y Plot



**Figura 10:** Crude Oil: produzione annuale UK in tonn., origine 1965: GBM misto con affinamento ARIMA(0,0,2).

Il rapporto  $q/p = 1579$ , come è chiarito nel paragrafo (3.8), è posizionato su un livello cui corrisponde una frazione asintotica cumulata di innovatori praticamente trascurabile. Questo fatto è del tutto naturale vista l'origine tardiva del processo di estrazione nel mare del Nord in relazione al corrispondente processo a livello mondiale.

L'affinamento ARIMA(0,0,2) che segue migliora le già ottime prestazioni del

modello GBM misto. La generalizzazione teorica corrispondente è presentata nel paragrafo (3.11).

ARIMA Model Summary				
Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
MA(1)	-0,981621	0,129151	-7,60059	0,000000
MA(2)	-0,614615	0,128748	-4,77379	0,000030
PREDGBbpe1r1	1,00052	0,00123579	809,624	0,000000
Mean	-1,3316	1,64872	-0,807662	0,424590
Constant	-1,3316			

Backforecasting: yes

Estimated white noise variance = 8,64319 with 36 degrees of freedom

Estimated white noise standard deviation = 2,93993

Number of iterations: 11

Si noti, in particolare, la centratura quasi esatta della componente deterministica cui corrisponde una significatività altissima:  $t = 809,6$ . La devianza residua pari a 331,15 ( $8,64319 \cdot 36$ ) si è dimezzata rispetto a 657,546.

Nella figura (10) si può apprezzare anche graficamente il miglioramento segnalato.

### 3.7.10 Impulsi armonici

In alcune situazioni il comportamento stazionario (unitario) della funzione portante  $x(t)$  può essere alterato da uno shock locale bilanciato, nel senso che a seguito di un impulso iniziale positivo o negativo segue una risposta di segno opposto compensata successivamente da un effetto di riequilibrio. Nel caso specifico di tre impulsi armonici si ha

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1 + c_1 \cos\left(2\pi \frac{(t - a_1)}{(b_1 - a_1)}\right) I_{t \geq a_1} I_{t \leq b_1} \\
 &+ c_2 \cos\left(2\pi \frac{(t - a_2)}{(b_2 - a_2)}\right) I_{t \geq a_2} I_{t \leq b_2} \\
 &+ c_3 \cos\left(2\pi \frac{(t - a_3)}{(b_3 - a_3)}\right) I_{t \geq a_3} I_{t \leq b_3}.
 \end{aligned} \tag{62}$$

ove i parametri  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  descrivono i tempi di insorgenza degli shock, i parametri  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  rappresentano i tempi di interruzione degli shock. Infine, i parametri  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  rappresentano l'ampiezza iniziale degli shock ed assumono segno positivo o negativo a seconda del tipo di intervento. Le funzioni indicatrici  $I$  sono definite come in precedenza. L'integrale definito corrispondente alla funzione  $x(t)$  assume la forma

$$\begin{aligned}
 \int_0^t x(\tau) d\tau &= t + c_1 \frac{b_1 - a_1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t - a_1}{b_1 - a_1}\right) I_{t \geq a_1} I_{t \leq b_1} \\
 &+ c_2 \frac{b_2 - a_2}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t - a_2}{b_2 - a_2}\right) I_{t \geq a_2} I_{t \leq b_2} \\
 &+ c_3 \frac{b_3 - a_3}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t - a_3}{b_3 - a_3}\right) I_{t \geq a_3} I_{t \leq b_3}.
 \end{aligned} \tag{63}$$

### 3.7.11 Impulsi di Riccati

In determinate occasioni il comportamento stazionario unitario di  $x(t)$  può essere modificato gradualmente fino a raggiungere un massimo o un minimo per poi ritornare nello stato di quiete. Sotto opportune condizioni la *densità* di Riccati può descrivere tale comportamento.

Posto  $a_1 > 0$  e scelti i due parametri  $b_1 < 0 < d_1$  che fungono da radici reali dell'equazione di Riccati, la funzione portante può assumere la forma che segue con un solo shock,

$$x(t) = 1 + \frac{-a_1 \frac{b_1}{d_1} (d_1 - b_1)^2 e^{-a_1(d_1 - b_1)(t - c_1)}}{\left(1 - \frac{b_1}{d_1} e^{-a_1(d_1 - b_1)(t - c_1)}\right)^2}, \quad (64)$$

per cui,

$$X(t) = \int_{c_1}^t x(\tau) d\tau = t - c_1 + \frac{b_1 (1 - e^{-a_1(d_1 - b_1)(t - c_1)})}{\left(1 - \frac{b_1}{d_1} e^{-a_1(d_1 - b_1)(t - c_1)}\right)}. \quad (65)$$

### 3.7.12 Diffusione univariata: Tavola riassuntiva

La tavola che segue sintetizza in modo simbolico i modelli univariati di diffusione temporale favorendo l'utilizzo di software statistico di tipo regressivo.

Denominazione generale	Codice in CICLO03	Forma analitica o descrizione
Esponenziale	exp1	$e^{(a+bt)}$
	exp2	$\alpha e^{kt}$
	exp3	$e^{k(t-\gamma)}$
Potenza	pot1	$\alpha t^\beta$
Monomolecolare	mono1	$\alpha - (\alpha - \beta)e^{-kt}$
	mono2	$\alpha - \gamma e^{-kt}$
	mono3	$\alpha (1 - e^{-k(t-\tau)})$
Logistico	logist1	$\frac{\alpha}{1 + (\frac{\alpha}{y_0} - 1)e^{-kt}}$
	logist2	$\frac{\alpha}{1 + e^{-k(t-\gamma)}}$
	logist3	$\frac{\alpha}{1 + \beta e^{-kt}}$
Gompertz	gomp1	$\alpha \exp\{-e^{-k(t-\gamma)}\}$
	gomp2	$\alpha \exp\{-e^{(\beta-kt)}\}$
	gomp3	$\exp\{\alpha - \beta \vartheta^t\}$
Richards	rich1	$\alpha [1 + (\delta - 1)e^{-k(t-c)}]^{1/(1-\delta)}$
Bass (BM)	bass1	$m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$
BM traslato	bass2	$m \frac{1 - e^{-(p+q)(t+c)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)(t+c)}}$
BM err. AR(1)	bass3	$m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$
Bass (GBM)	basse1	GBM + 1 shock esponenziale
	basse1t	GBM + 1 shock esponenziale + trasl.
	basse2	GBM + 2 shock esponenziali
	basse2t	GBM + 2 shock esponenziali + trasl.
	basse3	GBM + 3 shock esponenziali
	bassr1	GBM + 1 shock rettangolare
	bassr1t	GBM + 1 shock rettangolare + trasl.
	bassr2	GBM + 2 shock rettangolari
	bassr2t	GBM + 2 shock rettangolari + trasl.
	bassr3	GBM + 3 shock rettangolari
	bassa1	GBM + 1 shock armonico
	bassj1	GBM + 1 shock di Riccati
	basse1r1	GBM + 1 sh. exp e 1 sh. rett.

### 3.8 Quote di GBM e aspetti asintotici

Nel modello generalizzato di Bass l'equazione di riferimento può assumere la forma  $y' = p(1-y)x(t) + qy(1-y)x(t)$ , per cui la quota cumulata degli innovatori diventa,

$${}_G F_p(t) = \int_0^t p(1-y)x(\tau) d\tau = p \int_0^t x(\tau) d\tau - p \int_0^t yx(\tau) d\tau. \quad (66)$$

Poiché si può scrivere

$$\begin{aligned} y = {}_G F(t) &= \frac{1 - e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}} \\ &= \frac{p e^{(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau} - p}{q + p e^{(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}, \end{aligned} \quad (67)$$

con derivata del denominatore pari a

$$p^2 x(t) e^{(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau} + p q x(t) e^{(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau},$$

si può far vedere che, posto  $E(t) = e^{(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}$ ,

$$\begin{aligned} \int y x(t) dt &= \int \frac{p x(t) E(t) - p x(t)}{q + p E(t)} dt + k \\ &= \frac{1}{q} \int \frac{p q x(t) E(t) - p q x(t) + p^2 x(t) E(t) - p^2 x(t) E(t)}{q + p E(t)} dt + k \\ &= \frac{1}{q} \ln(q + p E(t)) - \frac{p}{q} \int x(t) dt + k. \end{aligned} \quad (68)$$

In definitiva, la quota cumulata degli innovatori,  ${}_G F_p(t)$ , assume la forma

$${}_G F_p(t) = \frac{p(p+q)}{q} \int_0^t x(\tau) d\tau - \frac{p}{q} \left\{ \ln \frac{[q] + p e^{(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}}{(p+q)} \right\}. \quad (69)$$

Il limite della (69) per  $t \rightarrow \infty$  si consegue facilmente trascurando  $[q]$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} {}_G F_p(t) = \frac{p}{q} \ln \left( 1 + \frac{q}{p} \right). \quad (70)$$

Il risultato ottenuto coincide con quello evidenziato dalla (46) nell'ambito del modello di Bass standard,  $x(t) = 1$ . In altre parole, la portante  $x(t)$  ha un ruolo nella gestione dei tempi di adozione modificando la geometria del tempo. Nel transitorio  $x(t)$  muta la quota degli innovatori secondo la  ${}_G F_p(t)$ , tuttavia, asintoticamente non ha ruolo alcuno: la quota asintotica dipende sempre e solo dal rapporto  $q/p$ . Come si può notare anche dall'analisi dell'equazione generalizzata, l'integrale resta immutato per qualunque  $x(t)$ . In altre parole, la  $x(t)$  non può alterare il parametro  $m$ , deforma solo i tempi di adozione con un meccanismo che soddisfa un'equazione di bilancio: le adozioni anticipate sono sottratte al futuro, non sono aggiuntive. Le azioni di marketing positive accorciano il ciclo di vita favorendo il rientro rapido dell'investimento.

### 3.9 GBM e BM nell'interpolazione di funzioni

Talvolta può essere comodo descrivere un ciclo di vita piuttosto articolato mediante la composizione successiva di opportuni sottomodelli locali basati su una particolare interpretazione dei modelli di Bass, BM o GBM.

Si distinguono due modalità principali. Una prima strategia di tipo interpolatorio mira a sfruttare le caratteristiche tipiche dei comportamenti distributivi, localmente ad  $S$ . Tale via si fonda sull'uso diretto di molteplici modelli di Bass successivi. Una seconda strada utilizza invece un approccio distributivo a miscuglio ottenuto componendo alcuni modelli di Bass istantanei opportunamente normalizzati.

L'interpolazione può essere riferita ad un contesto più generale tuttavia qui si fa riferimento a due ambiti più circoscritti e in corrispondenza reciproca: il caso delle densità ed il caso delle funzioni di ripartizione.

### 3.9.1 Interpolazione mediante BM o GBM successivi

Si consideri una funzione  $g(t)$  definita nel dominio  $[0, T]$ . Si supponga di poter suddividere tale dominio in  $k$  domini contigui all'interno dei quali la densità o la ripartizione  $g(t)$  è definibile, a meno di una costante additiva, secondo un modello di Bass,

$$g(t) - a = m_i {}_B F_i(t), \quad (71)$$

ove,  $a \geq 0$ ,  $m_i \in R$  e  ${}_B F_i(t) = (p_i - p_i {}_B E_i)/(p_i + q_i {}_B E_i)$ , con  ${}_B E_i = e^{-(p_i+q_i)(t-c_i)}$ . La funzione  $g(t)$  è rappresentabile come segue,

$$g(t) = \sum_{i=1}^k m_i {}_B F_i(t), \quad (72)$$

ove i coefficienti  $m_i$  sono positivi nei tratti ascendenti e negativi nei tratti eventualmente discendenti. La complicazione ulteriore fondata su un GBM è del tutto automatica,

$$g(t) = \sum_{i=1}^k m_i {}_G F_i(t), \quad (73)$$

ove  ${}_G F_i(t) = (p_i - p_i {}_G E_i)/(p_i + q_i {}_G E_i)$ , con  ${}_G E_i = e^{-(p_i+q_i) \int_{c_i}^t x_i(\tau) d\tau}$ , per  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Qui può essere conveniente valutare la complessità parametrica di  $g(t)$  per ridurre le instabilità di identificazione. La stima dei parametri di  $g(t)$  può essere determinata mediante il criterio dei minimi quadrati a partire dalla funzione osservata  $g_o(t)$ ,

$$\min_{\vartheta} \sum_{t=1}^T (g_o(t) - g(t))^2, \quad (74)$$

con  $\vartheta = (m_i, p_i, q_i, c_i; i = 1, 2, \dots, k)'$ . L'applicazione concreta presuppone che le densità o le ripartizioni osservate siano ben distribuite sul dominio.

### 3.9.2 Curva di mortalità dei maschi italiani: anno 2000

Nell'esemplificazione che segue si presenta un uso indiretto del modello di Bass generalizzato in un contesto non diffusivo in senso letterale. L'obiettivo è quello di saggiare le capacità interpolatorie della densità implicitamente associata al modello di Bass generalizzato, GBM.

L'occasione è offerta da una applicazione che è stata realizzata in David (2004). Il punto di partenza è costituito dalle tavole di mortalità dei maschi italiani al 2000 predisposte dall'ISTAT e più sotto riportate.

Di solito nella letteratura attuariale si propone una modellazione basata sulla curva di Gompertz. Una sua applicazione diretta si è rivelata però non particolarmente efficiente per cui si è ritenuto opportuno adottare un modello GBM con due shock, uno iniziale di natura esponenziale che evidenzia il cambiamento di regime intorno ai 55 anni ed uno successivo di natura rettangolare che permettere di evidenziare una notevole riduzione della tendenza locale della mortalità dei maschi nella fascia d'età compresa tra i 77 e gli 81 anni. A tale proposito si vedano i grafici riportati nella figura (11).

1	28	25	92	49	316	73	2549	97	641
2	22	26	90	50	342	74	2750	98	467
3	18	27	89	51	377	75	2892	99	327
4	15	28	90	52	402	76	3073	100	220
5	14	29	93	53	439	77	3203	101	141
6	13	30	94	54	494	78	3265	102	86
7	13	31	97	55	557	79	3245	103	50
8	12	32	99	56	618	80	3319	104	27
9	12	33	101	57	697	81	3465	105	14
10	12	34	103	58	743	82	3810	106	7
11	14	35	106	59	796	83	4051	107	3
12	17	36	111	60	865	84	4040	108	1
13	23	37	119	61	923	85	3849	109	0
14	29	38	127	62	1019	86	3496	110	0
15	37	39	135	63	1129	87	3235	111	0
16	49	40	141	64	1237	88	2962	112	0
17	60	41	150	65	1358	89	2746	113	0
18	73	42	163	66	1486	90	2473	114	0
19	85	43	176	67	1634	91	2208	115	0
20	92	44	191	68	1776	92	1907	116	0
21	96	45	210	69	1903	93	1608	117	0
22	98	46	231	70	2057	94	1325	118	0
23	97	47	262	71	2194	95	1072	119	0
24	95	48	290	72	2363	96	847		

I risultati ottenuti sono raccolti qui di seguito. Il calcolo è stato condotto con riferimento alla ripartizione empirica della mortalità. L'interruzione del processo iterativo di stima non altera, in questo caso, il valore dei risultati ottenuti.

```

Nonlinear Regression
Dependent variable: decC
Independent variables: t
Function to be estimated:
m*(1-EXP(-(p+q)*(t+(c1/b1)*(EXP(b1*(t-a1))-1)*(a1 <= t)+
c2*(t-a2)*(a2<=t)*(t<=b2)+c2*(b2-a2)*(b2<t))))/
(1+(q/p)*EXP(-(p+q)*(t+(c1/b1)*(EXP(b1*(t-a1))-1)*(a1 <= t)+
c2*(t-a2)*(a2<=t)*(t<=b2)+c2*(b2-a2)*(b2<t))))
Initial parameter estimates:
m = 100000,0
p = 0,00012
q = 0,0721
c1 = 0,2
b1 = 0,078
a1 = 56,0
c2 = -0,1
a2 = 75,0
b2 = 83,0

```

Estimation method: Marquardt  
 Estimation stopped after maximum iterations reached.  
 Number of iterations: 31  
 Number of function calls: 331  
 Estimation Results

Parameter	Estimate	Asymptotic Standard Error	Asymptotic 95,0% Confidence Interval	
			Lower	Upper
m	100054,0	65,3463	99924,7	100184,0
p	0,00018076	0,0000134365	0,000154132	0,000207388
q	0,0620111	0,00213533	0,0577794	0,0662428
c1	0,276768	0,0252022	0,226823	0,326713
b1	0,0668275	0,00267325	0,0615297	0,0721253
a1	54,9697	1,3768	52,2412	57,6982
c2	-0,287337	0,105514	-0,496442	-0,0782314
a2	77,1451	0,907958	75,3457	78,9445
b2	80,7673	0,844683	79,0933	82,4412

#### Analysis of Variance

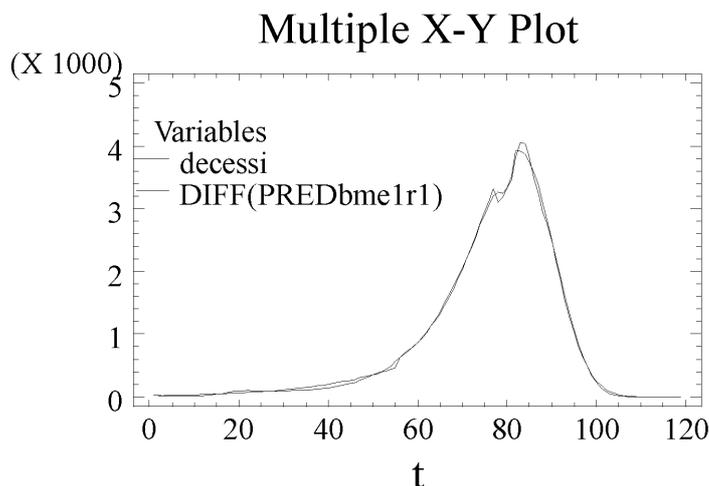
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square
Model	3,62816E11	9	4,03129E10
Residual	9,49717E6	110	86337,9

Total 3,62825E11 119  
 Total (Corr.) 2,00457E11 118  
 R-Squared = 99,9953 percent  
 R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,9949 percent  
 Standard Error of Est. = 293,833  
 Mean absolute error = 216,402  
 Durbin-Watson statistic = 0,0283731

Il grado di adattamento è notevolissimo,  $R^2 = 0,999953$ , ed altrettanto buoni sono i livelli degli intervalli di confidenza per tutti i parametri. Si nota, in questo caso particolare, la presenza di un valore positivo del parametro  $b_1$  che controlla la memoria del contributo esponenziale. Questo fatto indica un cambiamento strutturale e definitivo nella popolazione ideale dei 100000 ingressi teorici della coorte. Tale cambiamento, peggiorativo, coincide, per la maggioranza della popolazione maschile, con un cambiamento che non è solo fisiologico ma che è spesso associato ad un mutamento nelle relazioni sociali legate al lavoro. La fascia intorno ai 55 anni coincide, in molte attività lavorative, con l'inizio del pensionamento e con la conseguente necessità di procedere ad una riconfigurazione del proprio stile di vita.

Di opposta natura è invece lo shock, migliorativo, riconosciuto come significativo nella fascia d'età dai 77 agli 81 anni. Questa inversione locale della mortalità non è di facile interpretazione. È tuttavia possibile azzardare l'ipotesi che nella popolazione italiana ideale dei 100000 del riferimento iniziale ci siano due sottopopolazioni ben distinte: la prima e più numerosa la cui probabilità di morte risulta più elevata rispetto alla seconda. È ragionevole che nelle fasi di crescita della mortalità il secondo gruppo di individui abbia influenzato il corso rallentandolo. Un ulteriore tentativo ragionevole potrebbe fondarsi sul riconoscimento specifico delle caratteristiche di questo secondo gruppo. Da una rilevazione ISTAT sulle ragioni dell'autonomia degli anziani spicca in modo chiaro la dipendenza dal tipo di occupazione prevalente. Le attività professionali di tipo intellettuale, medico, avvocato, docente, ecc. sembrano più correlate con buoni livelli di autonomia. Viceversa, l'esposizione a lavori fisici logoranti o a rischio in condizioni di tossicità riduce il livello di autonomia.

Da un punto di vista tecnico potrebbe essere di interesse l'esame del problema precedente, volto al riconoscimento di due sottopopolazioni di struttura differente, mediante un opportuno miscuglio, ad esempio secondo le indicazioni del paragrafo (3.9.3).



**Figura 11:** Mortalità dei maschi italiani, anno 2000: interpolazione con un GBM misto.

### 3.9.3 Miscuglio di modelli BM o GBM

Una rappresentazione istantanea di un modello di Bass traslato è data dalla forma

$${}_B z'_i(t) = m_i \frac{p_i(p_i + q_i)^2 {}_B E_i}{(p_i + q_i {}_B E_i)^2} I_{t \geq c_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (75)$$

ove  $m_i > 0$ ,  ${}_B E_i = e^{-(p_i+q_i)(t-c_i)}$  e  $I_{t \geq c_i}$  è l'usuale funzione indicatrice dei tempi superiori o uguali a  $c_i$ .

La funzione  $h_i(t) = {}_B z'_i(t)/m_i$  è una densità di probabilità definita sul supporto  $[c_i, +\infty)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Le quantità  $m_i$  possono fungere da elemento di ponderazione, ove  $m = \sum_{i=1}^k m_i$ .

La distribuzione miscuglio normalizzata è pertanto

$$h(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i h_i(t). \quad (76)$$

La versione assoluta si ottiene immediatamente:  $H(t) = mh(t)$ .

Nel caso si voglia procedere con sottomodelli GBM i cambiamenti sono limitati nella (76) alla sola definizione di  $h_i(t)$ , precisamente,

$$h_i(t) = \frac{{}_G z'_i(t)}{m_i} = \frac{p_i(p_i + q_i)^2 x_i(t) {}_G E_i}{(p_i + q_i {}_G E_i)^2} I_{t \geq c_i} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (77)$$

con

$${}_G E_i = e^{-(p_i+q_i) \int_{c_i}^t x_i(\tau) d\tau}.$$

L'identificazione dei parametri di  $h(t)$  può essere ottenuta con i minimi quadrati a partire dalla densità osservata,  $h_o(t)$ , precisamente,

$$\min_{\vartheta} \sum_{t=1}^T (h_o(t) - h(t))^2, \quad (78)$$

con  $\vartheta = (m_i, p_i, q_i, c_i; i = 1, 2, \dots, k)'$ . Anche in questo caso è opportuno che  $h_o(t)$  sia osservata in modo distribuito sul dominio.

### 3.10 Potenziale e interventi modulabili

L'equazione autonoma di Riccati consente una formulazione della soluzione in forma esplicita. Il modello di Bass, che ne è un caso particolare, è caratterizzato, tra l'altro, dalla presenza del fattore  $m$  che è interpretabile come potenziale fisso, mercato totale raggiungibile, *carrying capacity*, ecc.. Implicitamente i processi reali sottostanti sono processi di nascite che descrivono solo l'ingresso in uno *status* con capienza finita. Nei paragrafi successivi si esamina la possibilità di articolare il potenziale in forma variabile, eventualmente in presenza di interventi.

#### 3.10.1 Un modello di Riccati con un potenziale variabile, RPV

In alcuni processi reali il potenziale raggiungibile della risorsa disponibile in un istante temporale può apparire non costante nel tempo. Si tratta di solito di situazioni in cui il riferimento principale è rivolto alla descrizione di uno *stock* in cui è implicito il riferimento ad una situazione bivariata che ammette due sottoprocessi, uno in ingresso, le nascite, ed uno in uscita, le morti. In questa ottica il potenziale  $m(t)$ ,  $c \leq t < +\infty$ , può variare anche in relazione a meccanismi di *contesa* che non si vogliono trattare analiticamente in modo congiunto ma che si incorporano implicitamente come effetto sull'orizzonte disponibile per il processo di interesse. Nei processi di puro conteggio (*counting process*), quali ad esempio quelli che sono rappresentabili mediante i modelli BM e GBM, il riferimento ad un valore asintotico  $m$ , che rappresenta il mercato totale raggiungibile o la cosiddetta *carrying capacity*, appare del tutto naturale non essendo reversibile il processo di conteggio. Una possibile caratterizzazione estensiva del modello di Bass che incorpori un potenziale variabile deve tener conto nella definizione del livello istantaneo della diffusione,  $z'(t)$ , e della variazione locale *secca* subita dal potenziale medesimo,  $m'(t)$ . In altri termini, si deve tener conto della dinamica locale di primo ordine.

Un modo parsimonioso per rappresentare in  $z'(t)$  tale effetto è il seguente,

$$z'(t) = m(t) \left( p + q \frac{z(t)}{m(t)} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m(t)} \right) + \frac{z(t)}{m(t)} m'(t), \quad (79)$$

ove  $\frac{z(t)}{m(t)} m'(t)$  imputa al valore istantaneo corrente di  $z'(t)$  una quota di  $m'(t)$  che, per semplicità e ragionevolezza, viene a coincidere con il livello di conoscenza raggiunto dall'ambiente di riferimento,  $z(t)/m(t)$ . Tale scelta può essere considerata come

un'approssimazione della quantità  $(p + qz(t)/m(t))$  nell'ipotesi che la comunicazione dell'informazione sia perfetta e senza ostacoli.

Si noti che per valori di  $t$  prossimi all'origine  $c$  tale correzione non opera poiché  $z(c) = 0$  e, viceversa, per  $t \rightarrow +\infty$  può essere sensato ipotizzare una convergenza di  $m(t)$  ad un valore costante  $m_a$ , eventualmente nullo, cosicché anche in questo caso la correzione si annulla.

L'ipotesi di un potenziale  $m(t)$  oscillatorio in modo indefinito è una possibilità che richiede verosimilmente una modellazione di altra natura (Lotka-Volterra o varianti).

Nel modello (79) non è tuttavia necessario esplicitare, in questa fase, la natura del potenziale  $m(t)$  e questo semplifica notevolmente la trattazione. Sotto l'ipotesi (79) si può scrivere l'equazione equivalente,

$$\frac{z'(t)m(t) - z(t)m'(t)}{m^2(t)} = \left(\frac{z(t)}{m(t)}\right)' = \left(p + q\frac{z(t)}{m(t)}\right) \left(1 - \frac{z(t)}{m(t)}\right), \quad (80)$$

per cui, posto  $F(t) = z(t)/m(t)$  e  $f(t) = F'(t)$ , si consegue subito la forma

$$f(t) = (p + qF(t))(1 - F(t)) \quad (81)$$

che coincide con l'equazione standard di Bass, BM. Se  $F(c) = 0$ , per  $c \leq t < +\infty$  si consegue la forma chiusa

$$z(t) = m(t) \frac{1 - e^{-(p+q)(t-c)}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)(t-c)}}, \quad t \geq c; p, q > 0. \quad (82)$$

Posto per comodità  $E = e^{-(p+q)(t-c)}$ , è immediato individuare la forma esplicita di  $z'(t)$ , precisamente,

$$z'(t) = m(t) \frac{p(p+q)^2 E}{(p+qE)^2} + m'(t) \frac{1-E}{1 + \frac{q}{p}E} \quad t \geq c; p, q > 0. \quad (83)$$

È opportuno far notare che il caso costante,  $m(t) = m$ , è un corollario, come era naturale attendersi esaminando la definizione del modello (79).

Talvolta si ignora invece la dinamica locale di  $m(t)$  in un intorno del tempo  $t$  per cui si pensa di far dipendere il livello istantaneo della diffusione  $z'(t)$  dal solo termine  $m(t)$ . In questo caso la (79) si riduce a

$$z'(t) = m(t) \left(p + q\frac{z(t)}{m(t)}\right) \left(1 - \frac{z(t)}{m(t)}\right) \quad (84)$$

e, con le posizioni pregresse,  $f(t)$  e  $F(t)$ , si perviene alla forma

$$f(t) = (p + qF(t))(1 - F(t)) - F(t) \frac{m'(t)}{m(t)}, \quad (85)$$

per la quale non è disponibile una soluzione esplicita. Solo in caso di costanza di  $m(t)$  la (85) coincide con la (81).

### 3.10.2 Modulazione degli interventi in presenza di un potenziale variabile: GR-PV

La modulazione degli interventi presuppone che si sia individuata propedeuticamente la componente centrale che regola il meccanismo di diffusione. In questo caso la nozione di risorsa disponibile o mercato disponibile,  $R(t) = m(t) - z(t)$ , appare essere un sicuro punto di riferimento. Non avrebbe molto senso collegare l'intervento con  $z(t)$  poiché quest'ultimo descrive essenzialmente il *passato*. La risorsa ancora disponibile  $R(t)$  può essere dilatata o contratta, in termini di percezione, mediante la funzione portante  $x(t)$ , funzione positiva e integrabile localmente che assume un ruolo moltiplicativo. Con riferimento all'equazione (79), la funzione  $x(t)$  potrà essere ragionevolmente applicata al suo primo addendo, precisamente,

$$z'(t) = m(t) \left( p + q \frac{z(t)}{m(t)} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m(t)} \right) x(t) + \frac{z(t)}{m(t)} m'(t). \quad (86)$$

Posto come in precedenza  $F(t) = z(t)/m(t)$  e  $f(t) = F'(t)$ , si ottiene subito la forma ben nota

$$f(t) = (p + qF(t))(1 - F(t))x(t), \quad (87)$$

che coincide con l'equazione generalizzata di Bass, GBM. Se si impone  $F(c) = 0$ , per  $c \leq t < +\infty$ , si ottiene la soluzione esplicita

$$z(t) = m(t) \frac{1 - e^{-(p+q)(\int_c^t x(\tau) d\tau)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)(\int_c^t x(\tau) d\tau)}}, \quad t \geq c, \quad p, q > 0. \quad (88)$$

con  $z(t) = 0$  per  $0 < t \leq c$  e questo conferma l'usuale versione conseguita per il caso costante,  $m(t) = m$ .

Analogamente a quanto si è visto in precedenza, posto

$$E = e^{-(p+q) \int_c^t x(\tau) d\tau},$$

è facile individuare la diffusione istantanea, precisamente,

$$z'(t) = m(t) \frac{p(p+q)^2 x(t) E}{(p+qE)^2} + m'(t) \frac{1-E}{1+\frac{q}{p}E} \quad t \geq c; \quad p, q > 0. \quad (89)$$

### 3.11 Modelli non lineari autoregressivi: identificazione statistica

Il tipico modello di regressione non lineare nei parametri,  $\beta \in R^k$ , è rappresentabile come somma di due componenti,

$$Z_t = Z(t) = f(\beta, t) + \varepsilon(t), \quad (90)$$

ove  $Z(t)$  è la risposta del sistema dipendente dal tempo  $t$ ;  $f(\beta, t)$  è la componente deterministica, funzione reale nota dell'incognito parametro multiplo  $\beta \in R^k$  e del tempo  $t$ . La seconda componente,  $\varepsilon(t)$ , è definita come un processo stocastico che rappresenta il disturbo residuale. Le assunzioni sulla struttura di  $\varepsilon(t)$  possono essere graduate in modo gerarchico. Una prima assunzione forte è collegata alla corretta

identificabilità media del modello per cui si richiede che gli errori  $\varepsilon(t)$  siano di media nulla,  $M(\varepsilon(t)) = 0$ . Questa prima caratterizzazione è sufficiente per l'introduzione del criterio di stima robusto più tradizionale: il criterio dei minimi quadrati.

Le assunzioni sul processo  $\varepsilon(t)$  possono essere estese comprendendo il vincolo sulla varianza omoschedastica,  $\text{Var}(\varepsilon(t)) = \sigma^2$ , e il vincolo di incorrelazione tra disturbi distinti,  $\sigma_{\varepsilon(t), \varepsilon(t')} = 0$ ,  $t \neq t'$ .

Queste tre condizioni congiunte su  $\varepsilon(t)$  caratterizzano il processo cosiddetto *white noise*.

Un'ulteriore specificazione del processo  $\varepsilon(t)$  si basa sull'assunzione di normalità. Il corrispondente processo *white noise gaussiano* è quindi dotato di componenti stocasticamente indipendenti per cui non è prevedibile in funzione della storia pregressa,

$$P(\varepsilon(t) \leq c) = P(\varepsilon(t) \leq c | \varepsilon(t-1), \varepsilon(t-2) \dots), \quad c \in R. \quad (91)$$

Se si applica il criterio di stima dei minimi quadrati, seguendo un modello non lineare (90), è cruciale procedere all'analisi dei residui di regressione sulla scorta delle stime  $\hat{\beta}$  ottenute con tecniche standard (Gauss-Newton, Marquardt, ecc.). L'analisi dei residui può essere condotta per via grafica o mediante opportune batterie di test, se si ricorre ad assunzioni più restrittive.

Nel caso di stazionarietà debole dei residui (media nulla e varianza costante), può essere piuttosto comune osservare l'esistenza di gruppi contigui dei residui dotati del medesimo segno o, in termini grafici, la presenza di funzioni armoniche marcate intorno alla media nulla.

Si tratta allora di articolare meglio la rappresentazione formale di  $\varepsilon(t)$ . In alcuni casi notevoli questo può avvenire con l'ausilio di tecniche autoregressive.

Una semplice idea di partenza si fonda sui cosiddetti modelli per *funzioni di trasferimento* proposti da Box e Jenkins (1976). Si ritiene infatti che la risposta del sistema possa essere funzione oltre che di alcune componenti ritardate della risposta  $Z_t = Z(t)$ , di ingressi autonomi o ritardati di un input  $X_t = X(t)$  e di un disturbo stocastico residuo eventualmente articolato con il contributo di disturbi previi,  $\varepsilon(t)$ .

Nella proposta di Box e Jenkins, il modello assume la forma

$$Z_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + N_t, \quad (92)$$

ove l'operatore polinomiale di ritardo  $\delta(B)$  è di ordine  $r$ , l'analogo  $\omega(B)$  è di ordine  $s$  e il termine di disturbo  $N_t$  è un processo  $ARIMA(p, d, q)$ .

Nel prosieguo è del tutto inessenziale ritenere  $d > 0$  per cui ci si sofferma sul più semplice caso  $ARMA(p, q)$ ,

$$N_t = \phi^{-1}(B) \vartheta(B) a_t, \quad (93)$$

ove  $a_t$  è un processo *white noise*.

Si ottiene un'ulteriore versione semplificata se si impone (ragionevolmente) l'uguaglianza tra due operatori di ritardo,  $\delta^{-1}(B) = \phi^{-1}(B)$ . In questo modo si perviene al seguente modello di trasferimento,

$$\phi(B)Z_t = \omega(B) X_{t-b} + \vartheta(B) a_t. \quad (94)$$

Nel caso in cui si ponga  $s = 1$  e  $b = 0$  si ha un processo che si denomina  $ARMA(p, q)$  con regressore  $X_t$ . In forma esplicita si ha

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = \omega_0 X_t + a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \vartheta_2 a_{t-2} - \dots - \vartheta_q a_{t-q}. \quad (95)$$

È immediato notare che il modello (95) generalizza il modello regressivo non lineare (90) che si consegue facilmente qualora si ponga  $\phi_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $\omega_0 = 1$ ;  $X_t = f(\beta, t)$ ;  $\vartheta_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ .

Questa precisazione è importante poiché può consentire una semplice identificazione del modello di trasferimento non lineare utilizzando una procedura di stima in due stadi basata sui software già disponibili per il caso dell' $ARMA(p, q)$  o dell' $ARIMA(p, d, q)$  con regressori.

È sufficiente che a primo stadio si realizzi la stima di  $\beta$  del modello (90) secondo i minimi quadrati non lineari standard, trascurando la struttura più complessa dell'errore così come è espressa dalla (93). Si possono utilizzare quindi i valori calcolati  $f(\hat{\beta}, t)$  in luogo del regressore  $X_t$  nella (95) e applicare, a secondo stadio, una usuale procedura di identificazione e stima  $ARMA(p, q)$  con regressore assegnato.

Chiaramente la soluzione è sub-ottima rispetto ad un'ottimizzazione congiunta e potrebbe essere di interesse approfondire l'ampiezza della perdita di efficienza che verosimilmente non dovrebbe essere tuttavia troppo elevata. Le applicazioni concrete confortano ampiamente questa indicazione.

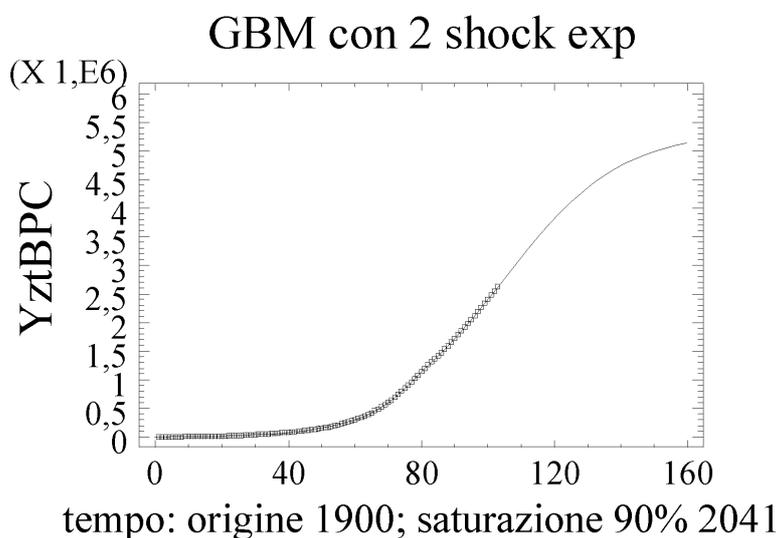
### 3.12 Tempi di esaurimento del Crude Oil

Nell'applicazione che viene qui di seguito trattata si propone una modellazione della produzione giornaliera mondiale di petrolio greggio, *Crude Oil*, che tiene conto delle più recenti strategie di contabilizzazione basate anche sulla presenza di NGL (*Natural Gas Liquids*). Questa variazione strutturale può essere collocata intorno al 1986. Si utilizzerà pertanto una serie composita di dati di produzione giornaliera, espressa in migliaia di barili, con riferimento ai dati di W. Zittel (Industriedatenbank) a partire dal 1900, seguiti dopo il 1986 dai dati BP che includono gli NGL.

L'applicazione del GBM con due shock esponenziali porta ad un risultato molto soddisfacente, dal punto di vista dell'adattamento del modello ai dati osservati. Come si è detto, gli shock esponenziali sono due: uno viene stimato nel 1980, confermando quanto già presentato in Guseo et al. (2004), l'altro, e questo è l'elemento di novità specifico proposto in Guidolin (2004), viene individuato intorno al 1964. D'altra parte è bene riconoscere che la presenza degli NGL contribuisce a rendere più difficoltoso lo studio, introducendo qualche elemento di incertezza in più, rispetto alla rendicontazione del solo crude oil. Si tratta in realtà di due produzioni affini ma non equivalenti dal punto di vista di un sistema in fase di diffusione.

1900	189,11	26	2805,61	52	12397,34	78	59471,51
1	210,87	27	3219,46	53	13160,19	79	62287,54
2	261,29	28	3375,79	54	13770,93	80	59061,22
3	307,02	29	3771,86	55	15449,45	81	55857,73
4	362,92	30	3492,07	56	16791,75	82	53898,4
5	420,56	31	3287,49	57	17651,29	83	53568,5
6	405,41	32	3130,68	58	18136,04	84	55500,09
7	527,18	33	3494,72	59	19545,86	85	55582,51
8	573,64	34	3648,84	60	21030,98	86	59655,33
9	593,37	35	4002,66	61	22439,48	87	60743
10	668,2	36	4372,22	62	24411,83	88	63098
11	730,78	37	5033,98	63	25991,3	89	63980
12	753,34	38	4857,09	64	28235,25	90	65400
13	860,41	39	5089,32	65	30325,92	91	65184
14	913,33	40	5143,27	66	32918,84	92	65713
15	980,46	41	5416,44	67	35272,43	93	65980
16	1053,41	42	5101,14	68	37844,27	94	67020
17	1185,96	43	5672,06	69	41200,76	95	67968
18	1286,46	44	6519,03	70	44761,46	96	69770
19	1416,85	45	7116,71	71	46887,29	97	71953
20	1799,69	46	7536,43	72	49298,79	98	73357
21	2003,24	47	8270,84	73	54338,8	99	71898
22	2239,05	48	9399,94	74	54725,46	0	74574
23	2659,17	49	9340,04	75	51973,54	2001	74350
24	2634,63	50	10426,16	76	56599,22	2002	73935
25	2764,88	51	11785,57	77	58792,64		

In prima battuta si applica quindi un modello GBM con due shock esponenziali seguendo la logica di un modello regressivo non lineare standard e ponendo  $t = 1$  in corrispondenza con l'anno 1900. I risultati principali sono schematizzati qui di seguito.



**Figura 12:** Produzione cumulata mondiale di Crude Oil e NGL (dal 1986).

Nonlinear Regression

-----  
 Dependent variable: YztBPC  
 Independent variables: t  
 Function to be estimated:

$$m*(1-EXP(-(p+q)*(t+(c1/b1)*(EXP(b1*(t-a1))-1)*(a1 <= t)+$$

$$(c2/b2)*(EXP(b2*(t-a2))-1)*(a2 <= t))))/$$

$$(1+(q/p)*EXP(-(p+q)*(t+(c1/b1)*(EXP(b1*(t-a1))-1)*(a1 <= t)+$$

$$(c2/b2)*(EXP(b2*(t-a2))-1)*(a2 <= t))))$$

Initial parameter estimates:

m = 5,3E6  
 p = 0,00007  
 q = 0,071  
 c1 = -0,261  
 b1 = -0,01  
 a1 = 81,0  
 c2 = 0,1  
 b2 = -0,01  
 a2 = 66,0

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of parameter estimates.

Number of iterations: 12

Number of function calls: 134

Estimation Results

Parameter	Estimate	Asymptotic Standard Error	Asymptotic 95,0% Confidence Interval	
			Lower	Upper
m	5,32144E6	475867,0	4,37659E6	6,26629E6
p	0,0000710627	0,00000602899	0,0000590919	0,0000830334
q	0,0676185	0,000468199	0,0666889	0,0685481
c1	-0,263001	0,016245	-0,295256	-0,230747
b1	-0,0131512	0,0137793	-0,0405104	0,0142079
a1	80,4935	0,231966	80,0329	80,9541
c2	0,245016	0,0246776	0,196018	0,294014
b2	-0,075207	0,0211707	-0,117242	-0,0331721
a2	64,6556	0,464932	63,7325	65,5787

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square
Model	9,56795E13	9	1,06311E13
Residual	7,39639E8	94	7,8685E6
Total	9,56802E13	103	
Total (Corr.)	5,98925E13	102	

R-Squared = 99,9988 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,9987 percent

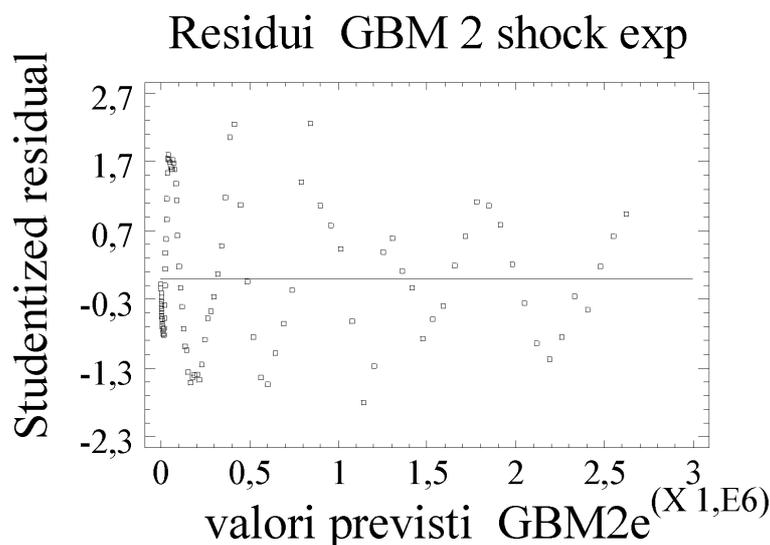
Standard Error of Est. = 2805,08

Mean absolute error = 2266,18

Durbin-Watson statistic = 0,187235

Si nota innanzitutto l'ottimo adattamento complessivo del modello espresso da un  $R^2 = 0,999988$  eccezionalmente molto elevato. Gli intervalli di confidenza asi-  
 totici sono piuttosto buoni e non deve preoccupare il fatto che l'intervallo per  $b_1$   
 contenga lo zero: la struttura, peraltro basata su un'approssimazione lineare, è  
 fortemente asimmetrica a favore della componente negativa.

Si evidenziano come preannunciato due shock ben precisi; il primo è posizionato  
 intorno al 1964 e indica un'accelerazione della produzione sospinta da una parallela  
 espansione delle economie a livello mondiale. Si pensi anche al caso italiano a cavallo  
 del 1960-1. Tale shock presenta un'intensità iniziale positiva,  $c_2 = 0,24$  con un  
 decadimento piuttosto rapido indicato da  $b_2 = -0,075$ .



**Figura 13:** Residui studentizzati: presenza di autocorrelazione.

Lo shock successivo, riconosciuto come significativo, non coincide con il ben noto evento del 1973 associato alla guerra del Kippur probabilmente poiché a livello mondiale si sono compensate rapidamente le restrizioni produttive locali. Coincide invece con il più pesante e duraturo evento che ebbe inizio nel 1979 su iniziativa dell'OPEC la cui strategia impose un contingentamento al ribasso delle produzioni degli aderenti per alcuni anni. L'effetto di tale politica è qui stimato a partire dal 1980.

Si notano due aspetti importanti. Il livello di  $c_1 = -0,263$  indica uno shock dimensionalmente equivalente al precedente in termini assoluti ma ad esso antitetico. Si tratta di una sorta di manovra correttiva che, in un certo senso, riporta in linea il sistema di produzione sullo standard naturale. La seconda osservazione è centrata sul livello del parametro di decadimento  $b_1 = -0,013$ . Questo è di gran lunga più prossimo allo zero del precedente e denota quindi un prolungato effetto nel tempo della politica adottata dall'OPEC. Tale osservazione trova uno stretto parallelismo temporale e di segno nell'ambito del gas metano come si è avuto modo di vedere in precedenza nel paragrafo (3.7.5). Il rapporto  $q/p = 952$  denuncia la forte presenza nel processo diffusivo della componente asintotica cumulata imitativa. La frazione asintotica cumulata degli innovatori è pari allo 0,7% (meno di un punto percentuale). Il rapporto  $q/p$ , come si evidenzia nel paragrafo (3.8), controlla direttamente la quota asintotica cumulata che non risulta quindi alterata dalla presenza di shock deterministici nell'evoluzione del processo.

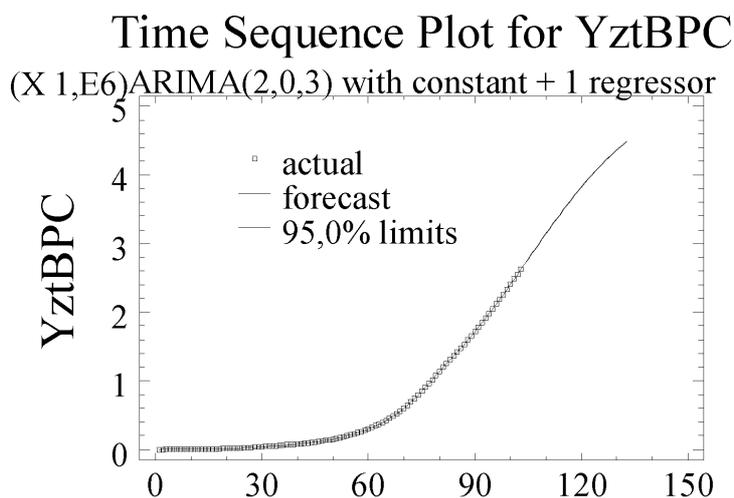
Il valore  $m = 5,32144E6$  è associato all'ampiezza della *carrying capacity* iniziale, in questo contesto denominata spesso URR (*Ultimate Recoverable Resource*). Tenendo presente la natura dei dati – sono medie di produzione giornaliera – si può pervenire immediatamente al dato complessivo:  $m \cdot 365 = 1942Gbo$  (*Giga barrels of oil*). Tale livello, si ricorda, contiene anche la quota di NGL.

Sulla base del valore  $m$  si determinano il livello di saturazione al 90% (esauri-

mento operativo) ed il tempo corrispondente, in questo caso pari all'anno 2041. Si parla di esaurimento operativo poiché si è osservato in molti contesti diffusivi, ed in particolare anche negli ambiti economico-sociali, che a tale livello possono corrispondere manovre di tipo sostitutivo spesso dovute a costi marginali di produzione insostenibili in modo efficace.

Queste ultime valutazioni sono condizionate alla scelta di uno scenario futuro non perturbato,  $x(t) = 1$ . È ovvio quindi che un'accelerazione degli interventi,  $x(t) > 1$ , nei prossimi anni produrrebbe un accorciamento del ciclo che può essere simulato *ex ante*. Naturalmente l'URR  $m$  non è modificabile, vista anche la sostanziale mappatura dei siti già nota da anni.

Un affinamento dell'approccio analitico si basa ovviamente sull'analisi dei residui. Il test di Durbin-Watson ( $D-W = 0,187235$ ) segnala già una presenza di autocorrelazione residuale e la conferma grafica si può avere esaminando la figura (13).



**Figura 14:** GBM autoregressivo ARMA(2,3): dati cumulati Zittel-BP .

Per incorporare nel modello tale aspetto che è stato ignorato in occasione dell'applicazione della tecnica regressiva non lineare si può procedere come suggerito nel paragrafo 3.11. Si presentano qui di seguito i risultati principali di tale analisi più raffinata.

#### Analysis Summary

Data variable: YztBPC

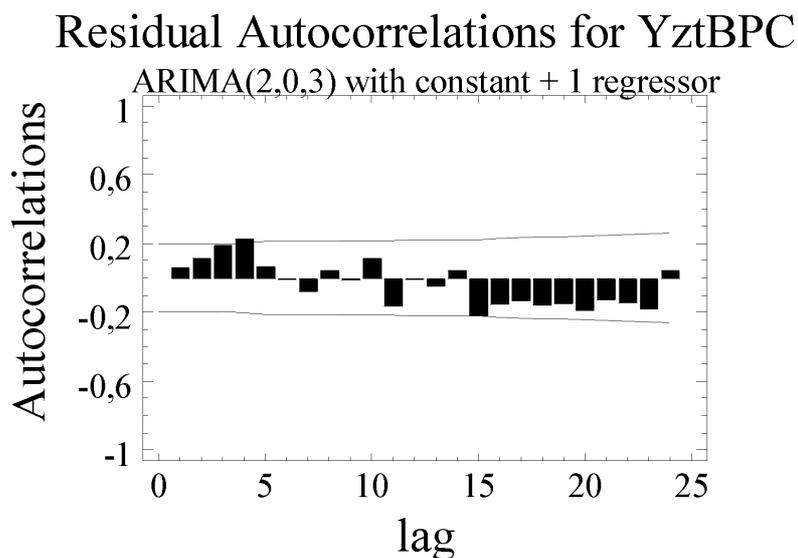
Number of observations = 103

Start index = 1,0

Sampling interval = 1,0

#### Forecast Summary

-----  
Forecast model selected: ARIMA(2,0,3) with constant + 1 regressor



**Figura 15:** GBM autoregressivo ARMA(2,3): test sui residui.

Number of forecasts generated: 30  
Number of periods withheld for validation: 0

Statistic	Estimation Period	Validation Period
MSE	934432,0	
MAE	677,96	
MAPE	3,62181	
ME	2,28585	
MPE	-3,07253	

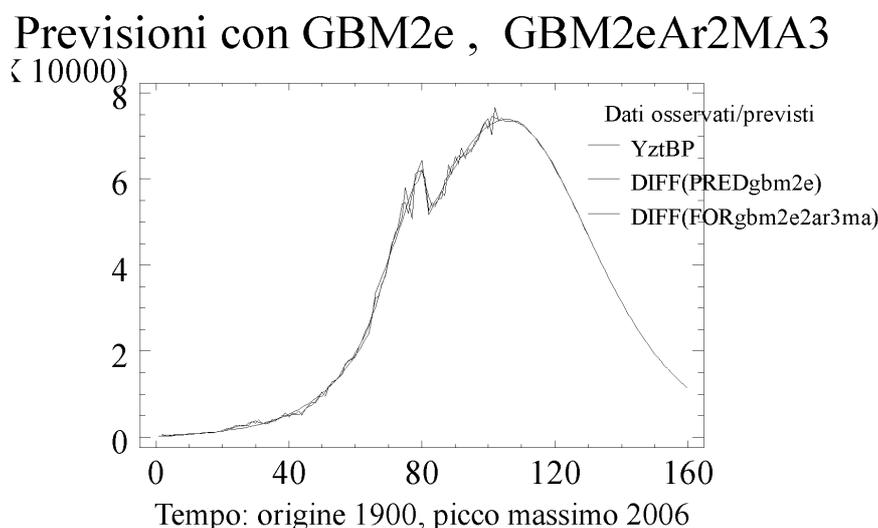
ARIMA Model Summary				
Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
AR(1)	1,06556	0,133417	7,98673	0,000000
AR(2)	-0,53185	0,0725888	-7,32689	0,000000
MA(1)	-0,583075	0,117058	-4,98109	0,000003
MA(2)	-0,485516	0,105584	-4,59838	0,000013
MA(3)	-0,384309	0,100176	-3,83635	0,000222
PREDgbm2e	0,466468	0,0637363	7,31872	0,000000
Mean	718,227	718,871	0,999104	0,320230
Constant	334,9			

Backforecasting: yes  
Estimated white noise variance = 925134,0 with 97 degrees of freedom  
Estimated white noise standard deviation = 961,839  
Number of iterations: 24

Il modello risulta ovviamente più preciso nel senso che la devianza residua cala di un fattore 10. Nel grafico riportato nella figura (14) si può controllare la migliore performance basata su un ARMA(2,3) comprendente a primo stadio le stime GBM ottenute in precedenza in ambito regressivo.

La centratura del modello è sufficientemente confortata dall'esame della batteria dei test sui residui ai vari lag. Si veda, in particolare, la figura (15).

È possibile e più pregnante confrontare infine il comportamento dei modelli pro-



**Figura 16:** GBM, GBM - ARMA(2,3): valori medi giornalieri.

posti GBM e GBM-ARMA(2,3) esaminando le informazioni direttamente sulla scala istantanea, passando quindi alle differenze prime. Nella figura (16) si evidenzia la buona compatibilità tra il modello base GBM ed il suo affinamento GBM-ARMA(2,3).

È immediato constatare in questo caso che il raggiungimento del picco massimo si ha nel 2006. Nel caso in cui si escludano i NGL si ha un picco anticipato nel 2002 ed un'analoga anticipazione al 2033 del tempo di saturazione al 90% (esaurimento operativo). Valgono anche in questo caso le osservazioni fatte a proposito dell'ipotesi di equilibrio su  $x(t) = 1$ , per  $t > 2001$ , che consente una previsione in condizioni di scenario non perturbato. Se non si adottano politiche di restrizione dei consumi e di miglioramento dell'efficienza delle tecnologie dipendenti, l'anno 2033 risulta essere un *upper bound* per l'esaurimento operativo del solo *crude oil*.

## 4 Generazioni successive indipendenti con assorbimento totale

I modelli di crescita ad esse sono stati utilizzati in precedenza per trattare particolari processi cumulati di conteggio che presentano una saturazione temporale sul livello  $m$ . La forma funzionale adottata può essere adattata alla descrizione di quei processi di diffusione istantanei essenzialmente stazionari su un livello  $m$  e preceduti da un transitorio che consente di raggiungere il regime. Tali processi mantengono la stazionarietà se non insorge una nuova generazione in grado di acquisire gli spazi occupati dalla precedente e di aggiungere la propria autonoma posizione.

Questa tematica è stata affrontata in Norton e Bass (1987). Si vedano anche alcuni approfondimenti statistici in Grigoletto (1994) e in Iori (1993).

#### 4.1 Generazioni successive: BM indipendenti

Si supponga che il transitorio sia descritto da un modello di Bass normalizzato  $F(t_i)$  con parametri costanti  $p_i = p$ ,  $q_i = q$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  per cui,

$$F(t_i) = \frac{1 - e^{-(p_i+q_i)t_i}}{1 + \frac{q_i}{p_i} e^{-(p_i+q_i)t_i}}, \quad (96)$$

ove  $t_i = t - c_i$  indica il tempo trascorso dall'origine  $c_i$  del transitorio e  $F(t_i) = 0$  per  $t_i < 0$ .

Se non ci sono generazioni successive, il processo delle adozioni istantanee è del tipo

$$S_{1,t} = F(t_1)m_1, \quad (97)$$

e diviene stazionario sul picco potenziale  $m_1$  per  $t \gg c_1$ . Se insorge una nuova successiva generazione al tempo  $c_2 > c_1$ , necessariamente il modello dovrà tenerne conto. Quello che qui si ipotizza è il passaggio graduale, per sostituzione, dalla vecchia innovazione adottata alla più recente. Esempi di migrazione di questo tipo sono abbastanza comuni. Si pensi, ad esempio, alla sostituzione tecnologica nell'ambito delle differenti generazioni di processori per *personal computer*. Tali migrazioni possono essere totali o parziali.

Nell'ipotesi di **migrazione totale** il nuovo modello per due generazioni può assumere la forma che segue,

$$\begin{aligned} S_{1,t} &= F(t_1)m_1 - F(t_2)F(t_1)m_1 = F(t_1)m_1(1 - F(t_2)), \\ S_{2,t} &= F(t_2)m_2 + F(t_2)F(t_1)m_1 = F(t_2)[m_2 + F(t_1)m_1]. \end{aligned} \quad (98)$$

Si noti che la seconda generazione recupera dinamicamente la quota sottratta alla prima generazione,  $F(t_2)F(t_1)m_1$ . Inoltre, per  $t \rightarrow +\infty$ , si ha  $S_{1,\infty} = 0$  e  $S_{2,\infty} = m_1 + m_2$ .

Un'estensione del sistema (98) al caso più generale può essere esemplificato con riferimento a quattro generazioni successive, sotto l'ipotesi di migrazione completa,

$$\begin{aligned} S_{1,t} &= F(t_1)[m_1][1 - F(t_2)], \\ S_{2,t} &= F(t_2)[m_2 + F(t_1)[m_1]][1 - F(t_3)] \\ S_{3,t} &= F(t_3)[m_3 + F(t_2)[m_2 + F(t_1)[m_1]]][1 - F(t_4)] \\ S_{4,t} &= F(t_4)[m_4 + F(t_3)[m_3 + F(t_2)[m_2 + F(t_1)[m_1]]]. \end{aligned} \quad (99)$$

È opportuno osservare la regola di accrescimento dei singoli sottomodelli e la regola di chiusura dell'ultima generazione non seguita da un'ulteriore rettifica: manca infatti il fattore di riduzione dinamica  $[1 - F(t_4)]$ . È interessante notare che per  $t \rightarrow +\infty$  le adozioni istantanee  $S_{1,t}$ ,  $S_{2,t}$  e  $S_{3,t}$  tendono a zero poiché i fattori di riduzione dinamica  $[1 - F(t_i)]$ ,  $i = 1, 2, 3$  sono nulli al limite. Le adozioni istantanee  $S_{4,t}$  ereditano, al limite, la somma dei picchi individuali delle generazioni precedenti per cui  $S_{4,\infty} = \sum_{i=1}^4 m_i$ . Si realizza quindi una migrazione completa.

## 4.2 Aspetti di stima simultanea: BM indipendenti

Si può osservare che la somma di tutte le adozioni così come sono state definite ai punti (96) e (99) porge il mercato istantaneo complessivo retto dai parametri  $m_i, c_i, p_i, q_i; i = 1, 2, \dots, 4$ ,

$$y(t) = S_{1,t} + S_{2,t} + S_{3,t} + S_{4,t} \quad (100)$$

equivalente a

$$y(t) = F(t_1)m_1 + F(t_2)m_2 + F(t_3)m_3 + F(t_4)m_4. \quad (101)$$

Questa osservazione può essere di utilità nella stima a livello univariato. In alcuni casi l'eccessiva pesantezza della dimensione parametrica può essere ridotta con l'introduzione motivata di vincoli opportuni, ad esempio ponendo  $p_i = p$  e  $q_i = q$  per  $i = 1, 2, \dots, 4$ .

## 4.3 Generazioni successive: il parco automobilistico italiano

L'applicazione che segue è un approfondimento dell'analisi del parco autoveicolare italiano, Sartori (2004), secondo l'archivio ACI integrato con le informazioni ISTAT necessarie a colmare alcune lacune delle serie storiche originarie.

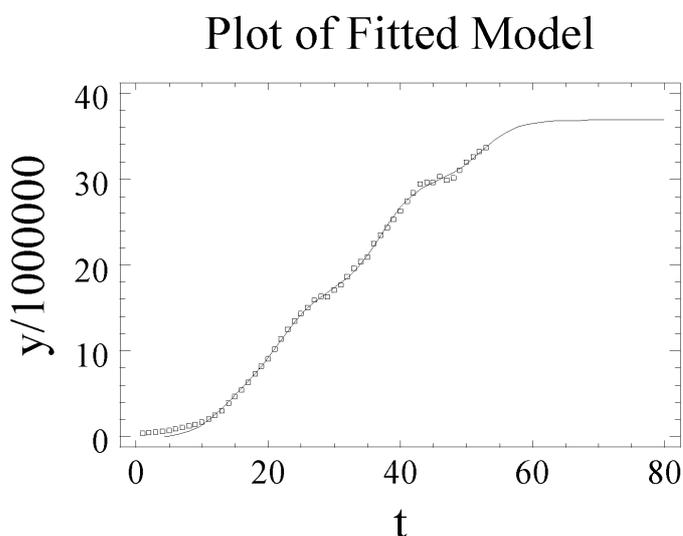
Le serie così ottenute si riferiscono al periodo storico che va dal 1950 al 2002 e attengono alla consistenza (stock) dei parchi Autovetture, Autocarri, Autobus, Motrici, Motocicli, Motocarri.

Qui si presterà attenzione alla serie storica della consistenza delle autovetture circolanti.

1950	342021	1963	3864150	1976	15925267	1989	26267431
1951	425283	1964	4674644	1977	16371153	1990	27415828
1952	510189	1965	5468981	1978	16240877	1991	28434923
1953	612944	1966	6356545	1979	17073208	1992	29429628
1954	744299	1967	7311385	1980	17686236	1993	29652024
1955	879313	1968	8178505	1981	18603369	1994	29665308
1956	1051004	1969	9028400	1982	19616106	1995	30301424
1957	1237622	1970	10209045	1983	20388599	1996	29910932
1958	1421297	1971	11298575	1984	20888210	1997	30154914
1959	1644247	1972	12484313	1985	22494641	1998	31056004
1960	1994724	1973	13424118	1986	23495414	1999	32038291
1961	2443873	1974	14295040	1987	24320167	2000	32583815
1962	3006839	1975	15060609	1988	25290250	2001	33239029
						2002	33706153

L'obiettivo che si intende perseguire è quello di individuare, a partire dal dato di stock, la struttura di alcune generazioni successive di automobili. Qui si ipotizza infatti che l'insorgere di una nuova generazione possa produrre quei meccanismi di assorbimento sostanzialmente completi descritti nei paragrafi 4.1 e 4.2.

Si è proceduto per gradi in modo da conseguire informazioni sui punti di insorgenza delle nuove generazioni. Si è optato infine per un modello a quattro generazioni che realizza un buon adattamento sotto l'ipotesi di costanza dei parametri di diffusione  $p$  e  $q$ . I dati sono espressi in milioni di autovetture.



**Figura 17:** Quattro generazioni successive: parco automobilistico italiano.

#### Nonlinear Regression

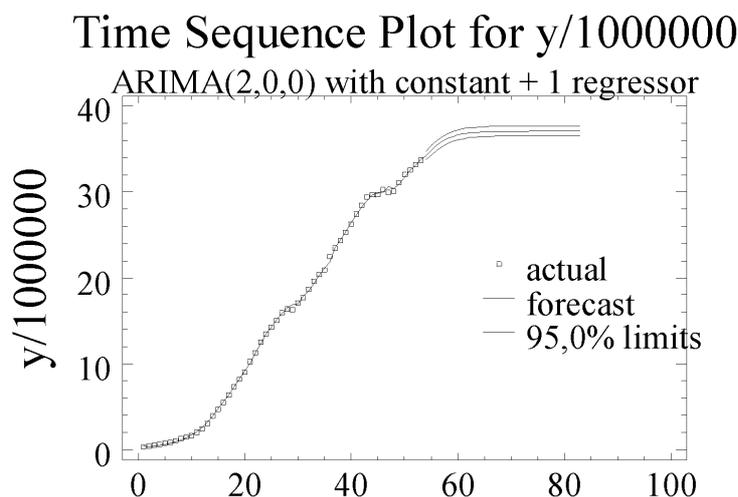
```

-----
Dependent variable: y/1000000
Independent variables: t
Function to be estimated:
m* (1-EXP(-(p+q)*t))/(1+(q/p)*EXP(-(p+q)*t))+
m2* (1-EXP(-(p+q)*(t-c2)))/(1+(q/p)*EXP(-(p+q)*(t-c2)))+
m3* (1-EXP(-(p+q)*(t-c3)))/(1+(q/p)*EXP(-(p+q)*(t-c3)))+
m4* (1-EXP(-(p+q)*(t-c4)))/(1+(q/p)*EXP(-(p+q)*(t-c4)))
Initial parameter estimates:
  m = 6,0
  p = 0,0022
  q = 0,255
  m2 = 16,0
  c2 = 8,0
  m3 = 13,0
  c3 = 18,0
  m4 = 7,5
  c4 = 37,0
Estimation method: Marquardt
Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.
Number of iterations: 16
Number of function calls: 178

```

I risultati dell'analisi presentano un adattamento ed una significatività notevoli ed evidenziano le tre date di insorgenza delle nuove generazioni negli anni, precisamente, 1959, 1974 e 1989. Esula dalla presente trattazione un'approfondito esame dei possibili significati di tali riferimenti temporali. Pare tuttavia interpretabile bene la data del 1959 alla soglia del *boom* economico degli anni sessanta. È interessante raccordare questo dato con l'insorgenza di uno *shock* esponenziale positivo intorno agli anni 1964 evidenziato in Guidolin (2004) nell'ambito dello studio del processo di produzione mondiale del petrolio (*crude oil*). Il ciclo successivo ha origine stimata nel 1974 subito dopo la guerra del Kippur associata alla prima crisi energetica mondiale del 1973. Il ciclo che segue si posiziona intorno al 1989, a valle del secondo shock petrolifero, quello più devastante e duraturo. Tale shock, dovuto alle

politiche OPEC di riduzione programmata delle estrazioni, parte dall'anno 1979 e si protrae per parecchi anni. Il ciclo del 1989 probabilmente si caratterizza per l'inizio di una forte modificazione dei motori a combustione interna con l'introduzione di un massiccio uso delle tecnologie di controllo elettronico e con il corrispondente alleggerimento degli autoveicoli compatibile con un miglioramento della sicurezza.



**Figura 18:** Parco automobilistico italiano: affinamento AR(2).

L'introduzione di tali innovazioni è ragionevolmente collegata con i noti eventi bellici che hanno interessato l'area del Medio Oriente. Si pensi ad esempio che nel 1979 Saddam Hussein diventa presidente dell'Iraq mentre in Iran ha luogo un cambio di regime con l'allontanamento dello Scià. Nel periodo che va dal 1980 al 1988 si svolge un intervento bellico tra Iran e Iraq che costringe la Nato ad intervenire per scortare i rari convogli di petroliere minacciate dagli eventi in corso. Nel 1990 si assiste all'invasione del Kuwait seguita nel 1991 dalla guerra del Golfo (prima).

Di interesse sono anche i contributi specifici dei singoli cicli (in milioni di autovetture). Il terzo presenta infatti il valore di  $m$  più elevato,  $m_3 = 12,72$  seguito da una flessione nel ciclo successivo,  $m_4 = 7$ .

È di particolare curiosità notare il divario tra i parametri  $p$  e  $q$ . Il loro rapporto evidenzia una dominanza oggettiva del meccanismo imitativo.

#### Estimation Results

Parameter	Estimate	Asymptotic Standard Error	Asymptotic 95,0% Confidence Interval	
			Lower	Upper
m	6,81853	0,881698	5,04158	8,59548
p	0,0025299	0,00105572	0,000402238	0,00465756
q	0,368517	0,0276392	0,312814	0,42422
m2	10,3628	0,802862	8,74476	11,9809
c2	8,91902	0,517053	7,87696	9,96107

m3	12,7204	0,464475	11,7843	13,6565
c3	23,6158	0,759202	22,0857	25,1459
m4	7,00095	2,76582	1,4268	12,5751
c4	38,9621	2,63077	33,6601	44,2641

-----  
Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square
Model	19483,0	9	2164,78
Residual	6,61577	44	0,150358
Total	19489,6	53	
Total (Corr.)	6796,12	52	

R-Squared = 99,9027 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,885 percent

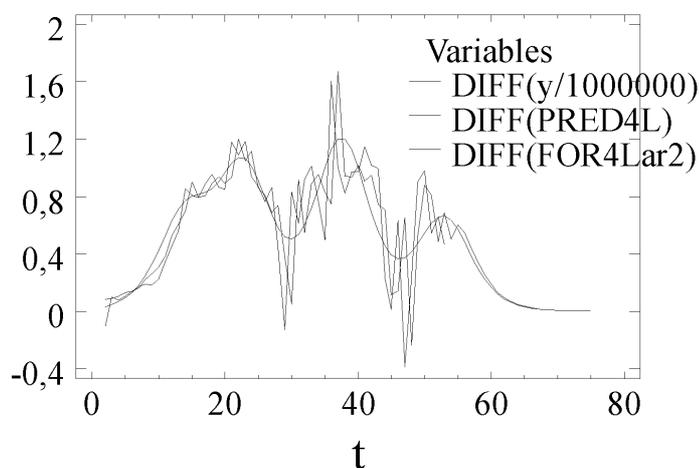
Standard Error of Est. = 0,387761

Mean absolute error = 0,277457

Durbin-Watson statistic = 0,515654

I residui del modello denotano una struttura autocorrelata (D-W statistic = 0,5156) per cui può essere consigliabile un affinamento mediante un modello di trasferimento ARMA così come è stato proposto nel paragrafo 3.11. Nella figura (18) si dà un'indicazione grafica dei risultati ottenuti.

## Multiple X-Y Plot



**Figura 19:** Variazioni nette annuali del parco automobilistico italiano.

È tuttavia più istruttivo rappresentare le differenze prime sia dei dati di stock sia delle previsioni con il modello a quattro generazioni e con il successivo modello autoregressivo AR(2). Tali differenze esprimono essenzialmente le immatricolazioni al netto delle radiazioni. Nella figura (19) si conferma l'insorgenza di una nuova generazione (se si esclude quella del 1959) subito dopo il raggiungimento di un picco massimo locale (1974 e 1989). Tale indicazione euristica consentirebbe di dare un'interpretazione al massimo locale che si trova intorno al 2002-03. In questa finestra dovrebbe situarsi l'inizio di una nuova generazione. I sintomi sono in parte presenti.

È curioso notare che in Guidolin (2004) si individua la stessa finestra di riferimento in relazione alla teoria della successione dei cicli energetici proposta inizialmente da Marchetti e rettificata tecnicamente con l'ausilio dei modelli di Bass generalizzati in modo da incorporare gli shock deterministici.

È tuttavia doveroso annotare che la sequenza dei cicli, ben delineati nella figura (19), denota un comportamento monotono decrescente per cui pare di capire che il successivo imminente ciclo potrebbe essere dimensionalmente più contenuto dei precedenti, probabilmente in relazione agli sforzi tecnologici necessari in un contesto energetico meno favorevole.

#### 4.4 Generazioni successive: GBM indipendenti

Nel caso in cui i transitori siano sottoposti a rettifiche o interventi occasionali è possibile utilizzare in luogo della (96) la forma più generale basata su un GBM,

$$F(t_i) = \frac{1 - e^{-(p_i+q_i) \int_{c_i}^t x(\tau) d\tau}}{1 + \frac{q_i}{p_i} e^{-(p_i+q_i) \int_{c_i}^t x(\tau) d\tau}}, \quad i = 1, 2, \dots, 4, \quad (102)$$

ove  $t_i = t - c_i$  indica il tempo trascorso dall'origine  $c_i$  del transitorio e  $F(t_i) = 0$  per  $t_i < 0$ . Anche in questo caso l'eccessiva pesantezza della dimensione parametrica può essere ridotta con l'introduzione motivata di vincoli opportuni, ad esempio ponendo  $p_i = p$  e  $q_i = q$  per  $i = 1, 2, \dots, 4$ . Appare invece piuttosto plausibile considerare  $x(t)$  unica portante poiché, in presenza di due generazioni nello stesso ambiente e nello stesso periodo è improbabile che l'intervento ambientale sia selettivo. La presenza di un'eventuale specificità della portante,  $x(t) = x_i(t)$  impone un arricchimento parametrico che va valutato con attenzione in termini di costi-benefici informativi. La forma (101) ottenuta nel caso di quattro generazioni con migrazione totale è ancora formalmente valida anche se i parametri coinvolti sono molteplici.

## 5 Generazioni successive indipendenti con assorbimento parziale

Il caso qui trattato complica solo leggermente quanto introdotto nella sezione precedente. In alcune situazioni è possibile ritenere che la generazione successiva non induca una migrazione completa. La rappresentazione di tale vincolo può essere resa come segue.

### 5.1 Generazioni successive indipendenti con migrazione parziale: BM e GBM

Si consideri, ad esempio, il caso di due generazioni successive. Nel modello (98) la seconda generazione assorbe dinamicamente dalla prima la quantità  $F(t_2)[F(t_1)m_1]$ . È immediato introdurre uno zoccolo non assorbibile ponendo,

$$F(t_2)[F(t_1)m_1 - k_1], \quad (103)$$

per cui la coppia di generazioni assume la veste che segue,

$$\begin{aligned} S_{1,t} &= F(t_1)m_1[1 - F(t_2)] + k_1F(t_2), \\ S_{2,t} &= F(t_2)[m_2 + F(t_1)m_1 - k_1]. \end{aligned} \quad (104)$$

Si nota subito che per  $t_1 \rightarrow +\infty$  si ha  $S_{1,\infty} = k_1$  e per  $t_2 \rightarrow +\infty$  si consegue  $S_{2,\infty} = m_1 + m_2 - k_1$ .

Nel caso di quattro generazioni indipendenti con assorbimento parziale si può definire il modello come segue,

$$\begin{aligned} S_{1,t} &= F(t_1)[m_1][1 - F(t_2)] + k_1F(t_2), \\ S_{2,t} &= F(t_2)[m_2 + F(t_1)[m_1]][1 - F(t_3)] + k_2F(t_3) \\ S_{3,t} &= F(t_3)[m_3 + F(t_2)[m_2 + F(t_1)[m_1]]][1 - F(t_4)] + k_3F(t_4) \\ S_{4,t} &= F(t_4)[m_4 + F(t_3)[m_3 + F(t_2)[m_2 + F(t_1)[m_1] - k_1] - k_2] - k_3. \end{aligned} \quad (105)$$

Il limiti di  $S_{i,t}$  per  $t_i \rightarrow +\infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$  sono ordinatamente  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $\sum_{i=1}^4 m_i - \sum_{j=1}^3 k_j$ .

Anche in questo caso vale la relazione

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 S_{i,t} = \sum_{i=1}^4 F(t_i)m_i. \quad (106)$$

È possibile stimare con i minimi quadrati tutti i parametri ( $m_i, c_i, p_i, q_i; i = 1, 2, \dots, 4$ ) e gli eventuali parametri associati alla comune funzione portante  $x(t)$ . Non sono invece identificabili i parametri  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$  per il meccanismo compensativo implicito nella somma. La stima di tali parametri può essere conseguita con i minimi quadrati definiti sui modelli residuali locali. Posto, ad esempio,

$$w_1(t) = S_{1,t} - F(t_1)[m_1][1 - F(t_2)] = k_1F(t_2) + \varepsilon(t), \quad (107)$$

la stima di  $k_1$  è immediata,

$$\hat{k}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T w_1(t)F(t_2)}{\sum_{t=1}^T (F(t_2))^2}. \quad (108)$$

In alternativa, è necessario ricorrere ad una procedura di riduzione del tipo di Beauchamp–Cornell che tenga conto delle eventuali dipendenze stocastiche tra le singole risposte  $S_{i,t}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$ .

## 6 La competizione tra generazioni dipendenti parzialmente coeve

### 6.1 Modello di Guseo–Bonaldo, GB-M, per due competitori coevi

Il sistema di equazioni di base del modello di Guseo - Bonaldo, (Bonaldo, 1991), descrive il comportamento bivariato di due processi di diffusione sottoposti ai meccanismi di contesa di una risorsa residua accessibile ad entrambi. Questo modello

è stato riproposto di recente, in modo indipendente, da Krishnan, Bass e Kumar (2000).

Il meccanismo che regola la parte inerziale delle componenti imitative è comune ed è tipico dell'ambiente competitivo che ospita i due contendenti. Il modello qui richiamato, per semplicità di presentazione circoscritto al caso binario o duopolistico, può essere esteso a più di due contendenti,

$$z_1'(t) = m \left( p_1 + q_1 \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right) \quad (109)$$

$$z_2'(t) = m \left( p_2 + q_2 \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right),$$

ove  $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$  rappresenta la somma dei due processi di diffusione cumulati ed  $m$  rappresenta l'asintoto di  $z(t)$ , per  $t \rightarrow +\infty$ .

La soluzione dell'equazione (109), dovuta a Guseo, si fonda, sul fatto che il processo somma,  $z(t)$ , soddisfa l'equazione tipica del modello standard di Bass,

$$z'(t) = m \left( p + q \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right) \quad (110)$$

ove  $p = p_1 + p_2$  e  $q = q_1 + q_2$ . È quindi immediata l'individuazione della soluzione,

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}. \quad (111)$$

L'integrazione della (109) porge, come è noto dal lavoro del 1991,

$$z_1(t) = \frac{m(q_1 p - q p_1)}{q^2} \ln \frac{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}} + \frac{q_1 m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (112)$$

$$z_2(t) = \frac{m(q_2 p - q p_2)}{q^2} \ln \frac{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}} + \frac{q_2 m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}.$$

Tale soluzione mette in evidenza l'effetto della contesa. Le componenti  $(q_1 p - q p_1)$  e  $(q_2 p - q p_2)$  sono opposte e quindi a somma zero. In questo modo viene chiarito che il modello di Bass globale (111) non è la somma di due modelli di Bass standard locali, bensì di due modelli modificati che traggono origine da una rettifica della quota di mercato

$$\frac{q_i m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad i = 1, 2,$$

dovuta alla perturbazione

$$\frac{m(q_i p - q p_i)}{q^2} \ln \frac{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}}, \quad i = 1, 2.$$

Il comportamento asintotico del sistema (112) è di facile determinazione ed evidenzia un non immediato frazionamento di  $m$ , precisamente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z_i(t) = m \frac{(q_i p - q p_i)}{q^2} \ln \frac{p}{p+q} + m \frac{q_i}{q}, \quad i = 1, 2. \quad (113)$$

### 6.1.1 Soluzione compatta dell'equazione GB-M

Si considerino, per semplicità, le seguenti posizioni,

$$W = w(t) = \frac{z(t)}{m}; \quad f = \frac{q}{p}; \quad E = E(t) = e^{-(p+q)t}. \quad (114)$$

Per la (111) si ha

$$W = \frac{1 - E}{1 + fE}, \quad (115)$$

ovvero  $E = (1 - W)/(1 + fW)$ , per cui, applicando il logaritmo si ottiene

$$t = \frac{1}{(p+q)} \log \left( \frac{1 + fW}{1 - W} \right), \quad (116)$$

con i differenziali

$$dt = \frac{(f+1)}{(p+q)(1-W)(1+fW)} dW. \quad (117)$$

La prima delle equazioni (109) assume ora la forma seguente

$$\frac{dz_1}{dt} = m(p_1 + q_1 w(t))(1 - w(t)), \quad (118)$$

e per integrazione e successivo cambio di variabile,  $W = w(t)$ , si ha

$$\begin{aligned} z_1(t) &= m \int (p_1 + q_1 w(t))(1 - w(t)) dt \\ &= m \int \frac{(p_1 + q_1 W)(f+1)}{(p+q)(1+fW)} dW \\ &= \frac{m}{p} \int \frac{(p_1 + q_1 W)}{(1+fW)} dW. \end{aligned} \quad (119)$$

Se si considera l'integrazione definita nel dominio  $(0, W]$  si ha la soluzione passante per l'origine  $(0, 0)$

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{m}{pf} \left\{ \left[ p_1 - \frac{q_1}{f} \right] \ln(fW + 1) + q_1 W \right\} \\ &= m \left\{ \frac{q_1 p - q p_1}{q^2} \ln \left( \frac{1 + fE}{1 + f} \right) + \frac{q_1}{q} W \right\} = H_1(t), \end{aligned} \quad (120)$$

coincidente con la prima delle (112).

### 6.1.2 GB-M per vari competitori coevi

Nel caso precedente, (109), si è esaminato un modello parzialmente cooperativo in cui i competitori sono limitati a due. Il caso più generale a  $k > 2$  competitori è definito in maniera analoga. Il sistema delle equazioni simultanee è il seguente

$$\begin{aligned}
 z'_1(t) &= m \left( p_1 + q_1 \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right) \\
 &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 z'_i(t) &= m \left( p_i + q_i \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right) \\
 &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 z'_k(t) &= m \left( p_k + q_k \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right),
 \end{aligned} \tag{121}$$

ove  $\sum_{i=1}^k p_i = p$ ,  $\sum_{i=1}^k q_i = q$  e  $z(t) = \sum_{i=1}^k z_i(t)$ .

La somma delle equazioni (121) definisce la (110) e la corrispondente soluzione (111). L'integrazione del sistema (121) dà luogo in modo automatico quanto segue,

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= \frac{m(q_1 p - q p_1)}{q^2} \ln \frac{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}} + \frac{q_1 m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \\
 &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 z_i(t) &= \frac{m(q_i p - q p_i)}{q^2} \ln \frac{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}} + \frac{q_i m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \\
 &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 z_k(t) &= \frac{m(q_k p - q p_k)}{q^2} \ln \frac{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}} + \frac{q_k m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}.
 \end{aligned} \tag{122}$$

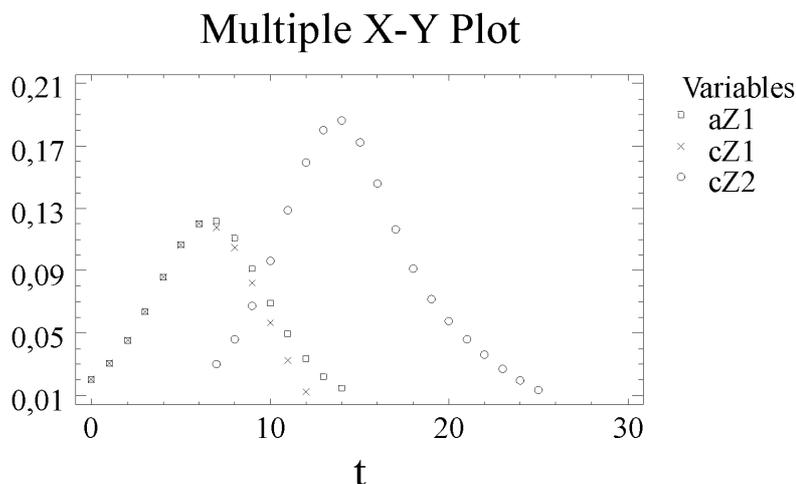
Anche in questo caso,  $\sum_{i=1}^k (q_i p - q p_i) = 0$ , per cui le perturbazioni delle quote di mercato

$$\frac{q_i m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$$

costituiscono un gioco a somma zero.

## 6.2 Competitori parzialmente coevi, GB-MS

È sicuramente piuttosto raro che due processi di diffusione sostituibili siano coevi nello stesso ambiente. È molto più comune osservare l'insorgere successivo di un competitore. Nel caso di due soli competitori si può immaginare che il secondo intervenga sulla scena al tempo  $t = c_2$ ,  $c_2 > 0$  ove  $t = 0$  indica l'origine dei tempi per il primo competitore (si veda la figura 20).



**Figura 20:** Competitori parzialmente coevi, GB-MS.

Un modello di Guseo–Bonaldo che comprenda tale sfasatura temporale può essere descritto mediante la (109) con le seguenti ulteriori specificazioni,

$$\begin{aligned}
 m &= m_1 + m_2 I_{t > c_2}, \\
 z(t) &= z_1(t) + z_2(t - c_2) I_{t > c_2} \\
 z_2(t) &= m \left( p_2 + q_2 \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right) I_{t > c_2}.
 \end{aligned} \tag{123}$$

Per  $t \leq c_2$  si indichi con  ${}_a z_1(t)$  il comportamento locale del primo competitore. Per cose note la soluzione è

$${}_a z_1(t) = n \frac{1 - {}_a E_1}{1 + \frac{s}{r} {}_a E_1} \tag{124}$$

ove  ${}_a E_1 = e^{-(r+s)t}$  e i parametri  $n, r,$  e  $s$  sono tipici dell'ambiente ridotto che si è esplorato con la prima diffusione. L'insorgere di un nuovo contendente può produrre, ma questo non è necessario, una capacità portante  $m > n$ .

A partire dal punto  $t = c_2$  inizia ad operare il meccanismo della contesa. Se si indica con  ${}_c z_1(t)$  la funzione che descrive il processo cumulato per  $t > c_2$  sarà necessario aggiungere al livello  ${}_a z_1(c_2)$  già conseguito l'integrale definito della (119) nel dominio  $[W(c_2), W]$ , ovvero,

$${}_c z_1(t) = H_1(t) - H_1(c_2) + {}_a z_1(c_2). \tag{125}$$

Per  $c_2 = 0$ ,  ${}_a z_1(t) = 0$  e  $H_1(c_2) = 0$ , si consegue la soluzione coeva.

Per  $z_2(t)$  si ha ovviamente  $z_2(t) = 0$ , per  $t \leq c_2$  e, per  $t > c_2$

$${}_c z_2(t) = H_2(t) - H_2(c_2). \tag{126}$$

La figura (20) riassume in termini qualitativi le possibili relazioni.

È comunque bene riflettere sulla relazione tra  $m$  e  $n$ , in particolare, alla luce della (113) e della (125). Appare tuttavia evidente che una eccessiva vicinanza tra  $m$  e  $n$ , dovuta alla perfetta conoscenza dell'ambiente maturo, genera effetti di contesa sostitutiva piuttosto sensibili.

Viceversa, la divaricazione tra  $n$  e  $m$  è sinonimo di una condizione di prima esplorazione in cui l'effetto della contesa è più modesto e con un possibile beneficio anche per il primo contendente. Queste ultime considerazioni collimano con le analoghe sviluppate nel modello di Givon, Mahajan e Müller (1995) che, come è noto, è un caso particolare del modello base di Guseo–Bonaldo, GB-M.

### 6.3 Interventi ambientali: GGB-M, GGB-MS

Il modello base di Guseo – Bonaldo può essere generalizzato se si introduce una comune funzione “portante”  $x(t)$  definita positiva e integrabile localmente, funzione che consente di modificare la velocità di scorrimento del tempo in relazione all'ambiente che ospita i due processi in contesa. Si evidenzia qui il fatto che  $x(t)$  è assunta comune ed esprime quindi proprietà specifiche dell'ambiente competitivo come risultante delle politiche di espansione–contesa prodotte in modo non esclusivo dai due antagonisti.

Il modello di Guseo – Bonaldo generalizzato, GGBM, assume allora la forma che segue

$$z'_1(t) = m \left( p_1 + q_1 \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right) x(t) \quad (127)$$

$$z'_2(t) = m \left( p_2 + q_2 \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right) x(t).$$

Il processo di diffusione somma  $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$  soddisfa l'equazione

$$z'(t) = m \left( p + q \frac{z(t)}{m} \right) \left( 1 - \frac{z(t)}{m} \right) x(t) \quad (128)$$

con  $p = p_1 + p_2$  e  $q = q_1 + q_2$ , per cui vale la (48).

Per evidenziare in forma esplicita i passi che portano alla soluzione della (127) si considerino, per comodità, le posizioni che seguono,

$$w = w(t) = z(t)/m; \quad f = q/p; \quad E = e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}.$$

Per la (48) si ha quindi  $w = (1 - E)/(1 + fE)$  ovvero  $E = (1 - w)/(1 + fw)$ , per cui,

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = -\frac{1}{p+q} \ln \left( \frac{1-w}{1+fw} \right). \quad (129)$$

Differenziando entrambi i membri si consegue

$$x(t)dt = \frac{1+f}{(p+q)(1-w)(1+fw)}dw. \quad (130)$$

Si consideri, a titolo esemplificativo, la prima equazione della (127) cui corrisponde l'integrale

$$z_1(t) = m \int (p_1 + q_1w)(1-w)x(t)dt. \quad (131)$$

Si introduce il cambio di variabili che corrisponde alla (130)

$$z_1(t) = m \int (p_1 + q_1w) \frac{1+f}{(p+q)(1+fw)}dw = \frac{m}{p} \int \frac{p_1 + q_1w}{1+fw}dw \quad (132)$$

ove si osservi che  $(1+f)/(p+q) = 1/p$ . Dalla (132) si consegue facilmente

$$z_1(t) = \frac{m}{pf} \{ [p_1 - q_1/f] \ln(1+fw) + q_1w \} \quad (133)$$

ovvero, per le posizioni fatte,

$$z_1(t) = m \left\{ \frac{qp_1 - q_1p}{q^2} \ln \left( \frac{1+f}{1+fE} \right) + \frac{q_1}{q}w \right\}. \quad (134)$$

In definitiva, la forma esplicita della soluzione del sistema (127) assume la veste che segue,

$$z_1(t) = \frac{m(q_1p - qp_1)}{q^2} \ln \frac{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)\int_0^t x(\tau)d\tau}}{1 + \frac{q}{p}} + \frac{q_1m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)\int_0^t x(\tau)d\tau}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)\int_0^t x(\tau)d\tau}} \quad (135)$$

$$z_2(t) = \frac{m(q_2p - qp_2)}{q^2} \ln \frac{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)\int_0^t x(\tau)d\tau}}{1 + \frac{q}{p}} + \frac{q_2m}{q} \frac{1 - e^{-(p+q)\int_0^t x(\tau)d\tau}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)\int_0^t x(\tau)d\tau}}$$

Naturalmente si consegue la (112) se la funzione portante diventa uniformemente unitaria,  $x(t) = 1$ .

Se la contesa insorge al tempo  $c_2 > 0$  si tratta di seguire la via tracciata nel paragrafo (6.2) aggiornando il modello in modo da tener conto della presenza di una comune funzione portante  $x(t)$ .

Per  $t \leq c_2$  la versione generalizzata  $agz_1(t)$  è

$$agz_1(t) = n \frac{1 - agE_1}{1 + \frac{s}{r}agE_1}, \quad (136)$$

ove  $agE_1 = e^{-(r+s)\int_0^t x(\tau)d\tau}$ . La nuova funzione,  $cgz_1(t)$ , che descrive il comportamento di  $z_1(t)$  per  $t > c_2$  assume la nuova veste,

$$cgz_1(t) = gH_1(t) - gH_1(c_2) + agz_1(c_2), \quad (137)$$

ove

$${}_gH_1(t) = m \left\{ \frac{q_1 p - q p_1}{q^2} \ln \left( \frac{1 + fE}{1 + f} \right) + \frac{q_1}{q} W \right\}, \quad (138)$$

con  $E = e^{-(p+q) \int_0^t x(\tau) d\tau}$ ,  $W = (1 - E)/(1 + fE)$  e  $f = q/p$ .

Analogamente si ha

$${}_{cg}z_2(t) = {}_gH_2(t) - {}_gH_2(c_2) + {}_{ag}z_1(c_2), \quad t > c_2, \quad (139)$$

ove  ${}_{cg}z_2(t) = 0$  per  $t \leq c_2$ .

#### 6.4 Equazioni di Lotka–Volterra: predatore–preda

Le equazioni di Lotka–Volterra rientrano in una più ampia categoria di modelli atti a descrivere il consumo di una risorsa che può essere ripristinata entro certi limiti. I casi più immediati sono rappresentati da coppie di processi: predatori e prede, erbivori e piante, piante e nutrienti, ecc..

Le ipotesi di base sono le seguenti:

- a) se il consumo è assente la *risorsa* si sviluppa come una singola popolazione fino al raggiungimento della capacità portante (*carrying capacity*) consentita dall'ambiente di riferimento. Tale regime stazionario è un equilibrio dovuto al meccanismo di autocontesa che non consente ad un "organismo" uno sviluppo senza limiti;
- b) se viene meno la risorsa, il consumo diventa nullo e quindi si estinguono i consumatori;
- c) il trasferimento della risorsa è l'unica relazione tra le due popolazioni.

Le variazioni istantanee delle due popolazioni possono essere rappresentate come segue,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \Phi(x) - yp(x) \\ \frac{dy}{dt} &= -\mu y + eyp(x), \end{aligned} \quad (140)$$

ove  $x = x(t)$  rappresenta lo stock della risorsa,  $\Phi(x)$  definisce la dinamica del suo accrescimento,  $p(x)$  descrive il saggio variabile di consumo per ogni consumatore,  $y$  rappresenta lo stock dei consumatori. Nella prima equazione si descrive la variazione istantanea della risorsa come differenza tra il livello di crescita raggiunto ed il consumo espresso. Nella seconda equazione si tiene conto del tasso di mortalità dei consumatori  $\mu$  e dell'efficienza  $e$  di utilizzo della risorsa consumata.

Lotka (1920), biologo e attuario–demografo, introdusse la prima formulazione del modello di questa classe per il controllo di reazioni chimiche oscillatorie non

smorzate. In modo indipendente, Vito Volterra (1926) trattò per primo il problema specifico della modellazione predatore–preda.

La primitiva modellazione proposta si riferisce ad un accrescimento malthusiano poco realistico, precisamente,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + bxy.\end{aligned}\tag{141}$$

Una versione più sensata specifica la funzione di accrescimento  $\Phi(x)$  secondo una logistica,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - pxy \\ \frac{dy}{dt} &= -\mu y + epxy.\end{aligned}\tag{142}$$

### 6.5 Equazioni di Lotka–Volterra: competizione, sostituzione, coesistenza

Una versione “generalizzata” del modello di Lotka–Volterra, *LVC*, è rappresentata dal seguente sistema di equazioni. Si veda ad esempio Abramson e Zanette (1998),

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left[ r_i - \sum_{j=1}^M a_{ij} x_j \right], \quad i = 1, 2, \dots, M.\tag{143}$$

Un caso ridotto del precedente modello, *LVC*, per  $M = 2$ , è trattato in un recente lavoro di Morris e Pratt (2003) ove il problema descritto rientra nell’adattamento necessario per descrivere gli aspetti competitivi riferibili a due tecnologie antagoniste.

Il modello proposto è del tipo seguente

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_1 \frac{x_1}{K_1} (K_1 - x_1 - \alpha_2 x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2 \frac{x_2}{K_2} (K_2 - x_2 - \alpha_1 x_1),\end{aligned}\tag{144}$$

ove  $x_1$  e  $x_2$  sono le popolazioni associate alle due tecnologie, ad esempio i volumi di vendita già effettuati,  $K_1$  e  $K_2$  sono le dimensioni potenziali dei due mercati specifici,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono i parametri di calibrazione della competizione e misurano la forza di inibizione dell’antagonista sulla percezione locale del mercato residuo puro,  $K_i - x_i$ ,  $i = 1, 2$ .

### 6.6 Equazioni estese di contesa: LVBC e LVGBC

Una semplice estensione di *LVC* che appare ragionevole alla luce della parte dinamica di accrescimento  $\Phi(x)$ , consiste nell’utilizzare non una semplice evoluzione logistica,

bensì un'evoluzione di tipo Riccati–Bass, LVBC, precisamente,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \left( p_1 + a_1 \frac{x_1}{K_1} \right) (K_1 - x_1 - \alpha_2 x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left( p_2 + a_2 \frac{x_2}{K_2} \right) (K_2 - x_2 - \alpha_1 x_1).\end{aligned}\quad (145)$$

In questo modo si esplicita meglio il ruolo degli innovatori nelle due popolazioni, ruolo che è omesso nell'approccio logistico o di Verhulst.

Un'estensione più articolata cerca di superare la stretta logica delle equazioni LV in cui sia nella versione base sia nella versione LVBC le equazioni presentano evoluzioni che sono tipiche di popolazioni sostanzialmente isolate, fatti salvi i meccanismi inibitori. In altre parole, il tipico effetto di *word-of-mouth* rappresentato nelle evoluzioni logistiche è irrealisticamente locale e specifico di ciascuna popolazione.

La proposta che segue, LVGBC, è volta a produrre un'estensione ulteriore che ricomprenda al suo interno il modello LVBC e il modello di Guseo–Bonaldo, GB–M. L'idea è piuttosto semplice e può assumere la forma che segue

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \left( p_1 + \frac{a_1 x_1 + b_1 x_2 I_1}{K_1 + I_1 K_2} \right) (K_1 + I_1 K_2 - x_1 - \alpha_2 x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left( p_2 + \frac{a_2 x_2 + b_2 x_1 I_2}{K_2 + I_2 K_1} \right) (K_2 + I_2 K_1 - x_2 - \alpha_1 x_1).\end{aligned}\quad (146)$$

È immediato controllare che per  $a_1 = b_1 = q_1$ ,  $a_2 = b_2 = q_2$ ,  $I_1 = I_2 = 1$  e  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , si consegue il modello di Guseo–Bonaldo, GB–M.

Per converso, se  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 0$  si perviene al modello di LVC descritto da Morris e Pratt. Se ci si limita al solo annullamento di  $I_1 = I_2 = 0$ , si ha un modello LVBC. Con il modello (146) si contamina il modello LV con effetti cooperativi e/o imitativi–innovativi incrociati.

## 6.7 Equazioni estese di contesa con interventi ambientali comuni: GL–VGBC

Il sistema (146) può essere modificato con una portante comune  $x(t)$  come segue,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \left( p_1 + \frac{a_1 x_1 + b_1 x_2 I_1}{K_1 + I_1 K_2} \right) (K_1 + I_1 K_2 - x_1 - \alpha_2 x_2) x(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left( p_2 + \frac{a_2 x_2 + b_2 x_1 I_2}{K_2 + I_2 K_1} \right) (K_2 + I_2 K_1 - x_2 - \alpha_1 x_1) x(t).\end{aligned}\quad (147)$$

## Parte II

# DIFFUSIONI SPAZIO – TEMPORALI

## 7 Ambiente spazio–temporale

### 7.1 Modello spazio–temporale generalizzato di Bass: STGBM

Si supponga ora che il processo di interesse possa espandersi non solo nella direzione temporale ma anche nella direzione spaziale.

A titolo di esempio, si pensi alla descrizione del processo delle vendite di un’azienda con riferimento al tempo  $t$  intercorso dal lancio di un prodotto limitatamente al “bacino di utenza” di raggio  $u$ .

Un modello spazio–temporale generalizzato, STGBM, per la modulazione delle diffusioni mediante due opportune “portanti”,  ${}_T x(t)$  e  ${}_S x(u)$ , è il seguente,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = m(u) \left( p + q \frac{z(u, t)}{m(u)} \right) \left( 1 - \frac{z(u, t)}{m(u)} \right) {}_T x(t) \quad p, q > 0 \quad (148)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = n(t) \left( r + s \frac{z(u, t)}{n(t)} \right) \left( 1 - \frac{z(u, t)}{n(t)} \right) {}_S x(u) \quad r, s > 0,$$

ove,  $m(u)$  e  $n(t)$  sono i mercati “raggiungibili” entro l’orizzonte spaziale  $u$  per  $t \rightarrow +\infty$  e, rispettivamente, temporale  $t$  per  $u \rightarrow +\infty$ . È naturale assumere la seguente identità  $\lim_{u \rightarrow +\infty} m(u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = m$ .

La soluzione di questo sistema di equazioni alle derivate parziali si basa sulla corrispondente versione univariata (48) del GBM.

Si fissi a questo proposito un preciso livello spaziale  $\hat{u}$  per il bacino di utenza. Si ha subito,

$$z(\hat{u}, t) = m(\hat{u}) \frac{1 - e^{-(p+q) {}_T X(t)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q) {}_T X(t)}}, \quad t > 0; p, q > 0, \quad (149)$$

ove  ${}_T X(t) = \int_0^t {}_T x(\tau) d\tau$ .

Analogamente, per un prefissato riferimento temporale  $t = \hat{t}$ , la versione spaziale assume la forma

$$z(u, \hat{t}) = n(\hat{t}) \frac{1 - e^{-(r+s) {}_S X(u)}}{1 + \frac{s}{r} e^{-(r+s) {}_S X(u)}}, \quad u > 0; r, s > 0, \quad (150)$$

ove  ${}_S X(u) = \int_0^u {}_S x(\nu) d\nu$ .

Le due forme (149) e (150) debbono coincidere nel punto  $(u, t)$  per una opportuna scelta di  $m(u)$  e  $n(t)$ . Poiché deve valere il vincolo  $\lim_{u \rightarrow +\infty} m(u) =$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = m$ , si considerino i limiti della (149) e della (150) per  $u \rightarrow +\infty$  imponendo l'equivalenza

$$m \frac{1 - e^{-(p+q)TX(t)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)TX(t)}} = n(t). \quad (151)$$

Analogamente, per  $t \rightarrow +\infty$ , si consegue l'identità

$$m(u) = m \frac{1 - e^{-(r+s)SX(u)}}{1 + \frac{s}{r} e^{-(r+s)SX(u)}}. \quad (152)$$

Se si sostituisce la (151) nella (150) oppure la (152) nella (149) si ottiene la funzione  $z(u, t)$  che caratterizza lo STGBM, precisamente,

$$z(u, t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)TX(t)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)TX(t)}} \cdot \frac{1 - e^{-(r+s)SX(u)}}{1 + \frac{s}{r} e^{-(r+s)SX(u)}}. \quad (153)$$

In alternativa, se si eguagliano le funzioni (149) e (150) si consegue una forma del tipo

$$m(u)H(t) = n(t)G(u), \quad (154)$$

ove,

$$H(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)TX(t)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)TX(t)}}, \quad (155)$$

e

$$G(u) = \frac{1 - e^{-(r+s)SX(u)}}{1 + \frac{s}{r} e^{-(r+s)SX(u)}}. \quad (156)$$

Si consegue subito l'equazione

$$\frac{m(u)}{G(u)} = \frac{n(t)}{H(t)}$$

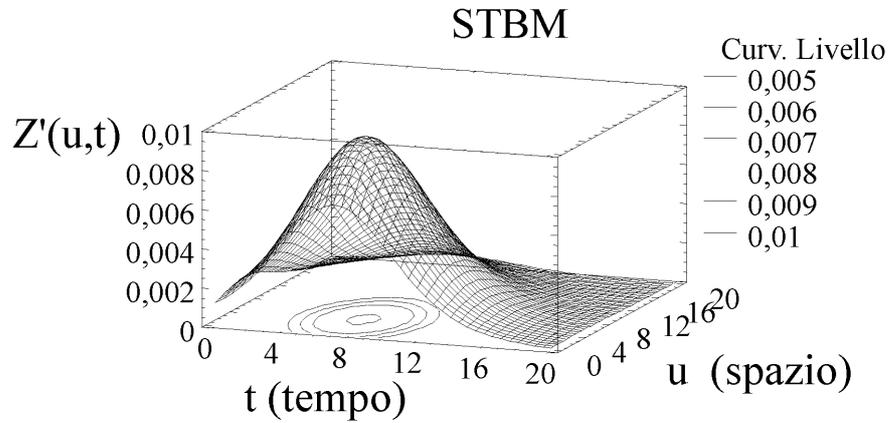
che ha come unica soluzione una costante  $m$  per cui  $m(u) = mG(u)$  e  $n(t) = mH(t)$ . Da questo si perviene immediatamente alla (153).

La corrispondente versione basata sulla densità è

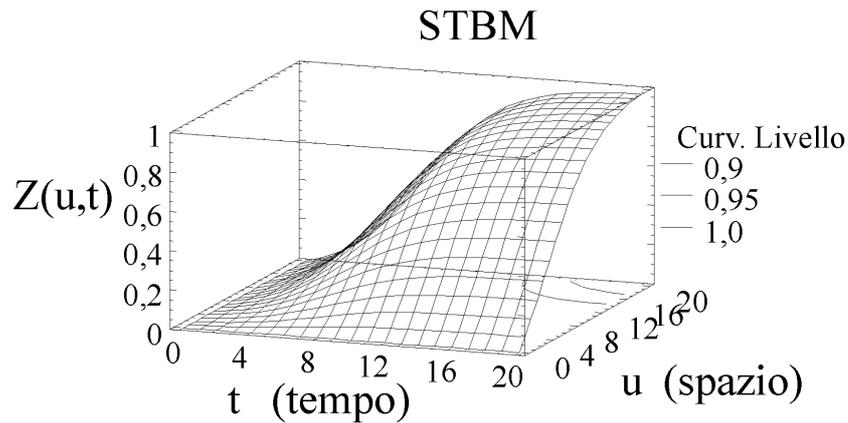
$$z'(u, t) = m \frac{p(p+q)^2 T x(t) e^{(p+q)TX(t)}}{(pe^{(p+q)TX(t)} + q)^2} \frac{r(r+s)^2 S x(u) e^{(r+s)SX(u)}}{(re^{(r+s)SX(u)} + s)^2}. \quad (157)$$

Nel caso in cui le funzioni portanti siano uniformemente unitarie,  $TX(t) = SX(u) = 1$ , si perviene al sottomodulo STBM (Space and Time Bass Model) in cui  $TX(t) = t$  e  $SX(u) = u$ .

Dal punto di vista grafico la densità doppia di uno STBM assume una forma unimodale come si può notare nella Figura (21).



**Figura 21:** Densità doppia del modello STBM.



**Figura 22:** Ripartizione doppia del modello STBM.

La ripartizione doppia di uno STBM assume invece una forma doppiamente monotona come si può notare nella Figura (22).

La curva di livello  $z(u, t) = 0,95m$  individua tutte le combinazioni spazio-temporali  $(u, t)$  che descrivono un livello di saturazione del 95%. Gli estremi inferiori di tali combinazioni sono facilmente individuabili. Ad esempio, per  $u \rightarrow +\infty$ , il livello temporale di saturazione al 95% è

$$t_{0,95|u \rightarrow +\infty} = \frac{1}{p+q} \ln \frac{p+0,95q}{0,05p}. \quad (158)$$

Analogamente, per  $t \rightarrow +\infty$ , il livello di saturazione spaziale al 95% è

$$u_{0,95|t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{r+s} \ln \frac{r+0,95s}{0,05r}. \quad (159)$$

Più in generale, posto  $\tilde{u} > u_{0,95|t \rightarrow +\infty}$ , la soluzione bivariata al 95% di saturazione è costituita dalla coppia  $(\tilde{u}, \tilde{t})$  con

$$\tilde{t}_{0,95|\tilde{u}} = \frac{1}{p+q} \ln \frac{pF(\tilde{u}) + 0,95q}{(F(\tilde{u}) - 0,95)p}, \quad (160)$$

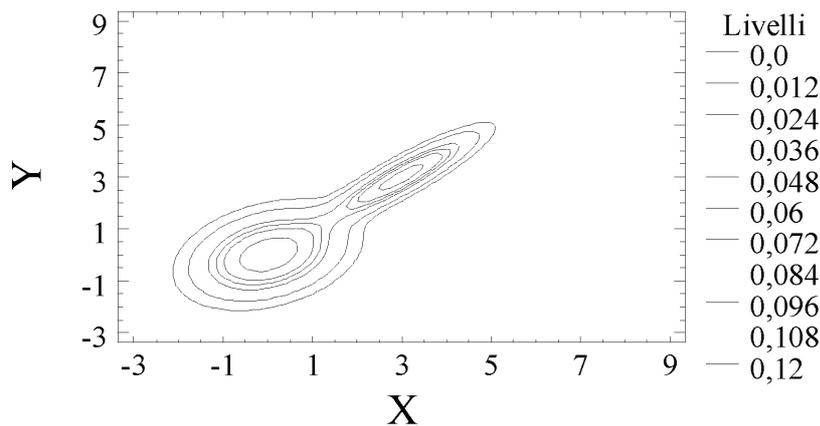
ove,  $F(\tilde{u}) = (1 - e^{-(r+s)\tilde{u}})/(1 + \frac{s}{r}e^{-(r+s)\tilde{u}})$ .

## 7.2 Modello spazio-temporale generalizzato di Guseo-Bonaldo: STGGB-M

La versione bivariata generalizzata del modello di Guseo-Bonaldo, (127), (135) è una versione congiunta di due processi di diffusione temporale in contesa.

L'introduzione della dimensione spaziale deve tener conto, in modo parsimonioso, della separazione tra i due contendenti. Siano  $(c_{11}, c_{12})$  e  $(c_{21}, c_{22})$  le coordinate dei due contendenti nel piano di riferimento  $C_1, C_2$ . Nello stesso piano vengono rilevate le coordinate dei singoli eventi (adozioni, vendite, cessioni, ecc.).

Uno dei primi aspetti da affrontare convenzionalmente concerne le regole di integrazione spaziale rispetto alla presenza di una coppia di antagonisti. Nel grafico che segue, figura (23), si riportano in termini qualitativi le curve di livello che caratterizzano i due bacini di utenza in competizione considerati congiuntamente.



**Figura 23:** Curve di livello dei due bacini di utenza.

Un semplice criterio di integrazione spaziale può essere ottenuto generalizzando il criterio euclideo proposto nel caso univariato. Si indichi il baricentro di riferimento mediante la coppia di coordinate  $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ , ove,

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &= c_{11}\alpha + c_{12}(1 - \alpha) \\ \bar{c}_2 &= c_{21}\alpha + c_{22}(1 - \alpha)\end{aligned}\quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (161)$$

Naturalmente una scelta non convessa è possibile sul piano logico; pare tuttavia poco sensato adottare un sistema troppo sbilanciato. In ogni caso, una volta individuato il baricentro spaziale della procedura di integrazione, si può proporre un criterio euclideo per il calcolo della distanza degli eventi, tipicamente,

$$u = u(\alpha) = \sqrt{(c_1 - \bar{c}_1)^2 + (c_2 - \bar{c}_2)^2}. \quad (162)$$

Con questa precisazione, in parte convenzionale, diventa piuttosto agevole estendere alla dimensione spaziale il modello bivariato generalizzato di Guseo – Bonaldo (127), (135). Tale estensione si indica con l'acronimo STGGBM ed è caratterizzata dal seguente sistema di equazioni,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1}{\partial t} &= m(u) \left( p_1 + q_1 \frac{z(u, t)}{m(u)} \right) \left( 1 - \frac{z(u, t)}{m(u)} \right) T x(t) & p_1, q_1 > 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} &= n(t) \left( r_1 + s_1 \frac{z(u, t)}{n(t)} \right) \left( 1 - \frac{z(u, t)}{n(t)} \right) S x(u) & r_1, s_1 > 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} &= m(u) \left( p_2 + q_2 \frac{z(u, t)}{m(u)} \right) \left( 1 - \frac{z(u, t)}{m(u)} \right) T x(t) & p_2, q_2 > 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial u} &= n(t) \left( r_2 + s_2 \frac{z(u, t)}{n(t)} \right) \left( 1 - \frac{z(u, t)}{n(t)} \right) S x(u) & r_2, s_2 > 0\end{aligned} \quad (163)$$

ove,  $z(u, t) = z_1(u, t) + z_2(u, t)$  è la ripartizione assoluta della somma dei due processi entro gli orizzonti  $t$  e  $u$ . Le funzioni  $m(u)$  e  $n(t)$  rappresentano i totali asintotici “raggiungibili” entro l'orizzonte spaziale  $u$  per  $t \rightarrow +\infty$  e, rispettivamente, entro l'orizzonte temporale  $t$  per  $u \rightarrow +\infty$  e, naturalmente, i limiti di tali funzioni debbono coincidere,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} m(u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = m$ . Le funzioni “portanti”  $T x(t)$  e  $S x(u)$  consentono di modulare i tempi e gli spazi intorno al punto di equilibrio unitario. I parametri di innovazione e di imitazione delle componenti temporali e spaziali sono vincolati ai corrispondenti del modello aggregato rappresentato dal sistema (148), precisamente,  $p = p_1 + p_2$ ,  $q = q_1 + q_2$ ,  $r = r_1 + r_2$ ,  $s = s_1 + s_2$ . Si deve fare attenzione ora che il processo di diffusione aggregato  $z(u, t)$  è pari alla soluzione (153) del sistema di equazioni (148).

Si ritenga, per comodità di ragionamento, l'orizzonte spaziale fisso,  $u = \hat{u}$ , e si definiscano le quantità che seguono,  $f = \frac{q}{p}$ ,

$$w = w(\hat{u}, t) = \frac{z(\hat{u}, t)}{m(\hat{u})}; \quad E_T(t) = e^{-(p+q)T X(t)}; \quad E_S(u) = e^{-(r+s)S X(u)},$$

con  ${}_T X(t) = \int_0^t {}_T x(\tau) d\tau$  e  ${}_S X(u) = \int_0^u {}_S x(\nu) d\nu$ , per cui,

$$m(u) = m \left( \frac{1 - E_S(u)}{1 + \frac{s}{r} E_S(u)} \right), \quad n(t) = m \left( \frac{1 - E_T(t)}{1 + \frac{q}{p} E_T(t)} \right). \quad (164)$$

Per la (153) si ha che vale ancora una volta la relazione

$$w = w(\hat{u}, t) = \frac{z(\hat{u}, t)}{m(\hat{u})} = \frac{1 - E_T(t)}{1 + \frac{q}{p} E_T(t)}, \quad (165)$$

ovvero,

$$E_T(t) = \frac{1 - w}{1 + fw}, \quad (166)$$

per cui valgono le posizioni (129) e (130) con  ${}_T x(t)$  in luogo di  $x(t)$ ,

$${}_T x(t) dt = \frac{1 + f}{(p + q)(1 - w)(1 + fw)} dw. \quad (167)$$

Si fissi ora l'attenzione sulla prima equazione del sistema (163) cui corrisponde l'integrale

$$z_1(\hat{u}, t) = m(\hat{u}) \int (p_1 + q_1 w)(1 - w) {}_T x(t) dt. \quad (168)$$

Si introduca il cambio di variabile implicito nella (167),

$$z_1(\hat{u}, t) = m(\hat{u}) \int (p_1 + q_1 w) \frac{1 + f}{(p + q)(1 + fw)} dw = \frac{m(\hat{u})}{p} \int \frac{p_1 + q_1 w}{1 + fw} dw, \quad (169)$$

ove  $(1 + f)/(p + q) = 1/p$ . Dalla (169) si consegue

$$\begin{aligned} z_1(\hat{u}, t) &= \frac{m(\hat{u})}{pf} \left\{ \left( p_1 - \frac{q_1}{f} \right) \ln(1 + fw) + q_1 w \right\} \\ &= m(\hat{u}) \left\{ \frac{qp_1 - q_1 p}{q^2} \ln \left( \frac{1 + f}{1 + f E_T(t)} \right) + \frac{q_1}{q} w \right\}. \end{aligned}$$

Analogo ragionamento vale per  $z_2(\hat{u}, t)$ , terza equazione, per cui

$$z_2(\hat{u}, t) = m(\hat{u}) \left\{ \frac{qp_2 - q_2 p}{q^2} \ln \left( \frac{1 + f}{1 + f E_T(t)} \right) + \frac{q_2}{q} w \right\}.$$

In definitiva, partendo da  $u = \hat{u}$ , si ottiene,

$$\begin{aligned} z_1(\hat{u}, t) &= m \left( \frac{1 - E_S(\hat{u})}{1 + \frac{s}{r} E_S(\hat{u})} \right) \left\{ \frac{q_1 p - qp_1}{q^2} \ln \left( \frac{1 + \frac{q}{p} E_T(t)}{1 + \frac{q}{p}} \right) + \frac{q_1}{q} \left( \frac{1 - E_T(t)}{1 + \frac{q}{p} E_T(t)} \right) \right\} \\ z_2(\hat{u}, t) &= m \left( \frac{1 - E_S(\hat{u})}{1 + \frac{s}{r} E_S(\hat{u})} \right) \left\{ \frac{q_2 p - qp_2}{q^2} \ln \left( \frac{1 + \frac{q}{p} E_T(t)}{1 + \frac{q}{p}} \right) + \frac{q_2}{q} \left( \frac{1 - E_T(t)}{1 + \frac{q}{p} E_T(t)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (170)$$

ove si può verificare che  $z_1(\hat{u}, t) + z_2(\hat{u}, t)$  soddisfa la (153)

$$z_1(\hat{u}, t) + z_2(\hat{u}, t) = m \left( \frac{1 - E_S(\hat{u})}{1 + \frac{s}{r} E_S(\hat{u})} \right) \left( \frac{1 - E_T(t)}{1 + \frac{q}{p} E_T(t)} \right) = z(\hat{u}, t).$$

Lo stesso ragionamento può essere ripetuto con la seconda e la quarta equazione con gli ovvi cambiamenti delle posizioni,

$$w = w(u, \hat{t}) = \frac{z(u, \hat{t})}{n(\hat{t})} = \frac{1 - E_S(u)}{1 + \frac{s}{r} E_S(u)}, \quad f = s/r, \dots$$

In definitiva, partendo da  $t = \hat{t}$ , si consegue

$$\begin{aligned} z_1(u, \hat{t}) &= m \left( \frac{1 - E_T(\hat{t})}{1 + \frac{q}{p} E_T(\hat{t})} \right) \left\{ \frac{s_1 r - s r_1}{s^2} \ln \left( \frac{1 + \frac{s}{r} E_S(u)}{1 + \frac{s}{r}} \right) + \frac{s_1}{s} \left( \frac{1 - E_S(u)}{1 + \frac{s}{r} E_S(u)} \right) \right\} \\ z_2(u, \hat{t}) &= m \left( \frac{1 - E_T(\hat{t})}{1 + \frac{q}{p} E_T(\hat{t})} \right) \left\{ \frac{s_2 r - s r_2}{s^2} \ln \left( \frac{1 + \frac{s}{r} E_S(u)}{1 + \frac{s}{r}} \right) + \frac{s_2}{s} \left( \frac{1 - E_S(u)}{1 + \frac{s}{r} E_S(u)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (171)$$

### Riferimenti bibliografici

- Abramson, e Zanette, (1998). Statistics of extinction and survival in Lotka–Volterra systems, *Physical Review E* 57, 4572–4577.
- Apostol, T.M. (1978). *Calcolo: Analisi 2*, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino.
- Bass F.M. (1969). A new product growth model for consumer durables, *Management Science*, 15, 215–227.
- Bass F.M., Krishnan T.V., Jain D.C. (1994). Why the Bass model fits without decision variables, *Marketing Science*, 13, 203–223.
- Bates D.N., Watts D.G. (1981). A relative offset orthogonality convergence criterion for nonlinear least squares, *Technometrics*, 123, 179–183.
- Bates D.N., Watts D.G. (1988). *Nonlinear Regression Analysis and its Applications*, Wiley Interscience, New York.
- Beauchamp J.J., Cornell R.G. (1966). Simultaneous nonlinear estimation, *Technometrics*, 8, 319–326.
- Bittanti S. (1991). Count Riccati and the Early Days of the Riccati Equation, in: *The Riccati Equation*, Bittanti S., Laub A.J., Willems J.C. (eds), Springer–Verlag, Berlin, 1–10.
- Bonaldo D. (1991). Competizione tra prodotti farmaceutici: strumenti di previsione, Tesi di laurea in Scienze Statistiche, Università di Padova.
- Box, G.E.P. e Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, revised edition, Holden–Day, Oakland, California.
- Brusaferro, M. (2004). Crude oil: valutazioni dei tempi di esaurimento delle risorse in Norvegia e Gran Bretagna; Tesi di laurea in Scienze Politiche - indirizzo politico-economico, Università di Padova.
- Campbell, C.J. (2002). Oil depletion-Updated through 2001.  
(<http://www.oilcrisis.com/campbell/update2002.htm>)
- Conte, M. (2004). La durata di programmazione di film presso sale di proiezione isolate o multiple: modelli di previsione basati sui primi dati di fruizione, Tesi di laurea in Economia internazionale, Facoltà di Scienze Politiche, Università di Padova.

- David, M. (2004). I principi attuariali delle assicurazioni sulla vita: differimento ed aleatorietà del rischio, Tesi di laurea in Economia territoriale e reti d'impresa, Facoltà di Scienze Politiche, Università di Padova.
- Deal K.R. (1979). Optimizing advertising expenditures in a dynamic duopoly, *Operations Research*, 27.
- Dodson J.A., Müller E. (1978). Models for new product diffusion through advertising and word-of-mouth, *Management Science*, 1568–78.
- Easingwood C.J., Mahajan V., Müller E. (1983). A non-uniform influence diffusion model of new product acceptance, *Marketing Science*, 2, 273–96.
- Fanetti F. (1994). Problemi di stima in modelli di competizione tra popolazioni, Tesi di laurea in Scienze Statistiche, Università di Padova.
- Fletcher R.I. (1974). The quadratic law of damped exponential growth, *Biometrics*, 30, 111–124.
- Gallant A.R. (1987). *Nonlinear statistical models*, Wiley, New York.
- Givon M., Mahajan V., Müller E. (1995). Software Piracy: Estimation of the lost Sales and the Impact on Software Diffusion, *Journal of Marketing*, 59 (1), 29–37.
- Grigoletto A. (1994). Modelli di diffusione per successive generazioni di un prodotto, Tesi di laurea in Scienze Statistiche, Università di Padova.
- Guidolin, M. (2004). Cicli energetici e diffusione delle innovazioni. Il ruolo dei modelli di Marchetti e di Bass; Tesi di laurea in Scienze Politiche - indirizzo politico-economico, Università di Padova.
- Guseo R. (1983). Confidence regions in non-linear regression. *Proceedings of The 44-th Session of ISI*, Madrid, Vol. 1 c.p., 333–336.
- Guseo R. (1984). Efficienza in probabilità per le regioni di confidenza nella regressione non lineare, *Atti XXXII Riunione Scientifica SIS*, Vol. 1, 397-407.
- Guseo R. (1985). Criterio statistico di convergenza alla soluzione dei minimi quadrati nella regressione non lineare, *Convegno Giornate di Metodologia Statistica*, Bressanone, 18–20/9/85, Cleup, Padova, 145–152.
- Guseo R. (2004). *Organizzazione statistica dell'informazione e scelte di gestione: Teoria, Tecniche e Mini-Stage Aziendali*, seconda edizione, CEDAM, Padova.
- Guseo, R. e Dalla Valle, A. (2004). Oil and Gas Depletion: Diffusion Models and Forecasting under Strategic Intervention, *Atti della LXII Riunione scientifica della Società Italiana di Statistica*, 9-11/6/2004, Bari, Sessioni Spontanee 733-736, Cleup, Padova.
- Halperin M. (1964). Confidence interval estimation in non-linear regression, *Journal of Royal, Statistical, Society*, B, 25, 330–333.
- Hartley H.O. (1964). Exact confidence regions for the parameters in nonlinear regression laws, *Biometrika*, 51, 347–353.
- Iori, L. (1993). Generazioni successive di prodotti: problemi di stima, Tesi di laurea in Scienze Statistiche, Università di Padova.
- Krishnan, T.V., Bass, F.M. e Kumar, V. (2000). Impact of a Late Entrant on the Diffusion of a new Product/Service, *Journal of Marketing Research*, vol. XXXVII, 269–278.

- Lesca G. (2000). Concorrenza e pirateria: modello di Bass esteso a serie latenti, Tesi di laurea in Scienze Statistiche, Università di Padova.
- Mahajan V., Peterson R.A. (1985). *Models for innovation diffusion*, Sage Publications, Beverly Hill, CA.
- Mahajan V., Peterson R.A. (1978). Innovation diffusion in a dynamic potential adopter population, *Management Science*, Vol 24, 1589–97.
- McCullagh P., Nelder J.A. (1983). *Generalized Linear Models*, Chapman and Hall, London.
- Morreale, F. (2004). Strategie energetiche degli U.S.A.: risorse, innovazioni tecnologiche e prospettive future, Tesi di laurea in Economia internazionale, Facoltà di Scienze Politiche, Università di Padova.
- Morris, S.A. e Pratt, D. (2003). Analysis of the Lotka–Volterra competition equations as a technological substitution model, *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 77, 103–133.
- Norton J.A., Bass F.M. (1987). A diffusion theory model adoption and substitution for successive generations of high technology products, *Management Science*, 33, 1069–86.
- Roncato, I. (2003). Risorse energetiche: prospettive nell’evoluzione dei consumi di gas metano; Tesi di laurea in Economia territoriale e reti d’imprese, Facoltà di Scienze Politiche, Università di Padova.
- Sartori, V. (2004). Un’analisi statistica del parco veicolare italiano: archivio ACI; Tesi di laurea in Economia territoriale e reti d’imprese, Facoltà di Scienze Politiche, Università di Padova.
- Seber G.A.F., Wild C.J. (1989). *Nonlinear regression*, Wiley, New York.
- Simeone S. (1992). Modelli di crescita e l’equazione di Fletcher: problemi inferenziali per forme implicite, Tesi di laurea in Scienze Statistiche, Università di Padova.
- Sundararaj N. (1978). A method for confidence regions for nonlinear models, *Australian J. Stat.*, 20, 270–274.
- Vanin, E. (2004). La liberalizzazione della produzione di energia elettrica in Italia: una nuova sfida sul fronte energetico, Tesi di laurea in Economia territoriale e reti d’imprese, Facoltà di Scienze Politiche, Università di Padova.
- Verhulst P.F. (1838). Notice sur la loi qui la population suit dans son accroissement, *Corres. Math. et Physique*, 10, 113–121.
- Wind Y., Mahajan V., Cardozo N.R. (1984). *New product forecasting: models and applications*, Lexington Book, Lexington.
- Zanella A. (1974). Sulle regioni di confidenza per i parametri dei modelli non-lineari, I, *Calcolo*, 3, 365–401; II (1975), 4, 1–37.
- Zelikin M.I. (2000). *Control Theory and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin.



**Working Paper Series**  
**Department of Statistical Sciences, University of Padua**

You may order paper copies of the working papers by emailing [wp@stat.unipd.it](mailto:wp@stat.unipd.it)

Most of the working papers can also be found at the following url: <http://wp.stat.unipd.it>

